Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

**Baranyi Károly Tamás**

# Operátoregyenletek, bilineáris formák és alkalmazásaik parciális differenciálegyenletekre

BSc Szakdolgozat

Témavezető

**Dr. Karátson János**

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2016

# Tartalomjegyzék

**1. Bevezetés** **3**

1.1. Korlátos és nem korlátos operátorok . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4

1.2. Alapterek . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10

**2. Operátoregyenletek megoldhatósági tételei** **13**

2.1. Megoldhatóság korlátos operátorok esetén, Lax–Milgram-lemma . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13

2.2. Nyeregpont-feladat . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26

2.3. Megoldhatóság nem korlátos operátorok esetén, gyenge megoldás . . . 33

**3. Alkalmazások** **35**

3.1. Integráloperátorok . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35

3.2. Peremérték-feladatok . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37

3.3. A Stokes-feladat . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 42

3.4. A végeselem-módszer alapjai . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 45

# 1. Bevezetés

A matematikában egyenletek vizsgálatakor legtöbbször három, természetes módon felvetődő kérdés megválaszolására törekszünk. Legelőször is arra szeretnénk választ találni, hogy a kérdéses egyenletnek létezik-e egyáltalán megoldása; másodsorban, ha létezik megoldása, akkor az a megoldás valamilyen, esetleg szűkebb halmazon belül egyértelmű-e; vagy pedig ha egyértelműség nem is áll fenn, legalább egy adott partikuláris megoldásból kiindulva előállítható-e valamilyen módszerrel az egyenlet többi megoldása. Csak akkor mondhatjuk, hogy a szóban forgó egyenlet, egyenletcsalád elvi megoldhatósága teljesen világos előttünk, ha ezekre a kérdésekre pontos és kimerítő választ tudunk adni. Ezen túlmenően a megoldás gyakorlati előállítása az elvi megoldhatóságtól sokszor igen távol eső probléma. Még ha a fenti három kérdésre egyértelmű válasszal is rendelkezünk, gyakran sokkal nehezebb a pontos megoldás gyakorlati kiszámítása, előfordul, hogy reménytelenül nehéz, vagy akár lehetetlen. Éppen ezért az egyenletek széles körénél az egzakt megoldás keresése helyett, illetve mellett annak közelítő előállításával próbálkozunk, ezzel az említett három mellé társítva egy igen fontos, negyedik kérdést, mégpedig az egyenletek közelítő módszerekkel való megoldhatóságának kérdését, különös tekintettel a stabilitásra, konvergenciára.

Szakdolgozatomban operátorokra és bilineáris függvényekre vonatkozó egyenletek megoldhatóságát vizsgálom a funkcionálanalízis eszközeivel. A témakör bilineáris függvényekre megfogalmazott alapvető fontosságú eredménye a Lax–Milgram-lemma, mely bizonyos tulajdonságú bilineáris függvények egész családjáról mondja ki az (egyértelmű) megoldhatóságot, és amelyet operátorokra vonatkozó megfelelőjével párhuzamosan, több oldalról megközelítve vizsgálok. Érintem a lemma Babuška-féle kiegészítését, mely szükséges és elégséges feltételt fogalmaz meg a megoldhatóságra, illetve a nem korlátos operátorokra vonatkozó eredményeket is, valamint az ilyen egyenletek stabilitása is szóba kerül, végül két, az operátorok spektrumával kapcsolatos következmény mutatja a Lax–Milgram-lemma témakörének elméleti eredmények bizonyítására való kitűnő alkalmazhatóságát.

Ezután speciális alakú operátoregyenletek egy másik osztályára, az ún. nyeregpontfeladatok vizsgálatára térek át, ezen belül több, egyszerűbben kezelhető speciális eset kiemelése után a Babuška–lemmához hasonló, a megoldhatóság szükséges és elégséges feltételét megfogalmazó tétel zárja az elméleti részt.

Operátoregyenleteknek a funkcionálanalízis eszközeivel való vizsgálata, ennek a fentiekhez hasonló, jól használható eredményei kiemelkedő fontosságúak a parciális differenciálegyenletek numerikus vizsgálatában. A tárgyalt elméleti részek alkalmazásaként itt is különböző területekről származó differenciálegyenlet-családok megoldhatóságának bizonyítására használjuk fel a látottakat. Az elméleti fejezet alkalmazásaként kitérek differenciálegyenletekre, ezen belül peremérték-feladatokra, a nyeregpont-feladatokról szóló rész alkalmazásaként a Stokes-feladat megoldására, valamint speciális formájú integrálegyenletekre is. Végül pedig, a Lax–Milgram-témakör utolsó következményeként egy önmagában is igen komoly irodalommal rendelkező alkalmazás, a Ritz–Galjorkin-projekció, illetve a végeselem-módszer alapjai kerülnek bemutatásra.

## 1.1. Korlátos és nem korlátos operátorok

Ebben a fejezetben adott $X$ Hilbert-tér egy részhalmazáról az $Y$ Hilbert-térbe képző lineáris operátorokkal foglalkozunk, amiket a következőképpen fogunk jelölni: $A : X \hookrightarrow Y$. Az $X, Y$ terek közös alaptestét $\mathbb{K}$-val jelöjük, mely a valós ($\mathbb{R}$) vagy a komplex számok számtestét ($\mathbb{C}$) jelenti. $\big[$Hilbert-téren olyan skalárszorzattal (tehát a téren értelmezett szimmetrikus, szigorúan pozitív definit bilineáris formával) ellátott vektorteret értünk, mely teljes, tehát a benne futó Cauchy-sorozatok konvergensek. Egy operátort lineárisnak nevezünk, ha felcserélhető a lineáris kombinációval, azaz $A(cx + dy) = cAx + dAy$ bármely $x, y \in \mathcal{D}(A)$, $c, d \in \mathbb{K}$ esetén.$\big]$

A Hilbert-téren (vagy részhalmazán) értelmezett lineáris operátorok korlátossága alatt a lineáris operátoroknál megszokottat értjük, tehát $A : X \hookrightarrow Y$ lineáris operátor **korlátos**, ha létezik olyan $M \geq 0$ állandó, melyre

$$\|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X \qquad (\forall x \in \mathcal{D}(A)),$$

ahol a $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$ normák az $X$ és $Y$ tér skalárszorzatai által generált $\langle x, x\rangle_X^{1/2}$, ill. $\langle x, x\rangle_Y^{1/2}$ normák. Lineáris operátorok **folytonosságát** pedig ugyanezen norma segítségével definiáljuk:

$$\|x_n - x\|_X \to 0 \Rightarrow \|Ax_n - Ax\|_Y \to 0.$$

Ezen fogalmakkal a lineáris operátorok körében a folytonosság és a korlátosság egybeesik [8, 1.40. tétel], a továbbiakban olykor a korlátos, olykor a folytonos jelzőt fogjuk rájuk használni. A szóban forgó teret általában nem tüntetjük fel alsó indexben, ha félreértéstől nem kell tartani.

**1.1. Definíció.** *Legyen $H$ Hilbert-tér, $A : H \hookrightarrow H$ lineáris operátor. Az $A$ operátor* ***kvadratikus alakján*** *a következő kifejezést értjük:*

$$\langle Ax, x\rangle\,,$$

*ahol $x \in \mathcal{D}(A)$ és a skaláris szorzat a $H$-n értelmezett skaláris szorzat.*

Az alábbi, gyakran hivatkozott állítás a tetszőleges skalárszorzattérben érvényes Cauchy-Bunyakovszkij-Schwartz (CBS) egyenlőtlenség közvetlen következménye.

**1.2. Állítás.** *Tetszőleges $H$ Hilbert-térben*

*(i) bármely $x \in H$ esetén* $\|x\| = \sup\limits_{\substack{y \in H \\ \|y\|=1}} \{|\langle x, y\rangle|\}$,

*(ii) a skalárszorzás mindkét változójában folytonos, azaz bármely $y \in H$-ra, ha $x_n \to x$, akkor $\langle x_n, y\rangle \to \langle x_n, y\rangle$, ill. bármely $x \in H$-ra, ha $y_n \to y$, akkor $\langle x, y_n\rangle \to \langle x_n, y\rangle$.*

*Bizonyítás:*

(i) A CBS-egyenlőtlenség alapján bármely $y \in H, \|y\| = 1$ esetén $\langle x, y\rangle \leq \|x\|$ és egyenlőség áll fenn $y := \frac{x}{\|x\|}$ választásával.

(ii) $x_n \to x, y \in H$ esetén $|\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n - x, y\rangle| \leq \|x_n - x\| \cdot \|y\| \to 0$, a fordított helyzet teljesen hasonlóan.

∎

Az alábbiakban lineáris operátorok néhány fontos speciális osztályát definiáljuk.

**1.3. Definíció.** *Legyen $H$ Hilbert-tér $\mathbb{K}$ felett* ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *vagy* $\mathbb{C}$) *és $A : H \hookrightarrow H$ lineáris operátor. Azt mondjuk, hogy az $A$ operátor*

- ***szimmetrikus**, ha* $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \quad (\forall x, y \in \mathcal{D}(A))$,
- ***pozitív**, ha* $\langle Ax, x\rangle \geq 0 \quad (\forall x \in \mathcal{D}(A))$, *továbbá $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén szimmetrikus is ($\mathbb{C}$ fölött ez következik az egyenlőtlenségből, lásd a megjegyzést a definíció után),*
- ***szigorúan pozitív**, ha* $\langle Ax, x\rangle > 0 \quad (\forall x \in \mathcal{D}(A)\backslash\{0\})$, *továbbá $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén szimmetrikus is,*
- ***abszolútértékben egyenletesen pozitív**, ha $\exists m > 0$, hogy* $|\langle Ax, x\rangle| \geq m\|x\|^2 \quad (\forall x \in \mathcal{D}(A))$,
- ***koercív**, ha $\exists m > 0$, hogy* $\mathrm{Re}\,\langle Ax, x\rangle \geq m\|x\|^2 \quad (\forall x \in \mathcal{D}(A))$,
- ***egyenletesen pozitív**, ha $\exists m > 0$, hogy* $\langle Ax, x\rangle \geq m\|x\|^2 \quad (\forall x \in \mathcal{D}(A))$, *továbbá $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén szimmetrikus is.*

A pozitív, szigorúan pozitív és egyenletesen pozitív operátortulajdonságok feltételei csak akkor értelmesek, ha $\langle Ax, x\rangle$ mindig összehasonlítható 0-val, tehát $\langle Ax, x\rangle$ minden $x \in \mathcal{D}(A)$ esetén valós szám. Ez $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén csak a szimmetrikus operátorokra igaz, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén viszont automatikusan teljesül minden operátorra. Az operátorok szimmetrikussága fontos tulajdonság, amelyben szeretnénk egységesnek tudni a definíciókat, így az operátorok szimmetrikus voltát valós térben külön feltételként beleértjük ezen három operátortulajdonságba. (A további két hasonló tulajdonság, a koercivitás és az abszolútértékben egyenletes pozitivitás feltételei mindenképpen értelmesek, így az operátor szimmetrikus voltát ezekbe természetesen nem értjük bele, akár valós, akár komplex számtest fölötti Hilbert-térről van szó.)
A kvadratikus alak szoros kapcsolatban van a fenti operátortulajdonságokkal, ahogy azt a definíciójukból is látjuk. A most következő két fogalom is ezt a kapcsolatot fogja jobban megvilágítani.
Egy adott $A : H \hookrightarrow H$ operátor **numerikus értékkészletének** a kvadratikus alakjának az 1 normájú elemek halmazáról alkotott képét nevezzük, tehát a

$$W(A) := \{\langle Ax, x\rangle : x \in \mathcal{D}(A), \|x\| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$$

halmazt; **numerikus sugarának** pedig a

$$w(A) := \sup \{|\langle Ax, x\rangle| : x \in \mathcal{D}(A), \|x\| = 1\} \in \mathbb{R}$$

számot hívjuk. Ismert [1], hogy normális operátorok esetében $w(A) = \|A\|$.

**1.4. Állítás.** *Legyen $H$ Hilbert-tér, $A : H \hookrightarrow H$ lineáris operátor.*

- *Ha $A$ operátor* szimmetrikus*, akkor és csak akkor a kvadratikus alakja valós, tehát a numerikus értékkészlete is:*
  $W(A) \subseteq \mathbb{R}$.

- *Ha $A$ operátor* pozitív*, akkor kvadratikus alakja (összehasonlítható* 0*-val, ezért valós, ld. az 1.3. definíció utáni megjegyzést és) nemnegatív, tehát*
  $W(A) \subseteq [0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$.

- *Ha $A$ operátor* szigorúan pozitív*, akkor kvadratikus alakja (összehasonlítható* 0*-val és) pozitív, tehát*
  $W(A) \subseteq (0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$.

- *Ha $A$* abszolútértékben egyenletesen pozitív*, akkor $W(A)$ a komplex síkon egy* 0 *középpontú, $m$ sugarú körön kívül (esetleg részben a körvonalon) helyezkedik el, tehát*
  $W(A) \subseteq \{x + iy : x^2 + y^2 \geq m^2\} \subseteq \mathbb{C}$.

- *Ha $A$ operátor* koercív*, akkor $W(A)$ a komplex síkon a $\operatorname{Re} z = m$ függőleges egyenestől jobbra (vagy az egyenesen) helyezkedik el, azaz* $W(A) \subseteq \{x + iy : x \geq m\} \subseteq \mathbb{C}$.
- *Ha $A$ operátor* egyenletesen pozitív*, akkor $W(A)$ ezen felül még a valós tengelyen is van, tehát* $W(A) \subseteq [m, \infty) \subseteq \mathbb{R}$.
- *Az utóbbi három esetben ($\mathcal{D}(A) \neq \emptyset$ esetén) az operátor numerikus sugara $w(A) \geq m$, továbbá az utolsó két eset egybeesik, ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.*

*Bizonyítás:* Csak az első állítás igényel részletesebb bizonyítást, a többi a definíciók közvetlen következménye.
Tegyük fel, hogy $A : H \hookrightarrow H$ szimmetrikus. Ekkor

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle},$$

tehát a kvadratikus alak megegyezik a konjugáltjával, azaz valós.
Megfordítva, tegyük fel, hogy $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ minden $x \in \mathcal{D}(A)$ esetén.
A kvadratikus alak teljes értékkészlete, tehát a $\{\langle Ax, x\rangle \mid x \in \mathcal{D}(A)\}$ halmaz elemei és az operátor numerikus értékkészletének, $W(A)$-nak elemei valós számmal való skálázással egymásból megkaphatók. Legyen ui. egy tetszőleges $x \in \mathcal{D}(A)$ normája $\|x\| =: \sigma \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\langle Ax, x\rangle = \sigma\overline{\sigma} \cdot \left\langle A\frac{x}{\sigma}, \frac{x}{\sigma}\right\rangle = \underbrace{\sigma^2}_{\in\mathbb{R}} \cdot \underbrace{\left\langle A\frac{x}{\sigma}, \frac{x}{\sigma}\right\rangle}_{\in W(A)},$$

tehát ha $W(A) \subseteq \mathbb{R}$, akkor a kvadratikus alak teljes értékkészlete is $\mathbb{R}$-ben van, ennek viszont részhalmaza $W(A)$, így visszafelé triviális. ■

### Korlátos és nem korlátos operátorok adjungáltja

A Hilbert-téren értelmezett korlátos lineáris operátorok sok szempontból igen „szépen" viselkednek, tudjuk például, hogy értelmezési tartományuk könnyen kiterjeszthető a tér egy részhalmazáról a teljes térre, méghozzá normatartó módon [8, 6.1. tétel]. Éppen ezért a továbbiakban minden korlátos lineáris operátorról úgy vesszük, hogy az az egész téren értelmezett, erre a következő jelölést fogjuk használni: $A : X \to Y$, az ilyen korlátos lineáris operátorok osztályát $B(X, Y)$-nal, ill. $X = Y$ esetén $B(X)$-szel fogjuk jelölni.
A nem korlátos operátorok esetén más a helyzet, az értelmezési tartomány itt igen lényeges tulajdonsága az operátornak, ezt a *Hellinger–Toeplitz-tétel* [8, 8.4. tétel]

is alátámasztja, mely szerint egy szimmetrikus, nem korlátos operátor nem is lehet az egész téren értelmezett. Másrészt a nem korlátos operátorok között igen fontos operátorok vannak – a differenciáloperátorok is gyakran nem korlátosak, ha adott térből önmagába képző operátorként vizsgáljuk őket –, amelyek megérdemlik, hogy a nehézségek ellenére bővebben foglalkozzunk velük.
Az nyilvánvaló viszont, hogy $H$ Hilbert-tér részhalmazán értelmezett bármely (korlátos vagy nem korlátos) lineáris operátor értelmezési tartománya csakis $H$-nak egy lineáris altere lehet. Ennek fontos speciális esete, amikor az altér sűrű $H$-ban, az ilyen operátort a továbbiakban **sűrűn értelmezett** vagy **sűrűn definiált** operátornak fogjuk nevezni. A sűrűn definiált lineáris operátorok fontos tulajdonsága, mint azt a későbbiekben látni fogjuk, hogy egyértelmű adjungáltat lehet hozzájuk értelmezni.
Először a korlátos lineáris operátorok adjungáltját definiáljuk.

