Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikai Intézet

Rónai Máté

INTERVALLUM ÉLSZÍNEZÉSEK

BSc szakdolgozat

Témavezető: Bérczi Kristóf

ELTE Operációkutatási Tanszék

2016. Budapest

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke

Jelölések

A szakdolgozatban $\mathbb{N}^+$-szal jelöljük a pozitív természetes számok halmazát. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$. Ekkor az $i = 1, \ldots, n$ kifejezéssel a továbbiakban az $i \in \{k \in \mathbb{N} | 1 \leq k \leq n\}$ kifejezést rövidítjük. Tekintsünk $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \leq b$ számokat. Ekkor az $[\![a, b]\!]$ kifejezéssel a $\{k \in \mathbb{Z} | a \leq k \leq b\}$ kifejezést rövidítjük. Legyen $A(m, n) = A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix. Ennek elemei legyenek rendre a_{ij}, ha $1 \leq i \leq m$ és $1 \leq j \leq n$.

Egy gráf u és v csúcsát összekötő élt (u, v)-vel jelöljük. Egy adott G gráf esetén $\chi'(G)$-vel a gráf élkromatikus számát, $\Delta(G)$-vel a gráf csúcsainak fokszámának maximumát, $diam(G)$-vel pedig a gráf átmérőjét jelöljük. Egy G gráf α élszínezése és v csúcsa esetén $S(v, \alpha)$-val a v-vel szomszédos élek színeinek halmazát jelöljük. Egy gráf u és v csúcsainak távolságát, azaz a köztük lévő legrövidebb út hosszát pedig $d(u, v)$-vel jelöljük.

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Bérczi Kristófnak a szakdolgozat megszületése alatt nyújtott rengeteg segítségért. Iránymutatása, ötletei, tanácsai és lektoráló munkája nélkül ez a szakdolgozat nem készülhetett volna el.

Köszönöm szüleimnek, hogy elindítottak az idevezető úton, és lehetővé tették, hogy eljussak eddig a pillanatig. Szeretném megköszönni nővéremnek, hogy az egyetemi éveim alatt bármikor fordulhattam hozzá tanácsaiért, tapasztalataiért. Végül köszönettel tartozom barátnőmnek, akitől rengeteg támogatást, biztatást kaptam a szakdolgozatírás alatt.

1. fejezet

Bevezetés

Szakdolgozatom témájának egy természetes kérdést választottam. Tanárok és diákok egyaránt vágynak olyan órarendre, amelyben nincsenek lyukasórák, azaz az órák közvetlenül egymás után következnek. Az intervallum élszínezés fogalma ennek a kérdésnek a matematikai modellezése gráfokkal. A résztvevőknek (tanároknak, osztályoknak) csúcsokat, az óráknak éleket, az órák időpontjainak pedig a gráf éleihez rendelt számokat (színezést) feleltetünk meg. Így egy olyan színezési problémához jutunk, amelyben a klasszikus élszínezhetőségnél többet követelünk: nem elégszünk meg azzal, hogy bármely csúcs szomszédos élei mind különböző színekkel legyenek színezve, hanem elvárjuk azt is, hogy ezek a színek egymás utáni pozitív egész számok legyenek. Egy ilyen speciális élszínezést fogunk intervallum élszínezésnek nevezni. Természetesen precíz definíciót is adunk majd.

A témában két fő kérdés fogalmazható meg. Az első annak eldöntése, hogy egy adott gráfra adható-e ilyen színezés vagy sem. A második, hogy ha adható, akkor mi a használt színek lehetséges legkisebb és legnagyobb száma. A szakdolgozat vázát is ezen két kérdés alkotja némi kitekintéssel.

A második fejezetben precízen definiáljuk az intervallum élszínezést. Jelölést adunk az intervallum élszínezhető gráfok halmazára, a maximális és minimális színszámra, amellyel létezik intervallum élszínezés egy adott gráfon. Kimondunk és bizonyítunk egy tételt, amely szükséges feltételt támaszt az intervallum élszínezhetőség felé.

A harmadik fejezetben különböző esetekben adunk becsléseket a maximális színszámra, amellyel létezik intervallum élszínezés. Bizonyítással együtt adunk becslést a háromszögmentes gráfok és az összefüggő gráfok esetén. A fejezet végén további esetekben is vizsgáljuk a kérdést.

A negyedik fejezetben különböző speciális gráfosztályokon vizsgáljuk az intervallum élszínezhetőség kérdését. Szükséges és elégséges feltételt adunk reguláris gráfok intervallum élszínezhetőségére, bebizonyítjuk, hogy körükben NP-teljes annak eldöntése, hogy egy gráf intervallum élszínezhető-e vagy sem, továbbá felsőbecslést adunk a maximális színszámra, amellyel létezik intervallum élszínezés. Fák és teljes páros gráfok esetén bebizonyítjuk, hogy ezek mindig intervallum élszínezhetőek, sőt megadjuk a minimális és maximális színszámot is, amellyel létezik intervallum élszínezés, továbbá még azt is belátjuk, hogy ezek közötti bármely színszámra létezik intervallum élszínezés. Bireguláris gráfok egy speciális csoportjára adunk intervallum élszínezési konstrukciót. Teljes gráfok esetén belátjuk, hogy a csúcsszám paritása dönt az intervallum élszínezhetőségről, becslést adunk a maximális színszámra, amellyel létezik intervallum élszínezés. Végül megmutatjuk, hogy minden n-kocka intervallum élszínezhető, és megadjuk a maximális színszámot, amellyel létezik intervallum élszínezés.

Az ötödik fejezetben kitérőt teszünk egy másfajta, az úgynevezett ciklikus intervallum élszínezhetőség felé. Összehasonlítjuk a klasszikus és a ciklikus esetben adható tételeket, becsléseket, valamint vizsgáljuk a két fogalom kapcsolatát.

Végül a hatodik fejezetben összegezzük a témához kapcsolódó sejtéseket és nyitott kérdéseket.

A szakdolgozat bevezetésében nem mehetünk el három örmény matematikus nevének megemlítése mellett. A.S. Asratian, R.R. Kamalian és P.A. Petrosyan nevéhez fűződik a problémakör vizsgálatának megkezdése az 1970-es, 80-as években, és az azóta elért eredmények nagyobbik része is.

2. fejezet

Alapfogalmak

Ebben a fejezetben először definiáljuk a szakdolgozat témájának alapfogalmait, majd szükséges feltételt adunk az intervallum élszínezhetőségre.

2.1. Alapfogalmak

G gráf egy élszínezése az $1, \ldots, t$ színekkel **intervallum t-élszínezés**, ha az $1, \ldots, t$ színek mindegyikét használjuk és minden v csúcs esetén v szomszédos élei $d(v)$ egymást követő színnel vannak színezve. Egy gráf egy élszínezése **intervallum élszínezés**, ha van olyan t pozitív egész, melyre intervallum t-élszínezés. Az intervallum élszínezhető gráfok halmazát jelöljük $\mathfrak{N}$-nel, az intervallum t-élszínezhetőekét $\mathfrak{N}_t$-vel. Legyen G intervallum élszínezhető, ekkor jelölje $\omega(G)$ illetve $W(G)$ a legkisebb illetve a legnagyobb t számot, melyre létezik intervallum t-élszínezése G-nek.

A továbbiakban gráfon mindig véges és egyszerű gráfot értünk.

2.2. Az élszínezhetőség szükséges feltétele

A következő eredmény [1]-ben jelent meg.

1. Tétel (Élszínezhetőség szükséges feltétele)**.** $G \in \mathfrak{N}$ *esetén* $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Bizonyítás. Először az $\omega(G) = \Delta(G)$ esetet tekintjük. Ekkor nyilván $\chi'(G) \leq \omega(G) = \Delta(G)$, ugyanakkor $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ is igaz. Így $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Most feltesszük, hogy $\omega(G) > \Delta(G)$. Legyen α intervallum $\omega(G)$-élszínezése G-nek. Definiáljuk az $E_j = \{e \in E(G) | \alpha(e) \equiv j \ (mod\ \Delta(G))\}$ halmazokat $j = 1, \ldots, \Delta(G)$ esetén. Ekkor láthatóan E_j párosítás minden j-re. Így az E_j-beli éleket j színnel színezve G élszínezését kapjuk, így $\chi'(G) \leq \Delta(G)$ adódik. A triviális irányt ismét figyelembe véve $\chi'(G) = \Delta(G)$ adódik.

Ezzel a tételt beláttuk. $\square$

3. fejezet

Felső korlátok

Ebben a fejezetben $W(G)$-re adunk különböző esetekben felső korlátot. Kimondunk egy egzisztencia tételt is.

3.1. $W(G)$ háromszögmentes gráfok esetén

A következő lemmát, tételt és következményt is [1] alapján mondjuk ki.

2. Lemma. Legyen G összefüggő gráf, melynek létezik élszínezése az $1, \ldots, t$ színek közül néhánnyal úgy, hogy a gráf minden v csúcsának szomszédos élei $d(v)$ egymást követő színnel vannak színezve. Ekkor G intervallum élszínezhető.

