Az Erdős-Faber-Lovász sejtés speciális gráfrendszereken

Szakdolgozat

Rácz Dániel

Matematika BSc

Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Kiss Attila

Számítógéptudományi tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2016

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Kiss Attilának a téma felvetését, a segítséget, konzultációkat és a szakdolgozatom alapos átnézését.
Köszönöm továbbá szobatársaimnak a rengeteg motivációt, amivel hozzájárultak dolgozatom létrejöttéhez.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Az Erdős-Faber-Lovász sejtés egy ez idáig megoldatlan gráfelméleti probléma, mely több, mint 40 éve foglalkoztatja a gráfszínezéssel foglalkozó matematikusokat.

Az említett sejtést 1972-ben fogalmazta meg Erdős Pál, Vance Faber és Lovász László egy teadélutánon az Egyesült Államokban, Colorado államban [4]. Fabernek Boulder városában volt lakása, itt gyűltek össze, hogy a pár héttel korábbi, Ohio államban megrendezett hipergráfokról szóló konferencián hallottakat megvitassák. Számos olyan sejtésről szó esett, amelyek valamilyen módon a Vizing-tétel lineáris hipergráfokra történő kiterjesztésének tekinthetők. Általánosságban legkisebb felső korlátot találni nehéznek bizonyult, így megfogalmaztak egy elemi sejtést, amiről úgy hitték, könnyű bizonyítani. Ezt *n-sets problem*-nek, vagyis n-halmaz problémának nevezték: legyen adva n halmaz úgy, hogy minden halmaz elemszáma n, valamint bármely két halmaznak legfeljebb 1 közös elem van, a feladat kiszínezni a halmazok elemeit n színnel úgy, hogy minden halmaz tartalmazza mind az n színt. Erdősék megállapodtak abban, hogy másnap is találkoznak, s leírják a megoldást. 44 évvel később még senkinek sem sikerült maradéktalanul megoldani a problémát.

Erdős eredetileg 50 amerikai dollárt ajánlott fel a sejtés bizonyításáért vagy cáfolatáért. Egy 1981-ben publikált cikkében 500 dollárra emeli a felajánlott jutalmat, majd hozzáteszi: „*...nem az infláció az oka, hanem mert úgy gondolom, hogy a problémát nagyon nehéz megoldani. Lehet, hogy tévedek.*“[12]

A dolgozatban először bevezetjük a szükséges definíciókat, majd felírjuk a probléma néhány ekvivalens megfogalmazását, néhol a matematika más részterületén használatos fogalmakkal élve. Megismerhetjük az eddigi legfontosabb eredményeket, melyek a sejtés általános esetére vonatkoznak, illetve megnézünk néhány olyan speciális esetet, amikre sikerült igazolni az állítást. Végül megvizsgálunk egy nagyjából fél éves, sajnálatos módon hibás bizonyítást, amely a problémát általános esetben hivatott megoldani.

2. Felhasznált definíciók

Az alábbi definíciók szükségesek dolgozatom alapos megértéséhez.

2.1. Definíció. *Egy $G = (V; E)$ gráf **jó színezésén** a csúcsok egy olyan színezését értjük, ahol a szomszédos csúcsok színe különböző. Ez tulajdonképpen egy olyan $f : V(G) \to \mathbb{N}$ függvényt jelent, melyre $f(v_i) \neq f(v_j)$, ha $v_iv_j \in E(G)$.*
*Ekkor G **kromatikus számát** $\chi(G)$ jelöli, és $\chi(G) = k$, ha G-nek létezik szabályos k-színezése, de $(k-1)$-színezése már nem.*

2.2. Definíció. *Egy $G = (V; E)$ gráf jó élszínezésén az élek egy olyan színezését értjük, ahol az egy csúcsban találkozó élek színe különböző. Ez tulajdonképpen egy olyan $g : E(G) \to \mathbb{N}$ függvényt jelent, melyre $g(e_i) \neq g(e_j)$, ha léteznek v_l, v_m, v_n csúcsok úgy, hogy $e_i = v_kv_m$ és $e_j = v_kv_n$.*
*Ekkor G **élkromatikus számát** vagy **kromatikus indexét** $\chi'(G)$ jelöli és $\chi'(G) = k$, ha G-nek létezik szabályos k-élszínezése, de $(k-1)$-élszínezése már nem.*

2.3. Jelölés. *Egy G gráf maximális (illetve minimális) fokszámát $\Delta(G)$ (illetve $\delta(G)$) jelöli.*

2.4. Megjegyzés. A kromatikus index definíciójából következik, hogy tetszőleges G gráfra $\Delta(G) \leq \chi'(G)$. Felső korlátot Vizing tétele biztosít.

2.5. Tétel. (Vizing) *Legyen G egyszerű gráf. Ekkor $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Bizonyítás. [1] Kezdjük el a gráfot kiszínezni $\Delta(G) + 1$ színnel, valamint minden v csúcshoz rendeljük azt a $c(v)$ színt, ami nem szerepel a v-ből kiinduló élek közül egyiken sem.
Tegyük fel, hogy az e_{xy_1} él még nincs kiszínezve. Ha $c(x) = c(y_1)$, akkor ezt az élet színezhetem ezzel a színnel.
Tegyük tehát fel, hogy $c(x) \neq c(y_1)$. Feltehető, hogy x-nek létezik y_2 szomszédja úgy, hogy az e_{xy_2} él színe c_{y_1}, hiszen ellenkező esetben színezhetném e_{xy_1}-t c_{y_1} színűre. Szintén feltehető, hogy x-nek létezik olyan y_3 szomszédja, amelyre e_{xy_3} színe $c(y_2)$, hiszen ellenkező esetben e_{xy_2} színét $c(y_2)$-re cserélve e_{xy_1} már színezhető $c(y_1)$ színűre. Ezt a gondolatmenetet folytatva kapjuk az $y_4, ...$ pontokat.
Egy esetben van baj, mégpedig akkor, ha van olyan h, hogy az e_{x,y_h} él színe $c(y_{h-1})$, illetve létezik olyan $1 \leq j < h$ index úgy, hogy $c(y_h) = c(y_j)$. Ekkor vegyük G-nek azt a H részgráfját, melyet a $c(x)$ és $c(y_h)$ színű élek feszítenek ki. Ekkor, mivel csak két színünk van, minden csúcs foka legfeljebb kettő, ráadásul a $c(v)$ színek definíciója miatt x, y_h és y_j fokszáma legfeljebb 1. Vagyis H körök, utak és izolált pontok diszjunkt

uniója. Az x csúcs foka biztosan 1 H-ban, így x egy út végpontja, ez azt jelenti, hogy y_j és y_h közül az egyik biztosan más komponensben van, mint x. Legyen ez a csúcs y_r. Nincs más dolgunk, mint y_r komponensében az élek színét felcserélni, hiszen ez azt eredményezi, hogy $c(y_r) = c(x)$, vagyis ki fogom tudni színezni e_{xy_1}-t. $\square$

Most térjünk rá a hipergráfokkal kapcsolatos ismeretekre.

2.6. Definíció. *A H **hipergráfon** egy $H = (X, E)$ párt értünk, ahol X a csúcsok halmaza, valamint $E \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$. Ekkor E elemeit hiperéleknek hívjuk.*
A hipergráf fogalma tekinthető a gráf fogalmának általánosításaként, a lényeges különbség, hogy hipergráfok esetében a hiperél kettőnél több csúcsot is tartalmazhat.

2.7. Definíció. *A H hipergráf **lineáris**, ha bármely két hiperélének legfeljebb egy közös csúcsa van. Ennek egy ekvivalens megfogalmazása: bármely két csúcsot legfeljebb egy hiperél tartalmaz.*

2.8. Definíció. *Egy hipergráf k-**uniform**, ha minden hiperéle k elemű.*

2.9. Definíció. *A H hipergráf **teljesen unimoduláris (TU)**, ha az incidencia mátrixa teljesen unimoduláris (TU).*

2.10. Megjegyzés. A Ghouila-Houri tétel alapján H pontosan akkor TU, ha az incidencia mátrixára teljesül, hogy oszlopainak bármely részhalmaza egyenletesen 2-színezhető, azaz az oszlopok bármely részhalmazát ki tudom színezni 2 színnel úgy, hogy minden sorban az azonos színű elemek összege legfeljebb eggyel tér el.

2.11. Definíció. *Legyen H hipergráf. Ekkor egy v csúcs **fokszáma** $d(v)$, a v-t tartalmazó hiperélek száma. A maximális (ill. minimális) fokszámot H-ban $\Delta(H)$ és $\delta(H)$ jelöli.*

2.12. Definíció. *Egy hipergráf k-**reguláris**, ha minden csúcsának foka k.*

2.13. Definíció. *A H hipergráf **sűrű**, ha $\delta(H) > \sqrt{|E(H)|}$.*

2.14. Definíció. *Egy hipergráf **egyszerű**, ha lineáris és nincs legfeljebb egy elemű hiperéle.*

2.15. Definíció. *Legyen $H = (X, E)$ hipergráf, $|X(H)| = n$, $|E(H)| = m$. Ekkor H **duálisa** az a H^* hipergráf, melynek m csúcsa és n hiperéle van, valamint az y_i csúcs eleme a B_j hiperélnek H^*-ban pontosan akkor, ha az x_j csúcs eleme az A_i hiperélnek H-ban.*

2.16. Állítás. *Lineáris hipergráf duálisa lineáris.*

Bizonyítás. Legyen a H lineáris hipergráf duálisa H^* és tegyük fel indirekt, hogy H^* nem lineáris. Ez azt jelenti, hogy léteznek x_k, x_l különböző hiperélek, valamint e_i, e_j különböző csúcsok H^*-ban úgy, hogy $e_i, e_j \in x_k \cap x_l$. A duális hipergráf definíciója miatt azonban következik, hogy ekkor $x_k, x_l \in e_i \cap e_j$ teljesül H-ban, ami ellentmond H linearitásának. $\square$

2.17. Definíció. *A H hipergráf* ***erősen k-színezhető****, ha kiszínezhetőek a csúcsai k színnel úgy, hogy az egy hiperélbe tartozó csúcsok különböző színt kapnak.*

2.18. Definíció. *A H hipergráf kromatikus indexe $\chi'(H)$ az a természetes szám, melyre H hiperélei kiszínezhetőek $\chi'(H)$ színnel szabályosan (a metsző hiperélek színe eltér), de $\chi'(H) - 1$ színnel már nem.*

3. Eddigi eredmények

3.1. Néhány ekvivalens megfogalmazás

Az Erdős-Faber-Lovász sejtést eredetileg halmazrendszerekre, hipergráfokra fogalmazták meg 1972-ben[12]:

3.1. Sejtés. (EFL, halmazelméleti alak) *Legyenek $A_1, ..., A_n$ halmazok úgy, hogy $|A_k| = n$, ha $1 \leq k \leq n$, valamint $|A_i \cap A_j| \leq 1$ minden $1 \leq i < j \leq n$ esetén. Ekkor $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ elemei kiszínezhetőek n színnel úgy, hogy minden $1 \leq k \leq n$ esetén A_k minden színből tartalmazzon elemet.*

Hipergráfok nyelvén így hangzik:

3.2. Sejtés. (EFL, hipergráfos alak) *Legyen H olyan lineáris hipergráf, melynek n hiperéle van, s ezek mindegyike n csúcsot tartalmaz. Ekkor H erősen n-színezhető, azaz ki lehet színezni H csúcsait n színnel úgy, hogy semelyik hiperél se tartalmazzon két egyforma színű csúcsot.*

Gondoljuk meg a következőt! A sejtés hipergráfos alakjában a hiperéleket helyettesíthetjük n pontú teljes gráfokkal. A linearitás ebben a megfogalmazásban azt jelenti, hogy két K_n-nek legfeljebb egy közös csúcsa lehet. A problémát ebben a formában Erdős Pál, Frankl Péter és Michel Deza fogalmazta meg 1978-ban[3].