**1.5. Definíció.** *Legyen $A : H \to H$ adott korlátos lineáris operátor, azaz $A \in B(H)$. Ekkor egyértelműen létezik olyan $A^* \in B(H)$, melyre*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle \quad (\forall x, y \in H).$$

*Ezt az $A^*$ operátort az $A$ korlátos lineáris operátor **adjungáltjának** nevezzük.*

Először is vezessünk be egy jelölést, amelyre ebben a fejezetben többször szükség lesz! Ha $A, B$ lineáris operátorok, $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$ és $B$ kiterjesztése $A$-nak, akkor a továbbiakban azt írjuk, hogy $A \subseteq B$.
Ha valamilyen $A : H \hookrightarrow K$ nem korlátos operátor adjungáltját szeretnénk definiálni, a korlátos esethez hasonlóan olyan operátort keresünk, amelyre

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$$

minél nagyobb halmazon fennáll. Ám ahogy azt a Hellinger–Toeplitz-tétel is mutatja, a nem korlátos esetben az azonosság fennállását nem követelhetjük meg minden $x \in H, y \in K$-ra. Ezen belül viszont a lehető legbővebb értelmezési tartományú $A^*$ operátort keressük.

**1.6. Definíció.** *Legyenek $H, K$ Hilbert-terek* $\mathbb{K}$ *felett* ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *vagy* $\mathbb{C}$) *és legyen $A : H \hookrightarrow K$ sűrűn definiált, nem feltétlenül korlátos operátor. Ekkor $A$ **adjungáltján** azt az $A^* : K \hookrightarrow H$ operátort értjük, melyre*

*(i)* $\mathcal{D}(A^*) = \{y \in K : \exists y^* \in H\, \forall x \in \mathcal{D}(A) \quad \langle Ax, y\rangle_K = \langle x, y^*\rangle_H\}$ *és*

*(ii) $A^*$ minden ilyen $y$-hoz rendelje a megfelelő $y^*$-ot, azaz $A^*y := y^*$.*

**1.7. Állítás.** *Az adjungált operátor jól definiált.*

*Bizonyítás:* Az adjungált operátor jól definiáltsága valóban $A$ értelmezési tartományának sűrű voltán alapul, ugyanis tegyük fel, hogy $y \in \mathcal{D}(A^*)$-hoz tartozna egy $y_1^*$ és egy $y_2^*$ is, erre minden $x \in \mathcal{D}(A)$ esetén $\langle x, y_1^* \rangle = \langle x, y_2^* \rangle$ teljesülne és ez $\mathcal{D}(A)$ sűrű volta miatt $y_1^* = y_2^*$-gal ekvivalens. ∎

**1.8. Állítás.** *Tetszőleges $A$ operátor esetén $\mathcal{D}(A^*)$ valójában megegyezik azon $y \in K$ elemek $D'$ halmazával, melyekre az $x \mapsto \langle Ax, y \rangle$ lineáris funkcionál korlátos, ez egyben a legbővebb olyan halmaz, amire a definiáló $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$ egyenlőség megkövetelhető.*

*Bizonyítás:* $\mathcal{D}(A^*) \subseteq D'$ teljesül, azaz $\mathcal{D}(A^*)$ halmaz elemeire az állításban szereplő funkcionál korlátos, mert $y \in \mathcal{D}(A^*)$ esetén tekintsük a hozzárendelt $y^* \in H$ elemet, ekkor a fenti funkcionál valójában $x \mapsto \langle Ax, y \rangle = \langle x, y^* \rangle$ alakban írható és $\frac{|\langle x, y^* \rangle|}{\|x\|} \leq \frac{\|x\| \|y^*\|}{\|x\|} = \|y^*\|$ tehát a funkcionál korlátos.
Megfordítva, $D' \subseteq \mathcal{D}(A^*)$, ugyanis ha feltesszük, hogy egy adott $y \in K$-ra a $\phi(x) := \langle Ax, y \rangle$ funkcionál korlátos, akkor egyértelműen létezik folytonos lineáris kiterjesztése a teljes $H$ térre [8, 6.1. tétel], az egyszerűség kedvéért jelöljük ezt is $\phi$-vel. Erre az egész $X$ téren értelmezett funkcionálra alkalmazhatjuk Riesz reprezentációs tételét [8, 5.2. tétel], amely az adott korlátos lineáris funkcionálhoz éppen a kellő tulajdonságú elem (egyértelmű) létezését mondja ki: ha $\phi$ korlátos lineáris funkcionál, akkor $\exists! y^* \in H$, melyre $\phi(x) = \langle Ax, y \rangle = \langle x, y^* \rangle$ minden $x \in \mathcal{D}(A) \subseteq H$-ra.
Végül világosan látszik, hogy ez a $D' = \mathcal{D}(A^*)$ halmaz a legbővebb, amelyre az $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$ egyenlőség megkövetelhető, hiszen ez a legbővebb halmaz, amelyre a $\langle Ax, y \rangle = \langle x, z \rangle$ akármilyen $z$-re megkövetelhető, mivel a definíció (i) pontjában éppen bármilyen ilyen $z$ létezését állítjuk feltételként. ∎

Szimmetrikusságnak és önadjungáltságnak nyilván csak $H \hookrightarrow H$ operátorok körében van értelme:

**1.9. Definíció.** *Egy $A : H \hookrightarrow H$ lineáris operátor* ***önadjungált****, ha $A^* = A$.*

**1.10. Állítás.** *Egy $A : H \hookrightarrow H$ sűrűn definiált lineáris operátor pontosan akkor szimmetrikus, ha $A \subseteq A^*$.*

*Bizonyítás:* A szimmetria pontosan akkor áll fönn, ha $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ igaz minden $x, y \in \mathcal{D}(A)$ esetén. De akkor $y \in \mathcal{D}(A^*)$ is teljesül, mert $Ay$ megfelel $y^*$-nak 1.6.

(i)-ben. Azaz fennáll $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A^*)$, sőt, (ii)-ben $A^*y = y^* = Ay$, azaz $A \subseteq A^*$ is teljesül. ■

**1.11. Állítás.** *Legyen $A : H \hookrightarrow H$ sűrűn definiált lineáris operátor, mely szimmetrikus és szürjektív. Ekkor $A$ önadjungált is.*

*Bizonyítás:* Az előző állításból $A \subseteq A^*$ világos, így már csak a fordított irányt kell belátnunk. Legyen $y \in \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A^*)$, mivel $A$ szürjektív, ezért létezik olyan $x \in \mathcal{D}(A)$, melyre

$$Ax = A^*y,$$

de akkor

$$\langle Ax, z\rangle = \langle A^*y, z\rangle \quad (\forall z \in \mathcal{D}(A))$$

is teljesül. $A$ szimmetrikus, ezért a bal oldal $\langle x, Az\rangle$-vel egyenlő, a jobb oldal pedig az adjungált definíciója alapján átalakítható $\langle y, Az\rangle$-vé:

$$\langle x, Az\rangle = \langle Ax, z\rangle = \langle A^*y, z\rangle = \langle y, Az\rangle \quad (\forall z \in \mathcal{D}(A)),$$

így ezek is egyenlők, de akkor $\langle x - y, Az\rangle = 0$ is fennáll, ahol $Az$ befutja $H$-t. Így $y = x$, utóbbi viszont $\mathcal{D}(A)$-ban van, de akkor az előbbi is. ■

## 1.2. Alapterek

### Energiaterek

Legyen $H$ Hilbert-tér $\mathbb{K}$ felett ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$) és $A : H \hookrightarrow H$ szigorúan pozitív operátor, ekkor

$$\mathcal{B} : \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(A) \to \mathbb{K},\ (u, v) \mapsto \langle Au, v\rangle$$

pozitív definit [$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén konjugáltan] bilineáris funkcionál, hiszen a skalárszorzás konjugáltan bilineáris, $A$ szigorú pozitivitása pedig éppen azt jelenti, hogy $B$ pozitív definit. Így tehát $\langle u, v\rangle_A := B(u, v) = \langle Au, v\rangle$ segítségével értelmezhető a $(\mathcal{D}(A), \langle\cdot,\cdot\rangle_A)$ skalárszorzattér, valamint ennek $[(\mathcal{D}(A), \langle\cdot,\cdot\rangle_A)]$ teljessé tétele, a $H_A$ Hilbert-tér. A $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ ún. **energia-skalárszorzatból** származó $\|x\|_A := \langle x, x\rangle_A^{1/2}$ normát **energianormának** nevezzük, a $H_A$ tér neve **energiatér**.
Mivel $\|x\|_A^2 = \langle Ax, x\rangle \leq \|A\|\,\|x\|^2$, az energianorma mindig gyengébb, mint a tér eredeti normája. Ha speciálisan $A$ egyenletesen pozitív is, akkor ez fordítva is igaz: $m\|x\|^2 \leq \langle Ax, x\rangle = \|x\|_A^2$, így a két norma ekvivalens.

## Szoboljev-terek

A továbbiakban jelöle $\Omega$ az $\mathbb{R}^n$ ($n$ pozitív egész) tér egy nemüres, korlátos és nyílt részhalmazát.

**1.12. Definíció.** *Az alábbiakban $\mathbb{R}^n$-ből $\mathbb{K}$-ba képező függvények speciális osztályait definiáljuk [3, 3.11., 12.13.]:*

- *Jelöljük a teljes $\mathbb{R}^n$-en értelmezett, tetszőlegesen sokszor differenciálható függvények osztályát $C^\infty(\mathbb{R}^n)$-nel;*
- *ezek közül a kompakt tartójú függvényeket jelölje $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$;*
- *jelöljük az $\Omega$-n értelmezett, kompakt tartójú és tetszőlegesen sokszor differenciálható függvények terét $C_0^\infty(\Omega)$-val; végül*
- *jelöljük $C^\infty(\overline{\Omega})$-tal a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$-beli függvények $\Omega$-ra vett megszorításait.*

**1.13. Definíció.** *$H^1(\Omega)$ **Szoboljev-teret** a következőképpen definiáljuk: $u \in H^1(\Omega)$ pontosan akkor, ha $u \in L^2(\Omega)$ és léteznek $g_1, \ldots, g_n \in L^2(\Omega)$, melyekre minden $i = 1, \ldots, n$ esetén*

$$\int_\Omega u \partial_i \varphi \; dx = -\int_\Omega g_i \varphi \; dx$$

*minden $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tesztfüggvényre; tehát azon $L^2$-beli függvények, amelyeknek minden elsőrendű disztribúciós parciális deriváltja létezik és szintén $L^2$-beli [3, 12.12. definíció].*

**1.14. Definíció.** *Az előző definíció segítségével definiálhatjuk $H^2(\Omega)$ **Szoboljev-teret**, a következőképpen: azt mondjuk, hogy $u \in H^2(\Omega)$, ha $u \in H^1(\Omega)$ és minden $i = 1, \ldots, n$-re $\partial_i u \in H^1(\Omega)$ is teljesül.*

$H^1(\Omega)$ téren bevezethetjük az alábbi skalárszorzatot:

$$\langle f, g \rangle_{H^1} = \int_\Omega f\overline{g} + \nabla f \cdot \nabla \overline{g},$$

ezzel $H^1(\Omega)$ tér Hilbert tér.

**1.15. Tétel (Nyomtétel).** *Létezik egy egyértelműen meghatározott*

$$\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

*folytonos lineáris leképzés, amelyre minden $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ esetén*

$$\gamma u = u|_{\partial\Omega}$$

*teljesül [3, 12.20. tétel].*

Végül a nyomtétel segítségével bevezetjük $H^1(\Omega)$ tér egy alterét.

**1.16. Definíció.** *Jelöljük $H_0^1(\Omega)$-val a $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ nyom leképzés magját:*

$$H_0^1(\Omega) := \left\{u \in H^1(\Omega) \ : \ \gamma u = 0 \ \partial\Omega\text{-}n\right\}.$$

Az így kapott $H_0^1(\Omega)$ tér $H^1(\Omega)$ térnek zárt altere a $H^1(\Omega)$-tól örökölt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1}$ skalárszorzattal, így maga is Hilbert-tér. $H^1(\Omega)$ térnek $C_0^\infty(\Omega)$ sűrű lineáris altere. Vezessünk be most $H_0^1(\Omega)$-n új skalárszorzatot:

$$\langle f, g \rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla \overline{g}.$$

Az $f$ és $g$ függvények $\Omega$ határára megszorítva azonosan 0-k, így ez valóban skalárszorzat, sőt, a *Poincaré–Friedrichs-egyenlőtlenség* következményeképpen a két skalárszorzat ekvivalens:

**1.17. Tétel (Poincaré–Friedrichs-egyenlőtlenség).**

$$\|u\|_{H_0^1}^2 = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \lambda_1 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \qquad (\forall u \in H_0^1(\Omega)),$$

*ahol* $\lambda_1$ *a* $-\Delta u = -\operatorname{div}(\nabla u)$ Laplace-operátor *legkisebb sajátértéke $\Omega$-n az* $u|_{\partial\Omega} = 0$ *ún.* Dirichlet-féle peremfeltétel *mellett.*
*Megjegyezzük, hogy $\lambda_1$-re ismert olyan becslés, mely csak a dimenziótól és $\Omega$ méretétől függ: $\lambda_1 \geq n\pi^2/diam(\Omega)^2$.*

A bizonyítás [8, 8.27. tétel]-ben található.

# 2. Operátoregyenletek megoldhatósági tételei

## 2.1. Megoldhatóság korlátos operátorok esetén, Lax–Milgram-lemma

### Korlátos operátorokkal megfogalmazott egyenletek

A fejezet Hilbert-téren értelmezett korlátos lineáris operátorok invertálhatóságáról szóló tételekkel kezdődik. Mivel korlátos operátorokról lesz szó, ebben a fejezetben végig föltesszük, hogy az operátorok az egész téren értelmezettek (lásd 1.1. fejezet, ill. [8, 6.1. tétel]). Az egyes tételek nem közvetlenül az invertálhatóságról szólnak, hanem ami ezzel ekvivalens, az $Ax = b$ egyenlet tetszőleges $b$ melletti megoldhatóságáról. Először egy speciális esetet tekintünk, egy meglehetősen erős feltétel elégségességét vizsgáljuk.

**2.1. Tétel (Megoldhatósági tétel egyenletesen pozitív operátorokra).** *Legyen $A \in B(H)$ egyenletesen pozitív operátor. Ekkor bármely $b \in H$ esetén az $Ax = b$ egyenletnek létezik egyetlen $x^* \in H$ megoldása, azaz:*

$$\exists m > 0 \ \langle Ax, x \rangle \geq m\|x\|^2 \quad (\forall x \in H) \Longrightarrow A \text{ invertálható}$$

*Bizonyítás:* Tekintsük a $H_A = [(H, \|\cdot\|_A)]$ energiateret! $A$ korlátossága és egyenletes pozitivitása miatt minden $x \in H_A$ esetén fennállnak a következő becslések:

$$\|x\|_A^2 = \langle Ax, x \rangle \leq \|A\| \, \|x\|^2$$
$$\|x\|_A^2 = \langle Ax, x \rangle \geq m\|x\|^2$$

tehát a tér eredeti normája és az energianorma ekvivalensek, így $(H, \|\cdot\|_A)$ is Hilbert-tér, $[(H, \|\cdot\|_A)] = (H, \|\cdot\|_A)$, tehát az energiatér és az alaptér elemei tekinthetők azonosnak. Rögzítsünk ezután egy tetszőleges $b \in H$-t! Ekkor a $\phi : H \to \mathbb{K}$, $v \mapsto \langle v, b \rangle$ leképzés energiatérbeli folytonos lineáris funkcionál, mert korlátos az energianormára:

$$|\phi v| = |\langle v, b \rangle| \leq \|v\| \, \|b\| \leq \frac{1}{\sqrt{m}}\|v\|_A\|b\| = \left(\frac{1}{\sqrt{m}}\|b\|\right)\|v\|_A$$

és nyilvánvalóan lineáris. Riesz reprezentációs tételét ([8, 5.2. tétel]) az energiatérre alkalmazva kapjuk, hogy létezik egyetlen $x^* \in H$, melyre $\phi v = \langle v, x^* \rangle_A$ minden $v \in H$ esetén. Ám ekkor ez az $x^*$ a fenti $Ax = b$ egyenletnek is egyetlen megoldása, mert:

$$\langle v, b \rangle = \phi v = \langle v, x^* \rangle_A = \langle Av, x^* \rangle = \langle v, Ax^* \rangle \quad (\forall v \in H)$$

hiszen $A$ önadjungált. ■

Az alábbi állítást többször használjuk majd a most következő bizonyításokban.