Bizonyítás. Legyen G élszínezése α. Ekkor feltehetjük, hogy $\min\{\alpha(e) : e \in E(G)\} = 1$ és $\max\{\alpha(e) : e \in E(G)\} = t$. Azt kell megmutatnunk, hogy $t \geq 3$ esetén minden $1 < r < t$-re létezik G-nek r színű éle. Mivel G összefüggő, van olyan $P = (x_0, e_1, x_1, \ldots, x_{k-1}, e_k, x_k)$ út benne ($e_i = (x_{i-1}, x_i)$ $i = 1, \ldots, k$ esetén), hogy $\alpha(e_1) = t$ és $\alpha(e_k) = 1$. Amennyiben $i = 1, \ldots, k$ esetén $\alpha(e_i) \neq r$, akkor legyen j a legnagyobb index, melyre $\alpha(e_j) > r$. Ekkor $\alpha(e_{j+1}) < r$, így a lemma feltételei alapján létezik x_j-nek r színű szomszédja. Ezzel a lemmát beláttuk. $\square$

Egy gráfot **háromszögmentes**nek nevezünk, ha nem tartalmazza részgráfként K_3-at, azaz nem tartalmaz három olyan csúcsot, hogy bármely kettő között van él. Most már kimondhatjuk az alábbi tételt, amelynek bizonyításában a lemmát használni fogjuk.

3. Tétel. *Legyen G összefüggő, háromszögmentes gráf. Ha G intervallum élszínezhető, akkor $W(G) \leq |V(G)| - 1$.*

Bizonyítás. Először röviden összefoglaljuk a bizonyítás kulcslépéseit. A bizonyítást indirekt végezzük. Feltesszük, hogy létezik ellenpélda, választunk egy minimális élszámút. Ebben konstruálunk egy olyan speciális utat, amelyben az élek színei monoton csökkenek $W(G)$-től 1-ig. Ezen speciális út segítségével diszjunkt csúcshalmazokat hozunk létre G-ben, mely segítségével alulról tudjuk becsülni G csúcsszámát $W(G) + 1$-gyel, így ellentmondásba jutunk indirekt feltevésünkkel.

Feltesszük, hogy létezik olyan H összefüggő, háromszögmentes, intervallum élszínezhető gráf, melyre $W(H) \geq |V(H)|$. Ezek közül legyen G minimális élszámú. Legyen α a G egy intervallum $W(G)$-élszínezése. Ekkor nyilván $|E(G)| > 1$. Jelölje $I(u)$ továbbá $\{v \in V(G) : (u,v) \in E(G)\}$-t, azaz u szomszédainak halmazát. Jelölje $\mathfrak{M}$ azon G-beli P utak halmazát, melyek kezdőéle $W(G)$, záróéle 1 színű. Legyen az $e_1, \ldots, e_t$ élekből álló P út esetén $\alpha(P) = (\alpha(e_1), \ldots, \alpha(e_t))$.

Most megmutatjuk, hogy létezik olyan $\mathfrak{M}$-beli P_0 út, amelyre az $\alpha(P_0)$ vektor koordinátái monoton csökkenőek.

Legyen $e' = (x_0, x_1)$ olyan, hogy $\alpha(e') = W(G)$. Feltehető, hogy $d(x_1) \geq d(x_0)$. Mivel $|E(G)| > 1$, $d(x_1) \geq 2$. Konstruáljuk meg a csúcsok X sorozatát a következőképpen:

Első lépés. Legyen $X = \{x_0, x_1\}$.

Második lépés. Legyen X utolsó eleme x_i. Ha $I(x_i) \setminus X = \emptyset$, vagy $\alpha((x_i, y)) > \alpha((x_{i-1}, x_i))$ minden $I(x_i) \setminus X$-beli y-ra, akkor a konstrukció kész. Különben $I(x_i) \setminus X$-ból x_{i+1}-et úgy választjuk, hogy $\alpha((x_i, x_{i+1})) = \min_{y \in I(x_i) \setminus X} \alpha((x_i, y))$ legyen. Ezután hozzáadjuk x_{i+1}-et X-hez, majd megismételjük a második lépést. X egyértelműen definiál egy $P_0 = (x_0, e_1, x_1, \ldots, x_{k-1}, e_k, x_k)$ utat. Szeretnénk megmutatni, hogy $\alpha(e_k) = 1$, azaz P_0 $\mathfrak{M}$-beli.

Indirekt feltesszük, hogy $1 < \alpha(e_k) < W(G)$. H-t a következőképpen definiáljuk:

$$H = \begin{cases} G - x_k, & \text{ha } d(x_k) = 1 \\ G - e_k, & \text{ha } d(x_k) \geq 2. \end{cases}$$

Most megmutatjuk, hogy H összefüggő. Indirekt feltesszük, hogy nem az. Ez csak akkor lehetséges, ha $H = G - e_k$, mivel G összefüggő. Legyen H_1 és H_2 H két összefüggőségi komponense úgy, hogy $x_{k-1} \in V(H_1)$ és $x_k \in V(H_2)$. Legyen G feszítő részgráfja a $V(H_1) \cup \{x_k\}$ és a $V(H_2) \cup \{x_{k-1}\}$ csúcshalmazokon rendre G_1 és G_2. Legyen α_1 és α_2 az α színezés leszűkítése G_1-re és G_2-re. Ezekről látszik, hogy teljesítik a 2. lemma feltételeit, így $G_1, G_2 \in \mathfrak{N}$. Ugyanakkor $|E(G_1)| < |E(G)|$ és $|E(G_2)| < |E(G)|$, így G minimalitása miatt $W(G_1) \leq |V(G_1)| - 1$ és $W(G_2) \leq |V(G_2)| - 1$. Könnyen látszik, hogy $W(G) \leq W(G_1) + W(G_2) - 1$. Ezeket összevetve, $W(G) \leq W(G_1) + W(G_2) - 1 \leq |V(G_1)| - 1 + |V(G_2)| - 1 - 1 = |V(G_1)| + |V(G_2)| - 3 = |V(G)| - 1$ adódik, hiszen $|V(G)| = |V(G_1)| + |V(G_2)| - 2$, mivel x_{k-1} és x_k G_1 és G_2 csúcshalmazában is benne vannak. Ez viszont ellentmond G választásának. Így H valóban összefüggő.

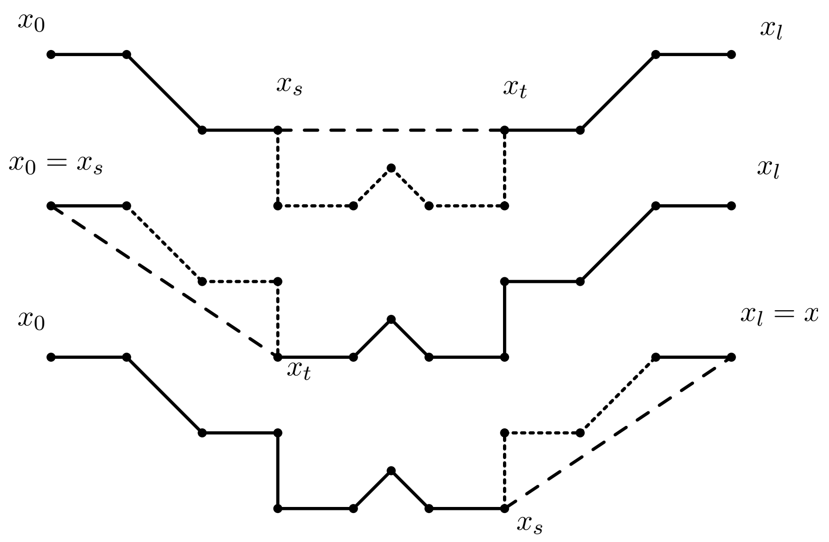
Legyen α_H a leszűkítése α-nak H-ra. Ekkor α_H teljesíti 2. lemma feltételeit. Így α_H intervallum $W(G)$-élszínezése H-nak. Ebből egyrészt $W(H) \geq W(G) \geq |V(G)| \geq |V(H)|$ adódik. Másrészt $|E(H)| < |E(G)|$. A kettő együtt ellentmond G választásának, így $\alpha(e_k) = 1$. A fentiek alapján P_0 valóban $\mathfrak{M}$-beli, a konstrukcióból pedig látszik, hogy $\alpha(P_0)$ koordinátái valóban csökkennek.

Tekintjük az $\mathfrak{M}$-beli azon P utakat, melyekre $\alpha(P)$ monoton csökkenő. Ezek közül a minimális hosszúak halmazát ϑ-val jelöljük. Ezek hosszát l-lel jelöljük. Definiáljuk $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_l$ halmazokat is. Legyen $\vartheta_1 = \vartheta$. Legyen ϑ_i definiálva ϑ_{i-1} azon részhalmazaként, amely pontosan azokat a ϑ_{i-1}-beli utakat tartalmazza, melyre $\alpha(e_i)$ maximális $i = 2, \ldots, l$ esetén. Választunk egy $P_1 = (x_0, e_1, x_1, \ldots, x_{l-1}, e_l, x_l)$ útat ϑ_l-ből. Definiáljuk ezután az $A(i) = \{y \in I(x_i) | \alpha(e_i) > \alpha((x_i, y)) > \alpha(e_{i+1})\}$ csúcshalmazokat

$i = 1, \ldots, l-1$ esetén. Láthatóan $|A(i)| = \alpha(e_i) - \alpha(e_{i+1}) - 1$.