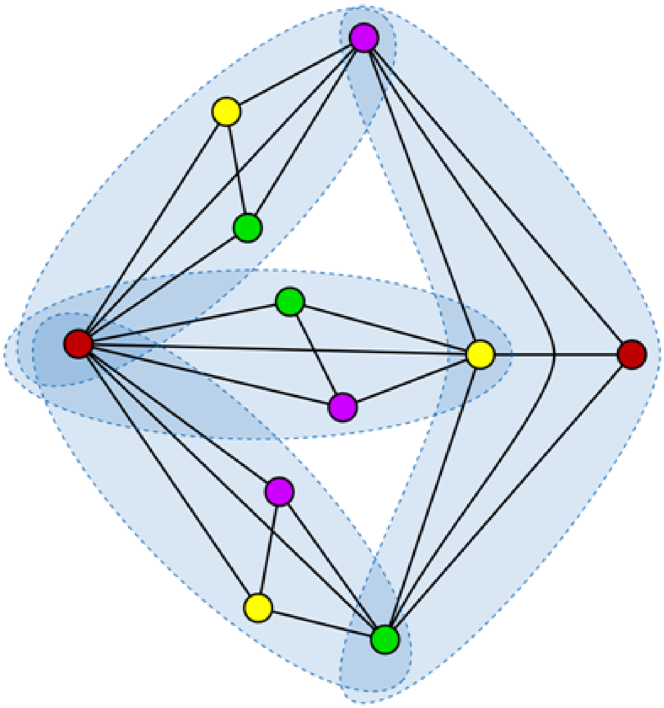
3.3. Sejtés. (EFL, gráfos alak) *Legyen $G = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, ahol $A_1, ..., A_n$ n csúcsú teljes gráfok úgy, hogy bármely kettőnek legfeljebb 1 közös csúcsa van. Ekkor $\chi(G) = n$, vagyis G n-színezhető.*

Az egyszerűség kedvéért bevezetjük az alábbi definíciót:

3.4. Definíció. *Legyen $G = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, ahol $A_1, ..., A_n$ n csúcsú teljes gráfok úgy, hogy bármely kettőnek legfeljebb 1 közös csúcsa van, valamint legyen $v \in V(G)$. Ekkor v* ***klikkfokát*** *$d^K(v)$ jelöli és $d^K(v) = |\{A_i : v \in V(A_i), 1 \leq i \leq n\}|$.*

3.5. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy azon csúcsok, melyek klikkfoka 1, nem relevánsak a színezés szempontjából, elegendő a legalább 2 klikkfokú csúcsokat kiszínezni.

Az előbbi megjegyzés szerint a gráfból nyugodtan elhagyhatjuk az 1 klikkfokú csúcsokat. A hipergráfos megfogalmazással élve ez azon csúcsokat jelenti, melyek csak egy hiperélhez tartoznak. Ekkor viszont a sejtésbeli hipergráf duálisában nem lehet legfeljebb 1 elemű hiperél, hiszen ez csak olyan csúcsból keletkezhetne, mely az eredeti



1. ábra. A sejtés $n = 4$ esetben

hipergráfban csak egy hiperélhez tartozik. Ebből és a 2.16 állításból következik, hogy a duális hipergráf egyszerű. Viszont így a duális hipergráf hiperéleinek jó n-színezése megfeleltethető az eredeti hipergráf egy erős n-színezésének, tehát igaz az alábbi állítás.

3.6. Állítás. *Az Erdős-Faber-Lovász sejtés igaz, ha bármely n csúcsú egyszerű hipergráf hiperélei n-színezhetők.*

Ez motiválja az alábbi sejtés vizsgálatát, melyhez szükségünk lesz a lineáris metszetszám fogalmára.

3.7. Sejtés. *[11] Minden véges, egyszerű hipergráf hiperélei szabályosan kiszínezhetők legfeljebb csúcsszámnyi színnel.*

3.8. Definíció. *[11] Legyen $H = (X, F)$ egyszerű hipergráf. Ekkor H* ***metszetgráfja*** *az a $G_H = (V, E)$ gráf, melyre $V = F$ és $E = \{\{f, g\} : f, g \in F, f \cap g \neq \emptyset\}$, vagyis két csúcs pontosan akkor van összekötve, ha a nekik megfelelő hiperélek metszete nem üres.*
Legyen most G tetszőleges gráf. Jelölje $\nu(G)$ azt a ν legkisebb természetes számot, melyre létezik H, ν csúcsú egyszerű hipergráf úgy, hogy G_H izomorf G-vel. Ekkor $\nu(G)$ a G gráf ***lineáris metszetszáma****.*

3.9. Megjegyzés. A lineáris metszetszám fogalma nem tévesztendő össze a *metszési szám* fogalmával, mely egy gráf összes síkbarajzolása közül az élek metszéspontjainak minimális száma. A $\nu(G)$ jelölés szintén ne tévesszen meg senkit, általában a gráfelmélettel foglalkozó szakirodalmakban $\nu(G)$ a G gráf egy maximális független élhalmazának elemszámát jelöli.

3.10. Állítás. *Tetszőleges G véges gráfnak létezik lineáris metszetszáma.*

Bizonyítás. Legyen $G = (V, E)$ véges gráf. Elég megmutatni, hogy azon hipergráfok halmaza, melyeknek a metszetgráfja G, nem üres. Ehhez legyen minden $v \in V(G)$ esetén $E_v = \{e \in E(G) : v \in e\}$, vagyis a v-ben végződő élek halmaza. Ekkor a $G^* = (E, \{E_v : v \in V(G)\})$ duális hipergráfra teljesül, hogy $G_{G^*} = G$. Ugyan G^* nem feltétlenül egyszerű, ám könnyen azzá tehető, ugyanis minden olyan v' csúcsra, melyre $d(v') = 1$, adjunk hozzá egy pontot $E_{v'}$-höz, illetve minden olyan v'' csúcsra, melyre $d(v'') = 0$, adjunk hozzá két pontot $E_{v''}$-höz. Az így kapott hipergráf már egyszerű és a metszetgráfja G. $\square$

3.11. Lemma. *A 3.7 sejtés akkor és csak akkor igaz, ha minden G gráfra $\chi(G) \leq \nu(G)$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy igaz a sejtés és legyen G gráf. Ekkor minden $H = (X, F)$ egyszerű hipergráfra ha $G_H = G$, akkor $|X| \geq \chi'(H) = \chi(G_H) = \chi(H)$, amiből $\nu(G) \geq \chi(G)$ következik. Visszafelé, ha G-re $\chi(G) \leq \nu(G)$ igaz, akkor ha $H = (X, F)$ egyszerű hipergráf és $G_H = G$, akkor $|X| \geq \nu(G) \geq \chi(G) = \chi'(H)$. Mivel minden egyszerű hipergráf metszetgráfjára igaz a feltevés, kész vagyunk. $\square$

3.12. Tétel. *[11] Jelölje $\overline{G}$ a $G = (V, E)$ gráf komplementerét. Ekkor $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq \nu(G) + \nu(\overline{G})$.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy $|V| \leq \nu(G) + \nu(\overline{G})$. Legyen $H = (X, F)$ és $\overline{H} = (\overline{X}, \overline{F})$ két egyszerű hipergráf úgy, hogy $G_H = G$, $|X| = \nu(G)$ és $G_{\overline{H}} = \overline{G}$, $|\overline{X}| = \nu(\overline{G})$. Feltehető, hogy X és $\overline{X}$ diszjunktak. Legyenek továbbá $p : V(G_H) \to V$ és $\overline{p} : V(G_{\overline{H}}) \to V$ izomorfizmusok. Definiáljuk a következő hipergráfot:

$$H' := (X \cup \overline{X}, F + \overline{F} := \{p^{-1}(x) \cup \overline{p}^{-1}(x) : x \in V\}).$$

Vegyük észre, hogy H'-ben $|V|$ db hiperél található. További fontos észrevétel, hogy ha x és y különböző V-beli csúcsok:

$$(p^{-1}(x) \cup \overline{p}^{-1}(x)) \cap (p^{-1}(y) \cup \overline{p}^{-1}(y)) \in \begin{cases} X, & \text{ha } \{x, y\} \in E \\ \overline{X}, & \text{ha } \{x, y\} \notin E \end{cases}$$

Ez azért van, mert ha x és y össze van kötve G-ben, akkor $p^{-1}(x) \cap p^{-1}(y) \neq \emptyset$, ráadásul ez a pont a leképezések definíciója folytán P-ben van. Hasonlóan, nincsenek összekötve G-ben, akkor a komplementerben igen és így a metszetük $\overline{P}$-beli. Viszont $p^{-1}(x)$ tetszőleges x-re H-beli hiperélnek felel meg, H pedig egyszerű hipergráf definíció szerint, s ugyanez igaz $\overline{H}$-ra is, így H'-ben bármely két hiperél metszete pontosan egy elemű. Itt még P és $\overline{P}$ halmazok diszjunktságát is kihasználjuk. Alkalmazva a Fischer-egyenlőtlenséget H'-re:
$|V| = |F + \overline{F}| \leq |P \cup \overline{P}| = |P| + |\overline{P}| = \nu(G) + \nu(\overline{G})$.
A bizonyítás folytatásához szükség lesz az alábbi állításra:

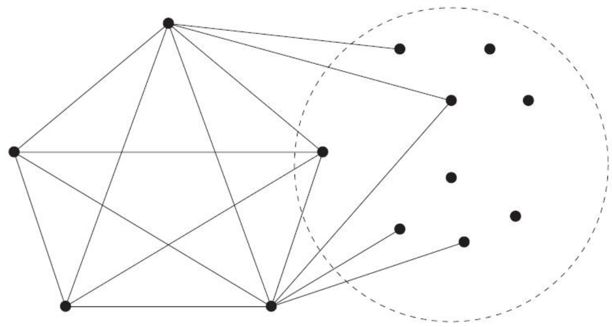
3.13. Állítás. *Tetszőleges G gráfra $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq |V| + 1$.*

Bizonyítás. Bizonyítsunk teljes indukcióval. $n = 2$ esetben nyilvánvaló az állítás. Tegyük fel, hogy $n = k - 1$-ig igaz. Vegyünk egy k pontú G gráfot és hagyjuk el egy tetszőleges v csúcsát. Legyen az így kapott gráf G'. Mivel G' már csak $k - 1$ elemű, igaz rá az indukciós feltevés: $\chi(G') + \chi(\overline{G'}) \leq k$. Vegyünk egy optimális színezését G'-nek és $\overline{G'}$-nek is, majd rakjuk vissza a gráfba v-t. Feltehető, hogy $d_G(v) \geq \chi(G')$, hiszen ellenkező esetben lenne szabad szín v-nek és kész lennénk. Ekkor viszont az indukciós feltevés miatt $d_{\overline{G}}(v) = k - 1 - d_G(v) \leq k - 1 - \chi(G') \leq \chi(\overline{G'}) - 1 < \chi(\overline{G'})$, tehát a komplementerben biztosan nem kell új színt használni. Ez azt jelenti, hogy $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq \chi(G') + \chi(\overline{G'}) + 1 \leq k + 1$. $\square$

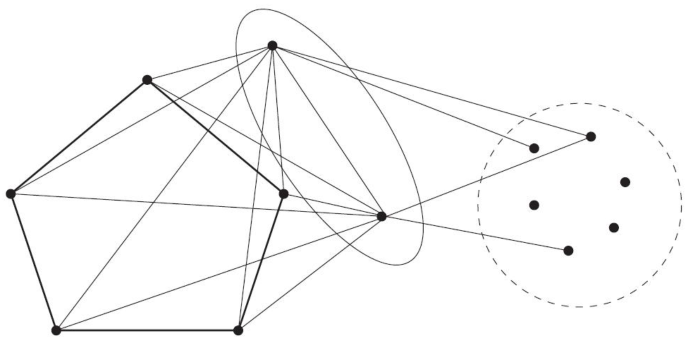
Láthatjuk hát, hogy azon gráfokkal van probléma, amelyek egyenlőséggel teljesítik az előbbi állítást. Egy korábbi eredmény szerint csupán a gráfok két speciális részhalmaza ilyen (bővebben lásd [11]-t).
A szerzők jelöléseit követve az $F_1(n, p)$ halmaz álljon azon gráfokból, melyek csúcsszáma n úgy, hogy p db egymástól független pont és egy K_{n-p+1} uniója, a két halmaz metszetében pontosan egy csúcs van, egyébként élek szabadon mehetnek a két halmaz között (természetesen $p \leq n$.
A másik típust jelölje $F_2(n, p)$ és álljon azon n csúcsú gráfokból, melyek egy 5 hosszú kör, p db egymástól izolált pont ($p \leq n - 5$) és egy K_{n-p-5} diszjunkt uniója és teljesülnek az alábbi feltételek:

1. K_{n-p-5} és C_5 csúcsai az összes lehetséges módon össze vannak kötve egymással
2. az izolált pontok függetlenek C_5-től
3. az izolált pontok és a klikk között lehetnek élek

Például:



2. ábra. $F_1(13,9)$-beli gráf [11]



3. ábra. $F_2(13,6)$-beli gráf [11]

Legyen először G $F_1(n,p)$-beli. A bizonyítás első felében használt gondolatmenetet hasonlóan alkalmazva $K_{n-p+1} \subset G$ miatt $\nu(G) \geq n-p+1$, valamint $K_p \subset \overline{G}$ miatt $\nu(\overline{G}) \geq p$, így az összegre $\nu(G)+\nu(\overline{G}) \geq n-p+1+p = n+1$ adódik.