**2.2. Állítás.** *Legyen $H$ Hilbert-tér és $A \in B(H)$ folytonos lineáris operátor, melyre valamilyen $m > 0$-ra*

$$\|Ax\| \geq m\|x\| \quad (\forall x \in H)$$

*Ekkor $A$ injektív.*

*Bizonyítás:* Vegyünk tetszőleges $x, y \in H, Ax = Ay$ elemeket a térből, ezekre:

$$0 = \|Ax - Ay\| = \|A(x-y)\| \geq m\|x-y\|$$

amiből következik $x = y$. Beláttuk, hogy $Ax = Ay \Rightarrow x = y$, azaz $A$ injektív. ■

**2.3. Tétel (szükséges és elégséges feltétel operátorokra).** *Egy $A \in B(H)$ operátor pontosan akkor bijekció $H$-ról $H$-ra, ha fennáll:*

*(i)* $\exists m > 0 \quad \|Ax\| \geq m\|x\| \qquad (\forall x \in H)$,

*(ii)* $A^*$ *injektív.*

A tételre két bizonyítást is adunk, az első a Riesz-féle felbontási tétel operátorokra vonatkozó változatán [8, 6.5. tétel] és a Banach-féle homeomorfizmustételen [8, 4.14. tétel] alapszik.
*1. Bizonyítás:* Először az (i), (ii) feltételek szükségességét látjuk be. Ehhez tekintsünk egy $A \in B(H)$ bijekciót! Az operátorokra vonatkozó felbontási tétel [8, 6.5. tétel] szerint $H = \overline{\mathcal{R}(A)} \oplus \ker(A^*)$, de mivel $A$ bijekció, ezért $\mathcal{R}(A) = H$, így $\ker(A^*) = \{0\}$, tehát fennáll az (ii) feltétel. Másrészt a Banach-homeomorfizmustétel [8, 4.14. tétel] alapján $A^{-1}$ is korlátos, azaz létezik $M > 0$, melyre

$$\|A^{-1}y\| \leq M\|y\|$$

fennáll minden $y \in H$ esetén. Mivel $A$ szürjektív, tetszőleges $y$ helyébe írhatunk $Ax$-et alkalmas $x$-re:

$$\|A^{-1}Ax\| = \|x\| \leq M\|Ax\|$$

itt $m := 1/M$ helyettesítéssel és átrendezve kapjuk az (i) feltételt.
Most térjünk rá az elégségességre. Az (i) feltételből 2.2. állítás miatt következik $A$ injektivitása. A szürjektivitáshoz ismét az operátorokra vonatkozó [8, 6.5. tétel] felbontási tételt használjuk: ha, mint ahogy (ii) állítja, $\ker(A^*) = \{0\}$, akkor

$\overline{\mathcal{R}(A)} = H$. Belátjuk, hogy $\mathcal{R}(A)$ zárt, így $\mathcal{R}(A) = \overline{\mathcal{R}(A)} = H$-ból már adódik $A$ szürjektivitása. Legyen tehát $Ax_n$ konvergens sorozat $H$-ban, határértéke legyen $y$. Ekkor $Ax_n$ Cauchy-sorozat, de akkor $\|x_k - x_l\| \leq \frac{1}{m}\|Ax_k - Ax_l\|$ az (i) feltételből, így $x_n$ is Cauchy-sorozat. $H$ pedig teljes, tehát $x_n \to x$ valamilyen $x \in H$-ra. $A$ operátor folytonos, így $Ax = y$, de akkor $\lim Ax_n \in \mathcal{R}(A)$, tehát $\mathcal{R}(A)$ zárt. ∎

Egy másik bizonyítást is adunk az elégségességre, mely Riesz reprezentációs tételére [8, 5.2. tétel] támaszkodik.

*2. Bizonyítás:* [csak az elégségességre] 2.2. állítás miatt az (i) feltételből következik, hogy $A$ injektív, $A$ szürjektivitását pedig úgy bizonyítjuk, hogy belátjuk: tetszőleges $b \in H$ esetén létezik $x \in H$, melyre $Ax = b$ (ez pontosan azt jelenti, hogy minden $b \in H$ előáll $Ax$ alakban alkalmas $x \in H$-ra). Ennek belátásához szorozzuk meg az egyenletet balról $A$ adjungáltjával:

$$A^*Ax = A^*b.$$

De $A^*A$ önadjungált és egyenletesen pozitív, hiszen (i) alapján:

$$\langle A^*Ax, x\rangle = \|Ax\|^2 \geq m^2\|x\|^2.$$

Így alkalmazható az egyenletesen pozitív operátorokra vonatkozó tétel (2.1.), vagyis létezik $x' \in H$, melyre

$$A^*Ax' = A^*b$$

de (ii) szerint $A^*$ injektív, így ez ekvivalens azzal, hogy

$$Ax' = b$$

és éppen ezt akartuk belátni. ∎

Most három speciális esetet visszavezetünk a 2.3. (i), (ii) feltételeire, köztük a korábban már említett egyenletesen pozitív operátorokra vonatkozó tételt is, melyre itt új bizonyítást adunk.

*2. Bizonyítás:* [2.1. tételé] A tétel állítása szerint tetszőleges $A \in B(H)$ esetén fennáll:

$$A \text{ önadj. és } \exists m > 0\ \langle Ax, x\rangle \geq m\|x\|^2\, (\forall x \in H) \Longrightarrow A \text{ invertálható.}$$

Belátjuk, hogy a feltételekből következik 2.3. (i), (ii), így már készen leszünk, hiszen a 2.3. tétel szerint akkor $A$ invertálható. Az egyenletes pozitivitás feltételét felhasználva kapjuk:

$$m\|x\|^2 \leq \langle Ax, x\rangle \overset{CBS}{\leq} \|Ax\|\,\|x\|,$$

melyből $\|x\|$-val leosztva kapjuk (i)-t. Innen 2.2. állítás miatt következik $A$ injektivitása, de $A$ önadjungált, azaz kapjuk a (ii) feltételt: $A^* = A$ is injektív. ∎

**2.4. Tétel (Megoldhatósági tétel koercív operátorok esetén).**
*Legyen $A \in B(H)$ koercív operátor. Ekkor bármely $b \in H$ esetén az $Ax = b$ egyenletnek létezik egyetlen $x^* \in H$ megoldása, azaz:*

$$\exists m > 0 \quad \mathrm{Re}\,\langle Ax, x\rangle \geq m\|x\|^2 \quad (\forall x \in H) \quad \Longrightarrow \quad A \text{ invertálható.}$$

*Bizonyítás:* Ismét elég az (i), (ii) feltételek fennállását belátnunk, innen már következni fog 2.3. tétel alapján az invertálhatóság. Valóban:

$$m\|x\|^2 \leq \mathrm{Re}\,\langle Ax, x\rangle \leq |\,\langle Ax, x\rangle\,| \leq \|Ax\|\,\|x\|$$

miatt $\|Ax\| \geq m\|x\|\,(x \in H)$, azaz (i) fennáll. Ebből 2.2. állítás szerint $A$ injektív, másrészt itt $A^*$ szintén koercív:

$$\mathrm{Re}\,\langle A^*x, x\rangle = \mathrm{Re}\,\langle x, Ax\rangle = \mathrm{Re}\,\overline{\langle Ax, x\rangle} = \mathrm{Re}\,\langle Ax, x\rangle \geq m\|x\|^2 \quad (\forall x \in H).$$

Tehát $A^*$ is koercív, de akkor az első egyenlőtlenség és 2.2. állítás $A^*$-ra is alkalmazható: kapjuk, hogy $A^*$ is injektív (ii). ∎

**2.5. Tétel (Kvadratikus alak abszolútértékére vonatkozó).** *Legyen $A \in B(H)$ és legyen abszolútértékben egyenletesen pozitív, azaz teljesüljön rá a következő feltétel:*

$$\exists m > 0 \quad |\,\langle Ax, x\rangle\,| \geq m\|x\|^2 \quad (\forall x \in H),$$

*ekkor $A$ invertálható.*

*Bizonyítás:* Hasonlóan, mint az előző tételnél, a feltételből belátjuk (i)-t, abból 2.2. állítás segítségével kapjuk, hogy $A$ injektív, végül belátjuk, hogy $A$ adjungáltjára is teljesül a tétel feltétele, így $A^*$ is injektív, azaz (ii) is fennáll.
Valóban, az első becslés változtatás nélkül működik:

$$m\|x\|^2 \leq |\langle Ax, x\rangle| \leq \|Ax\|\,\|x\|$$

a második helyett pedig a még egyszerűbb:

$$|\langle A^*x, x\rangle| = |\langle x, Ax\rangle| = |\overline{\langle Ax, x\rangle}| = |\langle Ax, x\rangle| \geq m\|x\|^2$$

becslés igaz. ■

Az alkalmazások szempontjából is igen fontos a következő, a feladat korrekt kitűzöttségét [3, 4.3. definíció] biztosító tétel a megoldásnak a bemeneti adatoktól való folytonos függéséről. A tétel annyiban többet mond, mint amit a Banach homeomorfizmus tétel [8, 4.14. tétel] állít, hogy az inverz korlátosságát a konkrét konstanssal fogalmazza meg.

**2.6. Tétel (A megoldás folytonos függése a jobboldaltól).** *Ha teljesülnek az előző tételek feltételei $Au = b$ operátoregyenletre, akkor $\|u\| \leq \frac{1}{m}\|b\|$.*

*Bizonyítás:* Az utóbbi három bizonyítás éppen azt mondja ki, hogy a megfelelő feltételek fennállása esetén 2.3. tétel (i), (ii) feltételei is teljesülnek. Az (i) feltételből: $\|b\| = \|Au\| \geq m\|u\|$. ■

Az eddigiekben megmutattuk tehát a Hilbert-téren értelmezett korlátos operátorok invertálhatóságának szükséges és elégséges feltételeit, valamint beláttuk ezek teljesülését három igen fontos speciális esetben: egyenletesen pozitív, valamint koercív operátorokra, ill. olyan korlátos operátorok esetén, melyek kvadratikus alakja abszolútértékben alulról egyenletesen becsülhető.

### Lax–Milgram-lemma, Babuška-lemma

Most áttérünk bilineáris formák egyenleteire. Megvizsgáljuk, hogy egy adott, rögzített bilineáris formának milyen tulajdonságokkal kell rendelkeznie ahhoz, hogy bármely, ugyanazon téren értelmezett korlátos funkcionálnak megfeleltethető legyen egy reprezentánselem a bilineáris formára nézve. Ezt a megfeletetést úgy értjük, hogy a funkcionál hatása a tér minden elemén megegyezzen a bilineáris függvénynek a reprezentánselemmel, mint másik operandussal való alkalmazásával.
Mindenekelőtt megfogalmazzuk az 1.3. definíció megfelelőjét bilineáris formákra, ezenkívül szükségünk lesz a bilineáris forma Riesz-reprezentánsának fogalmára is és néhány igen egyszerű állításra vele kapcsolatban.

**2.7. Definíció.** *Legyen $H$ Hilbert-tér $\mathbb{K}$ felett ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$), $\mathcal{B} : H \times H \to \mathbb{K}$ leképzés. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{B}$ leképzés*

*(a)* ***bilineáris leképzés*** *vagy* ***bilineáris forma****, ha mindkét változójában lineáris,*

*(b)* ***konjugáltan bilineáris leképzés*** *vagy* ***konjugáltan bilineáris forma*** *(vagy* ***szeszkvilineáris forma****), ha első változójában lineáris, második változójában konjugáltan lineáris,*

(c) ***szimmetrikus***, *ha* $\mathcal{B}(x, y) = \mathcal{B}(y, x) \quad (\forall x, y \in H)$,

(d) ***konjugáltan szimmetrikus***, *ha* $\mathcal{B}(x, y) = \overline{\mathcal{B}(y, x)} \quad (\forall x, y \in H)$,

(e) ***korlátos***, *ha létezik* $M > 0$, *melyre* $|\mathcal{B}(x, y)| \leq M\|x\| \, \|y\| \quad (\forall x, y \in H)$,

(f) ***egyenletesen pozitív***, *ha* $\mathcal{B}(x, x) \geq m\|x\|^2 \quad (\forall x \in H)$,

(g) ***koercív***, *ha* $\operatorname{Re} \mathcal{B}(x, x) \geq m\|x\|^2 \quad (\forall x \in H)$.

**2.8. Definíció.** *Legyen $H$ Hilbert-tér $\mathbb{K}$ felett ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$), $\mathcal{B} : H \times H \to \mathbb{K}$ korlátos [konjugáltan] bilineáris forma. Ekkor létezik [8, 7.13. tétel] egyetlen olyan $A \in B(H)$ korlátos lineáris operátor, hogy az egész téren*

$$\mathcal{B}(x, y) = \langle Ax, y \rangle ,$$

*ezt az operátort a $\mathcal{B}$* ***bilineáris forma Riesz-reprezentánsának*** *nevezzük a funkcionálok Riesz-reprezentánsának mintájára.*

A definíció közvetlen következményeként kapjuk az alábbi állítást.

**2.9. Állítás.** *Legyen $H$ Hilbert-tér $\mathbb{K}$ felett ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$), $\mathcal{B} : H \times H \to \mathbb{K}$ korlátos [konjugáltan] bilineáris forma, $A \in B(H)$ a $\mathcal{B}$ forma Riesz-reprezentánsa.*

*(1) $\mathcal{B}$ pontosan akkor [konjugáltan] szimmetrikus, ha $A$ önadjungált.*

*(2) $\mathcal{B}$ pontosan akkor egyenletesen pozitív, ha $A$ egyenletesen pozitív.*

*(3) $\mathcal{B}$ pontosan akkor koercív, ha $A$ koercív.*

Rátérve a megoldhatósági tételek analogonjaira, először két elégséges feltételt tekintünk, ezek részben Lax Péter[1] magyar származású matematikus nevéhez fűződnek, majd megfogalmazzuk az általánosabb szükséges és elégséges feltételt is.

**2.10. Tétel (Lax–Milgram[2]-lemma, koercív változat).**

1. *(valós eset) Legyen $H$ valós Hilbert-tér, $\mathcal{B} : H \times H \to \mathbb{R}$ korlátos és koercív bilineáris forma. Ekkor bármely $\phi : H \to \mathbb{R}$ korlátos lineáris funkcionálhoz létezik egyetlen $u \in H$, melyre*

$$\mathcal{B}(u, v) = \phi v \quad (\forall v \in H).$$

[1]Lax Péter Dávid (1926–) magyar származású, Abel-díjas amerikai matematikus

[1]Arthur Norton Milgram (1912–1961) amerikai matematikus, főként funkcionálanalízisben, kombinatorikában, differenciálgeometriában, topológiában, a parciális differenciálegyenletek területén és a Galois-elméletben tevékenykedett

2. *(komplex eset) Legyen $H$ komplex Hilbert-tér, $\mathcal{B} : H \times H \to \mathbb{C}$ korlátos és koercív* ***konjugáltan*** *bilineáris forma. Ekkor bármely $\phi : H \to \mathbb{C}$ korlátos lineáris funkcionálhoz létezik egyetlen $u \in H$, melyre*

$$\mathcal{B}(v,u) = \phi v \quad (\forall v \in H)$$

*(tehát $\mathcal{B}(u,v)$ helyett $\mathcal{B}(v,u)$-ra áll fenn az egyenlőség).*

*Bizonyítás:*

1.

$$\begin{gathered}
\underbrace{\begin{array}{lcl} \mathcal{B}(u,v) & = & \phi v \\ \| \text{ (Riesz bilin.)} & & \| \text{ (Riesz rep.)} \\ \langle Au, v\rangle & & \langle v, b\rangle \\ & & \| \ (\mathbb{K}=\mathbb{R}) \\ & & \langle b, v\rangle \end{array}}_{\text{elég: } \exists! u \in H \quad \langle Au,v\rangle = \langle b,v\rangle \quad (\forall v\in H)} \\
\Updownarrow \\
\exists! u : Au = b \\
\Uparrow \\
A \text{ koercív és 2.4. tétel} \\
\Uparrow \\
\mathcal{B} \text{ koercív bilin. forma}
\end{gathered}$$

Legyen $\mathcal{B}$ bilineáris forma Riesz-reprezentánsa (lásd a 2.8. definíciót) $A \in B(H)$, $\phi$ funkcionál Riesz-reprezentánsa pedig $b \in H$! Ekkor tehát a kívánt egyenlőség úgy is írható, hogy alkalmas $u \in H$-val

$$\langle Au, v\rangle = \mathcal{B}(u,v) = \phi v = \langle v, b\rangle = \langle b, v\rangle \quad (\forall v \in H)$$

utóbbi egyenlőség azért teljesül, mert az alaptest $\mathbb{R}$, így a skaláris szorzat szimmetrikus. Elég tehát olyan egyértelmű $u$ létezését megmutatni, melyre $\langle Au, v\rangle = \langle b, v\rangle$ minden $v \in H$ esetén, azaz melyre $Au = b$. Ilyen $u$ azonban biztosan létezik, mert $A$ koercív, így éppen ezt mondja ki megfelelő megoldhatósági tétel (2.4.).

