Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Nász Tünde

Globális stabilitás biológiai rendszerekben

BSc szakdolgozat

Témavezető:

Dr. Kovács Sándor

Numerikus Analízis Tanszék

Budapest, 2016

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Kovács Sándornak a rengeteg segítségért, lelkesítésért és a számos konzultációért. Tanácsai és útmutatása nélkül ez a szakdolgozat nem jöhetett volna létre.

Hálás köszönettel tartozom szüleimnek támogatásukért és türelmükért, valamint testvéremnek, hogy minden helyzetben számíthattam rá.

Budapest, 2016. május 29.

Nász Tünde

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Valamely $a \in \mathbb{R}^m$ vektor $r > 0$ sugarú **környezet**én a

$$K_r(a) := \{r \in \mathbb{R}^m : \|r - a\| < r\}$$

halmazt értjük. A $H \subset \mathbb{R}^m$ halmazt **nyílt**nak nevezzük, ha bármely $a \in H$ esetén van olyan $r > 0$, hogy fennáll a $K_r(a) \subset H$ tartalmazás.

Adott $m \in \mathbb{N}$ esetén, legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^{1+m}$ olyan nyílt halmaz, amely pozitív t irányban nem korlátos, azaz alkalmas $G \subset \mathbb{R}^m$ nyílt halmazzal $\Omega = (a, +\infty) \times G$, ahol $a \in [-\infty, +\infty)$, továbbá legyen $(\tau, \xi) \in (a, +\infty) \times G / = \Omega /$, ill. $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Az

$$\dot{x} = f \circ (\mathrm{id}, x) \tag{1.1}$$

közönséges differenciálegyenlet jobb oldaláról tegyük fel, hogy $f \in \mathfrak{C}$ és $\partial_2 f \in \mathfrak{C}$. Jelölje az (1.1) valamely, az $x(\tau) = \xi$ kezdeti feltételt kielégítő **teljes megoldás**át $\varphi(\cdot; \tau, \xi)$, ennek értelmezési tartományát pedig

$$I(\tau, \xi) =: (I_-(\tau, \xi), I_+(\tau, \xi)).$$

Könnyen belátható, hogy valamely $x_* \in \mathbb{R}^m$ esetén a

$$\mu : (a, +\infty) \to \mathbb{R}^m, \qquad \mu(t) := x_*$$

függvény pontosan akkor megoldása az (1.1) differenciálegyenletnek, ha

$$x_* \in G \qquad \text{és} \qquad f(t, x_*) = 0 \qquad (t \in (a, +\infty)).$$

Az iménti $x_* \in G$ pontot, ill. a μ függvényt szokás az (1.1) d.e. **egyensúlyi helyzet**ének, ill. **egyensúlyi megoldás**ának nevezni.

Mivel sok fizikai folyamat időtől független, ezért igen gyakran azzal a feltevéssel élünk, hogy $\Omega = (-\infty, +\infty) \times G$, ill. $f : G \to \mathbb{R}^m$, $f \in \mathfrak{C}^1$, és az

$$\dot{x} = f \circ x, \tag{1.2}$$

autonóm egyenlet megoldásainak kvalitatív tulajdonságait vizsgáljuk. Ismeretes (vö. pl. [1]), hogy

- az (1.2) d.e. bármely $\mu : (a,b) \to \mathbb{R}^m$ megoldása, ill. $c \in \mathbb{R}$ szám esetén a

  $$\nu(t) := \mu(t+c) \qquad (t \in (a-c, b-c))$$

  függvény is megoldása (1.2)-nek;

- tetszőlegesen rögzített $\xi \in G$, ill. $\tau, \sigma \in \mathbb{R}$ esetén az (1.2) d.e. $x(\tau) = \xi$, ill. $x(\sigma) = \xi$ kezdeti feltételt kielégítő teljes megoldásának értelmezési tartományára, ill. magára a $\varphi(\cdot;\tau,\xi)$ teljes megoldására

  $$(I_-(\tau,\xi), I_+(\tau,\xi)) = (I_-(\sigma,\xi) - \sigma + \tau, I_+(\sigma,\xi) - \sigma + \tau),$$

  ill.

  $$\varphi(t;\tau,\xi) = \varphi(t+\sigma-\tau;\sigma,\xi) \qquad (t \in I(\tau,\xi))$$

  teljesül.

Ha tehát $\xi \in G$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\varphi(\cdot;0,\xi) : (a,b) \to \mathbb{R}^n$, ill. $\psi(\cdot;\tau,\xi) : (c,d) \to \mathbb{R}^n$ megoldása (1.2)-nek, akkor $a = c - \tau$, $b = d - \tau$ és

$$\psi(t;\tau,\xi) = \varphi(t-\tau;0,\xi) \quad (t \in (c,d)).$$

Tehát autonóm egyenlet esetén elegendő csak az $x(0) = \xi$ alakú kezdeti feltételekhez tartozó megoldásokat vizsgálni, mert ezekből egyszerűen kaphatók az $x(\tau) = \xi$ alakú kezdeti feltételekhez tartozó megoldások. A fentiek indokolják tehát azt, hogy $\varphi(\cdot;\xi)$, ill.

$$I(\xi) = (I_-(\xi), I_+(\xi))$$

jelöli az (1.2) d.e. $x(0) = \xi$ kezdeti feltételt kielégítő teljes megoldását, ill. annak értelmezési tartományát.

Az (1.1)

$$\Phi : \left\{(t,\tau,\xi) \in \mathbb{R}^{1+1+m} : \ t \in I(\tau,\xi), \ (\tau,\xi) \in \Omega\right\} \to \mathbb{R}^m, \qquad \Phi(t,\tau,\xi) := \varphi(t;\tau,\xi)$$

karakterisztikus függvény értelmezési tartománya nyílt halmaz. Φ folytonos, így (1.1) megoldádsai a kezdeti értékeknek is folytonos függvényei. Az alkalmazásokban igen sokszor merül fel a kérdés, hogy ez a folytonos függés $t \to +\infty$ esetén is megmarad-e, vagyis a kezdeti feltételek „kicsiny" megváltoztatása mennyire változtatja meg a megoldásfüggvényt minden t-re, ha $t > \tau$.

A dolgozatban differenciálegyenletek kvalitatív tulajdonságai mellett differenciaegyenletek kvalitatív tulajdonságainak vizsgálatával is foglalkozunk.

Adott $m \in \mathbb{N}$, ill. $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ esetén az

$$x_{n+1} = f(n, x_n) \qquad (n \in \mathbb{N}_0) \tag{1.3}$$

differenciaegyenlet megoldásait fogjuk vizsgálni. Az (1.3) megoldásán olyan $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^m$ sorozatot értünk, amelyre

$$\varphi_{n+1} = f(n, \varphi_n) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

teljesül.

1.1. Példa. *Az*

$$x_{n+1} = (n+1)x_n \qquad (n \in \mathbb{N}_0) \tag{1.4}$$

differenciaegyenlet megoldása a

$$\varphi_n := \alpha n! \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozat, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$, hiszen bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\varphi_{n+1} = \alpha(n+1)! = \alpha(n+1)n! = (n+1)\alpha n! = (n+1)\varphi_n$$

teljesül. $\Diamond$

1.2. Példa. *Az*

$$x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n) \qquad (n \in \mathbb{N}_0) \tag{1.5}$$

differenciaegyenlet $x_0 = c \in \mathbb{R}$ feltételt kielégítő megoldása a

$$\varphi_n := \frac{1}{2}\left(1 - (1-2c)^{2^n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozat, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$, hiszen

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}\left(1 - (1-2c)^1\right) = \frac{1-1+2c}{2} = c,$$

ill. bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}
2\varphi_n(1-\varphi_n) &= \left(1-(1-2c)^{2^n}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(2-1+(1-2c)^{2^n}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(1-(1-2c)^{2^n}\right)\left(1+(1-2c)^{2^n}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\left((1-2c)^{2^n}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(1-(1-2c)^{2\cdot 2^n}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(1-(1-2c)^{2^{n+1}}\right) = \varphi_{n+1}.
\end{aligned}$$

teljesül. $\Diamond$

Valamely $\tau \in \mathbb{N}_0$, ill. $\xi \in \mathbb{R}^m$ esetén az (1.5) differenciaegyenlet $x(\tau) = \xi$ feltételt kielégítő megoldását $(\varphi_n(\tau,\xi))$, ill.

$$\varphi_n(\tau,\xi) \qquad (\tau \leq n \in \mathbb{N}_0)$$

fogja jelölni. Világos, hogy

$$\varphi_n(\tau,\xi) = \begin{cases} \xi & (n = \tau), \\ (f_{n-1}\circ\ldots\circ f_n)(\xi) & (\tau < n \in \mathbb{N}_0). \end{cases}$$

Ha az f jobb oldalról csak annyit teszünk fel, hogy $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, akkor autonóm

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad (n \in \mathbb{N}_0) \tag{1.6}$$

differenciaegyenlettel van dolgunk, amely esetén

$$\varphi_n(\tau,\xi) = f^{[n-\tau]}(\xi) \qquad (\tau \leq n \in \mathbb{N}),$$

ahol az $f^{[n]} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ún. iterált leképezésen a következőt értjük:

$$f^{[0]} := \mathrm{id}\,|_{\mathbb{R}^m}, \qquad f^{[n+1]} := f \circ f^{[n]} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A differenciálegyenletekhez hasonlóan itt is igaz, hogy autonóm esetben fennáll az ún.

$$\varphi_n(\tau,\xi) = \varphi_{n+k-\tau}(k,\xi) \qquad (\tau, k \in \mathbb{N}_0,\ \tau \leq n \in \mathbb{N}_0)$$

eltolásinvariancia.

A $\varphi_* \in \mathbb{R}$ számot, illetve a

$$\varphi_n := \varphi^* \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozatot az (1.6) autonóm differenciaegyenlet **egyensúlyi helyzet**ének, ill. **egyensúlyi megoldás**ának nevezzük, ha φ_* fixpontja f-nek, azaz

$$\varphi_* = f(\varphi_*)$$

teljesül. Nem nehéz belátni, hogy ha f folytonos, akkor bármely konvergens (φ_n) megoldás határértéke fixpontja f-nek. Valóban, ha $\varphi_* := \lim(\varphi_n)$, akkor

$$f(\varphi_*) = f(\lim(\varphi_n)) = \lim(f(\varphi_n)) = \lim(\varphi_{n+1}) = \varphi_*.$$

1.1. Definíció. *Legyen $p \in \mathbb{N}$. Azt mondjuk, hogy $\xi \in \mathbb{R}$ az* (1.6) *autonóm differenciaegyenlet p-periodikus pontja, ha*

$$\textit{i)}\ f^{[p]}(\xi) = \xi \qquad \textit{és} \qquad \textit{ii)}\ f^{[k]}(\xi) \neq \xi \quad (k \in [1,p) \cap \mathbb{N})$$

teljesül. A ξ pontból induló p-periodikus pályának nevezzük az

$$O(\xi) := \left\{\xi, f(\xi), \ldots, f^{[p-1]}(\xi)\right\}$$

halmazt.