Legyen most G $F_2(n,p)$-ben, $n \geq 5$. Miután G-ben van legalább p db független pont, $\overline{G}$-ben pedig legalább $n-p-5$, valamint kihasználva, hogy a megfelelő hipergráf egyszerű, így minden hiperél legalább két pontot tartalmaz, $\nu(G) \geq 2p$ és $\nu(\overline{G}) \geq 2(n-p-5)$. Becsülve az összeget tagonként, $\nu(G)+\nu(\overline{G}) \geq 2n-10$ adódik, ami azt jelenti, hogy $n \geq 9$ esetén kész vagyunk. Tudjuk, hogy ha $n \geq 3$, akkor $\nu(C_n) = n$ (lásd [10]), s mivel G-ben és komplementerében is van C_5, szintén kész vagyunk.

$\square$

A 3.12 tétel következménye, hogy a 3.11 lemma teljesül tetszőleges G gráf esetén G és $\overline{G}$ közül legalább az egyikre. Tegyük fel ugyanis, hogy $\chi(G) > \nu(G)$. Ekkor viszont $\chi(G)+\chi(\overline{G}) \leq \nu(G)+\nu(\overline{G}) < \chi(G)+\nu(\overline{G})$, tehát $\chi(\overline{G}) \leq \nu(\overline{G})$, tehát igaz az alábbi következmény.

3.14. Következmény. Tetszőleges G esetén G vagy $\overline{G}$ biztosan teljesíti 3.11 lemmát, s ezáltal a 3.7 sejtést.

3.2. Egy algebrai vonatkozás

A probléma népszerű, gyakorlati alkalmazását fogalmazta meg Lucien Haddad és Claude Tardif 2004-ben [17], amely a következőképpen hangzik. Tegyük fel, hogy van n bizottságunk, mindegyikben n ember és bármely két bizottságra teljesül, hogy legfeljebb egy ember van, aki tagja mindkettőnek. A bizottságok ugyanabban a bizottsági teremben üléseznek, ebben a teremben n db szék található. Lehetséges-e, hogy minden személy előre kiválaszt magának egy széket úgy, hogy mindig a kiválasztott székben ül, bármely olyan bizottság is ülésezzen, amelynek tagja?
Az EFL sejtés igazsága esetén a válasz igenlő, hiszen jelen példában az egyes bizottságok megfelelnek a klikkeknek, a székek pedig a színeknek. Ugyanebben a cikkben [17] található egy érdekes karakterizációs tétel, ám ennek megértéséhez egy kis kitekintést kell tennünk az univerzális algebra világába.

3.15. Definíció. *Egy **n-áris relációs struktúra** alatt egy (V, R) párt értünk, ahol V halmaz, valamint $R \subseteq V^n$. Egy ilyen reláció **areflexív**, ha minden $(x_1, ..., x_n) \in R$ esetén $x_1, .., x_n$ páronként különbözőek, továbbá **teljesen szimmetrikus**, ha minden $\pi \in S_n$ esetén $(x_{\pi(1)}, ..., x_{\pi(n)}) \in R$, ahol S_n jelöli az n elemű szimmetrikus csoportot.*
*Egy **homomorfizmus** a (V, R) és (V', R') n-áris relációs struktúrák között egy olyan $\Phi : V \to V'$ leképezés, melyre teljesül, hogy minden $(x_1, ..., x_n) \in R$ esetén $(\Phi(x_1), ..., \Phi(x_n)) \in R'$.*
*Egy $\Phi : dom_\Phi \to V'$ leképezést **parciális homomorfizmusnak** hívok, ha $dom_\Phi \subseteq V$ és minden $x_1, ..., x_n \in dom_\Phi$ esetén ha $(x_1, ..., x_n) \in R$, akkor $(\Phi(x_1), ..., \Phi(x_n)) \in R'$.*

3.16. Definíció. *Egy $\mathcal{H}$ hipergráfot, amely kielégíti az EFL sejtés feltételét, a sejtés egy **példányának** hívjuk.*

Definiáljunk egy $(V_\mathcal{H}, R_\mathcal{H})$ relációs sturktúrát, melynek alaphalmaza megegyezik $\mathcal{H}$ alaphalmazával, $R_\mathcal{H}$ elemei pedig olyan $(x_1, ..., x_n)$ rendezett n-esek, melyekre $\{x_1, ..., x_n\}$ hiperél $\mathcal{H}$-ban. Ekkor ha $\mathcal{H}$-nak n hiperéle van, $R_\mathcal{H}$ $n \cdot n!$ rendezett n-est tartalmaz. Az így definiált struktúra areflexív és teljesen szimmetrikus.
Legyenek most $\mathcal{H}$ és $\mathcal{H}'$ az EFL sejtés két példánya, az általuk definiált relációs struktúrák $(V_\mathcal{H}, R_\mathcal{H})$ és $(V'_\mathcal{H}, R'_\mathcal{H})$, valamint a hipergráfoknak megfelelő gráfok (gondoljunk a sejtés gráfos alakjára) G és G'. Mivel $R_\mathcal{H}$ és $R'_\mathcal{H}$ elemei megfelelnek a G- és G'-beli klikkeknek, egy, a struktúrák közötti homomorfizmus természetes módon indukál egy homomorfizmust G és G' között (gondoljunk itt most G-re és G'-re bináris relációs struktúraként). Visszafelé azonban nem feltétlenül igaz, vagyis egy $G \to G'$ homomorfizmus nem feltétlenül indukál homomorfizmust $(V_\mathcal{H}, R_\mathcal{H})$ és $(V'_\mathcal{H}, R'_\mathcal{H})$ között. Előrfordulhat például, hogy G n-színezhető és G' tartalmaz egy C klikket, amely nem

feleltethető meg semelyik $\mathcal{H}'$-beli hiperélnek. Ha C elemeit azonosítjuk a G-beli színekkel, egy $G \to G'$ homomorfizmust kapunk, amely sehogy sem feleltethető meg egy $(V_\mathcal{H}, R_\mathcal{H}) \to (V'_\mathcal{H}, R'_\mathcal{H})$ homomorfizmusnak.
A $(V_\mathcal{H}, R_\mathcal{H}) \to (V'_\mathcal{H}, R'_\mathcal{H})$ parciális homomorfizmusok esetében még az sem igaz feltétlenül, hogy $G \to G'$ parciális homomorfizmust indukálnának. Legyen például X azon $\mathcal{H}$-beli csúcsok halmaza, melyek csak egy hiperélben vannak benne. Ekkor X nem tartalmaz hiperélet, így tetszőleges $X \to V_{\mathcal{H}'}$ leképezés parciális homomorfizmus $(V_\mathcal{H}, R_\mathcal{H})$ és $(V'_\mathcal{H}, R'_\mathcal{H})$ között, viszont egy $G \to G'$ parciális homomorfizmus, melynek értelmezési tartománya X, megtartja az X által feszített részgráf éleit.
A fenti példákból azt állapíthatjuk meg, hogy a sejtés példái által generált relációs struktúrák nem feltétlenül viselkednek úgy, mint a nekik megfelelő gráfok, legalább is parciális homomorfizmusok szempontjából.

3.17. Definíció. *Legyen m egész szám, ekkor egy n-áris relációs struktúra **m-edik hatványa** $(V, R)^m$ egy olyan (V^m, R') n-áris relációs struktúra, melyben*

$$R' = \{(X_1, ..., X_n) \in (V^m)^n : (pr_i(X_1), ..., pr_i(X_n)) \in R, i = 1, ..., m\}$$

ahol pr_i a szokásos i-edik projekció, vagyis $pr_i(a_1, ..., a_n) = a_i$.
*Egy $V^m \to V$ parciális függvényt **parciális műveletnek** hívunk V-n.*

Jelölje $pPol(V, R)$ az olyan V-n értelmezett parciális műveletek halmazát, melyek valamilyen m-re $(V, R)^m \to (V, R)$ parciális homomorfizmusok is. Vegyük észre, hogy $pPol(V, R)$ tartalmazza az összes projekciót, valamint zárt a következőképpen értelmezett kompozícióra:
Legyenek $\Phi_1, ..., \Phi_k : (V, R)^m \to (V, R)$ parciális homomorfizmusok és $\psi : (V, R)^k \to (V, R)$ parciális homomorfizmus. Ekkor

$$(\psi(\Phi_1, ..., \Phi_k))(X_1, ..., X_m) := \psi(\Phi_1(X_1, ..., X_m), ..., \Phi_k(X_1, ..., X_m)),$$

azon $(X_1, ..., X_m)$ rendezett m-eseken, melyeken a fenti kifejezés értelmes.

3.18. Definíció. *Parciális műveletek olyan halmazát, mely tartalmaz minden projekciót és zárt a fent definiált kompozícióra, **parciális klónnak** nevezzük.*

Egy parciális klón maximális a V halmazon, ha semmilyen másik parciális klón nem tartalmazza (kivéve a V-n értelmezett parciális műveletek halmazát). Ez azt jelenti, hogy egy $\mathcal{C}$ parciális klón maximális a V halmazon, ha bárhogy választok f és g parciális műveleteket, melyek nincsenek $\mathcal{C}$-ben, g megkapható f és $\mathcal{C}$-beli elemek kompozíciójaként. Ekkor igaz az alábbi tétel:

3.19. Tétel. *[17] Legyen (V, R) n-áris areflexív, teljesen szimmetrikus relációs struktúra. Ekkor $pPol(V, R)$ pontosan akkor maximális klón, ha (V, R) erősen n-színezhető.*

Itt (V, R) erős n-színezése azt jelenti, hogy az a hipergráf erősen n-színezhető, melynek $\{x_1, ..., x_n\}$ hiperéle, ha $(x_1, ..., x_n) \in R$.

3.20. Következmény. Legyen $\mathcal{H}$ az EFL sejtés egy példánya. Ekkor a $\mathcal{H}$ erősen n-színezhető akkor és csak akkor, ha $pPol(V_{\mathcal{H}}, R_{\mathcal{H}})$ egy maximális parciális klón.

Vagyis igaz a következő tétel:

3.21. Tétel. *[17] Az Erdős-Faber-Lovász sejtés akkor és csak akkor igaz, ha a sejtés minden $\mathcal{H}$ példányára a $(V_{\mathcal{H}}, R_{\mathcal{H}})$ relációs struktúra egy maximális parciális klónt határoz meg.*

3.3. Egy gyengébb korlát

Lawler és Chang 1986-ban közzétett bizonyítását mutatjuk be a következő tételre.