2.

$$\underbrace{\begin{array}{lcl} \mathcal{B}(v,u) & = & \phi v \\ \| \text{ (Riesz bilin.)} & & \| \text{ (Riesz rep.)} \\ \langle Av, u\rangle & & \langle v, b\rangle \\ \| & & \\ \langle v, A^*u\rangle & & \end{array}}$$

$$\text{elég: } \exists! u \in H \quad \langle v, A^*u\rangle = \langle v, b\rangle \quad (\forall v \in H)$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists! u : A^*u = b$$
$$\Uparrow$$
$$A^* \text{ koercív és 2.4. tétel}$$
$$\Uparrow$$
$$A \text{ koercív}$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathcal{B} \text{ koercív konjugáltan bilineáris forma}$$

Itt $A^*$ koercivitása $A$ koercivitásából következik, ahogy azt a 2.4. tétel bizonyításában is láttuk:

$$m\|x\|^2 \le \operatorname{Re}\langle A^*x, x\rangle = \operatorname{Re}\langle x, Ax\rangle = \operatorname{Re}\overline{\langle Ax, x\rangle} = \operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle \ge m\|x\|^2.$$

■

**2.11. Tétel (Lax–Milgram-lemma, egyenletesen pozitív változat).**

1. *(valós eset) Legyen $H$ valós Hilbert-tér, $\mathcal{B} : H \times H \to \mathbb{R}$ korlátos és* ***egyenletesen pozitív*** *bilineáris forma. Ekkor bármely $\phi : H \to \mathbb{R}$ korlátos lineáris funkcionálhoz létezik egyetlen $u \in H$, melyre*

$$\mathcal{B}(u,v) = \phi v \quad (\forall v \in H).$$

2. *(komplex eset) Legyen $H$ komplex Hilbert-tér, $\mathcal{B} : H \times H \to \mathbb{C}$ korlátos és* ***egyenletesen pozitív konjugáltan bilineáris*** *forma. Ekkor bármely $\phi : H \to \mathbb{C}$ korlátos lineáris funkcionálhoz létezik egyetlen $u \in H$, melyre*

$$\mathcal{B}(v,u) = \phi v \quad (\forall v \in H)$$

*(tehát $\mathcal{B}(u,v)$ helyett $\mathcal{B}(v,u)$-ra áll fenn az egyenlőség).*

*Bizonyítás:* A bizonyítás szóról szóra ugyanúgy működik, csak mivel itt $\mathcal{B}$ koercív helyett egyenletesen pozitív, $A$ is egyenletesen pozitív lesz, így az erre az esetre vonatkozó megoldhatósági tételt (2.1.) kell használni. ∎

Ezekben a bizonyításokban a szóban forgó egyenlőséget Riesz-reprezentánsokra (a funkcionál, ill. a bilineáris forma Riesz-reprezentánsára) vonatkozó egyenlőséggé alakítottuk, majd a korábban szereplő, operátorokra vonatkozó megoldhatósági tételek segítségével láttuk be. A valós koercív Lax–Milgram lemma bizonyítására némiképp különböző megközelítést találunk P. G. Ciarlet könyvében [2, 1.1.3. tétel]. Ebben a bizonyítandó egyenlőséget az eddigiekhez hasonlóan a funkcionál és a bilineáris forma Riesz-reprezentánsára alakítjuk át, azonban a megoldáshoz vezető út innen Banach fixponttételén keresztül vezet. A tételt újra kimondjuk erre a speciális esetre.

**2.12. Tétel.** *Legyen $V$ valós Hilbert-tér, $\mathcal{B} : V \times V \to \mathbb{R}$ korlátos és koercív bilineáris forma. Ekkor bármely $\phi : V \to \mathbb{R}$ korlátos lineáris funkcionálhoz létezik egyetlen $u \in V$, melyre*

$$\mathcal{B}(u, v) = \phi v \quad (\forall v \in V).$$

*Bizonyítás:* [Banach-fixponttételes bizonyítás]
Rögzítsük $\mathcal{B}$ bilineáris forma tulajdonságait, legyen $M$ a $\mathcal{B}$ egy korlátja:

$$\forall u, v \in V \quad |\mathcal{B}(u, v)| \le M\|u\|\,\|v\|,$$

$\alpha$ pedig a koercivitására egy alkalmas konstans:

$$\forall v \in V \quad \alpha\|v\|^2 \le \mathcal{B}(v, v).$$

Bármely rögzített $u \in V$ esetén a

$$\mathcal{B}_1^{(u)} : V \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{B}_1^{(u)}(v) = \mathcal{B}(v, u)$$

leképzés folytonos (mivel mint lineáris funkcionál, $\mathcal{B}$ korlátossága miatt szintén korlátos). Továbbá

$$\|\mathcal{B}_1^{(u)}\|_{V'} = \sup_{v \in V} \frac{\left|\mathcal{B}_1^{(u)}(v)\right|}{\|v\|} \le M\|u\|$$

becslés miatt a

$$\psi : V \to V', \quad u \mapsto \mathcal{B}_1^{(u)}$$

leképzés, amellett, hogy nyilvánvalóan lineáris, korlátos is, tehát folytonos lineáris operátor, így $\mathcal{B}_1^{(u)}$ a továbbiakban $\psi u$-ként is írható.
Jelölje $\tau : V' \to V$ a Riesz reprezentáció leképzését, azaz minden $\gamma \in V'$ esetén

$$\tau : \gamma \mapsto b,$$

melyre

$$\gamma v = \langle v, b\rangle \quad (\forall v \in V),$$

ezzel tehát

$$\gamma v = \langle v, \tau\gamma\rangle \quad (\forall v \in V)$$

is írható. Mindezeket felhasználva látszik, hogy a keresett $u \in V$-re megkövetelt

$$\mathcal{B}(u, v) = \phi v \quad (\forall v \in V)$$

egyenlőség ekvivalens:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1^{(u)}(v) &= \phi v && (\forall v \in V) \\ \left\langle \tau\mathcal{B}_1^{(u)}, v\right\rangle &= \langle \tau\phi, v\rangle && (\forall v \in V) \\ \tau\psi u &= \tau\phi \end{aligned}$$

fennállásával. Utóbbi tulajdonságú $u$ létezését a Banach-fixponttétel segítségével igazoljuk, mégpedig úgy, hogy belátjuk, hogy alkalmas $\varrho > 0$ paraméter esetén a $T : V \to V$,

$$T : u \mapsto u - \varrho(\tau\psi u - \tau\phi)$$

leképzés kontrakció. Tetszőleges $u_1, u_2 \in V$-hez legyen $u := u_1 - u_2$, majd tekintsük a következő egyenlőséget:

$$\begin{aligned} \|Tu_1 - Tu_2\|^2 &= \|u_1 - u_2 - \varrho(\tau\psi u_1 - \tau\psi u_2)\|^2 = \\ &= \|u - \varrho(\tau\psi u)\|^2. \end{aligned}$$

A jobb oldalra a következő becslést használjuk fel:

$$\begin{aligned} \|u - \varrho\tau\psi u\|^2 &= \|u\|^2 - \varrho\,\langle u, \tau\psi u\rangle - \varrho\,\langle \tau\psi u, u\rangle + \varrho^2\|\tau\psi u\|^2 \leq \\ &\leq (1 - \varrho\alpha - \varrho\alpha + \varrho^2 M^2)\|u\|^2, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$\begin{aligned} \langle \tau\psi u, u\rangle = \langle u, \tau\psi u\rangle = (\psi u)u = \mathcal{B}(u, u) &\geq \alpha\|u\|^2, && (\mathcal{B} \text{ koercív}) \\ \|\tau\psi u\|_V = \|\psi u\|_{V'} \leq \|\psi\|\,\|u\| &\leq M\|u\|. && (\text{és korlátos}) \end{aligned}$$

Ezzel tehát kaptuk, hogy $\varrho \in (0, 2\alpha/M^2)$ esetén a $T$ leképzés valóban kontrakció, de akkor a Banach-fixponttétel szerint létezik egyetlen fixpontja: $u$, melyre

$$\begin{aligned} Tu = u - \varrho(\tau\psi u - \tau\phi) &= u \\ \tau\psi u - \tau\phi &= 0 \\ \tau\psi u &= \tau\phi \end{aligned}$$

tehát végül is a kapott $u$-ra

$$\mathcal{B}(u,v) = \phi v$$

minden $v \in H$ esetén. ■

**2.13. Tétel (Babuška[3]-lemma).** *Legyen $H$ valós Hilbert-tér, $\mathcal{B}$ korlátos bilineáris forma, ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

*(1) $\forall \phi : H \to \mathbb{R}$ korlátos lineáris funkcionálhoz egyértelműen létezik $u \in H$, melyre*

$$\mathcal{B}(u,v) = \phi v \quad (\forall v \in H).$$

*(2) $\mathcal{B}$ bilineáris formára az alábbi két tulajdonság együtt teljesül:*

*(i) $\exists m > 0$ melyre*

$$\inf_{\|u\|=1} \sup_{\|v\|=1} \mathcal{B}(u,v) \geq m,$$

*(ii)*

$$\sup_{\|u\|=1} \mathcal{B}(u,v) > 0 \quad (\forall v : 0 \neq v \in H).$$

*Bizonyítás:* Az előző tételek bizonyításában Riesz tételeinek segítségével beláttuk, hogy valós tér esetén az (1)-ben szereplő feltétel ekvivalens az $Au = b$ egyenlet egyértelmű megoldhatóságával $H$-n, ahol $A \in B(H)$ a $\mathcal{B}$ forma, ill. $b \in H$ a $\phi$ funkcionál Riesz-reprezentánsa. Másrészt a (2)-ben szereplő feltételeket az 1.2. állítás (i) pontja segítségével egyszerűen átfogalmazhatjuk a 2.3. tétel feltételeire.
(i):

$$\inf_{\|u\|=1} \left( \sup_{\|v\|=1} \langle Au, v \rangle \right) = \inf_{\|u\|=1} \|Au\| \geq m \qquad (\forall x \in H),$$

azaz

$$\|Ax\| \geq m\|x\| \qquad (\forall x \in H),$$

ami a 2.3. tétel (i) feltétele az $A$ reprezentánsra.
(ii):

$$\sup_{\|u\|=1} \langle Au, v \rangle = \sup_{\|u\|=1} \langle u, A^* v \rangle = \|A^* v\| > 0 \quad (\forall v \neq 0),$$

tehát $A^*$ injektív, azaz a 2.3. tétel (ii) feltétele. Ezekkel az átfogalmazásokkal 2.3. alapján (1) és (2) valóban ekvivalens. ■

Végül kimondunk egy 2.6.-hoz hasonló tételt a feladat korrekt kitűzöttségéről (lásd [3, 4.3. definíció]).

[2]Ivo Babuška (1926–) cseh származású amerikai matematikus, a végeselem-módszer híres kutatója

**2.14. Tétel (A megoldás folytonos függése a jobboldaltól).** *Ha valamely $H$ Hilbert-tér és $\mathcal{B}$ bilineáris forma mellett fennállnak 2.10., 2.11., vagy 2.13. tétel feltételei és így minden $\phi : H \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionálhoz létezik $u \in H$, melyre*

$$\mathcal{B}(u,v) = \phi v \qquad (\forall v \in H),$$

*akkor a funkcionál és a reprezentánselem normája között fennáll az alábbi egyenlőtlenség is:*

$$\|u\| \leq \frac{1}{m}\|\phi\|,$$

*tehát a feladat korrekt kitűzésű.*

*Bizonyítás:* Ha a 2.11. tétel, ill. a 2.10. tétel feltételei teljesülnek, azaz

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x,x) &\geq m\|x\|^2 \quad (\forall x \in H), \text{ ill.} \\ \operatorname{Re}\mathcal{B}(x,x) &\geq m\|x\|^2 \quad (\forall x \in H) \end{aligned}$$

érvényesek $\mathcal{B}$ bilineáris formára, akkor felhasználva a tételeket:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(u,u) &\geq m\|u\|^2 \\ \|\phi\|\,\|u\| \geq \phi u &\geq m\|u\|^2 \\ \|\phi\| &\geq m\|u\|, \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(u,u)| \geq \operatorname{Re}\mathcal{B}(u,u) &\geq m\|u\|^2 \\ \|\phi\|\,\|u\| \geq |\phi u| = |\mathcal{B}(u,u)| &\geq m\|u\|^2 \\ \|\phi\| &\geq m\|u\| \end{aligned}$$

következik. Ha pedig valós térben teljesülnek a 2.13. tétel feltételei, akkor így 2.13. (2) (i)-ből 1.2. állítás (i) pontja segítségével

$$\begin{aligned} \sup_{\|v\|=1} \mathcal{B}(u,v) &\geq m\|u\| \\ \sup_{\|v\|=1} \phi v &\geq m\|u\| \\ \frac{1}{m}\|\phi\| &\geq \|u\| \end{aligned}$$

is fennáll. ■

### Néhány következmény

A korlátos operátorokra vonatkozó megoldhatósági tételek egyszerű következményeként belátunk két állítást bizonyos speciális operátorok spektrumáról.
Az első állítás bizonyításából látni fogjuk, hogy amit önadjungált, pozitív, ill. unitér operátorok esetén sajátértékekre már tudunk korábbról (ti. hogy valósak, nemnegatívak, ill. egységnyi abszolútértékűek), azt az operátorok spektrumára is kimondhatjuk és legegyszerűbben a megoldhatósági tételek felhasználásával bizonyíthatjuk.
A második állítás normális operátorok spektrumának és a sajátértékinek adott értelemben vett hasonlóságáról szól: azt állítja, hogy ha adott egy normális operátor szinguláris értéke, mely nem sajátérték, akkor bár nemnulla sajátvektor nem tartozhat hozzá, hiszen $A - \lambda I$-nek injektívnek kell lennie, de megadható egy 1 normájú vektorsorozat, mely bár nem konvergens, határátmenetben a sajátvektorokhoz némiképp hasonló tulajdonságokat mutat.

**2.15. Állítás.** *Legyen $H$ Hilbert-tér, $A \in B(H)$.*

*(i) Ha $A$ önadjungált operátor, akkor a spektruma valós,*

*(ii) ha $A$ pozitív operátor, akkor a spektruma nemnegatív,*

*(iii) ha $A$ unitér operátor, akkor a spektruma 1 abszolútértékű elemekből áll.*

*Bizonyítás:*

(i) Legyen $A$ önadjungált és $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, mondjuk $\lambda = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$. Ekkor bármely $u \in H$ esetén

$$\langle (A - \lambda I)u, u\rangle = \langle Au, u\rangle - \alpha\|u\|^2 - i\beta\|u\|^2,$$

így

$$|\,\langle (A - \lambda I)u, u\rangle\,| \geq |\,\mathrm{Im}\,\langle (A - \lambda I)u, u\rangle\,| = |\beta|\|u\|^2.$$

De akkor a 2.5. tétel szerint $A - \lambda I$ bijekció, tehát $\lambda \in \varrho(A)$.