Világos, hogy ha ξ p-periodikus pontja az (1.6) rendszernek, akkor ξ fixpontja $f^{[p]}$-nek, továbbá f minden fixpontja $f^{[p]}$-nek is fixpontja.

1.3. Példa. *Az*

$$x_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{x_n}{2} & (n \equiv 0\,(2)) \\ 3x_n + 1 & (n \equiv 1\,(2)) \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

differenciaegyenletnek van 3-periodikus pályája:

$$\{1, 4, 2\}. \quad \Diamond$$

2. A stabilitás fogalma

2.1. Differenciálegyenletek megoldásainak stabilitása

2.2. Definíció. *Az (1.1) d.e. valamely $\mu : (a, +\infty) \to \mathbb{R}^m$ megoldását*

1. ***(Ljapunov értelemben) stabilis****nak nevezzük, ha bármely $\varepsilon > 0$ és $\tau > a$ esetén van olyan $\delta := \delta(\varepsilon, \tau) > 0$, hogy tetszőleges $\xi \in \mathbb{R}^m$, $\|\xi - \mu(\tau)\| < \delta$ vektorra*

$$[\tau, +\infty) \subset I(\tau, \xi) \qquad \text{és} \qquad \|\varphi(t; \tau, \xi) - \mu(t)\| < \varepsilon \quad (t \in [\tau, +\infty));$$

   ellenkező esetben azt mondjuk, hogy μ ***instabilis (labilis)****.*

2. ***vonzó****nak nevezzük, ha bármely $\tau > a$ esetén van olyan $\eta := \eta(\tau) > 0$, hogy tetszőleges $\xi \in \mathbb{R}^m$, $\|\xi - \mu(\tau)\| < \eta$ vektorra*

$$[\tau, +\infty) \subset I(\tau, \xi) \qquad \text{és} \qquad \lim_{t \to +\infty} \|\varphi(t; \tau, \xi) - \mu(t)\| = 0;$$

3. ***aszimptotikusan stabilis****nak nevezzük, ha μ stabilis és vonzó.*

2.3. Definíció. *Ha az (1.1) d.e. valamely $\mu : (a, +\infty) \to \mathbb{R}^m$ megoldása vonzó, akkor az*

$$\mathcal{A}_\tau(\xi) := \left\{ \xi \in G : \lim_{t \to +\infty} \|\varphi(t; \tau, \xi) - \mu(t)\| = 0 \right\}$$

halmazt a μ megoldás $(a, +\infty) \ni \tau$-beli ***vonzási tartomány****ának nevezzük. Ha tetszőleges*

$\tau \in (a, +\infty)$ esetén $\mathcal{A}_\tau(\xi) = G$, akkor azt mondjuk, hogy a μ megoldás ***globálisan vonzó****.*

2.4. Definíció. *Az (1.1) d.e. $\mu : (a, +\infty) \to \mathbb{R}^m$ megoldását* ***globálisan aszimptotikusan stabilis****nak nevezzük, ha μ stabilis és globálisan vonzó.*

2.4. Példa. *Ha $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor az*

$$\dot{x}(t) = x(t)(\alpha + \sin(t)) \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{2.7}$$

egyenlet esetében

$$\varphi(t; \tau, \xi) = \xi e^{\alpha t - \cos(t) - \alpha\tau + \cos(\tau)} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Legyen $\eta \in \mathbb{R}$. Ekkor $\alpha < 0$ esetén a

$$\mu(t) := \eta e^{\alpha t - \cos(t) - \alpha\tau + \cos(\tau)} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

megoldás globálisan vonzó: $\mathcal{A}_\tau(\xi) = \mathbb{R}$, ui. tetszőleges $\tau \in \mathbb{R}$, ill. $\xi \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{t\to+\infty} |\varphi(t;\tau,\xi) - \mu(t)| = \lim_{t\to+\infty} |\xi - \eta|\, e^{\alpha t - \cos(t) - \alpha\tau + \cos(\tau)} = 0. \quad \Diamond$$

2.1. Megjegyzés.

1. *Az (1.1) d.e. $x_* \in G$ egyensúlyi helyzete, ill.*

$$\mu(t) := x_* \qquad (t \in (a, +\infty))$$

   egyensúlyi megoldása tehát pontosan akkor

   (a) *(Ljapunov értelemben) stabilis, ha bármely $\varepsilon > 0$ és $\tau > a$ esetén létezik olyan $\delta := \delta(\varepsilon, \tau) > 0$, hogy tetszőleges $\xi \in K_\delta(x_*)$ vektorra*

$$[\tau, +\infty) \subset I(\tau, \xi) \qquad \text{és} \qquad \varphi(t;\tau,\xi) \in K_\varepsilon(x_*) \quad (t \in [\tau, +\infty));$$

   ellenkező esetben x_*, ill. μ instabilis (labilis).

   (b) *vonzó, ha bármely $\tau > a$ esetén van olyan $\eta := \eta(\tau) > 0$, hogy tetszőleges $\xi \in K_\eta(x_*)$ vektorra*

$$[\tau, +\infty) \subset I(\tau, \xi) \qquad \text{és} \qquad \lim_{t\to+\infty} \|\varphi(t;\tau,\xi) - x_*\| = 0;$$

   (c) *aszimptotikusan stabilis, ha x_*, ill. μ stabilis és vonzó.*

2. *Ha $\tau \in (a, +\infty)$, akkor az*

$$\mathcal{A}_\tau(x_*) := \{\xi \in G : \lim_{t\to+\infty} \varphi(t;\tau,\xi) = x_*\}$$

   halmazt az x_* egyensúlyi helyzet τ-hoz tartozó vonzási tartományának nevezzük, továbbá azt mondjuk, hogy x_* ***globálisan aszimptotikusan stabilis****, ha stabilis és tetszőleges $\tau \in (a, +\infty)$ esetén $\mathcal{A}_\tau(x_*) = G$. $\square$*

2.5. Példa.

1. *Az* $\ddot{y} + y = 0$, *ill.*

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = -x_1$$

   d.e. ***(harmonikus oszcillátor)*** *esetében*

$$\varphi(t;\xi,\eta) = (\xi\cos(t) + \eta\sin(t), \eta\cos(t) - \xi\sin(t)) \qquad (t \in [0, +\infty)),$$

   így az $x_* = (0,0)$ *egyensúlyi helyzet stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis.*

2. *Adott* $a, b > 0$ *esetén az*

$$\dot{x} = ax(b - x), \qquad x \geq 0$$

   ún. ***logisztikus differenciálegyenlet*** *esetén*

$$\varphi(t;\xi) = \frac{b\xi}{\xi + (b - \xi)\, e^{-abt}} \qquad (t \in [0, +\infty)),$$

   így az $x_* = 0$ *egyensúlyi helyzet labilis, az* $x_* = b$ *egyensúlyi helyzet pedig globálisan aszimptotikusan stabilis:* $\mathcal{A}(b) = (0, +\infty)$. $\Diamond$

Valamely egyensúlyi helyzet vonzó volta önmagában még nem ad felvilágosítást arról, hogy milyen gyorsan közelednek hozzá a megoldások. Numerikus nyelven fogalmazva nem tudunk semmit a konvergencia-sebességről.

2.5. Definíció. *Az mondjuk, hogy az (1.1) d.e.* $x_* \in G$ *egyensúlyi helyzete* ***exponenciálisan stabilis****, ha bármely* $c > a$ *esetén van olyan* $\delta > 0$ *és* $K, \alpha > 0$*, hogy minden, a* $\xi \in K_\delta(x_*) \cap G$ *feltételnek eleget tévő vektorra*

$$\|\varphi(t;\tau,\xi) - x_*\| \leq Ke^{\alpha(t-\tau)}\|\xi - x_*\| \qquad (t \geq \tau \geq c).$$

Ha ez a becslés tetszőleges $\xi \in G$ *esetén fennáll, akkor azt mondjuk, hogy az* x_* *egyensúlyi helyzet* ***globálisan exponenciálisan stabilis****.*

Világos, hogy ha x_* (globálisan) exponenciálisan stabilis, akkor (globálisan) aszimptotikusan stabilis is.

2.6. Példa. *Adott logisztikus egyenlet esetében az* $x_* := b$ *globálisan exponenciálisan stabilis egyensúlyi helyzet, így globálisan aszmptotikusan stabilis (vö. 2.5./2. példa).* $\Diamond$

2.7. Példa. *Az*

$$\dot{x} = -x^3$$

egyenlet $x_* := 0$ *egyensúlyi helyzete globálisan aszimptotikusan stabilis:* $\mathcal{A}_\tau(0) = \mathbb{R}$, *de nem exponenciálisan stabilis, hiszen*

$$\varphi(t;\xi) = \begin{cases} 0 & (\xi = 0), \\ (2t + 1/\xi^2)^{-1/2} & (\xi > 0), \\ -(2t + 1/\xi^2)^{-1/2} & (\xi < 0). \end{cases} \qquad (t \in [0, +\infty)). \quad \diamond$$

2.1. Állítás. *Skaláris differenciálegyenlet esetén a vonzásból következik a stabilitás, pontosabban, ha* $n = 1$ *esetén* $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *nyílt halmaz és* $f \in \mathfrak{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, *továbbá az* (1.1) μ *megoldása vonzó, akkor* μ *stabilis is.*

Bizonyítás. Ha $\tau \in (a, +\infty)$ és $\varepsilon > 0$, akkor a vonzás definíciója alapján van olyan $\eta > 0$, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$, $|\xi - \mu(\tau)| < \eta$ esetén $\lim_{t \to +\infty} |\varphi(t; \tau, \xi) - \mu(t)| = 0$. Így, ha pl. $\xi := \mu(\tau) \pm \frac{\eta}{2}$, akkor alkalmas $T \in (a, +\infty)$ esetén

$$|\varphi(t; \tau, \xi) - \mu(t)| < \varepsilon \qquad (t \in [T, +\infty)). \tag{2.8}$$

Az egyértelműség miatt, ha $\xi_1 \leq \xi_2$, akkor

$$\varphi(t; \tau, \xi_1) \leq \varphi(t; \tau, \xi_1) \qquad (t \in I(\tau, \xi_1) \cap I(\tau, \xi_2)).$$

Így (2.8)-ból azt kapjuk, hogy ha $|\xi - \mu(\tau)| < \frac{\eta}{2}$, akkor

$$|\varphi(t; \tau, \xi) - \mu(t)| < \varepsilon \qquad (t \in [T, +\infty)). \tag{2.9}$$

A megoldásoknak a kezdeti értékektől való folytonos függése alapján van olyan $0 < \delta \leq \frac{\eta}{2}$ szám, amellyel

$$|\varphi(t; \tau, \xi) - \mu(t)| < \varepsilon \qquad (t \in [\tau, T],\ |\xi - \mu(\tau)| < \delta).$$

Így (2.9) figyelembevételével azt kapjuk, hogy ha $|\xi - \mu(\tau)| < \delta$, akkor

$$|\varphi(t; \tau, \xi) - \mu(t)| < \varepsilon \qquad (t \in [\tau + \infty)),$$

azaz μ stabilis megoldás. ■

2.1. Tétel. *Ha a $\mu : (a, +\infty) \to \mathbb{R}^m$ függvény megoldása az* (1.1) *differenciálegyenletnek, akkor az*

$$\dot{y} = F(\mathrm{id}, y) := f(\mathrm{id}, y + \mu) - f(\mathrm{id}, \mu) \tag{2.10}$$

differenciálegyenletnek van

$$\omega(t) := 0 \in \mathbb{R}^m \qquad (t \in (a, +\infty))$$

ún. ***triviális megoldás****a, továbbá μ pontosan akkor stabilis, vonzó, ill. aszimptotikusan stabilis megoldása* (1.1)*-nek, ha ω stabilis, vonzó, ill. aszimptotikusan stabilis megoldása* (2.10)*-nek.*

Bizonyítás.