Most megmutatjuk, hogy

$$A(i) \cap \{x_0, \ldots, x_l\} = \emptyset \; i = 1, \ldots, l-1 \text{ esetén.} \tag{3.1}$$

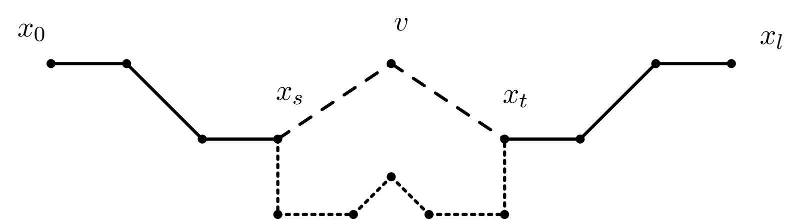


3.1. ábra. P út konstrukciója a három különböző esetben

Indirekt feltesszük, hogy van olyan s és t, hogy $x_s \in A(t)$ vagy $x_t \in A(s)$. Ekkor $s < t$ feltehető, $t - s \geq 3$ pedig ez esetben $A(i)$ definíciójából és G háromszögmentességéből adódik. Ha $s \neq 0$ és $t \neq l$, akkor legyen $P = (x_0, e_1, \ldots, x_s, (x_s, x_t), x_t, \ldots, e_l, x_l)$. Ha $s = 0$, akkor legyen $P = (x_1, e_1, x_0, (x_0, x_t), x_t, \ldots, e_l, x_l)$. Ha pedig $t = l$, akkor legyen $P = (x_0, e_1, \ldots, x_s, (x_s, x_l), x_l, e_l, x_{l-1})$. Mindhárom esetet a 3.1 ábra szemlélteti. Az az eset nem lehetséges, hogy egyszerre $s = 0$ és $t = l$, mivel $A(0)$ és $A(l)$ sem értelmes. Mindhárom esetben $\alpha(P)$ monoton csökkenő, P $\mathfrak{M}$-beli és P hossza kisebb, mint P_1-é ellentmondva P_1 választásának. Ezzel (3.1)-et beláttuk.

Most megmutatjuk, hogy

$$A(i) \cap A(j) = \emptyset, \text{ ha } 1 \leq i < j \leq l-1. \tag{3.2}$$



3.2. ábra. P út konstrukciója v csúcson keresztül

Indirekt feltesszük, hogy van olyan $s, t = 1, \ldots, l-1$, hogy $s \neq t$ és $A(s) \cap A(t) \neq \emptyset$. Feltehető, hogy $s < t$. Ekkor legyen v az $A(s) \cap A(t)$ halmazból való. Mivel G háromszögmentes, $t - s \geq 2$. Legyen

$P = (x_0, e_1, \dots, x_s, (x_s, v), v, (v, x_t), x_t, \dots, e_l, x_l)$ (3.2 ábra). Ekkor $\alpha(P)$ monoton csökkenő és P út $\mathfrak{M}$-beli. Ha $t-s \geq 3$, akkor P hossza kisebb P_1 hosszánál, ha pedig $t-s = 2$, akkor $\alpha((x_s, v)) > \alpha(e_{s+1})$. Mindkettő ellentmond P_1 választásának. Így (3.2)-t beláttuk.

(3.1)-et és (3.2)-t alkalmazva adódik, hogy

$$|V(G)| \geq |\bigcup_{i=1}^{k-1} A(i)| + k + 1 = \sum_{i=1}^{k-1} |A(i)| + k + 1 = \sum_{i=1}^{k-1} |\alpha(e_i) - \alpha(e_{i+1}) - 1| + k + 1 =$$

$$= \alpha(e_1) - \alpha(e_k) - (k-1) + k + 1 = W(G) - 1 - (k-1) + k + 1 = W(G) + 1,$$

azaz

$$W(G) \leq |V(G)| - 1$$

ellentmondva G választásának.

Ezzel a tételt beláttuk. $\square$

4. Következmény. Legyen G összefüggő páros gráf. Ha G intervallum élszínezhető, akkor $W(G) \leq |V(G)| - 1$.

3.2. $W(G)$ összefüggő gráfok esetén

A következő tételt [7] cikk alapján mondjuk ki. Emlékeztetőül megjegyezzük, hogy egy G gráf α élszínezése és v csúcsa esetén $S(v, \alpha)$-val a v-vel szomszédos élek színeinek halmazát jelöljük.

5. Tétel. *Ha a G összefüggő gráf intervallum élszínezhető, akkor $W(G) \leq 2|V(G)| - 3$.*

Bizonyítás. Legyen $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ és legyen α intervallum $W(G)$-színezése G-nek. Definiáljuk a H gráfot a következőképpen: Legyen $V(H) = U \cup W$, ahol $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ és $W = \{w_1, \dots, w_n\}$. Láthatóan $|V(H)| = 2|V(G)|$. Legyen $E(H) = \{(u_i, w_j), (u_j, w_i) | (v_i, v_j) \in E(G)\} \cup \{(u_i, w_i) | i = 1, \dots, n\}$.

Definiáljuk a β élszínezést H-n a következőképpen:

$$\beta((u_i, w_j)) = \begin{cases} \alpha((v_i, v_j)) + 1, & \text{ha } i \neq j \\ \max S(v_i, \alpha) + 2, & \text{ha } i = j. \end{cases}$$

Könnyen látszik, hogy így H élszínezését kaptuk a $2, 3, \dots, W(G) + 2$ színekkel úgy, hogy minden csúcs szomszédai egymást követő színekkel vannak színezve. Legyen k olyan, hogy $\min S(u_k, \beta) = \min S(w_k, \beta) = 2$. Ekkor átszínezzük (u_k, w_k) élt 1 színűre. Így könnyen látható, hogy H intervallum élszínezését kaptuk $W(G)+2$ színnel. H azonban páros gráf is, így alkalmazhatjuk rá 4. következményt is.

Így

$$W(G) + 2 \leq W(H) \leq |V(H)| - 1 = 2|V(G)| - 1,$$

azaz

$$W(G) \leq 2|V(G)| - 3.$$

Ezzel a tételt beláttuk. $\square$

3.3. Egyéb becslések W(G)-re

A következő fejezetben további felső korlátokat adunk $W(G)$-re.

Először kimondjuk 5. tételnek egy javítását .

6. Tétel. *[4] Legyen G összefüggő gráf, melyre $|V(G)| \geq 3$. Ha G intervallum élszínezhető, akkor $W(G) \leq 2|V(G)| - 4$.*

Egy gráfot **síkbarajzolható**nak nevezünk, ha lerajzolható a síkba úgy, hogy élei nem metszik egymást. Ezen gráfokra a következő becslés adható.

7. Tétel. *[3] Legyen G összefüggő, síkbarajzolható gráf. Ha G intervallum élszínezhető, akkor $W(G) \leq \frac{11}{6}|V(G)|$.*

Egy $G = (X \cup Y, E)$ páros gráfot (a, b)**-bireguláris**nak nevezünk, ha minden $x \in X$-re $d_G(x) = a$ és minden $y \in Y$-ra $d_G(y) = b$. Most kimondunk egy ezen speciális gráfosztályra vonatkozó becslést, amelyet a későbbiekben a reguláris gráfok tárgyalásakor még használni fogunk.

8. Tétel. *[5] Legyen G összefüggő (a, b)-bireguláris páros gráf, melyre $|V(G)| \geq 2(a + b)$. Ha G intervallum élszínezhető, akkor $W(G) \leq |V(G)| - 3$.*

Végül ismertetünk egy teljesen más jellegű eredményt. A következő tétel egyrészt alsó becslésről, másrészt egzisztenciáról szól.

9. Tétel. *[10] Minden $\epsilon > 0$-hoz létezik olyan G intervallum élszínezhető gráf, hogy $W(G) \geq (2 - \epsilon) \cdot |V(G)|$.*

4. fejezet

Speciális gráfosztályok

Ebben a fejezetben speciális gráfosztályokon vizsgáljuk az intervallum élszínezés kérdését. Ehhez az [1, 2, 6, 7, 10, 11] cikkek eredményeit dolgozzuk fel.

4.1. Reguláris gráfok

Ebben a szakaszban az [1, 7] cikkek alapján a reguláris gráfok esetében vizsgáljuk az intervallum élszínezhetőséget. Először kimondunk és bizonyítunk egy tételt, amely az intervallum élszínezhetőséget jellemzi.

10. Tétel. *Legyen G reguláris gráf. Ekkor*

(i) $G \in \mathfrak{N}$ akkor és csak akkor, ha $\chi'(G) = \Delta(G)$,

(ii) ha $G \in \mathfrak{N}$, akkor $\forall t : \omega(G) = \Delta(G) \leq t \leq W(G)$ esetén $G \in \mathfrak{N}_t$.

Bizonyítás. (i) azon iránya, hogy ha G intervallum élszínezhető, akkor az egyenlőség fennáll, következik az előző fejezet 1. tételéből. A másik irány is világos, hiszen ha kiszínezzük G-t $\Delta(G)$ színnel, akkor minden csúcsnak lesz az $1, \ldots, \Delta(G)$ színek közül mindegyik színnel szomszédja, így nyilván az így kapott élszínezés intervallum élszínezés is.

(ii) igazolásához legyen $t > \Delta(G)$ és feltesszük, hogy van egy intervallum t-élszínezésünk. Ekkor átszínezünk minden t-vel színezett élt $t - \Delta(G)$ színűre. Ekkor G egy intervallum $(t-1)$-élszínezését kapjuk. Így G egy $W(G)$ színű intervallum élszínezéséből minden olyan t-re, melyre $\Delta(G) \leq t \leq W(G)$, konstruálható intervallum t-élszínezés. Ezzel a tételt beláttuk. □

Most megmutatjuk, hogy az intervallum élszínezhetőség már ezen a speciális gráfosztályon is milyen nehéz kérdés. Pusztán annak eldöntése is, hogy egy reguláris gráf intervallum élszínezhető-e vagy sem, NP-teljes. Egy esetleges színezés megkonstruálása és annak eldöntése, hogy hány színnel lehetséges intervallum élszínezést készíteni, természetesen még nehezebb kérdés.