(ii) Legyen $A$ pozitív operátor. Mivel pozitív, ezért önadjungált is, így (i) szerint a spektruma valós, ezért már csak azt kell belátnunk, hogy nem negatív. Legyen tehát $\lambda < 0$, ekkor bármely $u \in H$ esetén

$$\langle (A - \lambda I)u, u\rangle = \langle Au, u\rangle - \lambda\|u\|^2 \geq -\lambda\|u\|^2 = |\lambda|\|u\|^2,$$

tehát 2.1. tétel szerint $A - \lambda I$ bijekció, $\lambda \in \varrho(A)$.

(iii) Legyen $A$ unitér operátor, $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \neq 1$. Ekkor tetszőleges $u \in H$-ra $A$ unitér volta miatt fennáll:

$$\begin{aligned}\|(A-\lambda I)u\|^2 &= \langle (A-\lambda I)u, (A-\lambda I)u\rangle = \\ &= \langle Au, Au\rangle - |\lambda|\,\langle Au, u\rangle - |\lambda|\,\langle u, Au\rangle + |\lambda|^2\,\langle u, u\rangle \geq \\ &\geq \|Au\|^2 - |\lambda|\,\|Au\|\,\|u\| - |\lambda|\,\|u\|\,\|Au\| \ + |\lambda|^2\|u\|^2 = \\ &= \|u\|^2 - |\lambda|\,\|u\|^2 - |\lambda|\,\|u\|^2 + |\lambda|^2\|u\|^2 = \underbrace{(1-|\lambda|)^2}_{>0}\|u\|^2.\end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy $A - \lambda I$ teljesíti a 2.3. tétel (i) feltételét.

Hasonlóan igaz $(A-\lambda I)^* = A^{-1} - \overline{\lambda} I$ operátorra:

$$\|(A-\lambda I)^*\|^2 = \|A^{-1} - \overline{\lambda} I\|^2 \geq (1 - |\overline{\lambda}|)^2\|u\|^2,$$

de akkor a 2.2. állítás szerint $(A-\lambda I)^*$ injektív, ezzel pedig teljesül a 2.3. tétel (ii) feltétele, tehát $A - \lambda I$ operátor bijektív, azaz $\lambda$ reguláris értéke $A$-nak.

■

**2.16. Állítás.** *Legyen $H$ Hilbert-tér, $A \in B(H)$ normális és $\lambda \in \sigma(A)$, de nem sajátérték. Ekkor van olyan $(u_n) \in H$, $\|u_n\| = 1$ ($\forall n$) sorozat, melyre $Au_n - \lambda u_n \to 0$.*

*Bizonyítás:* (Természetesen sajátértékre is igaz az állítás, a hozzá tartozó sajátvektor normáltja, mint konstans sorozat teljesíti a feltételt.) Legyen $\lambda \in \sigma(A)$, így $A - \lambda I$ nem bijekció, tehát 2.3. tétel (i) és (ii) pontja közül valamelyik nem teljesül rá. De normális operátor adjungáltjának sajátértékei az operátor sajátértékek konjugáltjai [8, 6.37. áll.], ezért ha $\lambda$ nem sajátértéke $A$-nak, $\overline{\lambda}$ nem lehet sajátértéke $A^*$-nak, tehát $A^* - \overline{\lambda} I = (A-\lambda I)^*$ injektív, vagyis (ii) teljesül $(A-\lambda I)$-re. Akkor tehát (i) nem teljesül rá, de ha nem létezik olyan $m > 0$, hogy $\|(A-\lambda I)u\| \geq m\|u\|$ $(u \in H)$, ez éppen azt jelenti, hogy $\inf_{\|u\|=1} \|(A-\lambda I)u\| = 0$, tehát létezik a kívánt sorozat.
■

## 2.2. Nyeregpont-feladat

### A nyeregpont-feladat megfogalmazása

Ebben a fejezetben megmaradunk a korlátos operátorok vizsgálatánál, azonban itt két Hilbert-tér szerepel és az ezekben ható operátorok kombinációja az alábbi, speciális formájú rendszerben (lásd [8, 7.3. fejezet]). Legyenek tehát $H, K$ valós Hilbert-terek és tekintsük a következő egyenletrendszert (általános nyeregpont-feladat):

$$\begin{aligned} Au + Bp &= f \\ B^*u - Cp &= g \end{aligned} \tag{ÁNyP}$$

Itt feltesszük, hogy

$$A : H \to H, \quad B : K \to H, \quad C : K \to K$$

korlátos lineáris operátorok, $f \in H$, $g \in K$ és az $u, p$ megoldáspárt $H \times K$-ban keressük. Könnyen látható tehát, hogy egy, a $H \times K$ szorzattéren vizsgált operátor-egyenletről van szó:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

A továbbiakban azt is feltesszük, hogy $A$ és $C$ önadjungáltak, $A$ egyenletesen pozitív és $C$ pozitív operátor.

**Egyszerű koercív eset**

Ha a fenti rendszerben $A$ mellett $C$ is egyenletesen pozitív,

$$\begin{aligned} \langle Au, u\rangle &\geq m\|u\|^2 \qquad (\forall u \in H), \\ \langle Cp, p\rangle &\geq \sigma\|p\|^2 \qquad (\forall p \in K), \end{aligned}$$

$m, \sigma \geq 0$, akkor a második egyenletet $(-1)$-gyel beszorozva, a skalárszorzatban $B$ és $-B^*$ éppen kiejti egymást, így kapjuk, hogy a $H \times K$ fölötti operátormátrix (valós) koercív:

$$\left\langle \begin{pmatrix} A & B \\ -B^* & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} \right\rangle \geq \langle Au, u\rangle + \underbrace{\langle Bp, u\rangle - \langle B^*u, p\rangle}_{0} + \langle Cp, p\rangle \geq$$

$$\geq \min\{m, \sigma\} \cdot (\|u\|^2 + \|p\|^2) \qquad (\forall (u, p) \in H \times K)$$

És így a 2.4. koercív operátorokra vonatkozó megoldástétel szerint a nyeregpont-feladatnak tetszőleges $(f, g) \in H \times K$ esetén létezik $(u, p) \in H \times K$ megoldása.

**Schur-komplementeres megoldás, eltűnő $C$ operátor mellett**

Most rátérünk annak az esetnek a vizsgálatára, amikor $C = 0$, tehát mikor a rendszer az alábbi alakra egyszerűsödik (nyeregpont-feladat, NyP):

$$\begin{aligned} Au + Bp &= f \\ B^*u \qquad &= g. \end{aligned} \tag{NyP}$$

Ekkor nem működik az előző megközelítés, viszont $A$ egyenletesen pozitív, így 2.1. tétel miatt invertálható is. Kihasználva ezt, átalakítjuk az első egyenletet és kifejezzük belőle $u$-t:

$$u = A^{-1}(f - Bp), \tag{U}$$

az $u$-ra kapott kifejezést behelyettesítjük a második egyenletbe, majd kifejezzük belőle $p$-t:

$$\begin{aligned} B^*A^{-1}(f - Bp) &= g \\ B^*A^{-1}f - \underbrace{B^*A^{-1}B}_{=:S}p &= g \\ B^*A^{-1}f - Sp &= g \\ \tilde{g} := B^*A^{-1}f - g &= Sp. \end{aligned} \tag{Sc}$$

A bal oldalon $f$ és $g$ kapott kombinációját jelöljük $\tilde{g}$-mal, a jobb oldalon egyedül a $p$ ismeretlen maradt, a rá ható operátort pedig, ami az $A, B, B^*$ operátorokból készített Schur-komplementer operátor, jelöljük $S$-sel. A kérdés tehát a kapott

$$Sp = \tilde{g}$$

egyenlet megoldhatósága $p \in K$-ra, adott $\tilde{g} \in K$ mellett, mert a kapott $p$-ből $u$-t már könnyen meghatározhatjuk az átalakított első egyenlet segítségével. A kellő $p$ létezése azonban egyáltalán nem nyilvánvaló, mivel $B$ és $B^*$ általában nem bijekciók. Látni fogjuk, hogy a kulcsfeltétel az, hogy legyen olyan közös, az egész $K$-n érvényes $\gamma > 0$ korlát, melyre $\|Bp\| \geq \gamma\|p\|$. Az 1.2. állítás (i) pontja alapján $p \neq 0$ esetén

$$\frac{\|Bp\|}{\|p\|} = \sup_{\substack{v \in H \\ \|v\|=1}} \frac{\langle Bp, v\rangle}{\|p\|} = \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{\langle Bp, v\rangle}{\|p\|\,\|v\|},$$

ezért a feltételt átfogalmazhatjuk az alábbi definíciónak megfelelően.

**2.17. Definíció.** *Az (NyP) feladathoz tartozó **inf-sup-feltétel**:*

$$\inf_{p \in K\setminus\{0\}} \sup_{u \in H\setminus\{0\}} \frac{\langle Bp, u\rangle}{\|p\|\,\|u\|} =: \gamma > 0.$$

Erre a feltételre a továbbiakban a következő, ekvivalens formában fogunk hivatkozni

$$\exists \gamma > 0 : \qquad \sup_{\substack{u \in H \\ u \neq 0}} \frac{\langle Bp, u\rangle}{\|u\|} \geq \gamma\|p\| \qquad (\forall p \in K). \tag{ISF}$$

Belátjuk az *inf-sup-feltétel* szükségességét.

**2.18. Tétel.** *Ha (NyP) feladat megoldható, akkor teljesül az* inf-sup-feltétel.

*Bizonyítás:* Ha (NyP) feladatnak van megoldása, akkor a feladatban szereplő, a feltevés szerint tetszőleges $p \in K$-ra megoldható $B^*w = p$ miatt $B^*$ biztosan szürjektív. Tehát egyrészt létezik $w \in H$, melyre $B^*w = p$, másrészt [8, 4.13. tétel] szerint megadható egy $p$-től független $\gamma > 0$, melyre

$$\|p\| \geq \gamma \|w\|.$$

Innen

$$\sup_{\substack{u \in H \\ u \neq 0}} \frac{\langle Bp, u\rangle}{\|u\|} \geq \frac{\langle Bp, w\rangle}{\|w\|} = \frac{\langle p, B^*w\rangle}{\|w\|} = \frac{\|p\|^2}{\|w\|} \geq \gamma \|p\|$$

és kapjuk, hogy fennáll (ISF). ∎

Az elégségesség bizonyításához szükségünk lesz az alábbi lemmára.

**2.19. Lemma.** *Ha $H$ Hilbert-tér és $A \in B(H)$ egyenletesen pozitív operátor, akkor $A^{-1}$ létezik, szigorúan pozitív, a hozzá tartozó energianorma értelmes és kielégíti az*

$$\|x\|_{A^{-1}} = \sup_{\substack{y \in H \\ \|y\|_{A^{-1}}=1}} \{|\langle x, y\rangle_{A^{-1}}|\}$$

*egyenlőséget minden $x \in H$-ra.*

*Bizonyítás:* $A$ egyenletes pozitivitása és a 2.1. tétel miatt $A^{-1}$ létezik, valamint $A$ szigorúan pozitív is és így

$$\left\langle A^{-1}y, y\right\rangle \Big|_{y=:Ax} = \langle x, Ax\rangle > 0$$

fennáll minden $y \in H$ esetén, tehát $A^{-1}$ is szigorúan pozitív. Szigorúan pozitív operátorra pedig értelmes az energianorma és $(H, \|\cdot\|_{A^{-1}})$ térben érvényes az 1.2. állítás is, a fenti egyenlőség pedig éppen ennek (i) része, mégpedig a $(H, \|\cdot\|_{A^{-1}})$ energiatérben megfogalmazva. ∎

**2.20. Tétel (Nyeregpont-feladat megoldhatósági tétele).** *Legyenek $H, K$ valós Hilbert-terek, $A \in B(H)$ önadjungált és egyenletesen pozitív, $B \in B(K, H)$. Ha $B$ operátorra fennáll az* inf-sup-feltétel *(ISF), akkor bármely $(f, g) \in H \times K$ esetén a (NyP) feladatnak létezik egyetlen $(u, p) \in H \times K$ megoldása.*

*Bizonyítás:* Tekintsük az (Sc)-ben definiált $S$ Schur-féle komplementer operátort. A 2.19. lemmát az $A$ operátorra alkalmazva kapjuk egyrészt, hogy $\|\cdot\|_{A^{-1}}$ energianorma értelmes, így felírható:

$$\langle Sp, p\rangle = \left\langle B^*A^{-1}Bp, p\right\rangle = \left\langle A^{-1}Bp, Bp\right\rangle = \|Bp\|^2_{A^{-1}} = \tag{2.20a}$$

másrészt, hogy érvényes a következő egyenlőség:

$$= \sup_{\substack{h\in H\\ \|h\|_{A^{-1}}=1}} \langle Bp,h\rangle^2_{A^{-1}} = \sup_{\substack{h\in H\\ \|h\|_{A^{-1}}=1}} \left\langle A^{-1}Bp,h\right\rangle^2 = \sup_{\substack{h\in H\\ \|h\|_{A^{-1}}=1}} \left\langle Bp,A^{-1}h\right\rangle^2 = \tag{2.20b}$$

Alkalmazzuk a $h = Az$ helyettesítést ($A$ szürjektív), ezzel $\|\cdot\|_{A^{-1}}$ energianormát is átírhatjuk $\|\cdot\|_A$-ra: $\|h\|^2_{A^{-1}} = \langle A^{-1}h,h\rangle = \langle z,Az\rangle = \|z\|^2_A$, így kapjuk:

$$= \sup_{\substack{h\in H\\ \|h\|_{A^{-1}}=1}} \left\langle Bp,A^{-1}h\right\rangle^2 = \sup_{\substack{z\in H\\ \|z\|_A=1}} \langle Bp,z\rangle^2 = \sup_{\substack{u\in H\\ u\neq 0}} \frac{\langle Bp,u\rangle^2}{\|u\|^2_A} \ge \sup_{\substack{u\in H\\ u\neq 0}} \frac{\langle Bp,u\rangle^2}{\|u\|^2\|A\|^2} \tag{2.20c}$$

De az *inf-sup-feltétel* szerint

$$\sup_{\substack{u\in H\\ u\neq 0}} \frac{\langle Bp,u\rangle}{\|u\|} \ge \gamma\|p\|$$

ezért

$$\sup_{\substack{u\in H\\ u\neq 0}} \frac{\langle Bp,u\rangle^2}{\|u\|^2\|A\|^2} \ge \frac{\gamma^2}{\|A\|^2}\|p\|^2. \tag{2.20d}$$

Összevetve (2.20a) bal oldalát (2.20d) jobb oldalával, kapjuk, hogy $S$ egyenletesen pozitív, $\gamma^2/\|A\|^2$ konstanssal.
Tehát $S$ bijekció is, de akkor adott $f$ és $g$, tehát adott $\tilde{g}$ esetén (Sc) egyenletnek létezik az egyértelmű $p \in K$ megoldása, abból (U) segítségével egyértelműen meghatározható $u \in H$, így $(u,p)$ egyértelmű megoldása lesz az eredeti (NyP) feladatnak.
■

A megoldhatóságra vonatkozó utóbbi két tétel alapján megfogalmazható a (NyP) nyeregpont-feladat megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele, ezt a következő ekvivalenciatételben foglaljuk össze.

**2.21. Tétel.** *Legyenek $H,K$ valós Hilbert-terek, $A \in B(H)$ önadjungált és egyenletesen pozitív, $B \in B(K,H)$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

*(i) Bármely $(f,g) \in H \times K$ esetén a (NyP) nyeregpont-feladatnak létezik egyetlen $(u,p) \in H \times K$ megoldása.*

*(ii) $B^* : H \to K$ szürjektív.*

*(iii) Teljesül az inf-sup-feltétel (ISF).*

## Nem önadjungált eset

Most kiterjesztjük az eddigi eredményeket arra az esetre, ha $A$ nem önadjungált, de (valós) koercív. Az egyenletesen pozitív esethez hasonlóan segédtétellel kezdjük.