1. lépés. Ha a $\mu : (a, +\infty) \to \mathbb{R}^m$ függvény megoldása az (1.1) differenciálegyenletnek és

$$\psi(t; \tau, \xi) := \varphi(t; \tau, \xi) - \mu(t) \qquad (t \in (a, +\infty)),$$

akkor egyrészt $\psi(\tau; \tau, \xi) = \xi - \mu(\tau)$, másrészt pedig bármely $t \in (a, +\infty)$ esetén

$$\begin{aligned} \psi'(t; \tau, \xi) &= \varphi'(t; \tau, \xi) - \mu'(t) = f(t, \varphi(t; \tau, \xi)) - f(t, \mu(t)) = \\ &= f(t, \psi(t; \tau, \xi) + \mu(t)) - f(t, \mu(t)), \end{aligned}$$

azaz $\psi(\cdot; \tau, \xi)$ a (2.10) egyenlet $y(\tau) = \xi - \mu(\tau)$ feltételt kielégítő megoldása, és vica versa.

2. lépés. Bármely, a $\|\psi(t; \tau, \xi) - 0\|$ eltérésre vonatkozó becslés igaz a $\|\varphi(t; \tau, \xi) - \mu(t)\|$ eltérésre, és fordítva, ami azt jelenti, hogy μ pontosan akkor (aszimptotikusan) stabilis megoldása az (1.1) egyenletnek, ha ω (aszimptotikusan) stabilis megoldása a (2.10) egyenletnek. ■

2.8. Példa. *A*

$$\mu_1(t) := -\frac{2}{2 + t^2} \quad (t \in \mathbb{R}), \qquad \textit{ill. a} \qquad \mu_2(t) := \frac{2}{2 - t^2} \quad (t \in (\sqrt{2}, +\infty))$$

az

$$\dot{x}(t) = tx^2(t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

d.e. egy-egy megoldása. Ezek a megoldások pontosan akkor stabilisak, ha az

$$\dot{y} = F_1(\mathrm{id}, y), \qquad \textit{ill.} \qquad \dot{y} = F_2(\mathrm{id}, y)$$

egyenlet triviális megoldása stabilis, ahol

$$F_1(t, y(t)) \equiv ty^2(t) - \frac{4ty(t)}{2+t^2}, \qquad \textit{ill.} \qquad F_2(t, y(t)) \equiv ty^2(t) + \frac{4ty(t)}{2-t^2}. \quad \Diamond$$

2.2. Megjegyzés. *Ha $x_* \in G$ az (1.2) d.e. egyensúlyi helyzete, azaz $g(x_*) = 0$, úgy x_* pontosan akkor*

- *(Ljapunov értelemben) stabilis, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta := \delta(\varepsilon) > 0$, hogy tetszőleges $\xi \in K_\delta(x_*)$ vektorra*

  $$[0, +\infty) \subset I(\xi) \qquad \textit{és} \qquad \varphi(t; \xi) \in K_\varepsilon(x_*) \quad (t \in [0, +\infty));$$

  ellenkező esetben x_* instabilis (labilis).

- *vonzó, ha van olyan $\eta := \eta(\tau) > 0$, hogy tetszőleges $\xi \in K_\eta(x_*)$ vektorra*

  $$[0, +\infty) \subset I(\xi) \qquad \textit{és} \qquad \lim_{t \to +\infty} \|\varphi(t; \xi) - x_*\| = 0;$$

- *aszimptotikusan stabilis, ha stabilis és vonzó.*

Az (1.2) autonóm d.e. esetén valamely x_* egyensúlyi helyzet vonzási tartománya a

$$\mathcal{A}(x_*) := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^m : \quad \lim_{t \to +\infty} \varphi(t; \xi) = x_* \right\}$$

halmaz. Az x_* pontosan akkor globálisan vonzó, ha $\mathcal{A}(x_*) = \mathbb{R}^m$, ill. pontosan akkor globálisan aszimptotikusan stabilis, ha stabilis és globálisan vonzó. $\square$

Ha μ megoldása az (1.1) d.e.-nek, akkor a (2.10) általában nem autonóm. Ez még akkor is előfordulhat, hogy ha az (1.1) d.e. autonóm.

2.2. Állítás. *Ha valamely*

- *$\xi \in G$ esetén $\mu_*(\cdot) := \varphi(\cdot; \xi)$ nem állandó megoldása az autonóm (1.2) d.e.-nek, akkor a megfelelő (2.10) egyenlet, azaz*

  $$\dot{y} = g(\mu_* + y) - g(\mu_*) =: h(\mathrm{id}, y)$$

  d.e. nem autonóm,

- *$x_* \in G$ esetén a*

$$\mu_*(t) := x_* \qquad (t \in \mathbb{R})$$

egyensúlyi megoldása az (1.2) *d.e.-nek, akkor a megfelelő* (2.10) *egyenlet, azaz*

$$\dot{y} = h(y) := g(x_* + y) \qquad (y \in G \backslash \{x_*\} := \{y - x_* \in \mathbb{R}^m : \ y \in G\})$$

d.e. már autonóm. Ez az oka annak, hogy sok tételben azt teszik fel, hogy $x_* = 0$. □

A 2.1. tételt jól lehet alkalmazni lineáris egyenletek esetén.

2.2. Tétel. *Legyen $G := \mathbb{R}^m$, azaz $\Omega := (a, +\infty) \times \mathbb{R}^m$, $A \in \mathfrak{C}((a, +\infty), \mathbb{R}^{m \times m})$ és $b \in \mathfrak{C}((a, +\infty), \mathbb{R}^m)$, ekkor az* (1.1)*, azaz az*

$$\dot{x} = Ax + b \tag{2.11}$$

lineáris d.e. valamely megoldása pontosan akkor stabilis, ill. vonzó, a

$$\dot{x} = Ax \tag{2.12}$$

homogén rész triviális megoldása stabilis, ill. vonzó.

Bizonyítás. Ha $\mu : (a, +\infty) \to \mathbb{R}^m$ függvény a (2.11) d.e. egy megoldása, akkor a (2.10) d.e. a következő

$$\dot{y} = [A(y + \mu) + b] - [A\mu + b] = Ay. \quad \blacksquare$$

2.9. Példa. *Az*

$$\dot{x} = -x + \sin$$

skaláris d.e. minden megoldása aszimptotikusan stabilis, ui. az

$$\dot{x} = -x$$

triviális megoldása aszimptotikusan stabilis, hiszen

$$\varphi(t; \tau, \xi) = \xi e^{-(t-\tau)} \qquad (t \in [\tau, +\infty)). \quad \lozenge$$

Ezért van értelme magának a (lineáris) differenciálegyenletnek a stabilitásáról beszélni.

A mátrix-exponenciális (vö. [2]) felhasználásával belátható a következő állítás:

2.3. Tétel. *Ha alkalmas $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ mátrix esetén*

$$A(t) = M \qquad (t \in (a, +\infty)),$$

akkor a (2.12) *lineáris egyenlet triviális megoldása pontosan akkor*

1. *stabilis, ha az M mátrix sajátértékeinek valós része nem-pozitív, és a zérus valós részű sajátértékek algebrai és geometriai multiplicitása megegyezik, azaz az ilyen sajátértékhez pontosan annyi független sajátvektor tartozik, ahányszoros gyöke az illető sajátérték az M karakterisztikus polinomjának.*

2. *aszimptotikusan stabilis, ha az M mátrix sajátértékeinek valós része negatív.*

Bizonyítás. Vö. [1]. ■

2.10. Példa. *Ha*

$$M := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad b(t) := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

akkor behelyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az

$$\dot{x} = Mx + b$$

egyenletnek megoldása a

$$\varphi(t) := \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ -te^{-t} \\ te^{-t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvény. Mivel M karakterisztikus polinomja (vö. [2], 111. old., (3.23) formula) a

$$\chi_M(z) := z^3 + 2z^2 + z = z(z^2 + 2z + 1) = z(z+1)^2 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

polinom, ezért a rendszer triviális megoldása, így φ is stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis. $\diamondsuit$

2.4. Tétel. *Ha a* (2.12) *homogén lineáris d.e. aszimptotikusan stabilis, akkor globálisan aszimptotikusan stabilis: bármely* $\tau \in (a, +\infty)$ *esetén* $\mathcal{A}_\tau(0) = \mathbb{R}^m$.