11. Tétel. *NP-teljes annak eldöntése, hogy egy reguláris gráf intervallum élszínezhető-e vagy sem.*

Bizonyítás. R. Karp tétele [8] szerint annak eldöntése, hogy egy G regulás gráfra $\chi'(G) = \Delta(G)$ vagy $\chi'(G) \neq \Delta(G)$ NP-teljes, így 10. tétel alapján annak eldöntése is NP-teljes, hogy $G \in \mathfrak{N}$ vagy $G \notin \mathfrak{N}$. $\square$

Reguláris gráfok esetén is adhatunk felső becslést $W(G)$-re.

12. Tétel. *Legyen G összefüggő r-reguláris gráf, melyre $|V(G)| \geq 2r+2$. Ha G intervallum élszínezhető, akkor $W(G) \leq 2|V(G)| - 5$.*

Bizonyítás. Konstruáljunk egy H segédgráfot és azon egy β intervallum élszínezést $W(G) + 2$ színnel 5. tétel bizonyításához hasonlóan. Ebben az esetben H egy $(r + 1)$-reguláris páros gráf, melyre $|V(H)| = 2|V(G)| \geq 2(2r + 2)$. Így 8. tétel alapján

$$W(G) + 2 \leq W(H) \leq |V(H)| - 3 = 2|V(G)| - 3,$$

azaz

$$W(G) \leq 2|V(G)| - 5.$$

Ezzel a tételt beláttuk. $\square$

4.2. Fák

Ebben a fejezetben fákon vizsgáljuk az intervallum élszínezhetőség kérdését [6] alapján. Megmutatjuk, hogy minden fa intervallum élszínezhető, sőt ismerjük $\omega(D)$ és $W(D)$ pontos értékét is minden D fa esetén.

13. Definíció. Legyen D fa, $V(D) = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $n \geq 1$. Jelöljük a v_i és v_j csúcsokat összekötő utat $L(v_i, v_j)$-vel, $VL(v_i, v_j)$-vel ennek csúcshalmazát, $EL(v_i, v_j)$-vel pedig az élhalmazát.

Legyen

$$ML(v_i, v_j) = |EL(v_i, v_j)| + |\{(x, y) : (x, y) \in E(D), x \in VL(v_i, v_j), y \notin VL(v_i, v_j)\}|,$$

és

$$M(D) = \max_{1 \leq i \leq j \leq n} ML(v_i, v_j).$$

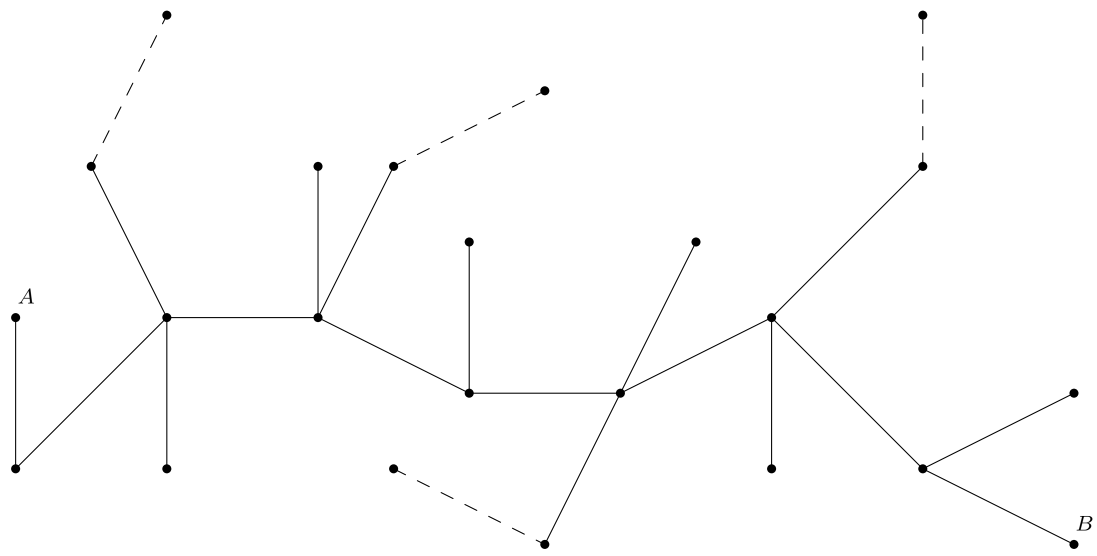
14. Tétel. *Legyen D fa. Ekkor*

(i) D intervallum élszínezhető,

(ii) $\omega(D) = \Delta(D)$,

(iii) $W(D) = M(D)$,

(iv) ha $\omega(D) \leq t \leq W(D)$, akkor létezik D-nek intervallum t-élszínezése.



4.1. ábra. Példa $M(D)$ méretű élhalmazra ($ML(A,B) = M(D)$)

Bizonyítás. Elegendő megmutatni, hogy minden olyan t-re, melyre $\Delta(D) \leq t \leq M(D)$, létezik intervallum t-élszínezés. Mivel $\Delta(D) \leq M(D)$ nyilvánvaló, ebből következik (i) és $\Delta(D) \geq \omega(D)$ illetve $W(D) \geq M(D)$. Tudjuk, hogy minden intervallum élszínezhető gráfra $\Delta(D) \leq \omega(D)$, és megmutatjuk, hogy $W(D) \leq M(D)$, ezzel igazolva a (ii), (iii) és (iv) pontokat.

Tehát bebizonyítjuk, hogy minden $\Delta(D) \leq t \leq M(D)$ számra létezik intervallum t-élszínezés. Ezt $|E(D)|$ szerinti indukcióval tesszük. Az $|E(D)| = 1$ eset triviális, hiszen ekkor $\Delta(D) = M(D) = 1$. Legyen most $|E(D)| = k > 1$, és feltesszük, hogy minden D' fára, melyre $|E(D')| < k$, igaz az állítás.

1. eset: $M(D) < |E(D)|$

Ekkor van olyan $e = (x,y) \in E(D)$ él, melyre $d_D(x) = 1$ és ha D' a D-ből e elhagyásával kapott fa, akkor $M(D) = M(D')$. Ekkor $d_D(y) > 1$, mivel $|E(D)| > 1$, $d_{D'}(y) = d_D(y) - 1$ és $\Delta(D') \leq \Delta(D)$. Tehát $\Delta(D') \leq \Delta(D) \leq t \leq M(D) = M(D')$, így az indukciós hipotézis szerint D'-nek van intervallum t-élszínezése. Most megmutatjuk, hogy ez e él megfelelő színezésével kiterjeszthető D intervallum t-élšzínezésévé. Legyenek $E(D')$-ben y szomszédai az $1 \leq \lambda(1) < \ldots < \lambda(d_{D'}(y)) \leq t$ színekkel színezve. Ha $1 < \lambda(1)$, akkor e legyen $\lambda(1) - 1$ színű, ha pedig $1 = \lambda(1)$, akkor $\lambda(d_{D'}(y)) + 1 = d_D(y) \leq \Delta(D) \leq t$ színű, így intervallum t-élszínezést kapunk.

2. eset: $M(D) = |E(D)|$

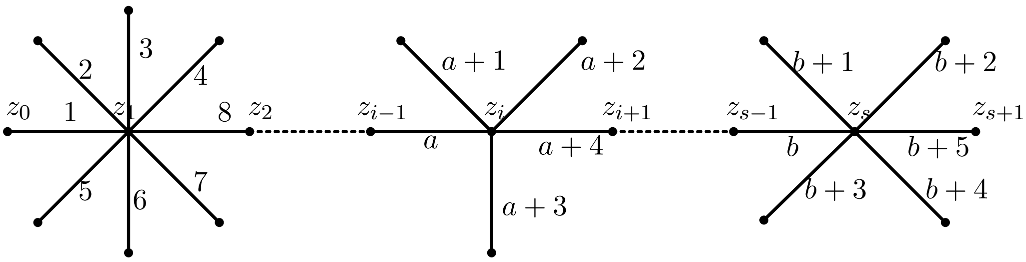
2.1 eset: $t \leq M(D) - 1$

Van olyan $e = (x,y) \in E(D)$ él, melyre $d_D(x) = 1$. Ekkor $d_D(y) > 1$, mivel $|E(D)| > 1$. Ha D' a D-ből e elhagyásával kapott fa, akkor $\Delta(D') \leq \Delta(D)$ és $M(D') = M(D) - 1$. Így $\Delta(D') \leq \Delta(D) \leq t \leq M(D) - 1 = M(D')$. Az indukciós hipotézis szerint D'-nek van intervallum t-élszínezése minden $\Delta(D') \leq t \leq M(D')$ esetén. Ezt az 1. esethez hasonlóan kiterjesztjük D intervallum t-élszínezésévé. Legyenek megint $E(D')$-ben y szomszédai az $1 \leq \lambda(1) < \ldots < \lambda(d_{D'}(y)) \leq t$ színekkel színezve. Ha

$1 < \lambda(1)$, akkor legyen e $\lambda(1) - 1$ színű, ha pedig $1 = \lambda(1)$, akkor $\lambda(d_{D'}(y)) + 1 = d_D(y) \leq \Delta(D) \leq t$ színű, így intervallum t-élszínezést kapunk.