**2.22. Lemma.** *Ha $H$ Hilbert-tér és $A \in B(H)$ koercív operátor, akkor $A^{-1}$ létezik és koercív.*

*Bizonyítás:* $A$ koercivitása és a 2.4. tétel miatt $A^{-1}$ valóban létezik és

$$\left\langle A^{-1}y, y\right\rangle\Big|_{y=:Ax} = \langle x, Ax\rangle \geq m\|x\|^2 \geq \frac{m}{\|A\|^2}\|Ax\|^2 = \frac{m}{\|A\|^2}\|y\|^2 \qquad (\forall y \in H),$$

tehát $A^{-1}$ koercív. ∎

**2.23. Tétel (Nyeregpont-feladat megoldhatósági tétele – koercív eset).** *Legyenek $H, K$ valós Hilbert-terek, $A \in B(H)$ koercív, $B \in B(K, H)$. Ha $B$ operátorra fennáll az* inf-sup-feltétel *(ISF), akkor bármely $(f, g) \in H \times K$ esetén a (NyP) feladatnak létezik egyetlen $(u, p) \in H \times K$ megoldása.*

*Bizonyítás:* A 2.20. tétel bizonyításához hasonlóan, itt is a (Sc)-ben definiált $S$ Schur-komplementer operátor bijekció voltát bizonyítjuk. Ezúttal azt látjuk be róla, hogy koercív, ebből már a 2.4. tétel alapján kapjuk, hogy bijektív.
A 2.22. lemmát és az 1.2. állítást felhasználva:

$$\langle Sp, p\rangle = \left\langle B^*A^{-1}Bp, p\right\rangle = \left\langle A^{-1}Bp, Bp\right\rangle \geq \frac{m}{\|A\|^2}\|Bp\|^2 =$$

$$= \frac{m}{\|A\|^2}\sup_{\substack{z\in H\\ \|z\|=1}}\langle Bp, z\rangle^2 = \frac{m}{\|A\|^2}\sup_{\substack{u\in H\\ u\neq 0}}\frac{\langle Bp, u\rangle^2}{\|u\|^2} \geq \frac{m\gamma^2}{\|A\|^2}\|p\|^2 \qquad (\forall p \in K)$$

(ahol $\gamma$ az inf-sup-feltételből származik).
Tehát kapjuk, hogy $S$ koercív, méghozzá $m\gamma^2/\|A\|^2$ konstanssal, így $S$ bijekció is, ezért adott $\tilde{g}$-re (Sc) egyértelműen megoldható, az innen kapott $p$-vel (U) segítségével egyértelműen meghatározható $u \in H$ és kapjuk (NyP) feladat egyértelmű $(u, p)$ megoldását. ∎

Megjegyezzük, hogy a 2.6. tétel következtében (annak (Sc)-re és (U)-ra való alkalmazásával) a kapott $(u, p)$ megoldás folytonosan függ $f, g$ jobboldalaktól.

### Bilineáris formákkal megadott nyeregpont-feladatok

Végül a koercív nyeregpont-feladatok kapott megoldhatósági eredményét átfogalmazzuk a koercív bilineáris formák esetére is.
Legyenek $H, K$ továbbra is Hilbert-terek, $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ pedig korlátos bilineáris formák: $\mathcal{A} : H \times H \to \mathbb{R}$, $\mathcal{B} : K \times H \to \mathbb{R}$, és $\mathcal{A}$ koercív, azaz létezzen $m > 0$, mellyel:

$$\mathcal{A}(u,u) \geq m\|u\|^2 \qquad (\forall u \in H).$$

Továbbá legyenek $\phi : H \to \mathbb{R}$ és $\psi : K \to \mathbb{R}$ korlátos lineáris funkcionálok. Olyan $(u,p) \in H \times K$ párokat keresünk, melyekkel:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u,v) + \mathcal{B}(p,v) &= \phi v \qquad (\forall v \in H) \\ \mathcal{B}(q,u) \qquad\qquad &= \psi q \qquad (\forall q \in K) \end{aligned} \tag{NyPB}$$

A megoldhatóság kulcsa itt is a megfelelő inf-sup-feltétel fennállása.

**2.24. Definíció.** *A (NyPB) feladathoz tartozó **inf-sup-feltétel**:*

$$\inf_{p \in K \setminus \{0\}} \sup_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{\mathcal{B}(p,u)}{\|p\|\,\|u\|} =: \gamma > 0,$$

amit az operátoros esethez hasonlóan átfogalmazunk:

$$\exists \gamma > 0 : \qquad \sup_{\substack{u \in H \\ u \neq 0}} \frac{\mathcal{B}(p,u)}{\|u\|} \geq \gamma \|p\| \qquad (\forall p \in K). \tag{ISB}$$

A (NyPB) feladat megoldhatóságáról szóló tétel analóg az operátorokról szóló nyeregpont-feladat megoldhatósági tételével:

**2.25. Tétel.** *Legyenek $H, K$ valós Hilbert-terek, $\mathcal{A} : H \times H \to \mathbb{R}$, $\mathcal{B} : K \times H \to \mathbb{R}$ korlátos bilineáris formák, továbbá $\mathcal{A}$ koercív és tegyük fel, hogy fennáll az (ISB)* inf-sup-feltétel. *Ekkor bármely $\phi : H \to \mathbb{R}$, $\psi : K \to \mathbb{R}$ korlátos lineáris funkcionálok esetén egyértelműen létezik $(u,p) \in H \times K$, mely kielégíti (NyPB) egyenlőségeit.*

*Bizonyítás:* A bizonyítás során a 2.13. Babuška-lemmánál látottakhoz hasonló módon vezetjük vissza a bilineáris formákra vonatkozó feladatot az operátorok esetére. Legyenek tehát $A \in B(H)$, $B \in B(K,H)$, $f \in H$, $g \in K$ rendre az $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\phi$, $\psi$ Riesz-reprezentánsai:

$$\mathcal{A}(u,v) = \langle Au, v \rangle$$

$$\mathcal{B}(p,v) = \langle Bp, v \rangle$$

$$\phi v = \langle f, v \rangle$$

$$\psi q = \langle g, q \rangle$$

minden $u, v \in H$, $p, q \in K$ esetén. Ekkor a (NyPB) feladat átfogalmazható a következőképpen:

$$\begin{aligned} & \langle Au + Bp, v\rangle && = \langle f, v\rangle && (\forall v \in H) \\ \langle q, B^*u\rangle = \; & \langle Bq, u\rangle && = \langle g, q\rangle && (\forall q \in K) \end{aligned}$$

ami ekvivalens (NyP)-vel. A tétel feltételeinek Riesz-reprezentánsokra való átfogalmazása pedig épp azt biztosítja, hogy $A$ koercív és $B$-re teljesül (ISF), azaz teljesülnek a 2.20. tétel feltételei, amit alkalmazva kapjuk, hogy itt is egyértelműen létezik $(u, p) \in H \times K$ megoldás. ∎

Az operátoros esethez hasonlóan megjegyezzük, hogy az $(u, p)$ megoldás itt is folytonosan függ $(f, g)$ jobboldaltól.

## 2.3. Megoldhatóság nem korlátos operátorok esetén, gyenge megoldás

Adott operátoregyenletben az operátor értelmezési tartománya természetes módon meghatározza a megoldások lehetséges körét és ez olykor szűknek bizonyul: sok operátoregyenletnek egyáltalán nincs megoldása. A helyzeten segíthetünk az értelmezési tartomány bővítésével, amennyiben ez lehetséges, de az 1.1. fejezetben láttuk, hogy ez nem korlátos operátorok esetén egyáltalán nem triviális út. A másik lehetséges irány a *megoldás fogalmának* enyhítése.

Legyen $H$ Hilbert-tér és tekintsük a következő, általános formájú operátoregyenletet:

$$Au = f, \tag{O}$$

ahol $A : H \hookrightarrow H$ és legyen először $u \in \mathcal{D}(A)$, $f \in H$ adott vektor. A továbbiakban az ilyen $u$-kat **klasszikus megoldásnak** fogjuk nevezni. Tekintsük azonban az $A$ operátor $H_A = [(\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_A)]$ energiaterét (1.2. fejezet) és keressük az (O) feladat „megoldásait” a következő alakban.

**2.26. Definíció.** *Legyen $f \in H$ adott vektor. Az $u \in H_A$ vektor az (O) feladat **gyenge megoldása**, ha*

$$\langle u, v\rangle_A = \langle f, v\rangle \qquad (\forall v \in H_A).$$

Ha $u$ történetesen eleme $\mathcal{D}(A)$-nak, akkor érvényes $\langle u, v\rangle_A = \langle Au, v\rangle$, így $\langle Au, v\rangle = \langle f, v\rangle$ is teljesül $u$-ra minden $v \in H_A$ esetén, így bármely $\mathcal{D}(A)$-beli gyenge $u$ megoldás teljesíti az eredeti $Au = f$ egyenlőséget is, tehát klasszikus megoldás is, azaz a gyenge megoldás kiterjesztése a klasszikus megoldásfogalomnak az $f \notin \mathcal{R}(A)$ esetre.

Így már rátérhetünk a 2.1. megoldhatósági tétel nem korlátos operátorokra és gyenge megoldásra vonatkozó változatára:

**2.27. Tétel.** *Legyen $H$ Hilbert-tér, $A : H \hookrightarrow H$ lineáris operátor, mely egyenletesen pozitív, tehát $A \geq mI$ valamilyen $m > 0$-ra. Ekkor minden $f \in H$ esetén az $Au = f$ egyenletnek egyértelműen létezik $u \in H_A$ gyenge megoldása.*

*Bizonyítás:* Definiáljuk a $\phi : H_A \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionált a $\phi v := \langle v, f\rangle$ egyenlőséggel! Ekkor ahogy azt az 1.2. fejezetben láttuk, fennáll:

$$\|v\|_A^2 = \langle v, v\rangle_A = \langle Av, v\rangle \geq m\|v\|^2 \quad (\forall v \in \mathcal{D}(A)),$$

ezt felhasználva a $\phi$ funkcionálra igaz a következő becslés:

$$|\phi v| = |\langle v, f\rangle| \leq \|f\|\,\|v\| \leq \frac{1}{\sqrt{m}}\|f\|\,\|v\|_A \quad (\forall v \in H_A),$$

így $\phi : H_A \to \mathbb{K}$ korlátos funkcionál. Ezért Riesz reprezentációs tétele szerint egyértelműen létezik $u \in H_A$, melyre $\phi v = \langle v, f\rangle = \langle v, u\rangle_A$, amiből konjugálással

$$\langle f, v\rangle = \langle u, v\rangle_A \quad (\forall v \in H_A),$$

tehát $u$ valóban gyenge megoldás. ∎

Végül a 2.6. és a 2.14. tételekhez hasonlóan az állítás a korrekt kitűzöttségről:

**2.28. Tétel (A megoldás folytonos függése a jobboldaltól).** *A fenti feltételek mellett az $Au = f$ egyenlet $u$ gyenge megoldására az alábbi becslés teljesül:*

$$\|u\|_A \leq \frac{1}{\sqrt{m}}\|f\|.$$

*Bizonyítás:* Itt is a minden $v \in H_A$-ra fennálló $\|v\|_A^2 \geq m\|v\|^2$ becslést használjuk, mint az előző tételben, csak itt az adott $u$-ra alkalmazva (és felhasználjuk, hogy $u$ gyenge megoldás):

$$\|u\|_A^2 = \langle u, u\rangle_A = \langle f, u\rangle \leq \|f\|\,\|u\| \leq \frac{1}{\sqrt{m}}\|f\|\,\|u\|_A.$$

∎

# 3. Alkalmazások

## 3.1. Integráloperátorok

Legyen $I = [a, b]$ intervallum, $H := L^2(I)$ Hilbert-tér, valamint $K \in L^2(I \times I)$ adott, valós értékű függvény és definiáljuk $A : H \hookrightarrow H$ operátort a következő összefüggéssel:

$$A : u \mapsto v \quad (\forall u \in L^2(I)),$$

méghozzá úgy, hogy

$$v(x) = \int_a^b K(x, s)u(s) \, \mathrm{d}s \quad (\forall x \in I).$$

Ebben a fejezetben a fent definiált integráloperátort vizsgáljuk meg alaposabban (lásd [8, 10.1. fejezet]). Itt a $K$ kétváltozós függvényt **szimmetrikus**nak nevezzük, ha $K(x, y) = K(y, x)$ minden $x, y \in I$-re, ill. ezen belül $K$ **pozitív magfüggvény**, ha létezik $N \in L^2(I \times I)$, melyre

$$K(x, y) = \int_a^b N(x, s)N(y, s) \, \mathrm{d}s \quad (\forall x, y \in I).$$

**3.1. Lemma.** *A fent definiált integráloperátorra a következők teljesülnek:*

*(1) $A \in B\left(L^2(I)\right)$ korlátos lineáris operátor,*

*(2) ha $K$ szimmetrikus, akkor $A$ önadjungált,*

*(3) ha $K$ pozitív magfüggvény, akkor $A$ pozitív operátor.*

*Bizonyítás:*

(1) A linearitás a Lebesgue-integrál linearitásának következménye. A folytonosság bizonyításához legyen $u \in L^2(I)$, ekkor $u$ képének $L^2$-normáját felírva, majd alkalmazva a CBS-egyenlőtlenséget, $u$ $L^2$-normája megjelenik a becslésben:

$$\begin{aligned}
\|Au\|^2_{L^2(I)} &= \int_a^b \left| \int_a^b K(x, s)u(s) \, \mathrm{d}s \right|^2 \mathrm{d}x \leq \\
&\leq \int_a^b \left( \int_a^b K^2(x, s) \, \mathrm{d}s \cdot \int_a^b u^2(s) \, \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}x = \\
&= \int_a^b \int_a^b K^2(x, s) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x \cdot \|u\|^2_{L^2(I)} = \\
&= \|K\|^2_{L^2(I \times I)} \cdot \|u\|^2_{L^2(I)},
\end{aligned}$$

tehát $\|Au\| \leq \|K\|\|u\|$, azaz $A$ folytonos.

(2) Ha $K$ szimmetrikus, akkor $Au$ és $v$ $L^2$-skalárszorzatát felírva a kettős integrálba bevihető az $s$-től nem függő $\overline{v}(x)$, másrészt kihozható az $x$-től nem függő $u(s)$, így mivel $K$ szimmetrikussága miatt $s$ és $x$ szerepe felcserélhető, a Fubini-tételt felhasználva megjelenik $\overline{Av}$:

$$\begin{aligned}\langle Au, v\rangle_{L^2} &= \int_a^b (Au)\overline{v} = \int_a^b \left(\int_a^b K(x,s)u(s)\ \mathrm{d}s\right)\overline{v}(x)\ \mathrm{d}x = \\ &= \int_{I^2} K(x,s)u(s)\overline{v}(x)\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}x = \\ &= \int_{I^2} K(s,x)u(s)\overline{v}(x)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}s = \\ &= \int_a^b u(s)\left(\int_a^b K(s,x)\overline{v}(x)\ \mathrm{d}x\right)\ \mathrm{d} = \int_a^b u(s)\overline{(Av)}(s)\ \mathrm{d}s = \\ &= \langle u, Av\rangle_{L^2},\end{aligned}$$

tehát $A$ szimmetrikus, azaz $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$ $(\forall u, v \in \mathcal{D}(A))$, de az előző (1) pontban láttuk, hogy $A$ korlátos, ezért feltehető, hogy $\mathcal{D}(A) = H$, azaz $A$ önadjungált is.