Bizonyítás. Mivel a (2.12) egyenlet megoldásai a $\mathfrak{C}^1((a, +\infty), \mathbb{R}^m)$ tér egy m-dimenziós alterét alkotják, azaz bármely megoldás valamely bázis elemeinek lineáris kombinációja, ezért, ha a triviális megoldás közeléből indított megoldások magához a triviális megoldáshoz tartanak, akkor minden megoldás ugyanígy viselkedik. ■

2.2. Differenciaegyenletek megoldásainak stabilitása

2.6. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az (1.3) differenciaegyenlet $\mu : N_0 \to \mathbb{R}^m$ megoldása*

1. ***stabilis**, ha bármely $\varepsilon > 0$ és $\tau \in \mathbb{N}_0$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy tetszőleges $\xi \in \mathbb{R}^m$, $\|\xi - \mu_\tau\| < \delta$ vektorra*

   $$\|\varphi_n(\tau, \xi) - \mu_n\| < \varepsilon \qquad (\tau \leq n \in \mathbb{N}_0);$$

   *ellenkező esetben azt mondjuk, hogy (μ_n) **instabilis (labilis)**.*

2. ***vonzó**, ha bármely $\tau \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $\eta > 0$, hogy tetszőleges $\xi \in \mathbb{R}^m$, $\|\xi - \mu_\tau\| < \eta$ vektorra*

   $$\lim_{n\to\infty} (\|\varphi_n(\tau, \xi) - \mu_n\|) = 0$$

   teljesül. Az

   $$\mathcal{A}_\tau(\xi) := \left\{\xi \in \mathbb{R}^m : \lim_{n\to\infty}(\|\varphi_n(\tau, \xi) - \mu_n\|) = 0\right\}$$

   *halmazt a (μ_n) megoldás **vonzási tartomány**ának nevezzük.*

3. ***aszimptotikusan stabilis**, ha stabilis és vonzó.*

4. ***globálisan vonzó**, ha $\mathcal{A}_\mu = \mathbb{R}^m$.*

5. ***globálisan aszimptotikusan stabilis**, ha stabilis és globálisan vonzó.*

2.11. Példa. *Az*

$$x_{n+1} = x_n^2 \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

autonóm differenciaegyenlet esetében

$$\varphi_n(\tau, \xi) = \xi^{2^{n-\tau}} \qquad (\tau \leq n \in \mathbb{N}_0).$$

Az egyenletnek két egyensúlyi helyzete van:

$$\mu_n := 0 \quad (n \in \mathbb{N}_0) \qquad \text{és} \qquad \nu_n := 1 \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

(ν_n) nem globálisan vonzó, hiszen bármely $\xi \in (-1, 1)$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\tau, \xi) = \lim_{n\to\infty} \left(\xi^{2^{n-\tau}}\right) = 0.$$

A (μ_n) egyensúlyi megoldás attraktív, és vonzási tartománya: $\mathcal{A}_0 = (-1, 1)$. $\Diamond$

2.12. Példa. *Az*

$$x_{n+1} = x_n \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

autonóm differenciaegyenlet esetében

$$\varphi_n(\tau, \xi) = \xi \qquad (\tau \leq n \in \mathbb{N}_0).$$

Így bármely megoldás stabilis, de egyik sem vonzó, így nem aszimptotikusan stabilis. $\Diamond$

2.13. Példa. *Az*

$$x_{n+1} = \frac{n}{n+1} x_n \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

autonóm differenciaegyenlet esetében

$$\varphi_n(\tau, \xi) = \frac{\tau \xi}{n} \qquad (\tau \leq n \in \mathbb{N}).$$

Mivel

$$\lim_{n \to \infty} (\varphi_n(\tau, \xi)) = 0,$$

ezért a

$$\mu_n := 0 \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

egyensúlyi megoldás globálisan vonzó. Nem nehéz belátni, hogy (μ_n) *stabilis is, hiszen ha* $\varepsilon > 0$ *és* $\tau \in \mathbb{N}_0$*, akkor a* $\delta := \varepsilon/2 > 0$ *számmal bármely* $\xi \in \mathbb{R}$, $|\xi| < \delta$ *esetén*

$$|\varphi_n(\tau, \xi)| = \frac{\tau |\xi|}{n} \leq |\xi| < \varepsilon \qquad (\tau \leq n \in \mathbb{N})$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy (μ_n) *globálisan aszimptotikusan stabilis.* $\Diamond$

2.5. Tétel. *Ha a* $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^m$ *sorozat megoldása az* (1.3) *differenciaegyenletnek, akkor az*

$$y_{n+1} = f(n, y_n + \mu_n) - f(n, \mu_n) \qquad (n \in \mathbb{N}_0) \tag{2.13}$$

differenciálegyenletnek van

$$\omega_n := 0 \in \mathbb{R}^m \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

ún. ***triviális megoldás****a, továbbá* (μ_n) *pontosan akkor stabilis, vonzó, ill. aszimptotikusan stabilis megoldása* (1.3)*-nak, ha* (ω_n) *stabilis, vonzó, ill. aszimptotikusan stabilis megoldása* (2.13)*-nak.*

Bizonyítás.

1. lépés. Ha a $\mu : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^m$ sorozat megoldása az (1.3) differenciálegyenletnek és

$$\psi_n(\tau, \xi) := \varphi_n(\tau, \xi) - \mu_n \qquad (\tau \leq n \in \mathbb{N}_0),$$

akkor egyrészt $\psi_\tau(\tau, \xi) = \xi - \mu_\tau$, másrészt pedig bármely $\tau \leq n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(\tau, \xi) &= \varphi_{n+1}(\tau, \xi) - \mu_{n+1} = f(n, \varphi_n(\tau, \xi)) - f(n, \mu_n) = \\ &= f(n, \psi_n(\tau, \xi) + \mu_n) - f(n, \mu_n), \end{aligned}$$

azaz $(\psi_n(\tau, \xi))$ a (2.13) egyenlet $y_\tau = \xi - \mu_\tau$ feltételt kielégítő megoldása, és vica versa.

2. lépés. Bármely, a $\|\psi_n(\tau, \xi) - 0\|$ eltérésre vonatkozó becslés igaz a $\|\varphi_n(\tau, \xi) - \mu_n\|$ eltérésre, és fordítva, ami azt jelenti, hogy (μ_n) pontosan akkor (aszimptotikusan) stabilis megoldása az (1.3) egyenletnek, ha (ω_n) (aszimptotikusan) stabilis megoldása a (2.13) egyenletnek. ■

Ha (μ_n) megoldása az (1.3) differenciaegyenletnek, akkor a (2.13) általában nem autonóm. Ez még akkor is előfordulhat, hogy ha az (1.3) differenciaegyenlet autonóm.

A 2.5. tételt jól lehet alkalmazni lineáris egyenletek esetén.

2.6. Tétel. *Ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $A_n \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $b_n \in \mathbb{R}^m$, akkor az*

$$x_{n+1} = A_n x_n + b_n \qquad (n \in \mathbb{N}_0) \tag{2.14}$$

lineáris differenciaegyenlet (φ_n) megoldása pontosan akkor stabilis, ill. vonzó, ha a homogén rész triviális megoldása stabilis, ill. vonzó.

Bizonyítás. Ha $\mu : \mathbb{N} : 0 \to \mathbb{R}^m$ sorozat az inhomogén lineáris differenciaegyenlet egy megoldása, akkor a (2.13) differenciaegyenlet a következő

$$y_{n+1} = [A_n(y_n + \mu_n) + b_n] - [A_n\mu_n + b_n] = A_n y_n. \quad ■$$

Ezért van értelme magának a (lineáris) differenciaegyenletnek a stabilitásáról beszélni.

2.7. Tétel. *Ha alkalmas $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$ mátrix esetén*

$$A_n = M \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

akkor a (2.14) egyenlet homogén részének triviális megoldása pontosan akkor

1. *stabilis, ha*
   - $\sigma(M) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, *és*
   - *ha valamely $\lambda \in \sigma(M)$ sajátérték esetén $|\lambda| = 1$, akkor λ geometriai és algebrai multiplicitása megegyezik.*
2. *globálisan aszimptotikusan stabilis, ha $\sigma(M) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.*

Bizonyítás. Vö. [7]. ■

2.7. Definíció. *Az mondjuk, hogy az (1.6) differenciaegyenlet φ_* egyensúlyi helyzete* ***exponenciálisan stabilis****, ha bármely $c \in \mathbb{N}_0$ esetén van olyan $\delta > 0$ és $K > 0$ és $\eta \in (0, 1)$, hogy minden $\xi \in \mathbb{R}^m$, $\|\xi - \varphi_*\| < \delta$ vektorra*

$$\|\varphi_n(\tau, \xi) - \varphi_*\| \leq K\eta^{n-\tau}\|\xi - \varphi_*\| \qquad (c \leq \tau \leq n \in \mathbb{N}_0).$$

Ha ez a becslés tetszőleges $\xi \in \mathbb{R}^m$ esetén fennáll, akkor azt mondjuk, hogy a φ_* egyensúlyi helyzetet ***globálisan exponenciálisan stabilis****.*

Világos, hogy ha φ_* (globálisan) exponenciálisan stabilis, akkor (globálisan) aszimptotikusan stabilis is.

3. Klasszikus stabilitási kritériumok

3.1. Differenciálegyenletekre vonatkozó kritériumok

3.8. Tétel. *Ha $x_* \in G$ az (1.2) d.e. egyensúlyi helyzete: $f(x_*) = 0$, és*

1. *az $f'(x_*)$ Jacobi-mátrix stabilis, azaz bármely $\lambda \in \sigma(f'(x_*))$ sajátérték negatív valós részű: $\Re(\lambda) < 0$, akkor x_* aszimptotikusan, sőt exponenciálisan stabilis.*

2. *az $f'(x_*)$ Jacobi-mátrixnak van pozitív valós részű sajátértéke, akkor x_* labilis.*

Bizonyítás. Vö. [1]. ■

3.14. Példa. *Legyen $g \in \mathfrak{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$: $g(0) = 0$, $g' \geq 0$ és az*

$$\ddot{y} = -g(\dot{y}) - \sin(y) \tag{3.15}$$

súrlódásos ingaegyenlet egyensúlyi helyzeteinek stabilitását vizsgáljuk. Mivel a (3.15) másodrendű egyenlet az

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = -g(x_2) - \sin(x_1) \tag{3.16}$$

rendszerrel ekvivalens, ezért ha

$$f(x) := (x_2, -g(x_2) - \sin(x_1)) \qquad (x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2),$$

akkor az egyensúlyi helyzetek a

$$(k\pi, 0) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

pontok. Továbbá, mivel

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x_1) & -g'(x_2) \end{bmatrix} \qquad \big(x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\big)$$

ill.

$$f'(k\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{k+1} & -g'(0) \end{bmatrix} \qquad (k \in \mathbb{Z}),$$

ezért, ha k páros és $g'(0) > 0$, akkor ezek az egyensúlyi helyzetek exponenciálisan, így aszimptotikusan is stabilisak, ui. az $f'(k\pi, 0)$ Jacobi-mátrix sajátértékei a

$$p(z) := z^2 + g'(0)z + (-1)^{k+2} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinom gyökei:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-g'(0) \pm \sqrt{[g'(0)]^2 + 4(-1)^{k+1}}}{2}. \quad \diamond$$

3.15. Példa. *Legyen $\beta := 8/3$ és $\sigma := 10$, továbbá $r > 0$. Ekkor az*

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\sigma x_1 + \sigma x_2 \\ \dot{x}_2 &= r x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\beta x_3 + x_1 x_2 \end{aligned}\right\} =: f(x) \qquad \left(x = (x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{R}_0^+)^3\right) \tag{3.17}$$

*ún. **Lorenz-rendszer**nek*

- *egyensúlyi helyzete az $Eq_0 := (0, 0, 0)$, ill.*
- *$r > 1$ esetén még*

  $$Eq_+ := (\sqrt{\beta(r-1)}, \sqrt{\beta(r-1)}, r-1),$$

  ill.

  $$Eq_- := (-\sqrt{\beta(r-1)}, -\sqrt{\beta(r-1)}, r-1)$$

  is.