2.2 eset: $t = M(D)$

Ebben az esetben egy színezési konstrukciót adunk. (4.2 ábra.) Feltehető, hogy $M(D) = ML(v_1, v_2)$ és hogy $d_D(v_1) = d_D(v_2) = 1$. Legyenek az $L(v_1, v_2)$ út csúcsai sorban $v_1 = z_0, z_1, \ldots, z_s, z_{s+1} = v_2$, ahol $s \geq 1$. A (z_0, z_1) élt az 1 színnel színezzük, általánosan pedig a (z_i, z_{i+1}) élt az $1 + \sum_{j=1}^{i}(d_D(z_j) - 1)$ színnel minden $0 \leq i \leq s$-re. Ekkor minden $1 \leq i \leq s$ esetén z_i-nek marad $d_D(z_i) - 2$ színezetlen szomszédja, amelyeket tudunk a $2+\sum_{j=1}^{i-1}(d_D(z_j) - 1), \ldots, \sum_{j=1}^{i}(d_D(z_j) - 1)$ színekkel színezni, amely pont $d_D(z_i) - 2$ darab szín.



4.2. ábra. Konstruktív színezés $t = M(D)$ esetén
$(a = 1 + \sum_{j=1}^{i-1}(d_D(z_j) - 1)$, $b = 1 + \sum_{j=1}^{s-1}(d_D(z_j) - 1))$

Azaz szemléletesen ez azt jelenti, hogy növekvő sorrendben színezünk a színekkel $L(v_1, v_2)$ egyik vége felől kezdve. Először kiszínezzük az út egyik szélén lévő élt az 1 színnel, majd az út második csúcsának többi szomszédját úgy, hogy utolsónak az út 2. éle maradjon. Ezután következnek a 3. csúcs szomszédai, megint van egy, amely már ki van színezve, és megint az úton lévő másik marad utolsónak. Ezt az eljárást ismételjük.

Most belátjuk, hogy $W(D) \leq M(D)$. Vegyünk egy intervallum $W(D)$-élszínezést. Legyen $\alpha(e_1) = 1$, $\alpha(e_2) = W(D)$, $e_1 = (x_1, y_1)$, $e_2 = (x_2, y_2)$. Feltehető, hogy $|EL(x_1, x_2)| > |EL(y_1, y_2)|$. (Azaz az e_1-et és az e_2-t összekötő, e_1-et és e_2-t is tartalmazó út két végpontja x_1 és x_2.) Ekkor legyenek a $VL(x_1, x_2)$-beli csúcsok sorrendben $x_1 = z_0, z_1, \ldots, z_s, z_{s+1} = x_2$.

Ekkor
$$\alpha((z_i, z_{i+1})) \leq 1 + \sum_{j=1}^{i}(d_D(z_j) - 1).$$

Így
$$W(D) = \alpha(e_2) = \alpha((z_s, z_{s+1})) \leq 1 + \sum_{j=1}^{s}(d_D(z_j) - 1) = ML(x_1, x_2) \leq M(D).$$

Ezzel a tételt beláttuk. $\square$

4.3. Teljes páros gráfok

Ebben a fejezetben teljes páros gráfok intervallum élszínezhetőségét vizsgáljuk [6] alapján. Először ismertetünk és bizonyítunk egy mátrixokról szóló algebrai lemmát. Ezután egy tétel formájában megmutatjuk, hogy minden teljes páros gráf intervallum élszínezhető, valamint meghatározzuk $\omega(K_{m,n})$ és $W(K_{m,n})$ értékeket tetszőleges $m, n \in \mathbb{N}^+$ esetén.

Jelölje $\sigma(a, b)$ az a és b természetes számok legnagyobb közös osztóját. Tekintjük az Euklideszi algoritmus azon változatát, amely úgy dolgozik egy adott pozitív (a, b) egész számpárral, hogy kezdetben definiálja az $F_1 = \max\{a, b\}$ és az $f_1 = \min\{a, b\}$ értékeket, majd rekurzívan $F_{k+1} = \max\{F_k - f_k, f_k\}$, $f_{k+1} = \min\{F_k - f_k, f_k\}$ mindaddig, amíg $F_k \neq f_k$. Legyen $s(a, b) = k$, amelyre $F_k = f_k = \sigma(a, b)$.

Legyen $H(m, n)$ egy m sorú, n oszlopú (0,1)-mátrix. A H mátrix i. sorát **gyűjtött**nek nevezzük, ha $h_{ip} = 1$ és $h_{iq} = 1$ esetén $(1 \leq p < q \leq n)$ $h_{it} = 1$ minden $p < t < q$-ra és $\sum_{j=1}^{n} h_{ij} \geq 1$. A H mátrix j. oszlopát **gyűjtött**nek nevezzük, ha $h_{pj} = 1$ és $h_{qj} = 1$ esetén $(1 \leq p < q \leq m)$ $h_{tj} = 1$ minden $p < t < q$-ra és $\sum_{i=1}^{n} h_{ij} \geq 1$. Definiáljuk $\epsilon(i, H) = \min\{j : h_{ij} = 1\}$-t és $\delta(j, H) = |\{i : \epsilon(i, H) = j\}|$-t. Azaz $\epsilon(i, H)$ megmondja, hogy H i. sorában hányadik elem az első 1-es, $\delta(j, H)$ pedig, hogy H hány sorára a j. elem az első 1-es az adott sorban. A H (0,1)-mátrixot **gyűjtött**nek nevezzük, ha minden sora és oszlopa gyűjtött, $h_{11} = h_{mn} = 1$ és $\epsilon(1, H) \leq \ldots \leq \epsilon(m, H)$.

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4.3. ábra. Példa gyűjtött mátrixra

Az $A(m_1, n)$ és a $B(m_2, n)$ (0,1) mátrixokat **ekvivalensek**nek nevezzük, ha $\sum_{i=1}^{m_1} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m_2} b_{ij}$ minden $j : 1 \leq j \leq n$-re, azaz oszlopösszegeik páronként megegyeznek. Nevezzük H mátrixot r-**reguláris**nak, ha minden $1 \leq i \leq n$-re $\sum_{j=1}^{n} h_{ij} = r$, azaz minden sorösszeg r. Ha $H_1(m_1, n_1)$ r_1-reguláris $(r_1 \geq 0)$, $H_2(m_2, n_2)$ r_2-reguláris $(r_2 \geq 0)$ úgy, hogy $m_1 = r_2$ és $m_2 = r_1$, akkor H_1-et és H_2-t **kölcsönösen megfeleltetett**nek nevezzük.

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4.4. ábra. Példa kölcsönösen megfeleltetett, gyűjtött, ekvivalens mátrixokra

15. Lemma. Legyen $A(m,w)$ n-reguláris, $B(n,w)$ m-reguláris gyűjtött mátrix. Ha A és B ekvivalens, akkor $w \geq m+n-\sigma(m,n)$.

Bizonyítás. $s(m,n)$ szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. Ha $s(m,n)=1$, akkor $m=n=\sigma(m,n)$ és $w \geq m$ adódik, ami világos B m-regularitásából.

Legyen most

$$s(m,n) > 1,$$

és feltesszük, hogy minden olyan m', n' párra, melyre $s(m',n') < s(m,n)$, igaz a lemma.

Indirekt feltesszük, hogy

$$w < m+n-\sigma(m,n), \tag{4.1}$$

és feltehető, hogy

$$m > n. \tag{4.2}$$

Észrevehetjük, hogy $\epsilon(n,B)+m-1 = w < m+n-\sigma(m,n) \leq m+n-1$, amiből

$$\epsilon(n,B) < n \tag{4.3}$$

adódik. (4.2) alapján:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} \delta(k,A) \qquad j=1,\ldots,n, \tag{4.4}$$

valamint

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij} = \sum_{k=1}^{j} \delta(k,B) \qquad j=1,\ldots,n. \tag{4.5}$$

(4.4) és (4.5) figyelembevételével A és B ekvivalenciájából következik, hogy:

$$\delta(k,A) = \delta(k,B) \qquad k=1,\ldots,n. \tag{4.6}$$

Továbbá (4.2), (4.3) és a mátrixok ekvivalenciája alapján:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{in} = \sum_{i=1}^{n} b_{in} = n. \tag{4.7}$$

Most konstruálunk $A(m,w)$-ből illetve $B(n,w)$-ből egy-egy új mátrixot. Legyen $A'(m-n,w-n)$ az a mátrix, amelyet A-ból az első n darab sor és az első n darab oszlop elhagyásával kapunk. Ekkor (4.7) miatt szintén egy n-reguláris mátrixot kapunk. Legyen $B'(n,w-n)$ az a mátrix, melyet úgy kapunk, hogy B egy b_{ij} elemét 0-ra állítjuk, ha $j < \epsilon(i,B)+n$, azaz soronként az első n db 1-est, és elhagyjuk ezután az első n darab oszlopát. Ekkor B' nyilván $(m-n)$-reguláris. Így A' és B' kölcsönösen megfeleltetettek. Továbbá ekvivalensek is, hiszen egyrészt (4.3) alapján B $(n+j)$.

oszlopából $j = 1, \ldots, n-1$ esetén $\sum_{k=j+1}^{n} \delta(k, B)$ 1-es lett 0-ra cserélve. Ha $\exists j : n-1 < j \leq m-n$, akkor ezen j-kre, az $(n+j)$. oszlopból 0 darab. Másrészt A $(n+j)$. oszlopából $(j = 1, \ldots, n-1)$ $\sum_{k=j+1}^{n} \delta(k, A)$ 1-es lett elhagyva az első n darab sor törlésével. Ha $\exists j : n-1 < j \leq m-n$, akkor ezen j-kre, A $(n+j)$. oszlopában az első n sorban csak 0-k voltak, így ezekből az oszlopokból nem törlődött 1-es. Ebből pedig (4.6) alapján már adódik az ekvivalencia.