3.22. Tétel. *[9] Az Erdős-Faber-Lovász sejtés feltételét kielégítő gráfok $\lceil \frac{3}{2}n-2 \rceil$ színnel biztosan színezhetőek.*

Bizonyítás. Használva a 3.6 állítást, azt fogjuk megmutatni, hogy tetszőleges egyszerű hipergráf hiperélei színezhetőek csúcsszámnyi színnel. Legyen tehát H egyszerű hipergráf n csúcson. Kezdjük el a hiperéleket méretük szerint monoton csökkenő sorrendben kiszínezni, s tegyük fel, hogy eljutottunk a k méretű A hiperélhez.
Első esetben $k \geq 3$. Ekkor a már színes hiperélek legalább k méretűek (ráadásul legfeljebb $n - k$ lehet belőlük), s mivel H lineáris, bármely $x \in A$ esetén az x-ben találkozó színes hiperélek száma legfeljebb $\lfloor \frac{n-k}{k-1} \rfloor$. Viszont ekkor $k \geq 3$ miatt $k\frac{n-k}{k-1} = \frac{(k-1+1)(n-k)}{k-1} \leq \frac{3n-9}{2} < \lceil \frac{3}{2}n - 2 \rceil$, tehát e számára van még színem.
Második esetben $k \leq 2$, s legyen $e = (x, y)$. Feltehető, hogy eddig minden felhasznált szín megjelenik x-nél vagy y-nál (különben van szabad színem, amivel e színezhető).

3.23. Lemma. *Ekkor létezik z csúcs úgy, hogy (x, z) és (y, z) már színezett hiperélek, valamint (x, z) színe nem szerepel y csúcsnál és vice versa.*

Bizonyítás. Definiáljuk a következő halmazokat:

$$B := \{b \mid b \in E(H), |b| \geq 3, x \in b \text{ vagy } y \in b\}$$
$$C_1 := \{c \mid \exists w : (x, w) \in E(H) \text{ úgy, hogy ezen él színe } c\text{, de } c \text{ semmilyen legalább 3 méretű hiperélnek nem színe, mely tartalmazza } y\text{-t}\}$$
$$C_2 := \{c \mid \exists w : (y, w) \in E(H) \text{ úgy, hogy ezen él színe } c\text{, de } c \text{ semmilyen legalább 3 méretű hiperélnek nem színe, mely tartalmazza } x\text{-t}\}$$

Nyilván sem C_1, sem C_2 nem üres. Ekkor az olyan színek, melyek nincsenek $C_1 \cup C_2$-ben, de x-nél és y-nál megtalálhatóak, biztosan B-beli hiperélhez tartoznak. Azon B-beli hiperélek, melyek csak x-szel szomszédosak, legfeljebb $\frac{n-2-|C_1|}{2}$-en lehetnek, hiszen n-ből le kell vonni legalább annyit, ahány 2 elemű hiperél csatlakozik x-hez és még egyet x miatt, illetve leosztani 2-vel a linearitás miatt. Hasonlóan azon B-beli hiperélek, melyek csak y-al szomszédosak, legfeljebb $\frac{n-2-|C_2|}{2}$-en lehetnek. Mivel minden szín használatban van x-nél vagy y-nál:

$$\tfrac{3}{2}n - \tfrac{5}{2} \leq \lceil \tfrac{3}{2}n - 2 \rceil \leq |C_1 \cup C_2| + \tfrac{n-2-|C_1|}{2} + \tfrac{n-2-|C_2|}{2}$$

Felbontva a zárójeleket és 2-vel szorozva:

$$n - 1 \leq |C_1 \cup C_2| - |C_1| + |C_1 \cup C_2| - |C_2| = |C_2 \setminus C_1| + |C_1 \setminus C_2|$$

Viszont ez azt jeleni, hogy azon kételű hiperélek közül, melyek már színezve vannak és a színük nem használatos x-nél vagy y-nál, legalább $(n-1)$-en vannak, viszont $n-2$ x-től és y-tól különböző csúcs van H-ban, így a skatulya-elv miatt létezik a keresett z. $\square$

A lemmából már következik a tétel, ugyanis x-nél és y-nál is legalább $\frac{n}{2}$ szín szabad, ugyanakkor ez a két színhalmaz diszjunkt, ráadásul z-nél csak $n-1$ szín szerepelhet ezek közül. Ebből viszont következik, hogy van olyan szín, legyen ez c, amely z-nél és pl. x-nél is szabad. Ekkor (x, z) színe lehet c és így (x, z) eredeti színét megkaphatja (x, y). $\square$

3.4. Aszimptotikus megoldás

Az eddigi legjobb felső korlát viszonylag régről, 1992-ből származik és Jeffry Kahn amerikai matematikus nevéhez fűződik. Ebben a részben a sejtés 1981-ben Hindman által leírt alakját [7] vesszük alapul, miszerint legyen adva n ponton egy halmazrendszer (hipergráf) úgy, hogy bármely két halmaz (hiperél) metszete legfeljebb 1 elemű, ekkor pedig a halmazok színezhetők n színnel úgy, hogy a metsző halmazok színe eltérő. Másképpen szólva tetszőleges n csúcsú lineáris hipergráf hiperélei színezhetőek n színnel. A Kahn által bizonyított tétel szerint ha n szín nem is feltétlenül elég, de n és egy „kicsi“ már igen, vagyis n minél nagyobb, a szükséges színek száma annál közelebb van n-hez. Természetesen kellően nagy n-re jobb felső korlátot kapunk az előző alfejezetben látottnál. Precízen:

3.24. Tétel. *[8] Legyen H lineáris hipergráf n csúcson, ekkor $\chi(H)' \leq (1 + o(1))n$.*

A tétel igazsága egy viszonylag erős tételen múlik, amelyet ugyan kimondunk, de nem bizonyítunk. Megjegyezzük viszont, hogy lényegében Pippenger és Spencer munkája ez a tétel, Kahn viszonylag kis fokú általánosítását látta be, s úgy használta fel a bizonyításához.

3.25. Tétel. *[8] Minden $k \geq 2$ egészhez, $v > 0$ és $0 \leq \eta < 1$ valós számokhoz, melyekre igaz a*

$$v > \eta(k \cdot log\frac{1}{\eta} + k + 1)$$

összefüggés (ahol $\eta = 0$ esetben a jobb oldal legyen 0), létezik $\beta > 0$ valós szám úgy, hogy igaz a következő állítás.
Legyen $H = (X, E)$ olyan hipergráf, melynek minden hiperéle legfeljebb k elemű és

$$\begin{aligned} d(x) &\leq D & \forall x \in X \\ d(x, y) &< \beta D & \forall x \neq y \in X, \end{aligned}$$

ahol $d(x, y) = |\{A \in E(H) : x, y \in A\}|$.
Legyen még C olyan színhalmaz, melyre $|C| \geq (1 + v)D$ és minden $A \in E(H)$ esetén legyen $C(A) \subseteq C : |C(A)| \leq \eta D$.
Az állítás az, hogy ekkor van olyan $|C|$-színezése H hiperéleinek, hogy egyik szín sincs $C(A)$-ban.

Bizonyítás. (3.24 Tétel, vázlat)[8] Azt kell belátni, hogy tetszőlegesen kicsi $\varepsilon > 0$ esetén $\chi(H)' \leq (1 + \varepsilon)n$, ha n elég nagy. Kahn jelöléseit követve legyen $a = \lceil \frac{3}{\varepsilon} \rceil$, $b = \lceil \frac{5a^2 log\frac{1}{\varepsilon}}{\varepsilon} \rceil$ és $H = \bigcup_{i=1}^{3} H_i$, ahol

$$\begin{aligned} H_1 &= \{A \in H : |A| > b\}, \\ H_2 &= \{A \in H : b \geq |A| > a\}, \\ H_3 &= \{A \in H : |A| \leq a\}. \end{aligned}$$

Legyenek C_1, C_2 diszjunkt színhalmazok úgy, hogy $|C_1| = \lfloor (1 + \frac{\varepsilon}{2})n \rfloor$ és $|C_2| = \lfloor \frac{n\varepsilon}{2} \rfloor$. Állítjuk, hogy $H_1 \cup H_3$ színezhető C_1, H_2 pedig C_2-beli színekkel.

Vizsgáljuk először H_1-t, s alkalmazzuk a 3.22 tétel bizonyításában is szereplő gondolatmenetet: rendezzük monoton csökkenő sorrendbe a H_1-beli hiperéleket, s legyen a sorban az i-edik A_i, illetve $|A_i| = k(> b$ H_1 definíciója miatt). Ekkor $|\{j < i : A_j \cap A_i \neq \emptyset, A_j \in E(H)\}| \leq \frac{k(n-k)}{k-1} < |C_1|$, vagyis van szabad színem A_i számára.

H_2 esetében vegyük észre, hogy mivel minden hiperél több, mint a elemű, a H_2-ben lévő hiperélekben lévő csúcsok fokszáma legfeljebb $\frac{n-1}{a} =: D$. A 3.25 tétel ad nekünk $D, k = b, v = \frac{1}{2}, \eta = 0$ számokhoz egy β-t ($d(x, y) \leq 1$ minden csúcsra, $C = C_2$). Legyen n annyira nagy, hogy $D > \frac{1}{\beta}$. Ekkor szintén az említett tétel miatt $\chi(H_2)' \leq \lfloor (1 + v)D \rfloor \leq |C_2|$.

Legyen most $D = n, k = a, v = \frac{\lfloor \frac{n\varepsilon}{2} \rfloor}{n}, \eta = \frac{a}{b}$. Megmutatható, hogy a 3.25 tétel v, k, η változókra vonatkozó feltétele teljesül ebben az esetben. Legyen $C(A) = \{c \in C_1 : \exists B \in H_1$ úgy, hogy $B \cap A \neq \emptyset$ és $f_1(B) = c$, ahol f_1 a H_1 színezése$\}$, $A \in H_3$. Ekkor viszont $|C(A)| \leq |\{B \in H_1 : B \cap A \neq \emptyset\}| \leq \frac{a(n-a)}{b} < \eta D$, így $n > \frac{1}{\beta}$ esetén a 3.25 tétel biztosítja nekünk H_3 jó színezését. $\square$

4. Speciális esetek

Bár az EFL sejtés általános esetének a megoldása még várat magára, az évek során számtalan speciális alakú gráfrendszerről sikerült megmutatni, hogy igaz rájuk az n-színezhetőség. Ebben a fejezetben az ilyen speciális esetek közül vizsgálunk néhányat, a fejezet végén pedig ismertetünk egy saját bizonyítást egy erős megkötésekkel bíró esetre.

4.1. Sűrű és ritka hipergráfok

4.1. Tétel. (Sánchez-Arroyo) *[13] Legyen H lineáris hipergráf olyan, hogy $n \geq 4$ hiperéle van, melyek mindegyike legfeljebb n csúcsot tartalmaz. Ha H sűrű, akkor $\chi(H) \leq n$.*

Bizonyítás. Ismét azt a gondolatmenetet fogjuk alkalmazni, melyet az előző fejezet végén lévő bizonyításokban már használtunk. Vegyük a csúcsok fokszám szerinti monoton csökkenő sorrendjét és kezdjünk el mohón színezni (korábban hiperéleket színeztünk, méret szerinti csökkenő sorrendben). Tegyük fel, hogy egy k fokú v csúcsot színezünk éppen, s a k fokúaknál nagyobbakat már mind kiszíneztem. Legyen A olyan hiperél, ami tartalmazza v-t. Ekkor ha A-ban van színes csúcs, ahhoz legalább k hiperél kapcsolódik, így A-ban legfeljebb $\frac{n-k}{k-1}$ színes csúcs van (a korábbi bizonyításokhoz hasonlóan itt is kihasználjuk a linearitást). Így legfeljebb $k\frac{n-k}{k-1}$ olyan színes csúcs van, melyek mindegyikére igaz, hogy van olyan hiperél, ami tartalmazza a színes csúcsot és v-t is. Könnyen látszik viszont, hogy $k > \sqrt{n}$ esetén ez a mennyiség szigorúan kisebb, mint n. $\square$

Mint már korábban rámutattunk, az egy fokú pontok színezése nem okoz problémát, így az olyan hipergráfokra, melyek ezen pontok elhagyásával sűrűek, igaz a sejtés. Most azt a speciális esetet fogjuk megvizsgálni, amikor a hipergráf uniform, reguláris és viszonylag ritka.