Világos, hogy

$$f'(x) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - x_3 & -1 & -x_1 \\ x_2 & x_1 & -\beta \end{bmatrix} \qquad \left(x = (x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{R}_0^+)^3\right).$$

Az $f'(Eq_0)$ mátrix karakterisztikus polinomja:

$$p_{Eq_0}(z) := z^3 + (\sigma + \beta + 1)z^2 + (\beta + \sigma(\beta + 1 - r))z + \beta\sigma(1 - r),$$

melynek gyökei:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\sigma + 1}{2} \pm \frac{\sqrt{(\sigma+1)^2 + 4\sigma(r-1)}}{2}, \qquad \lambda_3 = -\beta.$$

Így $r \in (0,1)$ esetén $f'(Eq_0)$ spektrumára

$$\sigma(f'(Eq_0)) \subset \{\lambda \in \mathbb{R} : \ \lambda < 0\}$$

azaz az $x_* = Eq_0$ egyensúlyi helyzet exponenciálisan, és így aszimptotikusan is stabilis. Az $f'(Eq_-)$, ill. $f'(Eq_+)$ mátrix karakterisztikus polinomja:

$$p_{Eq_\pm}(z) := z^3 + \underbrace{(\sigma+\beta+1)}_{=:A} z^2 + \underbrace{\beta(\sigma+r)}_{=:B} z + \underbrace{2\sigma\beta(r-1)}_{=:C} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Ha valamely $0 \neq \mu \in \mathbb{R}$ esetén

$$0 = p_{Eq_\pm}(\mu\imath) = -\mu^3\imath^3 - A\mu^2 + B\mu\imath + C,$$

azaz

$$\mu(\mu^2 - B) = 0 \qquad \text{és} \qquad C - A\mu^2 = 0,$$

akkor $C - AB = 0$, ahonnan

$$r = \frac{\sigma(\sigma+\beta+3)}{\sigma-\beta-1} = \frac{470}{19} =: r_*$$

következik. Ha tehát $r < r_*$, akkor az $x_* := Eq_\pm$ egyensúlyi helyzet exponenciálisan, és így aszimptotikusan is stabilis, $r > r_*$ esetén pedig labilis. $\diamondsuit$

Belátható, hogy a 3.8. tételbeli állítás részben megfordítható:

3.9. Tétel. *Az (1.2) d.e. x_* egyensúlyi pontja pontosan akkor (lokálisan) exponenciálisan stabilis, ha az $f'(x_*)$ Jacobi mátrix stabilis.* $\square$

3.16. Példa. *Ez az állítás persze már nem igaz az aszimptotikus stabilitásra, mint ahogy azt az alábbi példa mutatja. A 2.7. példabeli d.e. esetében a $f'(0) = 0$, azaz a megfelelő Jacobi mátrix nem stabilis, de az $x_* = 0$ egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabilis.* $\diamondsuit$

A 2.7. példabeli d.e. $x_* := 0$ egyensúlyi helyzetének (globális) aszimptotikus stabilitása megsejthető a következőképpen is. Legyen

$$V(x) := x^4 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor

$$V'(x) \cdot f(x) = -4x^6 \leq 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Ezért bármely $\mu \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ megoldásra

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(\mu(t)) \leq 0 \qquad (t \in \mathcal{D}_\mu),$$

így a

$$\mathcal{D}_\mu \ni t \mapsto V(\mu(t))$$

nem-negatív függvény monoton csökkenő ($\mathcal{D}_\mu$ intervallum), ennélfogva

$$l := \lim_{t \to +\infty} V(\mu(t)) \in [0, +\infty).$$

Mivel bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$V(x) > 0, \qquad \text{ezért} \qquad V'(x) \cdot f(x) < 0,$$

aminek a segítségével várható, hogy $l = 0$, ami azt jelenti, hogy

$$V(\mu(t)) \longrightarrow 0, \qquad \text{azaz} \qquad \mu(t) \longrightarrow 0 \qquad (t \to +\infty). \quad \Diamond$$

3.17. Példa. *Könnyen látható, hogy a*

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & -5x_2 - 2x_1^3 \\ \dot{x}_2 & = & 5x_1 - 3x_2^3 \end{array}\right\} =: f(x) \qquad \left(x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\right) \tag{3.18}$$

rendszernek egyetlen egyensúlyi helyzete van: $x_* := (0, 0)$. *Mivel*

$$f'(x_*) = \begin{bmatrix} -5x_2 & 0 \\ 0 & 5x_1 \end{bmatrix} \qquad \left(x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\right),$$

ezért x_* *stabilitásának eldöntésére a 3.8. tétel nem alkalmazható. Vizsgáljuk meg a rendszer trajektóriái hogyan metszik az origó körüli koncentrikus köröket, vagyis a*

$$V(x_1, x_2) :=\equiv x_1^2 + x_2^2$$

függvény szintvonalait. Ennek vizsgálatához helyettesítsük be a (3.18) *rendszer* $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ *megoldását* V*-be, majd deriváljuk a* $V \circ \varphi$ *összetett függvényt! Világos,* *hogy bármely $t \in \mathcal{D}_\varphi$ esetén*

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(\varphi(t)) &= \langle \operatorname{grad} V(\varphi(t)), \dot{\varphi} \rangle = \\
&= \langle (\partial_1 V(\varphi(t)), \partial_2 V(\varphi(t))), (\dot{\varphi}_1(t), \dot{\varphi}_2(t)) \rangle = -(4\varphi_1^4(t) + 6\varphi_2^4(t)) < 0.
\end{aligned}$$

Geometriailag ez azt jelenti, hogy a 3.18 egyenlet pályái az origó körüli koncentrikus köröket – kívülről befelé haladva – szögben metszik. Ha most

$$V(t) := V(\varphi(t)) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

akkor

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &\leq -4(\varphi_1^4(t) + \varphi_2^4(t)) = -4(\varphi_1^2(t) + \varphi_1^2(t))^2 + 8\varphi_1^2(t)\varphi_2^2(t) \leq \\
&\leq -4(\varphi_1^2(t) + \varphi_2^2(t))^2 + 2(\varphi_1^2(t) + \varphi_2^2(t))^2 = -2V^2(t).
\end{aligned}$$

Ennélfogva $\dot{V}/V^2 \leq -2$. Integrálva ezt a differenciál-egyenlőtlenséget, azt kapjuk, hogy

$$0 \leq V(t) \leq \frac{1}{\frac{1}{V(0)} + 2t} \longrightarrow 0 \qquad (t \to +\infty).$$

Ez pedig azt jelenti, hogy a (3.18) *rendszer* $(0,0)$ *triviális egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabilis. Továbbá, mivel mindez tetszőleges $(\varphi_1(0), \varphi_2(0)) \neq (0,0)$ kezdeti feltétel esetén fennáll, ezért a $(0,0)$ triviális egyensúlyi helyzet globálisan aszomptotikusan stabilis.* $\diamondsuit$

3.8. Definíció. *Adott $0 \in G \subset \mathbb{R}^m$ nyílt halmaz esetén azt mondjuk, hogy a $V : G \to \mathbb{R}$ függvény **pozitív szemidefinit**, ha folytonos, $V(0) = 0$ és bármely $x \in G$ esetén $V(x) \geq 0$ teljesül. V pozitív definit, ha V pozitív szemidefinit, továbbá minden $0 \neq x \in G$ esetén $V(x) > 0$. V negatív (szemidefinit), ha $-V$ pozitív (szemidefinit).*

3.9. Definíció. *Legyen $G \subset \mathbb{R}^m$ nyílt halmaz, $V \in \mathfrak{C}^1(G, \mathbb{R})$. Ekkor a*

$$\dot{V}_{(1.2)}(x) := \langle \operatorname{grad} V(x), f(x) \rangle = \sum_{k=1}^{m} \partial_k V(x) \cdot f_k(x) \qquad (x \in G)$$

függvényt az (1.2) ***rendszer szerinti derivált**jának nevezzük.*

3.10. Tétel. *Ha valamely* $0 \in H \subset G$ *nyílt halmaz esetén van olyan* $V \in \mathfrak{C}^1(H, \mathbb{R})$ *függvény, hogy* V *pozitív definit,* $\dot{V}_{(1.2)}$ *negatív szemidefinit, akkor az* (1.2) *rendszer triviális megoldása stabilis. Továbbá, ha* $\dot{V}_{(1.2)}$ *negatív definit, akkor* (1.2) *triviális megoldása globálisan aszimptotikusan stabilis.* $\square$

3.2. Differenciaegyenletekre vonatkozó kritériumok

3.11. Tétel. *Ha $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ folytonosan differenciálható, továbbá $\varphi_* \in \mathbb{R}$ az* (1.6) *autonóm differenciaegyenlet egyensúlyi helyzete: $f(\varphi_*) = \varphi_*$, és*

1. *az $f'(\varphi_*)$ Jacobi-mátrixának minden sajátértéke az origó körüli egységkör belsejében van, akkor φ_* aszimptotikusan stabilis;*

2. *az $f'(x_*)$ Jacobi-mátrixnak van az origó körüli egységkörön kívül sajátértéke, akkor φ_* labilis.*

Bizonyítás. Vö. [7]. ■

3.18. Példa. *Ha $a, b \in \mathbb{R}$, akkor $a \neq 1$ esetén az*

$$x_{n+1} = ax_n + b \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{3.19}$$

egyenletnek a

$$\varphi^* := \frac{b}{1-a}$$

szám egyensúlyi helyzete és φ^*

- *$|a| < 1$ esetén aszimptotikusan stabilis,*

- *$|a| > 1$ esetén pedig labilis,*

ui. az

$$f(x) := ax + b \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényre $f \in \mathfrak{C}^1$ és $f'(\varphi^*) = a$. ◊

A fenti eredmény persze egyszerűbben is belátható. Világos, hogy

$$\varphi_n = \begin{cases} \varphi_0 + nb & (a = 1) \\ a^n \varphi_0 + b \cdot \dfrac{a^n - 1}{a - 1} = a^n \left(\varphi_0 - \dfrac{b}{1-a}\right) + \dfrac{b}{1-a} & (a \neq 1) \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

hiszen adott φ_0 esetén a φ sorozat első néhány tagja:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= a\varphi_0 + b, \\
\varphi_2 &= a\varphi_1 + b &&= aa\varphi_0 + ab + b, \\
\varphi_3 &= a\varphi_2 + b &&= aaa\varphi_0 + aab + ab + b, \\
\varphi_4 &= a\varphi_3 + b &&= aaaa\varphi_0 + aaab + aab + ab + b, \\
\varphi_5 &= a\varphi_4 + b &&= aaaaa\varphi_0 + aaaab + aaab + aab + ab + b,
\end{aligned}$$

ezután már (teljes indukcióval) könnyen igazolható, hogy

$$\varphi_n = \left(\prod_{k=1}^{n} a\right)\varphi_0 + \sum_{l=1}^{n}\left(\prod_{k=l+1}^{n} a\right) b \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Mivel

$$\varphi_n = a^n\left(\varphi_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a} = a^n(\varphi_0 - \varphi_*) + \varphi_* \quad (n \in \mathbb{N}).$$

ezért $\varphi_0 = \varphi_*$ esetén $\lim(\varphi_n) = \varphi_*$, ill. ha $\varphi_0 \neq \varphi_*$ és

1. $|a| < 1$, akkor $\lim(\varphi_n - \varphi_*) = 0$, azaz $\lim(\varphi_n) = \varphi_*$;

2. $a > 1$, akkor $\lim(\varphi_n) = \mathrm{sgn}(\varphi_0 - \varphi_*)\infty$;

3. $a < -1$, akkor $\lim(|\varphi_n|) = +\infty$.