Mivel $s(m-n, n) < s(m, n)$, az indukciós hipotézis alapján

$$w - n \geq m - n + n - \sigma(m-n, n),$$

és tudjuk, hogy $\sigma(m-n, n) = \sigma(m, n)$, így ebből

$$w \geq m + n - \sigma(m, n)$$

adódik, ami ellentmond (4.1)-es felvetésünknek. Ezzel a lemmát beláttuk. $\square$

Legyen $m, n \in \mathbb{N}^+$, $K_{m,n}$ teljes páros gráf, melyre $V(K_{m,n}) = \{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n\}$, $E(K_{m,n}) = \{(x_i, y_j) | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$.

16. Tétel. *Tetszőleges $m, n \in \mathbb{N}^+$ esetén:*

(i) $K_{m,n}$ intervallum élszínezhető,

(ii) $\omega(K_{m,n}) = m + n - \sigma(m, n)$,

(iii) $W(K_{m,n}) = m + n - 1$,

(iv) ha $\omega(K_{m,n}) \leq t \leq W(K_{m,n})$, akkor létezik $K_{m,n}$-nek intervallum t-élszínezése.

Bizonyítás. Röviden összefoglaljuk a bizonyítás kulcslépéseit. Először konstruálunk egy színezést, amely könnyen látható, hogy intervallum élszínezés, sőt a korábbiak alapján látszik, hogy $W(K_{m,n})$ színszámú is. A teljes páros gráfoknak $2-2$ mátrixot feleltetünk meg, ezután alkalmazzuk a 15. lemmát, amelyből alsóbecslést kapunk a $\omega(K_{m,n})$ értékre. Konstruktívan, részgráfok színezésének kiterjesztésével kapjuk a becslés élességét, és hogy minden $\omega(K_{m,n})$ és $W(K_{m,n})$ közötti t-re van intervallum t-élszínezés.

(i)-et konstruktívan bizonyítjuk. Legyen $\alpha(x_i, y_j) = i + j - 1$. Ezzel láthatóan $K_{m,n}$ intervallum $(m+n-1)$-élszínezését kaptuk. Így (i)-et beláttuk, sőt $W(K_{m,n}) \geq m+n-1$ is adódik. Ehhez hozzávéve a második fejezet 4. következményét, és hogy $|V(K_{m,n})| = m + n$ adódik (iii).

Most belátjuk, hogy $\omega(K_{m,n}) \geq m + n - \sigma(m, n)$. Ehhez az előző 15. lemmát használjuk. Vesszük $K_{m,n}$-nek egy intervallum $\omega(K_{m,n})$-színezését. Jelölje $\lambda(v)$ a gráf minden csúcsára a legkisebb j számot, amelyre v-nek van j színű szomszédja. Feltehető, hogy

$$\lambda(x_1) \leq \ldots \leq \lambda(x_m) \text{ és } \lambda(y_1) \leq \ldots \leq \lambda(y_n).$$

Definiáljuk az $X(m, \omega(K_{m,n}))$ mátrixot úgy, hogy:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } x_i \text{ csúcsnak van } j \text{ színű szomszédja} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Definiáljuk az $Y(n, \omega(K_{m,n}))$ mátrixot úgy, hogy:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } y_i \text{ csúcsnak van } j \text{ színű szomszédja} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor X $m \times \omega(K_{m,n})$-es, n-reguláris, Y $n \times \omega(K_{m,n})$-es, m-reguláris gyűjtött mátrix. Így X és Y kölcsönösen megfeleltetettek és ekvivalensek is, hiszen mindkét mátrix j oszlopában annyi 1-es van, ahány j színű él a gráfban. Így $\omega(K_{m,n}) \geq m + n - \sigma(m, n)$ valóban igaz a lemma alapján.

Végül belátjuk, hogy minden $t : m + n - \sigma(m, n) \leq t \leq m + n - 1$ esetén $K_{m,n}$ intervallum t-színezhető. Ebből már az előzőekkel együtt (ii) és (iv) is következik.

Legyen $t = m + n - \sigma(m, n) + c$. Ekkor

$$c \leq \sigma(m, n) - 1. \tag{4.8}$$

Definiáljuk a $K' = K_{\sigma(m,n),\sigma(m,n)}$ gráfot az $x_1, \ldots, x_{\sigma(m,n)}, y_1, \ldots, y_{\sigma(m,n)}$ csúcsokból álló részgráfként. Legyen $p = \frac{m}{\sigma(m,n)}$, $q = \frac{n}{\sigma(m,n)}$. Ekkor 10. tételt is figyelembe véve, mivel K' teljes páros gráf és reguláris is:

$$\chi'(K') = \Delta(K') = \omega(K') = \sigma(m, n). \tag{4.9}$$

A már bizonyított (iii) alapján:

$$W(K') = 2\sigma(m, n) - 1. \tag{4.10}$$

(4.8)-(4.10) összevetéséből:

$$\Delta(K') \leq \sigma(m, n) + c \leq 2\sigma(m, n) - 1 = W(K'). \tag{4.11}$$

Mivel K' reguláris, 10. tétel, (4.9) és (4.11) alapján K'-nek létezik intervallum $(\sigma(m, n) + c)$-élszínezése, ezt jelölje α_0. Ezt kiterjeszthetjük $K(m, n)$ intervallum t-élszínezésévé a következőképpen: legyen $\alpha((x_{i+k\cdot\sigma(m,n)}, y_{j+l\cdot\sigma(m,n)})) = (k+l)\sigma(m, n) + \alpha_0((x_i, y_j))$, ahol $k = 0, \ldots, p-1$, $l = 0, \ldots, q-1$, és $i, j = 1, \ldots, \sigma(m, n)$. Így intervallum élszínezést kapunk $(p - 1 + q - 1)\sigma(m, n) + \sigma(m, n) + c = m + n - 2 \cdot \sigma(m, n) + \sigma(m, n) + c = m + n - \sigma(m, n) + c = t$ színnel.

Ezzel a tételt beláttuk. $\square$

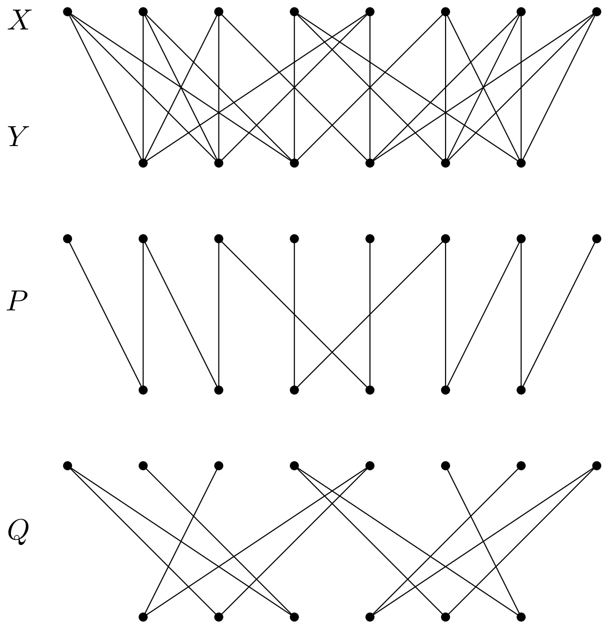
17. Következmény. Ha $\sigma(m, n) = 1$, akkor $K(m, n) \in \mathfrak{N}_t$ akkor és csak akkor, ha $t = m + n - 1$.

4.4. Bireguláris páros gráfok

Ebben a fejezetben a bireguláris páros gráfok közül egy speciális csoporton, a (3,4)-bireguláris gráfokon vizsgáljuk az intervallum élszínezhetőséget [2] alapján. Bevezetjük a megfelelő út-faktor fogalmát, és eljárást adunk tetszőleges (3,4)-bireguláris gráf intervallum 6-színezésére, ha annak létezik megfelelő út-faktora, és ezt ismerjük.

18. Definíció. Egy $G = (X \cup Y, E)$ (3,4)-bireguláris gráfnak P megfelelő út-faktora, ha P a G egy olyan feszítő részgráfja, melyben minden összefüggőségi komponens egy út, melynek mindkét végpontja X-beli, és hossza a {2,4,6,8} halmazból való (4.5 ábra).

A továbbiakban mindig ilyen G-t tekintünk. Legyen P a G egy megfelelő út-faktora. Legyen $Q = G - E(P)$. Ekkor észrevehetjük, hogy $d_Q(y) = 2$, ha $y \in Y$, $d_Q(x) = 2$, ha $x \in X$, és x P-ben egy út végpontja, valamint $d_Q(x) = 1$, ha $x \in X$, és x P-ben egy út belső pontja. Így Q minden komponense páros kör vagy egy X-ben kezdődő és végződő út.