4.2. Jelölés. (Faber) *[4] Egy H lineáris hipergráfról azt mondjuk, hogy* ***(n,d,r) lineáris halmazrendszer****, ha n csúcsa van, d-uniform és minden csúcsot r hiperél tartalmaz.*

4.3. Megjegyzés. Gondoljuk meg, hogy egy (n, d, r) rendszer duálisát véve olyan lineáris hipergráfot kapok, melyben n db hiperél van, melyek mindegyike megfelel az eredeti rendszerben egy csúcsnak, minden hiperél r elemet tartalmaz és minden csúcs pontosan d hiperélben van benne. Korábban már láttuk, hogy a linearitás megmarad. Ha még $n - r$ izolált pontot beledobálunk az egyes hiperélekbe, valóban az n-halmaz probléma egy speciális, d-reguláris esetét kapom. A duálisbeli csúcsszínezés pedig megfelel az eredeti rendszerben a hiperélek színezésének.

4.4. Tétel. (Faber) *[4] Legyen D (n, d, r) lineáris rendszer. Ekkor*

1. *ha $r \leq d + 1$, akkor D hiperélei n-színezhetőek,*
2. *létezik $C > 0$ d-től és n-től független konstans úgy, hogy minden $d \geq C$-re ha $n \geq Cd^2$, akkor D hiperélei n-színezhetőek.*

A bizonyításhoz használni fogjuk Alon, Krivelevich és Sudakov tételét.

4.5. Tétel. (AKS) *[16] Legyen G tetszőleges gráf és $f > 0$. Ha igaz, hogy tetszőleges v csúcsra a v szomszédai által feszített részgráfban található élek száma legfeljebb $\frac{\Delta(G)^2}{f}$, akkor $\chi(G) \leq c\frac{\Delta(G)}{f}$.*

4.6. Megjegyzés. Faber tételének a bizonyítása előtt állapodjunk meg abban, hogy D duálisát H-val jelöljük, valamint definiáljuk H klikkgráfjának a fogalmát, melyet később még használni fogunk, s a bizonyításban G-vel jelöljük. G csúcsai legyenek H csúcsai és két csúcs pontosan akkor legyen szomszédos, ha H-ban létezik olyan hiperél, amely tartalmazza őket. Ekkor G r méretű klikkek uniója és egy csúcs pontosan d klikkben van benne. Azt is vegyük észre, hogy G jó színezése megfelel H csúcsain egy jó színezésnek.

Bizonyítás. (4.4 tételé) Az 1. állításhoz tegyük fel, hogy $r \leq d+1$, valamint indirekt azt, hogy D nem színezhető jól n színnel. Az előbbi megjegyzést figyelembe véve megállapíthatjuk, hogy G-ben minden csúcs foka $\Delta(G) = d(r-1)$. Brooks tétele értelmében elég azt az esetet vizsgálni, mikor $n > \Delta(G)$, vagyis

$$n \leq \Delta(G) - 1 = d(r-1) - 1. \tag{1}$$

A következő észrevételek általában is igazak egy lineáris (n, d, r) rendszerre:

$$n - 1 \geq r(d-1) \tag{2}$$

Ennek belátásához vegyük a duális H hipergráf egy tetszőleges A hiperélét, s számoljuk meg az A-ba belemetsző hiperéleket. Mivel A-nak H-ban r csúcsa van és mindegyik csúcs $d-1$ A-tól különböző hiperélben lehet benne, a linearitás miatt pedig egy hiperélet csak egyszer számolok, így $r(d-1)$ ezen hiperélek száma, s mivel n hiperél van H-ban, így ezek legfeljebb $n-1$-en lehetnek.

$$nr = |X(H)|d = |V(G)|d \tag{3}$$

Nyilván $|X(H)| = |V(G)|$. Számoljuk meg H-ban a csúcsokat: egy hiperélben r db csúcs van, n db hiperélem van, ez eddig nr, azonban minden csúcsot annyiszor számoltam, ahány hiperélben benne van, ez pedig pont d, vagyis $\frac{nr}{d}$ csúcsom van.
Viszont most ellentmondásba ütköztünk, hiszen (1) és (2) miatt $r(d-1)+1 \leq d(r-1)-1$, ami átalakítva és felhasználva, hogy $r \leq d+1$, $d+2 \leq d+1$ adódik. Ezzel beláttuk 1.-t.

Következzen most 2. bizonyítása. Definiáljuk N_v-t úgy, mint egy $v \in V(G)$ csúcs szomszédai által feszített részgráfban az élek számát. Ezek kétféleképpen állhatnak elő. Első esetben olyan élekről van szól, melyek olyan klikkhez tartoznak, amelyben v is benne van. Egy ilyen klikkben $r-1$ másik pont van, s d klikkben van benne v, amiknek nem lehet közös pontjuk, így az ilyen élek száma $d\binom{r-1}{2}$. Másik esetben olyan élek, melyek H-ban azon hiperélekből keletkeztek, melyek nem tartalmazzák v-t. Ezen élek a G-ben az x-hez tartozó klikkel között mehetnek. Mivel legfeljebb $n-d$ olyan hiperél van H-ban, mely nem tartalmazza v-t, s G-ben v d klikkben van benne, ezért ezen élek száma legfeljebb $(n-d)\binom{d}{2}$. Így tehát

$$N_x \leq d\binom{r-1}{2} + (n-d)\binom{d}{2}. \tag{4}$$

Felhasználva, hogy $\Delta(G) = d(r-1)$, valamint az (1), (2) és (3) egyenlőtlenségeket, (4) a következőképpen alakítható tovább:

$$N_x \leq \frac{\Delta(G)}{2}\Big(\frac{\Delta(G)}{d} - 1\Big) + \Delta(G)\binom{d}{2} \leq \frac{\Delta^2(G)}{2d} + \frac{d\Delta(G)}{2}(d-1).$$

Legyen

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{2d} + \frac{d}{2\Delta(G)}(d-1),$$

ekkor

$$\frac{1}{2d} + \frac{(d-1)^2}{2(n-d)} \leq \frac{1}{f} \leq \frac{1}{2d} + \frac{d(d-1)}{2n}.$$

Ekkor teljesül az AKS tétel feltétele, így $\chi(G) \leq c\frac{\Delta(G)}{logf} \leq c\frac{d(n-d)}{(d-1)logf}$. Azt kell már csak megmutatnunk, hogy a jobb oldal legfeljebb n. Tegyük fel ezt az egyenlőtlenséget és rendezzük át $logf$-re. $d \geq 2$ szintén feltehető, így

$$logf \geq c\frac{1-\frac{d}{n}}{1-\frac{1}{d}}$$

az, amit be kellene látni, illetve

$$\frac{1-\frac{d}{n}}{1-\frac{1}{d}} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{d}} \leq 2$$

teljesül. Tehát elég lenne megmutatni, hogy $f \geq e^{2c} =: C > 1$. Ezt egy korábbi egyenlőtlenségbe beírva elég megoldani az alábbit

$$\frac{1}{2d} + \frac{d(d-1)}{2n} \leq \frac{1}{C}.$$

Ha $d \geq C$, akkor $2 - \frac{C}{d} \geq 1$, ami azt jelenti, hogy elég megoldani az

$$n \geq C \frac{d(d-1)}{2 - \frac{C}{d}}$$

egyenlőtlenséget, viszont

$$Cd^2 \geq Cd(d-1) \geq C \frac{d(d-1)}{2 - \frac{C}{d}},$$

tehát ha $n \geq Cd^2$, akkor valóban n-színezhető D. □

Gondoljuk meg, hogy ha d rögzített, akkor ha n túl nagy, teljesülni a hipergráfom elég ritka lesz ahhoz, hogy az előbbi tétel teljesüljön, ha viszont túl kicsi, akkor a sűrű eset áll fenn, amelyre szintén igaz a sejtés. A kettő között csak véges sok halmazrendszer gyártható le, vagyis igaz az alábbi következmény.

4.7. Következmény. [4] Rögzített d esetén az Erdős-Faber-Lovász sejtésre a reguláris, d-uniform esetben csak véges sok ellenpélda adható.

4.2. Teljesen unimoduláris hipergráfok

A 2. fejezetben már definiáltuk a TU hipergráf fogalmát. Ebben a részben egy 2007-ben elfogadott eredményt ismertetünk, mely Jackson és Whitehead brit, illetve Sethuraman indiai matematikusok érdeme [18], s az Erdős-Faber-Lovász sejtés egy speciális esetét tárgyalja. Amint azt látni fogjuk, a sejtés igaz, ha a vizsgált H hipergráf bizonyos tulajdonsággal rendelkező hiperélei által meghatározott részleges hipergráf elég kevés színnel színezhető, majd ezt felhasználva megvizsgáljuk azt az esetet, mikor az említett részhipergráf TU.
A hipergráfok vizsgálata során elengedhetetlen definiálni a részhipergráf fogalmát. A probléma ezzel, hogy nem egyértelmű, hogyan kellene ezt megtenni.

4.8. Definíció. *A $H = (X, E)$ hipergráf* ***részhipergráfja*** *(subhypergraph) alatt egy $Y \subseteq X$ ponthalmaz által meghatározott hipergráfot értünk úgy, hogy a ponthalmaz Y, a hiperélek pedig azon hiperélek Y-ba eső részei, melyek belemetszenek Y-ba.*
A H hipergráf ***részleges hipergráfján*** *(partial hypergraph) egy olyan hipergráfot értünk, mely úgy keletkezik, hogy H-nak csak meghatározott hiperéleit hagyjuk meg, a többit kidobjuk.*

4.9. Jelölés. *Ebben az alfejezetben a következő jelölések érvényesek (Jacksonék jelöléseihez hűen). $H = (X, E)$ egyszerű hipergráfot jelöl, H azon részleges hipergráfját, melyet a legalább 3 elemű hiperélek határoznak meg, jelölje* $\boldsymbol{S}$. *Legyen $G = H - E(S)$, ekkor G nyilván egyszerű gráf.* $\boldsymbol{T}$ *jelöli G-nek a $X(H) \setminus X(S)$ által feszített részgráfját,* $\boldsymbol{G_\Delta}$ *pedig a G-beli maximális fokszámú csúcsok által feszített részgráfot.*

A célunk belátni a sejtést abban az esetben, mikor H olyan, hogy $\chi'(S) = \Delta(S)$ és $\Delta(S) \leq 3$. Ehhez segítségünkre Fournier tétele.

4.10. Tétel. (Fournier) *[5] Ha G egyszerű gráf és G_Δ aciklikus, akkor $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

4.11. Lemma. *Legyen H egyszerű hipergráf és $|X(H)| = n$. Amennyiben $\Delta(S) = 1$, akkor $\chi'(H) \leq \Delta(H) + 1$.*

Bizonyítás. (Berge, Hilton)[6] A feltétel miatt S hiperélei függetlenek, így kaphatják ugyanazt a c színt. Legyen továbbá P $H - X(S)$-ben egy maximális párosítás, ekkor P elemei is kaphatják a c színt. Legyen $G' = H - (E(S) \cup P)$ egyszerű gráf, melyben a legnagyobb fokszám vagy $\Delta(H) - 1$, ami akkor fordulhat elő, ha P valamelyik végpontja $\Delta(H)$ fokú volt az élek elhagyása előtt, vagy pedig $\Delta(H)$ fokú, viszont ekkor az ilyen fokú pontok függetlenek. Ez azért van, mert ebben az esetben $\Delta(H)$ fokú pont nem lehet P-beli él végpontja (hiszen visszatéve a P-beli éleket $\Delta(H) + 1$ fokú pontot kapnék), viszont ha két ilyen között futna él, azt bevehetném P-be. Első esetben Vizing, második esetben Fournier tétele biztosítja G' $\Delta(H)$ színnel való színezését, ehhez még legfeljebb hozzá kell vennünk c-t, vagyis H hiperélei $\Delta(H)+1$ színnel biztosan színezhetőek. $\square$

4.12. Következmény. Ha H egyszerű, akkor $\Delta(H) \leq n - 1$, így $\Delta(S) = 1$ esetén igaz az EFL sejtés.

A továbbiakban $\Delta(S) \geq 2$ esetén feltesszük H-ról, hogy $\chi'(H) = \Delta(H)$, valamint azt, hogy bármely két különböző csúcshoz létezik olyan hiperél, amely őket tartalmazza. Ez a kromatikus indexet legfeljebb növelheti, így az általánosságot nem veszélyezteti a feltevésünk, ellenben igazak az alábbi nagyon egyszerű állítások, ahol $v \in V(T)$ és $x, y \in X(S)$:

a) $T = \emptyset$ vagy T olyan klikk, melynek minden csúcsa egy 2 méretű hiperélen keresztül csatlakozik S-be. Ekkor $d_G(v) = n - 1$.

b) x és y pontosan akkor szomszédos G-ben, ha nincs olyan $E(S)$-beli hiperél, mely tartalmazza mindkét említett csúcsot.

c) $d_G(x) \leq n - 3$ és pontosan akkor van egyenlőség, ha x-et egy darab 3 méretű hiperél tartalmazza S-ben.

d) $d_S(x) = 2$ esetén $d_G(x) \leq n - 5$.

e) $d_S(x) = 3$ esetén $d_G(x) \leq n - 7$.