(3) Ha $K$ pozitív magfüggvény, akkor vezessük be a következő két operátort:

$$\begin{aligned} C : L^2 \to L^2, &\quad (Cu)(x) := \int_a^b N(x,s)u(s)\ \mathrm{d}s, \\ \widehat{C} : L^2 \to L^2, &\quad (\widehat{C}v)(s) := \int_a^b N(x,s)v(x)\ \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Először is a (2) ponthoz hasonló átalakítással vegyük észre, hogy $C$ és $\widehat{C}$ adjungáltak:

$$\begin{aligned}\langle Cu, v\rangle_{L^2} &= \int_a^b \left(\int_a^b N(x,s)u(s)\ \mathrm{d}s\right)\overline{v}(x)\ \mathrm{d}x = \\ &= \int_{I^2} N(x,s)u(s)\overline{v}(x)\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}x = \int_{I^2} N(x,s)u(s)\overline{v}(x)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}s = \\ &= \int_a^b u(s)\left(\int_a^b N(x,s)\overline{v}(x)\ \mathrm{d}x\right)\ \mathrm{d}s = \langle u, \widehat{C}v\rangle_{L^2}.\end{aligned}$$

Ezt felhasználva adódik, hogy $Au = CC^*u$, ugyanis

$$\begin{aligned}(Au)(x) &= \int_a^b \left(\int_a^b N(x,s)N(y,s)\ \mathrm{d}s\right)u(y)\ \mathrm{d}y = \\ &= \int_a^b N(x,s)\left(\int_a^b N(y,s)u(y)\ \mathrm{d}y\right)\ \mathrm{d}s = (CC^*u)(x),\end{aligned}$$

és ezzel kapjuk, hogy $A$ pozitív operátor, ugyanis:

$$\langle Au, u\rangle\ L^2 = \langle CC^*u, u\rangle_{L^2} = \langle C^*u, C^*u\rangle_{L^2} = \|C^*u\|_{L^2}^2 \geq 0. \qquad \blacksquare$$

**3.2. Tétel.** *Legyen $K \in L^2(I \times I)$ pozitív magfüggvény. Ekkor az*

$$u(x) + (Au)(x) = f(x) \quad (\forall x \in I)$$

*integrálegyenletnek bármely $f \in L^2(I)$ esetén létezik egyértelmű $u^* \in L^2(I)$ megoldása.*

*Bizonyítás:* A fenti egyenletet függvényegyenletként felírva az $u + Au = f$ alakhoz jutunk, ahol $B := I + A \in B(L^2(I))$ operátor egyenletesen pozitív:

$$\langle (I + A)u, u\rangle = \|u\|^2 + \langle Au, u\rangle \geq \|u\|^2,$$

mert $\langle Au, u\rangle \geq 0$ a 3.1. lemma (3) pontja szerint. Így viszont $B$ egyenletesen pozitív operátor, tehát a 2.1. megoldhatósági tétel alkalmazható $B$ operátorra és ezzel kapjuk a tétel állítását. ■

## 3.2. Peremérték-feladatok

Ebben a fejezetben használni fogjuk az 1.2. fejezetben bevezetett Szoboljev-tereket, valamint a *Green-formulát* és a *Gauss-Osztrogradszkij-tételt.*

**3.3. Tétel (Gauss–Osztrogradszkij-tétel).** *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, melyre $\partial\Omega$ szakaszonként folytonosan differenciálható ($\partial\Omega \in PC^1$) és $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ folytonosan differenciálható. Ekkor*

$$\int_\Omega \operatorname{div} f = \int_{\partial\Omega} f \cdot \nu \; ds.$$

A bizonyítás megtalálható [5, 7.4. §]-ban, lásd még [3, 12.18. állítás].

**3.4. Tétel (Green-formula).** *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, melyre $\partial\Omega$ szakaszonként folytonosan differenciálható és $p \in C^1(\overline{\Omega})$! Legyen $L$ a következő differenciáloperátor: $Lu = -\operatorname{div}(p\,\nabla u)$. Ekkor minden $u \in C^2(\Omega) \bigcap C^1(\overline{\Omega})$ és $v \in C^1(\overline{\Omega})$ függvényre, melyre $(Lu)\overline{v} \in L^1(\Omega)$ érvényes a következő összefüggés:*

$$\int_\Omega (Lu)\overline{v} = \int_\Omega p\,\nabla u \cdot \nabla \overline{v} - \int_{\partial\Omega} p\partial_\nu u\overline{v} \; d\sigma.$$

A bizonyítást illetően lásd [4, II. 35. tétel], illetve [3, 12.20. tétel].

Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $p$, $q : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathbf{w} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ pedig adott függvények, melyekre $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$ és $q \geq 0$ (a $p$, $q$, $\mathbf{w}$ és $f$-re vonatkozó simasági feltételeket lásd az egyes tételeknél alább). Tekintsük az alábbi, másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletet, amely a Dirichlet-féle peremfeltétellel peremérték-feladatot alkot:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p\,\nabla u) + \mathbf{w}\cdot\ \nabla u + qu = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{PF}$$

Ezt a peremérték-feladatot a következő speciális eseteket kiemelve fogjuk tárgyalni. Egyfelől kitérünk az ún. Sturm–Liouville[4]-féle problémára, ahol $\Omega =: I$ egydimenziós és az elsőrendű tag hiányzik az egyenletből:

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f \\ u|_{\partial I} = 0 \end{cases} \tag{S-L}$$

ahol tehát $I \subset \mathbb{R}$ és $p,\ q,\ f : I \to \mathbb{R}$ adott függvények.
Másfelől a többdimenziós esetet először első- és nulladrendű tag nélkül vizsgáljuk, ez a feladat szimmetrikus változata:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p\,\nabla u) = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{PFSz}$$

majd a probléma elsőrendű taggal ellátott esetét:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p\,\nabla u) + \mathbf{w}\cdot\ \nabla u = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{PFn}$$

Jól tudjuk, hogy $n = 1$ dimenzióban $p \in C^1(I)$ és $q, f \in C(I)$ esetén egyértelműen létezik $u \in C^2(I)$ megoldás. Ha azonban ezeknél gyengébb simasági feltételek állnak fenn, akkor a $C^2$-beli megoldás léte egyáltalán nem biztos, sőt, gyakran kizárt. A helyzet még ennél is rosszabb: ahogy az alábbiakban látni fogjuk, megfelelően sima $p, q$ és $f$ mellett is előfordulhat, hogy – az $\Omega$ tartomány alakja miatt – nem létezik nemhogy $C^2$-beli, de akár $H^2$-beli megoldás sem.

- Tegyük fel például, hogy $n = 1$, $f \notin C(I)$, de $p \in C^1(I)$. Ekkor $u \in C^2(I)$ megoldás biztosan nem létezik, hiszen akkor $pu' \in C^1(I)$ és így $(-pu')' = f \in C(I)$-nek kellene teljesülnie.

- Hasonlóan, ha egy dimenzióban $f \in C(I)$, de $p \notin C^1(I)$, sőt, nem is folytonos, hanem szakaszonként konstans, akkor általában $u \in H^2(I)$ sem lehet, tekintve, hogy $u \in C^1(I)$, azaz $u' \in C(I)$ egy igen speciális esetet leszámítva nem teljesülhet. Tegyük fel ugyanis indirekt, hogy teljesül: $u' \in C(I)$ és $p$ ugyanitt

[4]Jacques Charles François Sturm (1803–1855) francia matematikus, a Francia Tudományos Akadémia és a Brit Royal Society tagja, segítségével mérték meg először a hang víz alatti sebességét; Joseph Liouville (1809–1882) francia matematikus, a Francia Tudományos Akadémia, a Brit Royal Society és a svéd Királyi Akadémia tagja, a Journal de Mathématiques Pures et Appliquées folyóirat alapítója

szakaszonként konstans, ekkor – hacsak $u'$ nem egyenlő 0-val $p$ szakadási pontjaiban – általában $pu'$ is szakadásos, tehát nem $C^1(I)$-beli, de másrészt, ha fennáll az egyenlet, $(pu')' \in C(I)$-nek teljesülnie kellene, mert $f \in C(I)$-vel kellene megegyeznie $I$ pontjaiban, így a kapott ellentmondás mutatja, hogy $u \notin H^2(I)$.

- Több dimenzióban olyan, egyszerű példa is konstruálható ([6, III.,15.2 fej.]), melyben (nemhomogén peremfeltétel mellett) a tartomány *alakjából* következően nem létezik a kívánt függvényosztályba tartozó ($C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$-beli) megoldás; a problémát itt az okozza, hogy a tartomány határa, bár Lipschitz-folytonos, de van derékszögű konkáv sarka, így még konstans $p, q$ és $f$ esetén is, bár létezik és egyértelmű a megoldás, az nem folytonos a teljes $\Omega$ tartományon.

Ezzel szemben a most következő tételek szerint – bizonyos egyszerű feltételek fennállása esetén – $H_0^1$-beli gyenge megoldás mindig létezik.

**3.5. Tétel (Az egydimenziós peremérték-feladat gyenge megoldása).** *Legyenek*

$$\begin{aligned} p, q &\in L^\infty(I), \\ p(x) &\geq m > 0 \quad (m.m.\ x \in I), \\ q(x) &\geq 0 \quad (m.m.\ x \in I). \end{aligned}$$

*Ekkor (S-L) peremérték-feladatnak minden $f \in L^2(I)$ esetén egyértelműen létezik $u \in H_0^1(I)$ gyenge megoldása.*

A következő lemmát mind az egydimenziós, mind a többdimenziós eset bizonyításánál fel fogjuk használni.

**3.6. Lemma.** *Legyen $H = \{f : \Omega \to \mathbb{K}, f \in L^2(\Omega)\}$, $p \in C^1(\Omega)$, $p(x) \geq m$ majdnem mindenütt ($m > 0$), $L : H \hookrightarrow H$ operátor, értelmezési tartománya*

$$\mathcal{D}(L) = \{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

*és*

$$L : u \mapsto -\operatorname{div}(p\, \nabla u).$$

*Ekkor $L$ szimmetrikus és egyenletesen pozitív operátor és energiatere éppen $H_0^1(\Omega)$.*

*Bizonyítás:* Bármely $u \in \mathcal{D}(L)$ esetén, felhasználva a 3.4. Green-formulát:

$$\langle Lu, u\rangle_{L^2} = \int_\Omega (Lu)\overline{u} = \underbrace{\int_\Omega p\, \nabla u \cdot \nabla \overline{u}}_{\int_\Omega p\, |\nabla u|^2} - \underbrace{\int_{\partial\Omega} p \partial_\nu u \overline{u}}_{0} \geq 0.$$

A második tag az $u|_{\partial\Omega} = 0$ feltétel miatt nulla. De itt

$$\int_\Omega p\,|\nabla u|^2 \geq m \int_\Omega |\nabla u|^2 = m\|\nabla u\|^2_{L^2} \geq m\lambda_1 \|u\|^2_{L^2},$$

előbb $p(x) \geq m$ m.m. $x \in \Omega$, majd az 1.17. Poincaré–Friedrichs-egyenlőtlenség miatt.
■

**3.7. Következmény.** *Legyen $H = \{f : I \to \mathbb{K}, f \in L^2(I)\}$, $p \in C^1(I)$, $p(x) \geq m$ m.m. $(m > 0)$, $L : H \hookrightarrow H$ operátor, értelmezési tartománya*

$$\mathcal{D}(L) = \{u \in C^2(I) \;:\; u(a) = u(b) = 0\},$$

*továbbá $q \in L^\infty(I)$, $q(x) \geq 0$ és*

$$L : u \mapsto -(pu')' + qu.$$

*Ekkor $L$ szimmetrikus és egyenletesen pozitív operátor és energiatere éppen $H^1_0(I)$.*

*Bizonyítás:* Az előző lemma egyszerű következménye, mivel $q \geq 0$ m.m. $x \in \Omega$ miatt $q$ nem rontja el az egyenletes pozitivitást. ■

Most már rátérhetünk (S-L) feladat megoldhatósági tételének bizonyítására, ami csak az eddigiek egyszerű alkalmazása.
*Bizonyítás:* [3.5. tételé] A 3.7. következmény miatt (S-L)-beli $Lu := -(pu')' + qu$ nem korlátos operátor egyenletesen pozitív, így a 2.27. nem korlátos operátorokra vonatkozó megoldhatósági tétel alkalmazható. ■

**3.8. Tétel (A többdimenziós szimmetrikus feladat megoldása).**
*Legyen $\Omega$ korlátos tartomány, melynek pereme szakaszonként sima és legyen*

$$p \in L^\infty(\Omega),$$
$$p(x) \geq m > 0 \quad (m.m.\ x \in \Omega).$$

*Ekkor (PFSz) peremérték-feladatnak minden $f \in L^2(\Omega)$ esetén egyértelműen létezik $u \in H^1_0(\Omega)$ gyenge megoldása.*

*Bizonyítás:* A 3.6. lemma éppen azt mondja ki, hogy a (PFSz)-beli

$$Lu := -\operatorname{div}(p\,\nabla u)$$

nem korlátos szimmetrikus operátor egyenletesen pozitív, így a 2.27. megoldhatósági tétel itt is alkalmazható. ■

**3.9. Tétel (A nem szimmetrikus eset gyenge megoldása).**
*Legyen $\Omega$ korlátos tartomány, melynek pereme szakaszonként sima és legyenek*

$$\begin{aligned} p &\in L^\infty(\Omega), \\ p(x) &\geq m > 0 \quad (m.m.\ x \in \Omega), \\ \mathbf{w} &\in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n), \\ \operatorname{div} \mathbf{w} &= 0. \end{aligned}$$

*Ekkor (PFn) peremérték-feladatnak minden $f \in L^2(\Omega)$ esetén egyértelműen létezik $u \in H_0^1(\Omega)$ gyenge megoldása.*

*Bizonyítás:* Mivel az operátor nem egyenletesen pozitív, a 2.27. tételt nem tudjuk használni, helyette közvetlenül a Lax–Milgram-lemma segítségével bizonyítunk és a valós Hilbert-tér fölötti feladatra szorítkozunk. Álljon tehát $H_0^1(\Omega)$ tér $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényekből, a skalárszorzat pedig legyen

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v.$$

Ekkor a gyenge megoldás azt jelenti, hogy valamilyen $u \in H_0^1(\Omega)$-ra

$$\int_\Omega \Big( p\, \nabla u \cdot \nabla v + (\mathbf{w} \cdot \nabla u) v \Big) = \int_\Omega f v$$

teljesül minden $v \in H_0^1(\Omega)$ esetén. Legyen $\mathcal{B} : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ bilineáris forma a következő:

$$\mathcal{B} : (u, v) \mapsto \int_\Omega \Big( p\, \nabla u \cdot \nabla v + (\mathbf{w} \cdot \nabla u) v \Big)$$

valamint $\phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$

$$\phi : v \mapsto \int_\Omega f v$$

lineáris funkcionál. Belátjuk, hogy $\mathcal{B}$ korlátos és koercív bilineáris forma, $\phi$ pedig korlátos lineáris funkcionál, így teljesülnek rájuk a Lax–Milgram-lemma koercív változatának (2.10.) feltételei.
$\mathcal{B}$ korlátosságát az 1.17. Poincaré–Friedrichs-egyenlőtlenség segítségével látjuk be:

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(u, v)| &\leq \|p\|_{L^\infty} \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} + \|\mathbf{w}\|_{L^\infty} \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{L^\infty} \leq \\ &\leq \Big( \|p\|_{L^\infty} + \lambda_1^{-1/2} \|\mathbf{w}\|_{L^\infty} \Big) \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}, \end{aligned}$$

ahol $\lambda_1$ az 1.17. tételből származó, $-\Delta$ operátor legkisebb sajátértéke.
$\mathcal{B}$ koercivitása:
Először is, a szorzat deriválási szabálya és $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$ felhasználásával:

$$\operatorname{div}(\mathbf{w} u^2) = (\operatorname{div} \mathbf{w}) u^2 + \mathbf{w} \cdot \nabla(u^2) = \underbrace{(\operatorname{div} \mathbf{w})}_{0} u^2 + 2(\mathbf{w} \cdot \nabla u) u = 2(\mathbf{w} \cdot \nabla u) u,$$

majd ebből $u|_{\partial\Omega} = 0$ és a Gauss–Osztrogradszkij-tétel (3.3. tétel) felhasználásával:

$$0 = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{w}u^2) \cdot \nu \, \mathrm{d}s = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{w}u^2) = \int_{\Omega} 2(\mathbf{w} \cdot \nabla u)u,$$

tehát

$$\int_{\Omega} 2(\mathbf{w} \cdot \nabla u)u = 0.$$

Ezzel

$$\mathcal{B}(u,u) = \int_{\Omega} \Big(p\,|\nabla u|^2 + (\mathbf{w} \cdot \nabla u)u\Big) = \int_{\Omega} p\,|\nabla u|^2 \geq m\|u\|^2_{H^1_0},$$

azaz kaptuk, hogy $\mathcal{B}$ koercív.

Már csak $\phi$ korlátos lineáris voltának bizonyítása van hátra:

$$|\phi v| = \left|\int_{\Omega} fv\right| \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \cdot \frac{1}{\lambda_1}\|v\|_{H^1_0},$$

az 1.17. Poincaré–Friedrichs-egyenlőtlenség segítségével.

Kaptuk tehát, hogy $\mathcal{B}$ korlátos és koercív bilineáris forma, $\phi$ pedig korlátos lineáris funkcionál, így a 2.10. tétel alkalmazható és kapjuk a tétel állítását. ■

Végül megjegyezzük, hogy az általános, nulladrendű tagot tartalmazó eset is hasonlóan igazolható, mert a 3.7. következmény $q \in L^\infty(\Omega)$, $q \geq 0$ feltétel mellett igaz marad $Lu := -\operatorname{div}(p\,\nabla u) + \mathbf{w} \cdot \nabla u + qu = f$ operátor esetén is.