4.5. ábra. Példa egy (3,4)-bireguláris gráf P-re és Q-re bontására

19. Definíció. Feltesszük, hogy P a G egy megfelő út-faktora. Ekkor a G_P gráfot a következőképpen definiáljuk. Legyen G_P csúcshalmaza $\{x \in X | d_P(x) = 2\}$, azaz azon X-beli csúcsok halmaza, amelyek a P-ben őket tartalmazó útnak belső pontjai. Legyen (u, v) G_P élhalmazában, ha:

(i) u és v ugyanazon 6-hosszú P-beli út $V(G_P)$-beli belső pontjai,

(ii) u és v ugyanazon 8-hosszú P-beli út olyan $V(G_P)$-beli belsőpontjai, melyek távolsága 4,

(iii) u és v Q egy (út)komponensének végpontja.

20. Lemma. Ha P a G gráf egy megfelelő út-faktora, akkor G_P páros gráf.

Bizonyítás. Észrevehetjük, hogy minden G_P-beli csúcs Q-ban elsőfokú, így egy út végpontja. Ebből következik, hogy minden G_P-beli csúcsnak 1 darab (iii) típusú éle van. Ezen kívül még egy (i) vagy egy (ii) típusú éle lehet. Így G_P-ben minden csúcs fokszáma legfeljebb 2, és nincs benne páratlan kör sem, így páros gráf. Ezzel a lemmát beláttuk. $\square$

21. Tétel. *Ha G olyan* (3,4)*-bireguláris páros gráf, amelynek létezik P megfelelő út-faktora, akkor G intervallum* 6*-színezhető.*

Bizonyítás. A bizonyítást konstruktívan végezzük, mutatunk egy megfelelő intervallum élszínezést az $\{1,2,3,4,5,6\}$ színekkel. 20. lemma alapján G_P páros, így csúcsai 2-színezhetőek. Ezen színezés legyen $c : V(G_P) \to \{A, B\}$.

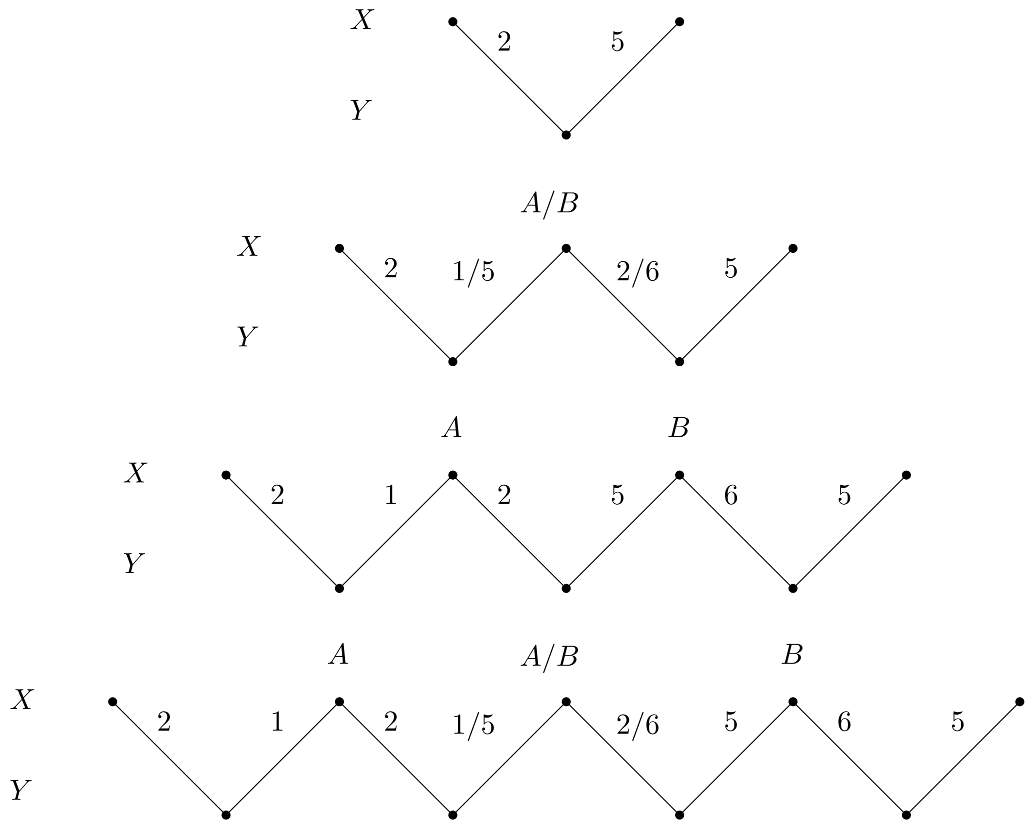
Először Q éleit a $\{3,4\}$ halmazzal színezzük. A Q-ban lévő körök éleit színezhetjük a 3 és 4 színekkel felváltva. Itt minden kör páros hosszú, mivel G páros gráf. A Q-ban lévő utak páros hosszúak, mivel mindkét végpontjuk X-beli. Egy ilyen út két végpontja legyen x' és x''. Ekkor $x', x'' \in G_P$ és szomszédosak is, így feltehető, hogy $c(x') = A$, és $c(x'') = B$. Ekkor színezzük az x' és x'' közti utat a 3 és 4 színekkel felváltva úgy, hogy legyen az x'-vel szomszédos él 3, az x''-vel szomszédos él 4 színű.

Most a P-beli éleket az $\{1,2,5,6\}$ halmazzal színezzük (4.6 ábra). Minden P-beli komponens olyan, hogy a végpontjain kívül minden X-beli csúcsa G_P-beli, így értelmezett rajta c. Mindegyik P-beli komponenst az egyik vége felöl a 2 és 1 színekkel felváltva 2-vel kezdve színezünk, illetve a másik vége felől 5 és 6 színekkel felváltva 5-tel kezdve. Meg kell határoznunk a két színezés határát. Ezt úgy fogjuk megtenni, hogy az A színű csúcsok két szomszédja 1 és 2, a B színű csúcsok két szomszédja 5 és 6 színű lesz, a váltakozás szabályát meghagyva.

P_l-lel az l pontból álló utat jelöljük minden pozitív egész l esetén. Ekkor legyen H egy P-beli komponens.

- Ha $H \cong P_3$, akkor H egyik élét színezzük 2-vel, a másikat 5-tel.
- Ha $H \cong P_5$, akkor, abban az esetben ha az egyetlen G_P-beli csúcs A színű, akkor színezzük a vele szomszédos két élt 1 és 2, ha pedig B színű, akkor 5 és 6 színűre.
- Ha $H \cong P_7$, akkor a H-ban lévő két G_P-beli csúcs szomszédos G_P-ben, annak élhalmazának definíciója alapján, így egyik színe A, a másiké B. Az A színűvel szomszédosak 1 illetve 2, a B színűvel szomszédosak 5 illetve 6 színeket kapnak.
- Ha $H \cong P_9$, akkor a H-ban lévő három G_P-beli csúcs közül a két távolabbi szomszédos G_P-ben annak élhalmazának definíciója alapján, így egyik színe A, a másiké B. A középső csúcs lehet akár A, akár B színű. Az A színűvel szomszédosak 1 illetve 2, a B színűvel szomszédosak 5 illetve 6 színeket kapnak.

Belátjuk, hogy ez intervallum 6-színezés. Egyrészt használjuk a 3,4 színeket, hiszen Q nem lehet üres halmaz, másrészt használjuk a 2 és 5 színeket, mivel P sem lehet üres halmaz. Az 1 és 6 színeket pedig



4.6. ábra. P komponenseinek színezése

azért használjuk, mivel ha bármelyiket nem használnánk, akkor nem lenne A vagy B színű csúcs G_P-ben, ami azt jelentené, hogy G_P élhalmaza üres lenne. Ez csak akkor lehetséges a (iii) típusú élek miatt, ha G_P csúcshalmaza is üres. Ez nem lehetséges, mert akkor P minden összefüggőségi komponense 2 hosszú út lenne, amelyből következne, hogy X pontosztály mérete kétszerese Y pontosztály méretének, ez pedig ellentmondana a (3,4)-biregularitásnak.

Most belátjuk G csúcsain haladva, hogy tényleg intervallum élszínezést kaptunk. Egyrészt egy Y-beli csúcsnak van egy 3 és egy 4 színű Q-beli szomszédos éle, P-beli szomszédos éleinek színeinek halmaza pedig az $\{1{,}2\}$, $\{2{,}5\}$, $\{5{,}6\}$ halmazok közül egy. Így szomszédai színeinek halmaza $\{1{,}2{,}3{,}4\}$, $\{2{,}3{,}4{,}5\}$ és $\{3{,}4{,}5{,}6\}$ közül egy.

Másrészt minden X-beli csúcs, amely egy P-beli komponens végpontja, rendelkezik egy 3 és egy 4 színű szomszéddal Q-ban, P-beli szomszédja pedig 2 vagy 5 színű. Így szomszédai színeinek halmaza $\{2{,}3{,}4\}$ és $\{3{,}4{,}5\}$ közül egy.

Harmadrészt minden X-beli csúcs, amely egy P-beli komponens belső pontja, rendelkezik egy 3 vagy egy 4 színű szomszéddal Q-ban. 3 színűvel, ha ő maga A színű, 4 színűvel, ha ő maga B színű. Előbbi esetben P-beli szomszédai 1 és 2, utóbbi esetben 5 és 6 színűek. Így szomszédai színeinek halmaza {1,2,3} és {4,5,6} közül egy.