4.13. Lemma. *Legyen H egyszerű hipergráf, $|X(H)| = n$ és $\Delta(S) = \chi'(S) = 2$. Ekkor $\chi'(H) \leq n$.*

Bizonyítás. Feltesszük tehát, hogy bármely két csúcsot tartalmaz hiperél, valamint az előbb felsorolt állításokra a betűjelekkel hivatkozni fogunk. A bizonyítás során 4 esetünk lesz aszerint, hogy $V(T)$ hány elemű. Kezdetben színezzük ki S-t a c_1 és c_2 színekkel. Azt kell belátni, hogy a $G = H - E(S)$ gráf $(n-2)$-élszínezhető.

Első esetben legyen $V(T)$ üres. Ekkor minden pontot tartalmaz $E(S)$-beli hiperél, $c)$ miatt $\Delta(G) \leq n-3$, Vizing tétele miatt kész vagyunk.

Második esetben legyen $V(T) = \{u\}$
Ha létezik $w \in X(S)$, aminek S-beli foka 1, akkor legyen c_1 az a szín, ami nem a w-t tartalmazó hiperél színe. Legyen uw színe c_1 illetve $G' = H - E(S) - uw$. Ekkor viszont $V(G'_\Delta) = \{u\}$ és $\Delta(G') = n-2$, használva $a)$-t és $c)$-t, s így Fournier tételéből következik az állítás.
Ha nincs ilyen w, akkor minden szomszédja, ergo minden csúcs másodfokú S-ben és így $d)$ miatt minden csúcs legfeljebb $n-5$ fokú G-ben. Ekkor egy tetszőleges c_2 színű, $E(S)$-beli hiperélt színezzünk egy új, c_3 színűre. Így keletkezett w_2 és w_3 két olyan csúcs, hogy c_2 hiányzik w_2-nél, c_3 pedig w_3-nál. Legyen uw_j színe $j = 2,3$ esetben c_j és $G'' = G - uw_2 - uw_3$. Így elértük, hogy $V(G''_\Delta) = \{u\}$ és $\Delta(G'') = n-3$ ($a)$ és $d)$), vagyis megint csak Fournier tétele miatt $G''(n-3)$ színezhető, ebben az esetben is kész vagyunk.

Harmadik esetben $V(T) = \{u_1, u_2\}$. Legyen u_1u_2 színe c_1, $G''' = G - u_1u_2$. $a)$ és $c)$ miatt $V(G'''_\Delta) = \{u_1, u_2\}, \Delta(G''') = n-2$, ismét Fournier tételét használva adódik az $(n-2)$-színezés G'''-re.

Negyedik és egyben utolsó esetünkben $|V(T)| = t \geq 3$.
Ha t páros, $E(T)$ felbomlik P_1 és P_2 teljes párosítások diszjunkt uniójára. P_i színe legyen c_i és $G'''' = G - P_1 - P_2$, ekkor $a)$ és $c)$ miatt $\Delta(G'''') = n-3$, a Vizing-tétel biztosítja az állítás igazságát.
Ha t páratlan, legyenek r_1, r_2 különböző csúcsok T-ből. Most P_i legyen $T - \{u_i\}$-ban egy teljes párosítás, s megint csak P_i színe legyen c_i, G'''' pedig ugyanaz, mint a páros esetben. Ismételten $a)$ és $c)$ miatt $\Delta(G'''') = n-2$, Fournier tétele miatt most is teljesül az állítás. $\square$

4.14. Lemma. *Legyen H egyszerű hipergráf, $|X(H)| = n$ és $\Delta(S) = \chi'(S) = 3$. Ekkor $\chi'(H) \leq n$.*

Ennek bizonyítását itt most nem közöljük ([18] cikkben megtalálható), a bizonyítás nagyon hasonló az előző lemma bizonyításához. A különbség, hogy a nagyobb számú eset miatt ez jóval hosszabb és macerásabb, viszont semmivel sem nehezebb.

Foglaljuk össze egy tételben az előző két lemma eredményét, majd vizsgáljuk meg a következményeket.

4.15. Tétel. *[18] Legyen H egyszerű hipergráf n csúcson, S pedig a legalább 3 méretű hiperélek által meghatározott részleges hipergráfja H-nak. Ha $\chi'(S) = \Delta(S)$ és $\Delta(S) \leq 3$, akkor $\chi'(H) \leq n$.*

A tételben szereplő hipergráf duálisát véve adódik az alábbi alak.

4.16. Tétel. *[18] Legyen H n csúcsú, n-uniform hipergráf, S pedig a legalább harmadfokú csúcsok által meghatározott részhipergráfja H-nak. Ha minden hiperél legfeljebb 3 elemű, illetve $\chi(S) \leq 3$, akkor létezik H-nak erős n-színezése.*

Felhasználva, hogy a TU hipergráfokra igaz az $\chi' = \Delta$ egyenlőség, igazak az alábbi következmények.

4.17. Következmény. [18]

1. Legyen H egyszerű hipergráf n csúcson, S pedig a legalább 3 méretű hiperélek által meghatározott részleges hipergráfja H-nak. Ha S TU és $\Delta(S) \leq 3$, akkor $\chi'(H) \leq n$.

2. Legyen H n csúcsú, n-uniform hipergráf, S pedig a legalább harmadfokú csúcsok által meghatározott részhipergráfja H-nak. Ha minden hiperél legfeljebb 3 elemű és S TU, akkor létezik H-nak erős n-színezése.

4.3. G teljes gráf

Vegyünk most alapul a sejtés gráfos alakját (3.3), az ottani jelöléseket használva. Természetesen az egyes klikkek elemszámára vonatkozó feltétel n-ről legfeljebb n-re cserélhető, azaz $|A_i| \leq n$. Azt már láttuk a 3.5 megjegyzésben, hogy az 1 klikkfokú pontok elhagyhatóak, s az is könnyen látszik, hogy minden klikkben van legalább egy 1 klikkfokú pont. Vagyis feltehetjük, hogy minden $v \in V(G)$ esetén $2 \leq d^K(v) \leq n-1$. Ebből következik, hogy minden klikk mérete 2 és $n-1$ között van. Sőt, alsó korlátként 3 is feltehető, hiszen egy 2 elemű klikk elhagyása esetén a feladat $n-1$ db $n-1$ méretű klikk színezése $n-1$ színnel.
Feltehető továbbá, hogy bármely két klikknek van közös pontja. Ha nincs, akkor hozzávesszünk egy pontot a gráfhoz, ami ebben a két klikkben van. Végül tegyük még fel azt is, hogy van olyan pont, melynek klikkfoka legalább 3 (lásd 5.3 lemma bizonyítása).
Definiáljuk a G_* gráfot a következőképpen: G_* csúcsai feleljenek meg a G-beli klikkeknek, s ha G-ben egy v csúcs benne van $r_v \geq 2$ klikkben, akkor G_*-ben az ezen

klikkeknek megfelelő csúcsok alkossanak egy teljes részgráfot. Ekkor a 3.3 sejtés ekvivalens a következővel:

4.18. Sejtés. *[15] Ha a $G_* = (V_*, E_*)$ gráf n csúcsú és éldiszjunkt Q^j klikkek uniója, akkor a klikkek színezhetők n színnel úgy, hogy a különböző színű klikkek metszete üres.*

Az előbbi feltevéseinket analóg módon átültethetjük G_*-re.

Még egy megfogalmazását ismertetjük a problémának. Legyen $J = (V, V_*, L)$ páros gráf, V és V_* mint eddig, vv_* pedig él J-ben, ha a v-nek megfelelő G-beli csúcs a v_*-nak megfelelő klikkhez tartozik G_*-ban. Mivel G-ben két klikk metszete legfeljebb 1 elemű, J négyzetmentes gráf ($C_4 \nsubseteq J$). Legyen még J^2 az a gráf, melyet J-ből a kettő távolságra lévő pontok összekötésével kaphatunk meg.

4.19. Sejtés. *[15] Ha a $J = (V, V_*, L)$ páros gráf n csúcsú és négyzetmentes, továbbá minden csúcs foka legalább 2, akkor J^2 n-színezhető.*

A feltevéseket J-re is megfogalmazhatjuk. A most bevezetett jelöléseket használva belátjuk azt az esetet, amikor G egy klikk, a G_* terminológiáját használva.

4.20. Tétel. *[15] Ha G_* olyan, hogy bármely két Q^j-nek van közös pontja, akkor a Q^j-k száma legfeljebb n, így 4.18 igaz.*

Bizonyítás. Legyen a Q^j-k száma m, továbbá r a legkisebb méretű $Q = Q^j$ klikk mérete. Q csúcsai legyenek $v_1, ..., v_r$, $s_i = k$, ha v_i k db, Q-tól különböző klikkben van benne. Feltehető, hogy $s_1 \geq ... \geq s_r$. Ha $s_2 = 0$, minden klikk találkozik v_1-ben. Mivel G_*-ben egy csúcs egy G-beli klikknek felel meg, valamint G_*-ben minden klikk legalább 2 elemű, csak n-nél kevesebb klikk találkozhat v_1-ben, azaz $m < n$.

Ellenkező esetben $0 < s_2 < s_1$. Ekkor $n \leq s_1 s_2 + r$, mivel $|V(Q)| = r$ és minden s_2-höz tartozó klikkre igaz, hogy különböző csúcsban kell találkoznia minden s_1-hez tartozó klikkel. Szintén igaz, hogy $s_2 + 1 \geq r$, mert például egy s_1-hez tartozó klikkek közül van olyan aminek legalább ennyi csúcsa van, s Q minimális az elemszámra nézve. Ha $s_1 < s_2$, akkor

$$s_1 + ... + s_r + 1 = m \leq s_1 + (r-1)s_2 + 1 \leq s_1 s_2 + s_1 + 1 - (s_1 - s_2)s_2 \leq$$
$$s_1 s_2 + s_1 + 1 - (s_1 - 1) \leq s_1 s_2 + 2 \leq s_1 s_2 + r \leq n.$$

Ha $s_2 = s_1$ és $s_2 + 1 > r$, akkor

$$m \leq r s_1 + 1 \leq s_1 s_2 + 1 \leq s_1 s_2 + r \leq n.$$

Ha pedig $r = s_2 + 1$, akkor

$$m \leq r s_1 + 1 \leq s_1(s_2 + 1) + 1 \leq s_1 s_2 + r = n.$$

□

4.4. J síkbarajzolható

Az előző részben használt jelöléseket fogjuk alkalmazni ebben a részben is, s belátjuk a sejtés alábbi, viszonylag kevés gráfra alkalmazható, speciális esetét.

4.21. Tétel. *[15] Ha a $J = (V, V_*, L)$ gráf síkbarajzolható, akkor 4.19 teljesül.*

A tétel igazolása előtt azonban ismertetjük a Walecki-konstrukció fogalmát egy egyszerű bizonyításon keresztül.