3.3. Megjegyzés. *Ha*

1. *$a = 1$, akkor a (3.19) egyenletnek $b \neq 0$ esetén nincs egyensúlyi helyzete ill. ha $b = 0$, akkor tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén $\varphi_* := c$ egyensúlyi helyzet, ami stabilis, ui. ekkor*

$$\varphi_n = \varphi_0 \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

2. *$a = -1$, akkor a (3.19) egyenletnek egyetlen egyensúlyi helyzete van: $\varphi_* := b/2$, ami stabilis, ui. ebben az esetben*

$$\varphi_n = \varphi_* + (-1)^n(\varphi_0 - \varphi_*) \qquad (n \in \mathbb{N}_0). \quad \square$$

3.19. Példa. *Ha $\lambda \in [0, +\infty)$, akkor*

$$x_{n+1} = F_\lambda(x_n) :\equiv \lambda x_n(1 - x_n) \qquad (n \in \mathbb{N}_0) \tag{3.20}$$

ún. ***logisztikus differenciaegyenlet*** *egyensúlyi helyzetét illetően a következő két eset lehetséges.*

1. *$\lambda = 0$ esetén az F_λ függvénynek egyetlen fixpontja van:*

$$F_0(\varphi_*) = \varphi_* \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi_* = 0,$$

2. *$\lambda > 0$ esetén F_λ-nak két fixpontja van:*

$$F_\lambda(\varphi_*) = \xi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi_* \in \left\{ x_0(\lambda) :\equiv 0,\ x_1(\lambda) :\equiv \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right\}$$

   ($\lambda = 1$ esetén x_1 egybeesik az x_0 triviális egyensúlyi helyzettel).

Így

1. *$\lambda = 0$ esetén, ha $\xi \in \mathbb{R}$, akkor*

$$\varphi_n(0,\xi) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}_0) \qquad \text{és} \qquad \lim(\varphi_n(0,\xi)) = 0$$

   (tehát x_0 vonzó fixpontja F_λ-nak).

2. *$\lambda > 0$esetén*

$$f'_\lambda(0) = \lambda \qquad \text{és} \qquad f'_\lambda\left(\frac{\lambda - 1}{\lambda}\right) = 2 - \lambda.$$

   következtében

   - *$x_0(\lambda)$ aszimptotikusan stabilis, ha $\lambda \in (0,1)$, és*

$$\lambda \in (1, +\infty),$$

     esetén labilis;

   - *$x_1(\lambda)$ aszimptotikusan, ha $\lambda \in (1,3)$, és*

$$\lambda \in (0,1) \cup (3, +\infty)$$

     esetén labilis. $\Diamond$

3.12. Tétel. *Ha az $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ függvény esetében van olyan $q \in [0, 1)$, hogy*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq q\|x - y\| \qquad (x, y \in \mathbb{R}^m),$$

akkor az (1.6) autonóm differenciaegyenletnek pontosan egy φ_* egyensúlyi helyzete van, amely globálisan aszimptotikusan stabilis és exponenciálisan stabilis.

Bizonyítás. Vö. [10]. ■

Így tehát, ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválható függvény, továbbá

$$|f'(x)| < 1 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor az (1.6) differenciaegyenlet x_* egyensúlyi helyzete globálisan aszimptotikusan stabilis, hiszen a Lagrange-féle középértéktétel következményeként bármely $x, y \in \mathbb{R}$: $x < y$ esetén van olyan $\xi \in (x, y)$, hogy

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)(x - y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y|.$$

4. A Beretta-Capasso-módszer

Tegyük fel, hogy az (1.2)-beli f esetében

$$f(x) = \operatorname{diag}(x)(e + Ax) + b(x) \qquad (x \in G),$$

azaz tekintsük az

$$\dot{x} = \operatorname{diag}(x)(e + Ax) + b(x) \tag{4.21}$$

rendszert, ahol $e \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, továbbá valamely $0 \leq c \in \mathbb{R}^m$ vektorral, ill. $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $b_{ij} \geq 0$, $b_{ii} = 0$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$ mátrixszal

$$b(x) := c + Bx \qquad (x \in G).$$

Ha az (1.2) rendszernek van a G tartomány pozitív ortánsának belsejében x_* egyensúlyi helyzete, akkor nyilvánvalóan

$$f(x_*) = 0, \qquad \text{azaz} \qquad \operatorname{diag}(x_*)(e + Ax_*) + b(x_*) = 0.$$

Így x_* pozitivitása következtében

$$e = -Ax_* - \operatorname{diag}\left(x_*^{-1}\right) b\left(x_*\right),$$

ahol

$$x_*^{-1} := \left(\frac{1}{x_{*1}}, \ldots, \frac{1}{x_{*m}}\right).$$

Ennek (4.21)-be való helyettesítésével azt kapjuk, hogy (4.21) a következő alakú:

$$\dot{x} = \operatorname{diag}(x)\left[A + \operatorname{diag}\left(x_*^{-1}\right) B\right](x - x_*) = -\operatorname{diag}(x - x_*) \operatorname{diag}\left(x_*^{-1}\right) b(x).$$

4.10. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ mátrix **Volterra-Ljapunov-stabilis**, ha alkalmas $W \in \mathbb{R}^{m\times m}$ pozitív diagonális mátrix esetén a*

$$WA + A^T W$$

mátrix definit.

4.13. Tétel. *Ha a* (4.21) *rendszernek a* G *pozitív ortánásnak belsejében egyensúlyi helyzete van és a*

$$-\left[\widetilde{A} + \operatorname{diag}\left(\frac{-b_1(x)}{x_1 x_{*1}}, \dots, -\frac{b_n(x)}{x_m x_{*m}}\right)\right]$$

mátrix Volterra-Ljapunov-stabilis, ahol

$$\widetilde{A} := A + \operatorname{diag}\left(x_*^{-1}\right) B,$$

akkor x_* *globálisan aszimptotikusan stabilis.*

Bizonyítás. Legyen

$$V(x) := \sum_{k=1}^{m} w_k \left(x_k - x_{*k} - x_{*k} \ln\left(\frac{x_k}{x_{*k}}\right)\right) \qquad (x \in \mathbb{R}^m :\ x_k > 0,\ k \in \{1, \dots, m\}).$$

Ekkor $V > 0$, és a (4.21) rendszer szerinti deriváltja

$$\begin{aligned} \dot{V}_{(4.21)} &\equiv (x - x_*)^T W \widetilde{A}(x - x_*) \sum_{k=1}^{m} w_k \frac{b_k(x)}{x_k x_{*k}} (x_k - x_{*k})^2 = \\ &\equiv (x - x_*)^T W \left[\widetilde{A} + \operatorname{diag}\left(\frac{-b_1(x)}{x_1 x_{*1}}, \dots, -\frac{b_n(x)}{x_m x_{*m}}\right)\right](x - x_*) \leq 0, \end{aligned}$$

és egyenlőség pontosan akkor van, ha $x = x_*$. Így a 3.10. tétel következtében az állítás igaz. ■

A 4.13. tételbeli egyensúlyi helyzet globális aszimptotikus stabilitásából az is következik, hogy nincsen más egyensúlyi helyzete az (4.21) rendszernek.

Alkalmazásként megvizsgáljuk a Cooke és Yorke által javasolt SIS-modellt (vö. [4]). Tekintsük a következő elsőrendű autonóm differenciálegyenlet-rendszert:

$$\left.\begin{aligned} \dot{S}_1 &= -k_{12} S_1 I_2 + \alpha_1 I_1, \\ \dot{I}_1 &= k_{12} S_1 I_2 - \alpha_1 I_1, \\ \dot{S}_2 &= -k_{21} S_2 I_1 + \alpha_2 I_2, \\ \dot{I}_2 &= k_{21} S_2 I_1 - \alpha_2 I_2, \end{aligned}\right\}$$

ahol A_k, ill. I_k jelöli a k-adik csoportban levő veszélyeztetettek, ill. fertőzöttek számát ($k \in \{1, 2\}$), $k_{12}, k_{12}, \alpha_1, \alpha_2$ alkalmas pozitív számok. Feltéve, hogy $k_{12} = k_{12}$, az egyenletek összeadásával az

$$\left.\begin{aligned} \dot{I}_1 &= -I_1 I_2 - \alpha_1 I_1 + c_1 I_2, \\ \dot{I}_2 &= -I_1 I_2 - \alpha_2 I_2 + c_2 I_1, \end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

kétdimenziós rendszert kapjuk, ahol $c_k = S_k + I_k$ $(k \in \{1, 2\})$ mennyiséget állandónak tekintjük. Világos, hogy ha

$$A := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad e := \begin{bmatrix} -\alpha_1 \\ -\alpha_2 \end{bmatrix}, \qquad B := \begin{bmatrix} 0 & c_1 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix},$$

továbbá

$$b(x) := Bz := \begin{bmatrix} c_1 I_2 \\ c_2 I_1 \end{bmatrix}$$

és (I_{*1}, I_{*2}) a (4.22) pozitív egyensúlyi helyzete, akkor

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{c_1 - (I_{*1}}{(I_{*1}} \\ \dfrac{c_2 - (I_{*2}}{(I_{*2}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ha a $w_1, w_2 > 0$ számokat úgy választjuk meg, hogy

$$w_2 \left(\frac{S_{*2}}{I_{*2}} \right) = w_1 \left(\frac{S_{*1}}{I_{*1}} \right)$$

teljesüljön, akkor

$$W \left\{ \widetilde{A} + \mathrm{diag} \left(\frac{-c_1 I_2}{I_{*1} I_1 - \frac{c_2 I_1}{I_{*2} I_2}} \right) \right\} = \begin{bmatrix} -w_1 \frac{c_1 I_2}{I_{*1} I_1} & w_1 \frac{S_{*1}}{I_{*1}} \\ w_2 \frac{S_{*2}}{I_{*2}} & -w_2 \frac{c_2 I_1}{I_{*2} I_2} \end{bmatrix}$$

negatív definit szimmetrikus mátrix, hiszen diagonális elemei negatív előjelűek, továbbá

$$\left(\frac{c_1 I_2}{I_{*1} I_1} \cdot \frac{c_2 I_1}{I_{*1} I_2} - \frac{S_{*1} S_{*2}}{I_{*1} I_{*2}} \right) w_1 w_2 = \frac{w_1 w_2}{I_{*1} I_{*2}} (c_1 c_2 - S_{*1} S_{*2}) > 0,$$

ahol az $x_* = (I_{*1}, I_{*2})$ pozitivitása következtében $0 < S_{*k} < c_k$ $(k \in \{1, 2\})$. Ez azt jelenti, hogy $x_* = (I_{*1}, I_{*2})$ globálisan aszimptotikusan stabilis.