## 3.3. A Stokes-feladat

A divergenciamentes, igen viszkózus folyadékok (pl. láva) áramlásának (Stokes flow) modellezésére szolgál a következő parciális differenciálegyenlet-rendszer:

$$\begin{cases} -\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{S}$$

ahol $N = 2$ vagy 3 és $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ korlátos tartomány, szakaszonként sima peremmel,

$\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ az áramlás sebességvektora,

$p : \Omega \to \mathbb{R}$ a nyomás,

$\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ adott, a folyadékra ható erő.

Célunk, hogy a feladat az alábbiakban definiált, az operátoregyenletek esetéhez hasonló *gyenge megoldhatóságát* a 2.2. fejezetben látott nyeregpont-feladatokhoz hasonló formára hozzuk. Ennek első lépéseként a gyenge megoldáspár tagjait tágabb függvénytérben keressük. Az első, $\mathbf{u}$ tagot $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$ feltétel miatt a valós $H^1_0(\Omega)$

terek $N$-tényezős $H_0^1(\Omega)^N$ szorzatterében, második, $p$ tagját az $L^2(\Omega)$ térben, ill. az egyértelmű megoldás kedvéért annak speciális alterében: az $\dot{L}^2(\Omega) := \{p \in L^2(\Omega) : \int_\Omega p = 0\}$ térben keressük. Ami a skalárszorzatokat illeti az említett terekben, először is vezessünk be egy jelölést:

$$\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} := \sum_{i=1}^{N} \nabla u_i \cdot \nabla v_i,$$

majd a gyenge megoldás definíciójához $H_0^1(\Omega)^N$ térben a skalárszorzat legyen az

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{H^1} := \int_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} = \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \nabla u_i \cdot \nabla v_i,$$

míg $\dot{L}^2(\Omega)$-ban maradjon a valós $L^2$-től örökölt

$$\langle p, q \rangle_{L^2} = \int_\Omega pq.$$

Ha most az (S) feladat gyenge megoldásának fogalmát a 2.26. definíció szemléletéhez hűen közelítjük meg, akkor a következő definíciót adhatjuk:

**3.10. Definíció.** *Az $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^N \times \dot{L}^2(\Omega)$ függvénypárt az (S) feladat* ***gyenge megoldásának*** *nevezzük, ha*

$$\begin{cases} \int\limits_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} - \int\limits_\Omega p\,(\operatorname{div} \mathbf{v}) = \int\limits_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, & (\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N) \\ \int\limits_\Omega q\,(\operatorname{div} \mathbf{u}) = 0. & (\forall q \in \dot{L}^2(\Omega)) \end{cases}$$

Ezután bevezetve a következő két bilineáris formát:

$$\begin{aligned} &\mathcal{A} : H_0^1(\Omega)^N \times H_0^1(\Omega)^N \to \mathbb{R}, \qquad \mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int\limits_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}, \\ &\mathcal{B} : \dot{L}^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)^N \to \mathbb{R}, \qquad \mathcal{B}(p, \mathbf{v}) := -\int\limits_\Omega p\,(\operatorname{div} \mathbf{u}), \end{aligned}$$

látszik, hogy a gyenge megoldás definíciójában szereplő rendszer alakja formálisan megegyezik a bilineáris nyeregpont-feladatoknál szereplő (NyPB) rendszerével. Most már csak be kell látnunk, hogy $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ valóban korlátos bilineáris formák, illetve, hogy $\mathcal{A}$ koercív is, valamint, hogy $\mathcal{B}$-re teljesül a bilineáris formákra vonatkozó *inf-sup-feltétel* (ISB), és már alkalmazhatjuk is a bilineáris nyeregpont-feladatokra vonatkozó 2.25. megoldhatósági tételt.

Az $\mathcal{A}$-ra vonatkozó feltételek egyszerűen következnek abból, hogy $\mathcal{A}$ skalárszorzat a $H_0^1(\Omega)^N$ térben és valóban az: $\mathcal{A}$ linearitása és szimmetriája közvetlenül látszik az $\int_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} := \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \nabla u_i \cdot \nabla v_i$ definiáló egyenlőségből, a koercivitást pedig örökli a szimpla $H_0^1(\Omega)$ Szoboljev-tér $\int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g$ skalárszorzatától (mivel pozitívak összege pozitív, ill. vektorértékű függvény pontosan akkor 0, ha a komponensei mind azok).

$\mathcal{B}$ korlátosságának bizonyításához először becsüljük a CBS-egyenlőtlenség segítségével:

$$|\mathcal{B}(p,\mathbf{u})| = \left| -\int_\Omega p\,(\operatorname{div}\mathbf{u}) \right| \le \|p\|_{L^2} \cdot \|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{L^2}$$

(bár $\mathbf{u}$ és $p$ különböző terekből származnak, mindkettőnek az $L^2$-normáját kell szerepeltetnünk, mert a CBS-egyenlőtlenség csak így érvényes). Ezután alakítsuk át $(\operatorname{div}\mathbf{u})$ $L^2$-normáját $\mathbf{u}$ $H_0^1$-normájára, felhasználva a számtani és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{L^2}^2 = \int_\Omega \left( \sum_{i=1}^N \partial_i u_i \right)^2 \le N \int_\Omega \sum_{i=1}^N (\partial_i u_i)^2 \le$$

$$\le N \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N (\partial_i u_j)^2 = N\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2 = N\|\mathbf{u}\|_{H_0^1}^2.$$

Ezzel

$$|\mathcal{B}(p,\mathbf{u})| \le \sqrt{N} \cdot \|p\|_{L^2} \cdot \|\mathbf{u}\|_{H_0^1}^2,$$

tehát $\mathcal{B}$ korlátos. Végül $\mathcal{B}$ formára azért teljesül az *inf-sup-feltétel*, mert [10] alapján a divergenciaoperátor szürjektív, azaz bármely $p \in \dot{L}^2(\Omega)$ esetén létezik $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^N$, melyre $p = -\operatorname{div}\mathbf{u}$, ezért (a 2.18. tételhez hasonló érveléssel): az adott $(p,\mathbf{u})$ párra

$$\mathcal{B}(p,\mathbf{u}) = -\int_\Omega p\,(\operatorname{div}\mathbf{u}) = \int_\Omega p^2 = \|p\|_{L^2}^2,$$

és így

$$\frac{\mathcal{B}(p,\mathbf{u})}{\|p\|_{L^2}\,\|\mathbf{u}\|_{H_0^1}} = \frac{\|p\|_{L^2}^2}{\|p\|_{L^2}\,\|\mathbf{u}\|_{H_0^1}} = \frac{\|p\|_{L^2}}{\|\mathbf{u}\|_{H_0^1}}$$

és [8, 4.13. tétel] szerint létezik $\gamma > 0$ állandó, melyre

$$\frac{\|p\|_{L^2}}{\|\mathbf{u}\|_{H_0^1}} \ge \gamma,$$

így a szóban forgó $(p,\mathbf{u})$ párra legalábbis

$$\frac{\mathcal{B}(p,\mathbf{u})}{\|p\|_{L^2}\,\|\mathbf{u}\|_{H_0^1}} \ge \gamma,$$

de akkor ennek $\mathbf{u}$-ra vonatkozó supremuma is csak nagyobb lehet $\gamma$-nál:

$$\sup_{\substack{\mathbf{u}\in H_0^1(\Omega)^N \\ \mathbf{u}\ne 0}} \frac{\mathcal{B}(p,\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|} \ge \gamma\|p\|,$$

mindez bármely $p \in \dot{L}^2(\Omega)$ esetén, hiszen $p$ tetszőleges volt. Kaptuk, hogy fennáll az *inf-sup-feltétel* (ISB) ekvivalens alakja (lásd 2.24. definíció). Alkalmazható tehát a 2.25. megoldhatósági tétel, amely szerint egyértelműen létezik $(\mathbf{u},p)$ megoldáspár, azaz gyenge megoldása az (S) Stokes-feladatnak.

## 3.4. A végeselem-módszer alapjai

A parciális differenciálegyenletek túlnyomó többségét analitikusan nem tudjuk megoldani, ezért a megoldási módszerekben kiemelt hangsúlyt kapnak a különböző numerikus közelítő eljárások. Az egyik alapvető módszer a végeselem-módszer (Finite Element Method, FEM), ennek elméleti alapjairól lesz szó a továbbiakban [7, 3. fej.].

### Ritz–Galjorkin[5]-projekció

Legyen $H$ Hilbert-tér $\mathbb{K}$ felett ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$), $\mathcal{B} : H \times H \to \mathbb{K}$ korlátos és egyenletesen pozitív bilineáris forma, valamint legyen $\phi : H \to \mathbb{K}$ korlátos lineáris funkcionál. Tekintsük az alábbi, ún. variációs feladatot:

$$\mathcal{B}(u, v) = \phi v \qquad (\forall v \in H). \tag{RG1}$$

A Lax–Milgram-lemma vonatkozó alakjából (2.11. tétel) tudjuk, hogy ennek létezik egyértelmű $u \in H$ megoldása, amelynek pontos meghatározása azonban gyakran nehézségekbe ütközik. Ehelyett a feladat közelítő megoldására törekedhetünk a következő gondolatmenet segítségével. Tudjuk, hogy $H$-nak bármely zárt alterét véve is Hilbert-teret kapunk és $\mathcal{B}$ bilineáris forma az altérre megszorítva is bilineáris, korlátos és egyenletesen pozitív, $\phi$ funkcionál megszorítása pedig ugyanúgy korlátos lineáris funkcionál, tehát a Lax–Milgram-lemma alkalmazható az altérre és a szereplő függvények megszorítására is. Legyenek $b_1, b_2, \ldots$ lineárisan független vektorok $H$-ban, melyek totális rendszert alkotnak [8, 2.19. definíció] és legyen

$$H_n := \operatorname{span}(b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

ekkor $H_n$ zárt altere $H$-nak, ezért a fenti egyenlet $H_n$-re vonatkozó ún. vetületi egyenletét felírva:

$$\mathcal{B}|_{H_n}(u_n, v) = \phi|_{H_n}(v) \qquad (\forall v \in H_n), \tag{RG2}$$

a Lax–Milgram-lemma ebben az esetben $u_n \in H_n$ megoldás egyértelmű létezését mondja ki. A Ritz–Galjorkin-projekciós módszer lényege tehát az, hogy az $u$ pontos megoldást véges dimenziós alterek sorozatán előállított, közelítő megoldásokkal approximáljuk, amelyek már könnyen számolhatók.

Valóban, ha rögzített $n$ mellett $u_n$-t $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként keressük:

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} c_j b_j,$$

[5] Walther Ritz (1878–1909) svájci születésű elméleti fizikus, Leconte-díjas, nevéhez fűződik többek között a Rydberg—Ritz-féle kombinációs elv, az atomfizika egy alapvető összefüggése; Borisz Grigirjevics Galjorkin (1871–1945) orosz mérnök, matematikus

és a vetületi egyenletet $v = b_i \in H_n$ $(i = 1, \dots, n)$ elemekre írjuk fel (az egyszerűség kedvéért $\mathcal{B}|_{H_n} = \mathcal{B}$ és $\phi|_{H_n} = \phi$ jelölésekkel élve):

$$\mathcal{B}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j b_j, b_i\right) = \phi b_i \qquad (\forall i = 1, \dots, n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \mathcal{B}(b_j, b_i) = \phi b_i \qquad (\forall i = 1, \dots, n)$$

$\mathcal{B}$ bilinearitása miatt, így $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $B_{i,j} = \mathcal{B}(b_i, b_j)$ és $y \in \mathbb{K}^n$, $y_i = \phi b_i$ bevezetésével egy algebrai egyenletrendszert kapunk:

$$Bc = y. \tag{RG3}$$

Itt $B$ mátrix, melyet *merevségi mátrixnak* neveznek szimmetrikus és pozitív definit (ez $\mathcal{B}$ egyenletes pozitivitásából egyszerűen következik), tehát (RG3) egyenletrendszernek egyértelműen létezik $c \in \mathbb{K}^n$ megoldása, ami a numerikus analízis módszereivel már kiszámítható.
Jelölje $u^*$ az (RG1) variációs feladat megoldását. Az $u_n$ közelítő megoldások konvergenciájáról az alábbiakat mondhatjuk.

**3.11. Állítás (Hiba ortogonalitása).** *Az $u_n \in H_n$ pontosan akkor (RG2) vetületi egyenlet megoldása, ha*

$$\mathcal{B}(u^* - u_n, v) = 0 \qquad (\forall v \in H_n).$$

*Bizonyítás:* Az állítás közvetlenül következik az (RG1) és (RG2) egyenletekből. ∎

**3.12. Állítás (Céa-lemma).** *Az $u_n \in H_n$ Galjorkin-megoldásra*

$$\|u^* - u_n\| \leq \frac{M}{m} \inf_{v \in H_n} \|u^* - v\|.$$

A bizonyítás megtalálható [7, 3.7. állítás]-ban.

**3.13. Következmény (Galjorkin-megoldások konvergenciája).** *Legyen $H_n$ ($n$ pozitív egész) $H$ tér véges dimenziós altereinek családja. Ha fennáll a következő approximációs tulajdonság:*

$$\forall u \in H \qquad dist(u, H_n) \to 0, \text{ ha } n \to \infty,$$

*akkor a variációs egyenlet $H_n$ alterekben vett Galjorkin-megoldásaira*

$$\|u^* - u_n\| \to 0, \text{ ha } n \to \infty.$$

Utóbbi approximációs tulajdonság fennállása esetén tehát az alterek egymásba ágyazottsága nem szükséges a konvergenciához, így az egyes alterek bázisai teljesen különbözőek lehetnek, azaz az állítás $H_n = \mathrm{span}(b_1^{(n)}, b_2^{(n)}, \ldots, b_n^{(n)}) \subset H$ esetre is érvényes. Ez sokkal nagyobb szabadságot jelent az egyes báziselemek (bázisfüggvények) megválasztásában és ezt a végeselem-módszerben ki is használjuk.

### A végeselem-módszer alapgondolata

Látjuk tehát, hogy a Galjorkin-megoldások viszonylag könnyen számolhatók és alterek alkalmas sorozatával a konvergenciájuk is biztosított. Maguk az egyes közelítő megoldások azonban nagyban függnek az alterek megválasztásától. A végeselem-módszer lényege, hogy a Hilbert-tér függvényeinek értelmezési tartományát egyszerű szerkezetű alakzatokra, véges sok, adott $h$ átmérőnél kisebb politópra bontjuk, majd ezen résztartományonként, „szakaszonként” polinom függvényekből választunk bázist az eredeti Hilbert-tér altérének. Ha ezután $h$-val 0-hoz tartunk, akkor a kapott $H_h$ terek kielégítik az előbbi (3.13.) approximációs tulajdonságot (értelemszerű módosításokkal a $H_h$ jelölésnek megfelelően), így a kapott Galjorkin-megoldások konvergensek lesznek.

## Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek, Karátson Jánosnak a szakmai iránymutatást, a mélyenszántó megjegyzéseket, a precíz átolvasást és mind tartalmi, mind stiláris vonatkozású értékes tanácsait.

# Irodalomjegyzék

[1] F. Bernau, S. J.; Smithies. A note on normal operators. *Proc. Cambridge Philos. Soc. 59*, page 727–729, 1963.

[2] P. G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems.* North-Holland Publishing Company, 1978.

[3] Besenyei Ádám; Komornik Vilmos; Simon László. *Parciális differenciálegyenletek.* Typotex, 2013.

[4] Simon L.; Baderko E. *Másodrendű parciális differenciálegyenletek.* Tankönyvkiadó, 1983.

[5] Pál J.; Simon P.; Schipp F. *Analízis II.* Nemzeti Tankönyvkiadó, 1982.

[6] Stoyan Gisbert; Takó Galina. *Numerikus módszerek, I-III.* Typotex, 1997.

[7] Horváth Róbert; Izsák Ferenc; Karátson János. *Parciális differenciálegyenletek numerikus módszerei számítógépes alkalmazásokkal.* ELTE, 2013.

[8] Karátson János. *Numerikus funkcionálanalízis.* Typotex, 2014.

[9] P. D. Lax. *Functional analysis.* Wiley-Interscience, 2002.

[10] J. Nečas. *Equations aux dérivées partielles.* Presse de l'Université de Montréal, Canada, 1965.

# NYILATKOZAT

**Név**: Baranyi Károly Tamás
**ELTE Természettudományi Kar, szak**: Matematika BSc
**NEPTUN azonosító**: COSMIU
**Szakdolgozat címe**: Operátoregyenletek, bilineáris formák és alkalmazásaik parciális differenciálegyenletekre

A szakdolgozat szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2016. május 6.

*a hallgató aláírása*