4.22. Definíció. *[14] Azt mondjuk, hogy a G reguláris gráfnak létezik* ***Hamilton-felbontása****, ha $2d$-reguláris és $E(G)$ d db Hamilton-kör diszjunkt uniója; vagy $2d+1$-reguláris és $E(G)$ d db Hamilton kör és egy teljes párosítás diszjunkt uniója.*

4.23. Állítás. *Minden n-re K_n-nek létezik Hamilton-felbontása.*

Bizonyítás. (Walecki-konstrukció)[14] Az állítás nyilvánvaló $n \leq 2$ esetén. Legyen $n = 2m+1 \geq 3$, K_n csúcsai rendre $v_0, ..., v_{2m}$. Legyen C a $v_0 v_1 v_2 v_{2m} v_3 v_{2m-1} ... v_{m+3} v_m v_{m+2} v_{m+1} v_0$ Hamilton-kör és legyen σ a csúcsok $(v_0)(v_1 ... v_{2m})$ permutációja. Ekkor $C, \sigma(C), ..., \sigma^{m-1}(C)$ pont egy Hamilton-felbontás.
Legyen most $n = 2m \geq 4$, C a $v_0 v_1 v_2 v_{2m-1} v_3 v_{2m-2} ... v_{m-1} v_{m+2} v_m v_{m+1} v_0$ Hamilton-kör, σ pedig a csúcsok $(v_0)(v_1 ... v_{2m-1})$ permutációja. Ekkor $C, \sigma(C), ..., \sigma^{m-2}(C)$ éldiszjunkt Hamilton-körök, a maradék élek pedig teljes párosítást alkotnak. $\square$

Bizonyítás. (4.21 tételé) J négyzetmentessége folytán minden tartomány legalább 6 oldalú, illetve J párossága miatt páros számú oldal határolja. Mi több, feltehető, hogy minden tartomány 6 oldalú a csúcsszám növekedése nélkül, ugyanis ha van egy legalább 8 oldalú $v_1^* v_1 ... v_t^* v_t$ tartomány, akkor vagy egy $v_1^* v_q v_3^*$, vagy egy $v_2^* v_r v_4^*$ tartománybeli út hozzáadásával 2-vel csökkentettük az oldalak számát (a négyzetmentesség nem romlik el), s egy 6 oldalú tartomány még keletkezik. A 4.3 fejezet elején a G-re tett feltevéseket J-re átültetve kapjuk, hogy V_*-ban minden pont foka legalább 3, V-ben pedig van legalább egy 3 fokú csúcs. Vegyünk egy $v_1^* v_1 ... v_3^* v_3$ tartományt, ahol a v^*-k és v_2 harmadfokú. Ha most összehúzzuk v_1-t és v_3-t, illetve v_1^*-t és v_3^*-t, akkor eltűntetünk egy C_6-t. Így V elemszáma egyel csökken, indukcióval $n-1$ színnel színezhetjük a maradék V-beli csúcsokat, majd v_1 kaphat egy új színt. A baj csak annyi, hogy J nem feltétlenül marad négyzetmentes, viszont ez is csak akkor, ha J-ben valamelyik C_6 nem tartomány. Ebben az esetben válasszuk azt az ilyen C-t, melynek a legkevesebb csúcs van a belsejében és legyen J' a C és C belsejében lévő csúcsok által feszített részgráfja J-nek.

Ha J'-ben még mindig van valamilyen v 3 fokú V-beli csúcs, akkor megint veszünk egy olyan tartományt, aminek v a belsejében van és indukcióval megint készen vagyunk.

Legyen F az a tartomány, aminek v a határán van és legfeljebb egy olyan él van F belsejében, amely határolja J'-t. Ekkor F eltűntetése nem csinál J' határából C_4-t.

Ha J' olyan, hogy a V-beli csúcsok mind másodfokúak, akkor minden olyan kör, melynek belsejében nem fut él, 3 hosszú, így kell lennie V_*-ban 3, 4 vagy 5 fokú pontnak. Ha csak egy V_*-beli csúcs van J-ben, ami C-n kívül esik, akkor csak egy Q klikk van G_*-ban, ami legalább 3 pontból áll, akkor a Walecki-konstrukció segítségével páros n esetén Q kaphat új színt, páratlan n esetén pedig a majdnemteljes párosítás színe legyen c. Ekkor ha egy párosított él egyik végpontja Q-beli, akkor a másik is és így Q kaphatja c-t.
Ha legalább 2 ilyen csúcs van és $v \in V_*$ olyan, hogy $d(v) = 3$ és C belsejében van, akkor van olyan 2 hosszú P út, mely v-ben kezdődik és a végpontja olyan V_*-beli csúcs, melynek a foka legfeljebb $n-2$. P éleit elhagyva a középső csúcsot már ki tudom színezni, majd a másik két ilyen v-ből induló utat, majd v-t magát elhagyva n egyel csökken, s indukció miatt ismét kész vagyunk.
Ha v foka 4 vagy 5, akkor P végződhet C belsejében is, valamilyen v' pontban. Ekkor v' foka legfeljebb $n-4$, P-t elhagyva v foka legfeljebb 4, v' foka legfeljebb $n-5$, így megint van színem a középső csúcs számára. Az előző esethez hasonlóan csökkentem az elemszámot $n-1$-re, s megint csak indukcióval kész vagyunk. $\square$

4.5. Speciális G_* esete

4.24. Tétel. *[15] Legyen k a legkisebb méretű klikk elemszáma G_*-ban. Ha $k \leq 3$ és $|E(G_*)| \leq \frac{1}{2}(1-\frac{1}{k})^2 n^2$, akkor 4.19 igaz.*

Bizonyítás. Legyen k és G_* ilyen. Indukciót fogunk alkalmazni, ehhez pedig megmutatjuk, hogy ha valamelyik k méretű Q legfeljebb $n-1$ másik klikkel szomszédos, így Q-t elhagyva a maradék klikkeket n színnel színezve még mindig marad egy színem Q számára.
Tegyük fel indirekt, hogy minden klikknek legalább n másikkal van közös pontja, legyen Q k méretű, valamint a Q-val szomszédos klikkek valamilyen indexhalmazra Q^j-k. Mivel minden egy $v \in Q$ csúcsot minden Q^j tartalmaz, s $|Q|$ minimalitása miatt minden ilyen klikk legalább k elemű, az ilyen Q^j-k száma legfeljebb $\frac{n-1}{k-1}$, Q-t is beleértve. Másrészt viszont a feltevésünk szerint legalább n klikknek van közös pontja Q-val, Q-nak pedig k pontja van, így v-ben legalább $\frac{n}{k}+1$ klikk találkozik Q-t is beleszámolva. Tehát a v-ben találkozó klikkek m számára igaz, hogy

$$\frac{n}{k} + 1 \leq m \leq \frac{n-1}{k-1}$$

Viszont az ilyen klikkek mindegyikére igaz, hogy legalább $n-m$ Q^j metsz bele v-től különböző csúcsokban, ami azt jelenti, hogy a J gráfban legalább $n-m$ él csatlakozik

V_* v-től különböző csúcsokhoz minden ilyen klikk esetén, ráadásul még legalább k db J-beli élet is számolhatunk klikkenként. Becsüljük meg ezek alapján $|E(J)|$-t, felhasználva az előző becslést m-re.

$$m(n-m+k) \geq m(n-m)+k \geq \frac{n}{k}(n-\frac{n}{k})+k.$$

Azonban ha J-ben $k' \geq k$ él felel meg egy Q' klikknek G_*-ban, akkor G_*-ban legalább $k'\frac{k-1}{2}$ olyan él van, mely Q'-höz tartozik. Vagyis G_*-nak legalább $\frac{k-1}{2}$-szer annyi éle van, mint J-nek, ami ellentmond a feltételnek. $\square$

5. Egy bizonyítási kísérlet

Találtam egy tavaly novemberi cikket[2] az arXivon, melyben szerepel egy algoritmikus bizonyítás a 3.3 sejtésre. Annak ellenére, hogy határozottan úgy gondolom, a bizonyítás hibás, a módszer tanulságos lehet, s az is elképzelhető, hogy a bizonyítás javítható. Az említett bizonyítás egy speciális H_n gráfból és szabályos színezéséből indul ki, majd ezen színezést alakítja át tetszőleges G gráf színezésévé.

5.1. Definíció. *Legyen H_n az a gráf, mely n db n pontú B_k klikk uniója úgy, hogy tetszőleges $i \neq j$ esetén $B_i \cap B_j = \{b_{ij}\}$, azaz bármely két klikknek pontosan egy közös csúcsa van.*

Ekkor H_n definíciójából következnek az alábbi tulajdonságok:

1. H_n olyan összefüggő gráf, mely kielégíti a 3.3 sejtés feltételét.
2. H_n-nek pontosan n olyan csúcsa van, melyek klikkfoka egy, valamint $\frac{n(n-1)}{2}$ olyan, melyek klikkfoka 2.
3. H_n-nek pontosan $\frac{n(n+1)}{2}$ csúcsa van,
4. Vegyük észre, hogy ha egy összefüggő G gráfban a klikkfokszám növekedése maga után vonja a csúcsszám növekedését is, így H_n csúcsainak száma minimális azon gráfokra nézve, melyek kielégítik a 3.3 sejtés feltételét.
   Így tehát $\frac{n(n+1)}{2} \leq |V(G)| \leq n^2$.

5.2. Lemma. *[2] Legyen G olyan gráf, mely kielégíti a 3.3 sejtés feltételét. Ekkor G előállítható H_n-ből alkalmas $n \in \mathbb{N}$ választásával.*

Bizonyítás. Legyen G olyan gráf, mely kielégíti a 3.3 sejtés feltételét. Címkézzük meg azokat a G-beli v csúcsokat a b_x címkékkel, melyek klikkfoka nagyobb, mint egy, ahol $x = \{i : v \in A_i\}$. Legyen $N_i = \{b_x : |x| = i\}$, ahol $i = 2, 3, .., n$. Ekkor G megkapható H_n-ből a következőképpen:

1. lépés: Minden olyan $b_{ij} \in H_n$ csúcsra, amely nincs N_2-ben, vágjuk ketté b_{ij}-t az u_{ij} és u_{ji} csúcsokra úgy, hogy u_{ij} csak a B_i-beli, u_{ji} pedig csak a B_j-beli csúcsokkal legyen szomszédos.

2. lépés: Minden $b_x \in N_i, i = 3, 4, ..., n$ csúcsra olvasszuk egybe a H_n-beli $u_{l_1 l_2}, u_{l_2 l_3}, ..., u_{l_{m-1} l_m}, u_{l_m l_1}$ csúcsokat u_x-be, ahol $l_i \in x$ és $l_i < l_j$, ha $i < j$.

Legyen az így kapott gráf G'. Álljon $V(B_i')$ és $V(A_i)'$ rendre B_i és A_i azon csúcsabiól, melyek klikkfoka 1. Ekkor $|V(A_i)'| = |V(B_i)'|$, $1 \leq i \leq n$. Definiáljunk egy $f : V(G) \to V(G')$ függvényt a következőképpen:

$f(b_{ij}) = b_{ij}$	ha $b_{ij} \in N_2$
$f(b_{i_1 \dots i_k}) = u_{i_1 \dots i_k}$	ha $b_{i_1 \dots i_k} \in \bigcup_{i=3}^{n} N_i$
$f\|_{V(A_i')} = g_i$	ahol $g_i : V(A_i') \to V(B_i')$ bijekció, $1 \leq i \leq n$

Ekkor f izomorfizmus G és G' között. $\square$

5.3. Lemma. *H_n n-színezhető.*

Bizonyítás. Azt látjuk be, hogy tetszőleges G gráf, mely kielégíti a sejtés feltételét és minden csúcs klikkfoka legfeljebb 2, n-színezhető. Legyen tehát G ilyen gráf. Vegyük észre, hogy nem lehet minden csúcs klikkfoka 2, sőt, egy klikken belül is kell lennie 1 klikkfokú pontnak. Ha létezne k úgy, hogy B_k minden csúcsa legalább 2 klikkfokú, a sejtés feltétele miatt ez n db páronként egymástól különböző klikket jelentene, melyek mindegyike még B_k-tól is különbözik, tehát $n + 1$ klikkünk van legalább, ami ellentmondást jelent.
További egyszerű észrevétel, hogy ha az 1-nél nagyobb klikkfokú pontokat kiszíneztük, kész vagyunk, hiszen az egyes klikkekben hiányzó színeket megkaphatják az 1 klikkfokú pontok (3.5 megjegyzés).
Konstruáljuk meg azt a G' gráfot, melynek v_k csúcsa megfelel az B_k-nak G-ben és $v_i v_j \in E(G') \Leftrightarrow A_i \cap A_j \neq \emptyset$, $1 \leq i < j \leq n$.
G' nyilván egyszerű gráf és $\Delta(G) \leq n - 1$ a bizonyítás elején tett észrevétel miatt. Alkalmazva a Vizing-tételt kapjuk, hogy $\chi(G)' \leq n$. Viszont G'-ben $v_i v_j$ színét megkaphatja G-ben az $B_i \cap B_j$-ben lévő csúcs minden $1 \leq i < j \leq n$ esetén, s így G minden 1-nél nagyobb klikkfokú pontját szabályosan kiszíneztük legfeljebb n színnel. $\square$