5. Cull populációs modellje

Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre teljesülnek az alábbi feltételek:

1. f folytonos, $f(0) = 0$ és bármely $x > 0$ esetén $f(x) > 0$;
2. f-nek pontosan egy $x_* > 0$ fixpontja van, amelyre igaz, hogy
   (a) bármely $x \in (0, x_*)$ esetén $f(x) > x$,
   (b) tetszőleges $x \in (x_*, +\infty)$-re $f(x) < x$;
3. f-nek lokális maximuma van valamely $a \in (0, x_*)$ pontban, így $f|_{(a,+\infty)}$ monoton csökkenő.

5.14. Tétel. *A fenti f függvény esetén az* (1.6) *autonóm differenciaegyenlet pozitív x_* egyensúlyi helyzete pontosan akkor globálisan aszimptotikusan stabilis, ha a rendszernek nincsen* 2*-periodikus pályája.*

Bizonyítás. Világos, hogy elég csak az egyik irányt belátni. Tegyük fel, hogy φ olyan megoldása az (1.6) differenciaegyenletnek, amelyre $\varphi_0 > 0$ és $\varphi_n \neq x_*$ $(n \in \mathbb{N})$ teljesül. Ekkor két esetet különböztetünk meg:

1. eset. Ha bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\varphi_n > x_*$, akkor

$$\varphi_n > \varphi_{n+1} > x_* \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Így $\lim(\varphi_n) = x_*$, hiszen x_* az f egyetlen pozitív fixpontja.

2. eset. Ha valamely $m \in \mathbb{N}$ esetén $\varphi_m < x_*$, úgy

1. ha

$$f(x) \leq x_* \qquad (x \in (0, x_*)),$$

akkor

$$x < f(x) \leq x_* \qquad (x \in (0, x_*)).$$

Így

$$\varphi_n < \varphi_{n+1} < x_* \qquad (m \leq n \in \mathbb{N}),$$

ahonnan $\lim(\varphi_n) = x_*$ következik.

2. ha alkalmas $x \in (0, x_*)$ esetén $f(x) > x_*$, azaz f-nek van a $(0, x_*)$ intervallumban olyan a lokális maximuma, amelyre $f(a) > x_*$, akkor a folytonosság következtében van olyan $x \in (0, x_*)$, amelyre $f(x) = x_*$ teljesül. Ha most

$$b := \inf \{x \in (0, x_*) : \ f(x) = x_*\},$$

akkor

$$x < f(x) < x_* \qquad (x \in (0, b)).$$

Mivel $\varphi_0 < x_*$ és bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\varphi_n \neq x_0$, ezért alkalmas $m \leq N \in \mathbb{N}$ indexre $b < \varphi_N < x_*$ teljesül. Mivel f-nek nincsen 2-periodikus pályája, ezért bármely $x \in (0, x_*)$ esetén $f^{[2]}(x) \neq x$. Az $f^{[2]}$ folytonossága és $f^{[2]}(b) = f(x_*) = x_* > b$ következtében bármely $x \in (0, x_*)$ számra $f^{[2]}(x) > x$ következik. Mivel f monoton csökkenő a $(b, +\infty)$ intervallumon, továbbá bármely $x \in (b, x_*)$ esetén $f(x) \geq x_*$, ezért tetszőleges $x \in (b, x_*)$ számra $f^{[2]}(x) \leq x_*$ teljesül. Így tehát

$$x < f^{[2]}(x) \leq x_* \qquad (x \in (b, x_*).$$

Mivel $\varphi_N \in (b, x_*)$, ezért bármely $s \in \mathbb{N}$ indexre

$$\varphi_{N+2s} < \varphi_{N+2s+2} < x_*$$

teljesül. Innen pedig $\lim\limits_{s \to \infty} \varphi_{N+2s} = x_*$ és f folytonossága következtében

$$\lim_{s \to \infty} \varphi_{N+2s+1} = \lim_{s \to \infty} f(\varphi_{N+2s}) = x_*. \quad \blacksquare$$

5.1. Következmény. *Az (1.6) autonóm differenciaegyenlet pozitív x_* egyensúlyi helyzete pontosan akkor globálisan aszimptotikusan stabilis, ha az alábbi állítások közül valamelyik teljesül.*

1. *Az f függvénynek nincsen maximuma a $(0, x_*)$ intervallumban.*

2. *Az f függvénynek van a $(0, x_*)$ intervallumban maximuma: a, amelyre*

$$f^{[2]}(x) > x \qquad (x \in (a, x_*)).$$

teljesül.

5.20. Példa. *Az*

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

differenciaegyenletnek egyetlen egyensúlyi helyzete van: $x_* = 1$, *és ez az egyetlen pozitív periodikus pontja az egyenletnek. Mivel az*

$$f(x) := \sqrt{x} \qquad (x \in [0, +\infty))$$

függvénynek nincsen a $(0, 1)$ *intervallumban maximuma, ezért ez az egyensúlyi helyzet globálisan aszimptotikusan stabilis.* $\diamondsuit$

5.21. Példa. *Az*

$$x_{n+1} = x_n \cdot \exp\left(1 - \sqrt{x_n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

differenciaegyenletnek két egyensúlyi helyzete van: $x_* = 0$ *és* $x_* = 1$. *Mivel az*

$$f(x) := x \cdot \exp(1 - \sqrt{x}) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényre

$$f'(x) = \exp(1 - \sqrt{x}) \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right),$$

és $f'(0) = e > 0$, *továbbá* $x_* = 1$ *az egyetlen pozitív egyensúlyi helyzet, ezért* f *teljesíti a fejezet elején lévő (a) és (b) feltételt. Az is elmondható továbbá, hogy* f*-nek az* $a := 4$*-ben lokális maximuma van és* $a > x_*$. *Ezért az 5.1. következmény értelmében az* $x_* = 1$ *egyensúlyi helyzet globálisan aszimptotikusan stabilis.* $\diamondsuit$

5.22. Példa. *Az*

$$x_{n+1} = x_n \cdot \exp\left(2 - x_n\right) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

differenciaegyenletnek két egyensúlyi helyzete van: $x_* = 0$ *és* $x_* = 2$. *Mivel az*

$$f(x) := x \cdot e^{2-x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényre

$$f'(x) = e^{2-x}(1 - x)$$

teljesül, ezért f*-nek az* $a := 1$ *pontba lokális maximuma van. Mivel bármely* $x > 1$ *esetén* $f'(x) < 0$, *ezért* f *monoton csökkenő az* $(1, x)$ *intervallumon. Mivel* $f'(0) = e^2 > 1$, *ezért*

f teljesíti a fejezet elején lévő (a) és (b) feltételt. Mivel $1 < x_* = 2$, ezért megvizsgáljuk, hogy teljesül-e az 5.1. következmény második feltétele. Mivel

$$f^{[2]}(x) = f(x) \cdot \exp(2 - f(x)) = x \cdot \exp\left(4 - x - xe^{2-x}\right),$$

ezért $f^{[2]}(x) = x$ pontosan akkor áll fenn, ha $x = 0$ vagy $4 - x - xe^{2.x} = 0$, azaz $x = 2$ teljesül. $f^{[2]}$-nek tehát ugyanazok a fixpontjai, mint f-nek, és $f^{[2]}(1) = e^{3-e} > 1$ következtében bármely $x \in (0, x_*)$ esetén $f^{[2]}(x) > 0$, azaz x_* globálisan aszimptotikusan stabilis. $\Diamond$

5.23. Példa. *Az*

$$x_{n+1} = x_n \cdot \exp(4 - 2x_n) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

differenciaegyenletnek két egyensúlyi helyzete van: $x_* = 0$ és $x_* = 2$. Mivel az

$$f(x) := x \cdot e^{4-2x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényre

$$f'(x) = e^{4-2x}(1 - 2x),$$

ezért $f'(0) = e^4 > 1$. Az f-nek $x_* := 2$ az egyetlen pozitív fixpontja, ezért$f$ teljesíti a fejezet elején lévő (a) és (b) feltételt. Az $a := 1/2$ pontban f-nek lokális maximuma van és $f'(x) < 0$ $(x > a)$ következtében f monoton csökkenő az $(a, +\infty)$ intervallumon. Mivel $a = 1 < 2 = x_*$, ezért megvizsgáljuk, hogy teljesül-e az 5.1. következmény második feltétele. Mivel

$$f^{[2]}(x) = f(x) \cdot \exp(4 - 2f(x)) = x \cdot \exp(8 - 2x - 2x \cdot e^{4-2x}),$$

ezért $f^{[2]}(1) = e^{6-2e^2} < 1$, azaz az $x_* = 2$ egyensúlyi helyzet globálisan aszimptotikusan stabilis. $\Diamond$

6. Egy ragadozó-zsákmány modell

Tekintsük az alábbi, ún. Sahoo-féle ragadozó-zsákmány modellt:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x_1} &= x_1\left(1-\frac{x_1}{k_1}\right)-\frac{px_1x_3}{1+ax_1+chx_2},\\
\dot{x_2} &= x_2\left(1-\frac{x_2}{k_2}\right)-\frac{qx_2x_3}{1+ax_1+chx_2},\\
\dot{x_3} &= \frac{\varepsilon(px_1+cqx_2)x_3}{1+ax_1+chx_2}-dx_3,
\end{aligned}\right\} =: f(x) \qquad \big(x=(x_1,x_2,x_3)\in(\mathbb{R}_0^+)^3\big), \tag{6.23}$$

ahol k_1 és k_2 jelöli a környezet fenntartó képességét a zsákmányra, ill. az alternatív zsákmányra nézve; p és q jelöli a ragadozási rátát a zsákmányra, illetve az alternatív zsákmányra vonatkozólag; ε és $c\varepsilon$ a zsákmányra, ill. az alternatív zsákmányra vonatkozó konverziós ráta; a d állandó pedig a ragadozó mortalitási rátája.

A (6.23) rendszernek egyetlen egyensúlyi helyzete van: $E_*(x_{*1},x_{*2},x_{*3})$, ahol

$$x_{*2}=(k_1k_2(p-q)+k_2qx_{*1})/k_1p,$$

$$x_{*3}=(\varepsilon(k_1-x_1)/k_1pd)\{((p^2k_1+cq^2k_2)x_1+cqk_1k_2(p-q))/k_1p\},$$

és x_{*1} az $Ay^2+By+C=0$ egyenlet pozitív gyöke, ahol

$$A:=\varepsilon(p^2k_1+cq^2k_2)-ak_1pd-chk_2qd,$$

$$B:=(qk_1^2p-k_1p-chk_1k_2(p-q)+chk_1k_2q)d-\varepsilon k_1(p^2k_1+cq^2k_2)+\varepsilon cq_1k_1k_2(p-q),$$

és

$$C:=k_1^2pd+dchk_1^2qk_2(p-q).$$

Az f Jacobi-mátrixa az E_* egyensúlyi pontban

$$f'(E_*)=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix},$$

ahol

$$A_{11} := 1 - \frac{2x_{*1}}{k_1} - \frac{p(1+chx_{*2})x_{*3}}{(1+ax_{*1}+chx_{*2})^2}, \qquad A_{12} := \frac{pchx_{*1}x_{*3}}{(1+ax_{*1}+chx_{*2})^2},$$

$$A_{13} := \frac{-px_{*1}}{1+ax_{*1}+chx_{*2}}, \qquad A_{21} := \frac{qax_{*2}x_{*3}}{(1+ax_{*1}+chx_{*2})^2},$$

$$A_{22} := 1 - \frac{2x_{*2}}{k_2} - \frac{q(1+ax_{*1})x_{*3}}{(1+ax_{*1}+chx_{*2})^2} \qquad A_{23} := \frac{-qx_{*2}}{1+ax_{*1}+chx_{*2}},$$

$$A_{31} := \frac{\varepsilon[px_{*3}+c(hp-qa)x_{*2}x_{*3}]}{(1+ax_{*1}+chx_{*2})^2}, \qquad A_{32} := \frac{\varepsilon c[qx_{*3}+(qa-hp)x_{*1}x_{*3}]}{(1+ax_{*1}+chx_{*2})^2},$$

$$A_{33} := 0.$$

Az $f'(E_*)$ mátrix karakterisztikus polinomja (vö. [2]):

$$\lambda^3 + \Omega_1\lambda^2 + \Omega_2\lambda + \Omega_3 = 0, \tag{6.24}$$

ahol

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= -[A_{11}+A_{22}], \\ \Omega_2 &= [A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} - A_{23}A_{32} - A_{13}A_{31}], \\ \Omega_3 &= -[A_{13}(A_{21}A_{32} - A_{22}A_{31}) - A_{23}(A_{11}A_{32} - A_{12}A_{31})]. \end{aligned} \tag{6.25}$$

A Routh-Hurwitz kritérium szerint, a pozitív $E_*(x_{*1}, x_{*2}, x_{*3})$ egyensúlyi lokálisan aszimptotikusan stabilis, ha $\Omega_1 > 0$, $\Omega_3 > 0$ és $\Omega_1\Omega_2 - \Omega_3 > 0$ teljesül.

Az $E^*(x_{*1}, x_{*2}, x_{*3})$ lokális stabilitására elégséges feltételt ad a következő tétel:

6.15. Tétel. *A (6.23)-es rendszer $E_*(x_{*1}, x_{*2}, x_{*3})$ belső egyensúlyi pontja lokálisan aszimptotikusan stabilis, ha teljesülnek az alábbiak:*

$$\begin{aligned} aphx_{*1}x_{3*}^2 + \varepsilon[qx_{*3} + (aq-hp)x_{*1}x_{*3}](1+ax_{*1}+chx_{*2}) &< 0, \\ hqax_{*2}x_{3*}^2 + \varepsilon[px_{*3} + (ph-aq)cx_{*2}x_{*3}](1+ax_{*1}+chx_{*2}) &< 0, \\ (aq+hp) + (aq-hp)(ax_{*1} - chx_{*2}) &> 0. \end{aligned} \tag{6.26}$$

Bizonyítás.

A fentiek deriválásából következik, hogy

$$A_{11} < 0,\ A_{12} > 0,\ A_{13} < 0,\ A_{21} > 0,\ A_{22} < 0,\ A_{23} < 0,\ A_{31} > 0,\ A_{32} > 0,$$

és $A_{33} = 0$. Ezen feltételek alapján könnyű megmutatni, hogy $\Omega_1 > 0$ és $\Omega_3 > 0$. Kiszámítva $\Omega_1\Omega_2 - \Omega_3$-t kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \Omega_1\Omega_2 - \Omega_3 &= (A_{11} + A_{22})(A_{23}A_{32} + A_{13}A_{31} - A_{11}A_{22}) + \\ &\quad + A_{11}(A_{12}A_{21} - A_{23}A_{32}) + A_{22}(A_{12}A_{21} - A_{13}A_{31}) + \\ &\quad + A_{13}A_{21}A_{32} + A_{23}A_{12}A_{31}. \end{aligned}$$

A tételben szereplő feltételek miatt

$$A_{12}A_{21} - A_{23}A_{32} < 0, \qquad A_{12}A_{21} - A_{13}A_{31} < 0,$$

és

$$A_{13}A_{21}A_{32} + A_{23}A_{12}A_{31} > 0.$$

Tehát $\Omega_1\Omega_2 - \Omega_3 > 0$, így $E_*(x_{*1}, x_{*2}, x_{*3})$ lokálisan aszimptotikusan stabilis. ■

7. Markus-Yamabe kritérium

7.16. Tétel. *Legyen* $f \in \mathfrak{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$*,* $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *szimmetrikus, pozitív definit mátrix, és*

$$M := f'^T B + Bf'.$$

Tegyük fel, hogy M *minden* λ *sajátértéke kielégíti a*

$$\lambda(x) < -\nu(\rho(x)) \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

feltételt, ahol

$$\rho(x)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad (x \in \mathbb{R}^n),$$

ν *olyan monoton csökkenő függvény, amelyre*

$$\nu(\rho) > 0 \qquad (0 \le \rho < \infty),$$

ill. tetszőleges $\varepsilon > 0$ *esetén*

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon \int_0^\sigma \nu(\sigma) d\sigma} d\rho < \infty$$

teljesül. Ekkor (1.2) *minden megoldásgörbéje korlátos, az* (1.2) *egyenlet triviális egyensúlyi helyzete globálisan aszimptotikusan stabilis.*

Bizonyítás. Vö. [11]. ■

7.17. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $B := E_n$*, továbbá* M *minden sajátértéke negatív, valamint alkalmas* $\beta_1 > 0$*,* $\beta_2 > 0$ *számok esetén, melyekre*

$$|\,\mathrm{Tr}\ M(x)| < \beta_1, \quad |\det M(x)| > \beta_2 \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Ekkor az (1.2) *autonóm egyenlet minden* φ *megoldása korlátos, valamint* (1.2) *triviális egyensúlyi helyzete globálisan aszimptotikusan stabilis.*

Bizonyítás. Mivel M karakterisztikus polinomja

$$p_M(z) = z^n - \mathrm{Tr}(M)z^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(M) \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

és minden λ gyök pozitív, így $|\lambda| < \beta_1$. Mivel

$$|\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n| = |\det M| > \beta_2 > 0,$$

ezért

$$|\lambda_1| > \frac{\beta_2}{\beta_1^{n-1}}.$$

Így a sajátértékek eleget tesznek a $\lambda(x) < -\varepsilon$ feltételnek minden $\varepsilon > 0$-ra. ■

7.24. Példa. *Az*

$$\dot{x} = -2x + \cos y$$

$$\dot{y} = \sin^2 x - y.$$

rendszer esetén

$$M(x,y) = f'(x,y) + f'^T(x,y) = \begin{pmatrix} -4 & 2\sin x\cos x - \sin y \\ 2\sin x\cos x - \sin y & -2 \end{pmatrix}.$$

Mivel

$$|\,\mathrm{Tr}\ M| = -6,$$

és

$$|\det M| \geq 4,$$

ezért a Hurwitz-kritérium miatt M sajátértékei negatívak. A 7.16. tétel miatt ekkor a triviális egyensúlyi helyzet globálisan aszimptotikusan stabilis. $\Diamond$

Hivatkozások

[1] Amann, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, New York, 1983.

[2] Brückler, Z. F.: *Lineáris egyenletek integrálása*, 2009 (`https://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_alkmat/2012/bruckler_zita_flora.pdf`).

[3] Capasso, V.: *Mathematical Sturctures of Epidemic Systems*, Springer, 1993.

[4] Cooke, K.L:, Yorke, J.A.: *Some equations modelling growth precesses and gonorrhea epidemics*, Math. Biosci. **16** (1973), 75–101.

[5] Cull, P.: *Local and global stability for population models*, Biological Cybernetics **54** (1986), 141–149.

[6] Cull, P.: *Local and global stability of discrete one-dimensional population models*, In: Ricciardi, L. M. (Hrsg.), Biomathematics and Related Computational Problems, Kluwer, 1988, 271–279.

[7] Elaydi, S.: *An Introduction ti Differenec Equations*, Springer, Science+Business Media, Inc. 2005.

[8] Farkas M.: *Periodic motions*, *Applied Mathematical Sciences*, **104** Springer-Verlag, 1994.

[9] Gasull, A.: *Examples and counterexamples for Markus-Yamabe and LaSalle global asymptotic stability problems*, Proceedings of International Workshop, 2011, 89–96.

[10] Kovács, S.:*Funkcionálanalízis feladatokban, egyetemi jegyzet*, (2013) ISBN: 978-963-284-445-9

[11] Markus, L.; Yamabe, H.: *Global Stability Criteria for Differential Systems*, Osaka Math. J., **12**, 1960, 305–317.

[12] SAHOO, B.: *Global Stability of Predator-Prey System with Alternative Prey*, Hindawi, 2012.

[13] TÓTH, J.; SIMON, L. P.: *Differenciálegyenletek (Bevezetés az elméletbe és az alkalmazásokba)*, TypoTeX Kiadó, Budapest, 2005.