5.4. Jelölés. *Az előző lemma ad nekünk egy jó színezést H_n-re. Legyen C olyan $n \times n$-es mátrix, melyre ha $i \neq j$, akkor $C_{ij} = c(b_{ij}) =: c_{ij}$ és $C_{ii} = c(b_i) =: c_{ii}$, ahol b_i az A_i-beli elsőfokú pont színe. Ekkor C-t a H_n színmátrixának hívom.*

A [2] cikkben szereplő bizonyítás egy algoritmust mutat, amely alkalmas H_n színezését terjesztené ki tetszőleges G gráfra, amely teljesíti a sejtés feltételét, azonban ez az algoritmus nem működik helyesen. A módszer a következő:
Legyen $G = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, $H_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$, illetve legyen $\hat{H}$ a G egynél nagyobb klikkfokú csúcsai által feszített részgráf. Minden $v \in V(G)$ csúcsot, melynek a klikkfoka egynél nagyobb, címkézzünk meg egy u_A címkével, ahol $A = \{i : v \in A_i; i = 1, 2, ..., n\}$. Legyen továbbá

$X = \{b_{ij} : A_i \cap A_j = \emptyset\}$, valamint $X_i = \{v \in G : d^K(v) = i\}$, ahol $i = 2, ..., m$.
Legyenek $1, 2, ..., n$ azok a színek, melyeket az 5.4 jelölésben definiált C mátrix biztosít. Az alábbi konstrukció ezt a C mátrixot alakítja át egy C_M mátrixszá, mely alapján ki tudjuk színezni $\hat{H}$-t, majd G-t is.
Legyen C_1 az a mátrix, melyet úgy kapok, hogy C-ben kinullázom azokat a c_{ij} és c_{ji} elemeket, amelyekre b_{ij} X-ben van, valamint legyen $c_{ii} = 0$, $i = 1, 2, ..., n$.

Legyen kezdetben $T = \cup_{i=3}^{n} X_i$, $P = \emptyset$, $T'' = X_2$ és $P'' = \emptyset$.

1. lépés: Ha $T = \emptyset$, legyen C_m a 4. lépésben kapott színmátrix és lépjünk tovább az 5. lépésre. Ellenkező esetben válasszunk egy $u_{i_1 i_2 \dots i_m} \in T$ csúcsot, ahol $i_1 < i_2 < \dots < i_m$, majd legyen $T' = \{b_{i_1 i_2}, b_{i_1 i_3}, ..., b_{i_1 i_m}, b_{i_2 i_3}, ..., b_{i_{m-1} i_m}\} \subseteq V(H_n)$ és $P' = \emptyset$. Ekkor $|T'| = \binom{m}{2}$. Legyen $T_1' = \{b_{ij} : b_{ij} \in T', c(b_{ij})$ több, mint egyszer jelenik meg C i-edik sorában vagy j-edik oszlopában$\}$, valamint $T_2' = \{b_{ij} : b_{ij} \in T', c(b_{ij})$ pontosan egyszer jelenik meg C i-edik sorában és j-edik oszlopában$\}$. Ha $T_1' \neq \emptyset$, válasszunk egy b_{st} csúcsot T_1'-ből, ellenkező esetben T_2'-ből, majd rakjuk b_{st}-t P'-be és töröljük T'-ből. Lépjünk a 2. lépésre.

2. lépés: Ha $T_2' \neq \emptyset$, lépjünk a 3. lépésre. Egyébként válasszunk egy $b_{i_{m-1} i_m} \in T_1'$ csúcsot. Legyen $A = \{c_{ij} : c_{ij} \neq 0; i = i_{m-1}, 1 \leq j \leq n\}, B = \{c_{ij} : c_{ij} \neq 0; j = i_m, 1 \leq i \leq n\}$.
Ha $|A \cap B| < n$, csináljunk egy új C_2 színmátrixot, melyben a $c_{i_{m-1} i_m}, c_{i_m i_{m-1}}$ elemeket egy $x \in \{1, ..., n\} \setminus A \cup B$-re cserélem, majd rakjuk át $b_{i_{m-1} i_m}$-t T_1'-ből T_2'-be és lépjünk a 3. lépésre.
Ellenkező esetben legyen x olyan szín, mely pontosan egyszer jelenik meg az i_{m-1}-edik sorban és i_m-edik oszlopban és C_2 legyen olyan, hogy a $c_{i_{m-1} i_m}, c_{i_m i_{m-1}}$ elemeket x-re cserélem. Tegyük át $b_{i_{m-1} i_m}$-t T_1'-ből T_2'-be és ugorjunk a 3. lépésre.

3. lépés: Ha $T' = \emptyset$, rakjuk át $u_{i_1 \dots i_m}$-t T-ből P-be és lépjünk az 1. lépésre.
Egyébként ha $T' \cap T_1' \neq \emptyset$, válasszunk egy b_{ij}-t innen, ha pedig üres, akkor válasszuk b_{ij}-t $T' \cap T_2'$-ből. Lépjünk a 4. lépésre.

4. lépés: Legyen $c(b_{ij}) =: x$, és $c(b_{st}) =: y$. Ha ez a két szín megegyezik, tegyük át b_{ij}-t T'-ből P'-be és lépjünk a 3. lépésre. Ha nem, legyen $A = \{c_{lm} : c_{lm} = x\}, B = \{c_{lm} : c_{lm} = y\} \setminus \{c_{lm}, c_{ml} : b_{lm} \in P', l < m\}$. Legyen C_3 a módosított színmátrix, melyet úgy kapok, hogy minden A-beli színt y-ra, minden B-beli színt pedig x-re cserélek. Tegyük át b_{ij}-t T'-ből P'-be és lépjünk a 3. lépésre.

5. lépés: Ha $T'' = \emptyset$, legyen $C_M = c_{m_1}$ és álljunk meg. Ellenkező esetben válasszunk egy $u_{ij} \in T''$ csúcsot és lépjünk a 6. lépésre.

6. lépés: Ha c_{ij} pontosan egyszer jelenik meg az i-edik sorban és j-edik oszlopban C_m-ben, tegyük át u_{ij}-t T''-ből P''-be és lépjünk az 5. lépésre. Egyébként legyen $A = \{c_{ij} : c_{ij} \neq 0; 1 \leq j \leq n\}, B = \{c_{ij} : c_{ij} \neq 0; 1 \leq i \leq n\}$. Legyen a módosított színmátrix C_{m_1}, melyet úgy kapunk, hogy c_{ij}-t és c_{ji}-t egy $x \in \{1, ..., n\} \setminus A \cup B$-re cserélem. Rakjuk át u_{ij}-t T''-ből P''-be és lépjünk az 5. lépésre.

A cikk azt állítja, hogy így megkonstruáltunk egy jó színezést $\hat{H}$-nak. Azonban egy lényeges ponton hiba van a fenti eljárásban. Az első négy lépés foglalkozik a legalább 3 klikkfokú csúcsokkal G-ben. Az első lépésben vett T'-beli b_{ij}-ket a 3. és 4. lépés egy színűre színezi, melynek színét G-ben az éppen aktuális $u_{i_1 \dots i_m}$ csúcs kapná meg. Ekkor azonban H_n-ben a $B_{i_q i_r}$, G-ben az A_{i_p}, feldolgozás alatt lévő klikkekben előfordulhat, hogy lesz két azonos színű csúcs. Ezt volna hivatott kiküszöbölni a 2. lépés, melybe csak akkor lépünk be, ha a leírásban szereplő $T_2' = \emptyset$, azaz minden éppen feldolgozás alatt lévő b_{ij} csúcs rontja a színezést. Ekkor azonban a 2. lépésben definiált $A \cap B$ halmaz elemszáma sosem fogja elérni az n-t, hiszen a $b_{i_{m-1} i_m}$ csúcs T_2'-beli, ezért vagy a sorában, vagy az oszlopában valamelyik szín legalább kétszer szerepel, s így nem lehet az, hogy mindegyik szín szerepeljen itt. Ez azt jelenti, hogy a 2. lépésben mindig ebbe az ágba fog belépni az algoritmus. Nézzük meg, mi történik ekkor. A fent leírtaknak megfelelően a hibás színt egy x színnel kellene felcserélni, amely az $\{1, ..., n\} \setminus A \cup B$ halmazból kerül ki. Sajnálatos módon előfordulhat, hogy ez a halmaz üres, hiszen az $A \cup B$ halmaz tartalmazhatja az összes színt, s így az algoritmus nem feltétlenül ad jó színezést.

Annak ellenére, hogy a most ismertetett módszer gyakorlatilag a leglényegesebb ponton hibás, a probléma ezen irányból való megközelítése mindenképpen említésre méltó. Elképzelhető, hogy egy bonyolult gráf n-színezhetősége visszavezethető valamilyen speciális rendszer n-színezhetőségére, vagyis a speciális esetből kiindulva tetszőleges gráf előállítható oly módon, hogy a kromatikus szám nem nő.

Irodalomjegyzék

[1] Katona Gyula, Recski András, Szabó Csaba. *A számítástudomány alapjai.* Typotex, 2007.

[2] Suresh M. H., V. V. P. R. V. B. Suresh Dara. A Proof of Erdős-Faber-Lovász Conjecture. *arXiv:1508.03476*, 2015.

[3] Michel Deza, Erdős Pál, Frankl Péter. Intersection properties of systems of finite sets. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(2):369–384, 1978.

[4] Vance Faber. The Erdős-Faber-Lovász conjecture - the uniform regular case. *Journal of Combinatorics*, 1(2):113–120, 2010.

[5] Jean-Claude Fournier. Colorations des arétes d'un graphe. *Cahiers du CERO*, 15:311–314, 1973.

[6] C. Berge, A. J. W. Hilton. On two conjectures on edge colouring hypergraphs. *Congressus Numer*, 70:99–104, 1990.

[7] Neil Hindman. On a conjecture of Erdős, Faber and Lovász about n-colorings. *Canadian Journal of Mathematics*, 33:563–570, 1981.

[8] Jeff Kahn. Coloring nearly disjoint hypergraphs with $n + o(n)$ colors. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 59(1):31–39, 1992.

[9] W. I. Chang, E.L. Lawler. Edge coloring of hypergraphs and a conjecture of Erdős, Faber Lovász. *Combinatorica*, 8(3):293–295, 1988.

[10] Hauke Klein, Marian Margraf. On the linear intersection number of graphs. *arXiv preprint math/0305073*, 2003.

[11] Hauke Klein, Marian Margraf. A remark on the conjecture of Erdős, Faber and Lovász. *Journal of Geometry*, 88(1):116–119, 2008.

[12] Erdős Pál. On the combinatorial problems which I would most like to see solved. *Combinatorica*, 1(1):25–42, 1981.

[13] Abdón Sánchez-Arroyo. The Erdős-Faber-Lovász conjecture for dense hypergraphs. *Discrete Mathematics*, 308(5-6):991–992, 2008.

[14] B. Alspach, J.-C. Bermond, D. Sotteau. Decomposition into cycles I: Hamilton decompositions. *Cycles and Rays*, 301:9–18, 1990.

[15] Tomás Feder, Carlos Subi. On a conjecture of Erdős, Faber and Lovász.

[16] Noga Alon, Michael Krivelevich, Benny Sudakov. Coloring graphs with sparse neighborhoods. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 77(1):73–82, 1999.

[17] Lucien Haddad, Claude Tardif. A clone-theoretic formulation of the Erdős-Faber-Lovász conjecture. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 24(3):545–549, 2004.

[18] Bill Jackson, G. Sethuraman, Carol Whitehead. A note on the Erdős-Faber-Lovász conjecture. *Discrete Mathematics*, 307(7-8):911–915, 2007.