Így G valóban intervallum 6-színezhető. $\square$

Észrevehetjük, hogy ha hosszabb utakat is megengednénk P-ben, akkor a fenti bizonyítás nem működne. Ekkor nem biztosítanánk, hogy az A színű csúcsok megelőzzék a B színű csúcsokat P komponenseiben, ami viszont szükséges. Egy B színű csúcs ugyanis, amely megelőz egy A színű csúcsot olyan Y csúcsot eredményezne, amelynek szomszédai az {1,3,4,6} halmazzal lennének színezve. Ha plusz éleket vennénk G_p-hez ezt kiküszöbölendő, akkor pedig a 2-színezhetőségét ronthatnánk el.

Ettől függetlenül lehetséges, hogy minden (3,4)-bireguláris páros gráfnak van intervallum 6-színezése. Sőt, ha a következő sejtés igaz, akkor mindig konstruálható így.

22. Sejtés. *Minden G (3,4)-bireguláris páros gráfnak van megfelelő út-faktora.*

4.5. Teljes gráfok

Ebben a fejezetben a teljes gráfok gráfosztályán vizsgáljuk az intervallum élszínezhetőséget [10] alapján. Minden teljes gráfról el tudjuk dönteni, hogy intervallum élszínezhető-e, ez csupán a csúcsszámától függ. Az intervallum élszínezhetőek esetén megadjuk a legkisebb t számot, amelyre létezik az adott teljes gráfnak intervallum t-élszínezése és alsóbecslést adunk a legnagyobb ilyen t-re is.

23. Tétel (Vizing tétele). *[14] Legyen K_m az m csúcsú teljes gráf. Ekkor*

$$\chi'(K_m) = \begin{cases} m-1, & \text{ha } m \text{ páros,} \\ m, & \text{ha } m \text{ páratlan.} \end{cases}$$

A tételből és abból, hogy minden teljes gráf reguláris, 10. tétel alapján következik az alábbi.

24. Következmény. Minden pozitív egész n esetén $K_{2n+1} \notin \mathfrak{N}$, $K_{2n} \in \mathfrak{N}$, valamint $\omega(K_{2n}) = 2n-1$.

Most kimondunk egy lemmát, amely $W(K_{2n})$-re ad alsó becslést.

25. Lemma. [10] $W(K_{2n}) \geq 3n-2$ minden pozitív egész n esetén.

A következő lemma egy másfajta alsó becslést ad a maximális színszámra, amellyel létezik intervallum élszínezés.

26. Lemma. $W(K_{4m}) \geq W(K_{2m}) + 4m - 1$ tetszőleges m pozitív egészre.

Bizonyítás. Konstruktívan bizonyítunk: vesszük K_{2m} intervallum élszínezését $W(K_{2m})$ színnel és ebből konstruáljunk $W(K_{2m}) + 4m - 1$ színű intervallum élszínezést K_{4m}-re. Ebből már következik az állításunk.

Legyen $V(K_{4m}) = \{v_1, \ldots, v_{4m}\}$, és a $\{v_1, \ldots, v_{2m}\}$ által feszített részgráfon adott egy intervallum $W(K_{2m})$-élszínezés: α. Ezt terjesztjük ki β intervallum élszínezéssé K_{4m}-en a következőképpen:

$$\beta((v_i,v_j)) = \begin{cases} \alpha((v_i,v_j)) & \text{ha } i,j=1,\ldots,2m, \\ \alpha((v_{i-2m},v_{j-2m})) + 4m-1 & \text{ha } i,j=2m+1,\ldots,4m, \\ \alpha((v_i,v_{j-2m})) + 2m & \text{ha } i=1,\ldots,2m,\ j=2m+1,\ldots,4m \text{ és } j\neq i+2m, \\ \min S(v_i,\alpha) + 2m-1 & \text{ha } i=1,\ldots,2m \text{ és } j=i+2m. \end{cases}$$

Most erről bebizonyítjuk, hogy valóban megfelelő intervallum élszínezés.

Először megmutatjuk, hogy minden $[\![1, W(K_{2m})+4m-1]\!]$-beli t-re van olyan e él $W(K_{4m})$-ben, melyre $\beta(e)=t$. Mivel β α kiterjesztéseként adódott, $[\![1, W(K_{2m})]\!]$-ból minden érték felvétetik. Meg kell mutatnunk, hogy minden $[\![W(K_{2m})+1, W(K_{2m})+4m-1]\!]$-beli t is felvétetik. Minden $j=1,\ldots,2m$ esetén $\max S(v_j,\alpha) - \min S(v_j,\alpha) = 2m-2$. Legyen $i=2m+1,\ldots,4m$, ekkor

$$\begin{aligned} S(v_i,\beta) &= [\![\min S(v_{i-2m},\alpha)+4m-1, \max S(v_{i-2m},\alpha)+4m-1]\!]\cup \\ &\cup [\![\min S(v_{i-2m},\alpha)+2m, \max S(v_{i-2m},\alpha)+2m]\!] \cup \{\min S(v_{i-2m},\alpha)+2m-1\} = \\ &= [\![\max S(v_{i-2m},\alpha)-(2m-2)+4m-1, \max S(v_{i-2m},\alpha)+4m-1]\!]\cup \\ &\cup [\![\max S(v_{i-2m},\alpha)-(2m-2)+2m, \max S(v_{i-2m},\alpha)+2m]\!]\cup \\ &\cup \{\max S(v_{i-2m},\alpha)-(2m-2)+2m-1\} = \\ &= [\![\max S(v_{i-2m},\alpha)+2m+1, \max S(v_{i-2m},\alpha)+4m-1]\!]\cup \\ &\cup [\![\max S(v_{i-2m},\alpha)+2, \max S(v_{i-2m},\alpha)+2m]\!] \cup \{\max S(v_{i-2m},\alpha)+1\} = \\ &= [\![\max S(v_{i-2m},\alpha)+1, \max S(v_{i-2m},\alpha)+4m-1]\!], \end{aligned}$$

és i választható úgy, hogy $\max S(v_{i-2m},\alpha) = W(K_{2m})$. Így minden kívánt t-re van t színű él.

Most megmutatjuk, hogy minden csúcs szomszédai egymást követő színekkel vannak színezve. Egyrészt $i=1,\ldots,2m$ esetén

$$\begin{aligned} S(v_i,\beta) &= [\![\min S(v_i,\alpha), \min S(v_i,\alpha)+2m-2]\!] \cup [\![\min S(v_i,\alpha)+2m, \min S(v_i,\alpha)+2m-2+2m]\!]\cup \\ &\cup \{\min S(v_i,\alpha)+2m-1\} = [\![\min S(v_i,\alpha), \min S(v_i,\alpha)+2m-2]\!]\cup \\ &\cup [\![\min S(v_i,\alpha)+2m, \min S(v_i,\alpha)+4m-2]\!] \cup \{\min S(v_i,\alpha)+2m-1\} = \\ &= [\![\min S(v_i,\alpha), \min S(v_i,\alpha)+4m-2]\!], \end{aligned}$$

másrészt $i=2m+1,\ldots,4m$ esetén

$$\begin{aligned} S(v_i,\beta) &= [\![\min S(v_{i-2m},\alpha)+4m-1, \min S(v_{i-2m},\alpha)+2m-2+4m-1]\!]\cup \\ &\cup [\![\min S(v_{i-2m},\alpha)+2m, \min S(v_{i-2m},\alpha)+2m-2+2m]\!] \cup \{\min S(v_{i-2m},\alpha)+2m-1\} = \\ &= [\![\min S(v_{i-2m},\alpha)+4m-1, \min S(v_{i-2m},\alpha)+6m-3]\!]\cup \\ &\cup [\![\min S(v_{i-2m},\alpha)+2m, \min S(v_{i-2m},\alpha)+4m-2]\!] \cup \{\min S(v_{i-2m},\alpha)+2m-1\} = \\ &= [\![\min S(v_{i-2m},\alpha)+2m-1, \min S(v_{i-2m},\alpha)+6m-3]\!]. \end{aligned}$$

Így β valóban intervallum élszínezés K_{4m}-en $W(K_{2m})+4m-1$ színnel, így a lemmát beláttuk. □

27. Tétel. *Legyen $n = p \cdot 2^q$, ahol p páratlan, q pedig nem negatív egész. Ekkor $W(K_{2n}) \geq 4n-2-p-q$.*

Bizonyítás. 26. lemma alapján

$$\begin{aligned} W(K_{2n}) = W(K_{p \cdot 2^{q+1}}) &\geq W(K_{p \cdot 2^q}) + p \cdot 2^{q+1} - 1, \\ W(K_{p \cdot 2^q}) &\geq W(K_{p \cdot 2^{q-1}}) + p \cdot 2^q - 1, \\ &\vdots \\ W(K_{p \cdot 2^2}) &\geq W(K_{p \cdot 2}) + p \cdot 2^2 - 1. \end{aligned}$$

Ezt összegezve adódik, hogy

$$W(K_{2n}) \geq W(K_{2p}) + p \cdot \sum_{i=2}^{q+1} 2^i - q.$$

25. lemmát is figyelembe véve látható, hogy

$$W(K_{2n}) \geq 3p - 2 + p \cdot \sum_{i=2}^{q+1} 2^i - q = 3p - 2 + 4p(2^q - 1) - q = 4 \cdot p2^q - p - q - 2 = 4n - p - q - 2.$$

Ezzel a tételt beláttuk. □

Már a tétel bizonyításakor felmerült az alábbi sejtés.

28. Sejtés. *Legyen $n = p \cdot 2^q$, ahol p páratlan, q pedig nem negatív egész. Ekkor $W(K_{2n}) = 4n-2-p-q$.*

4.6. n-dimenziós kockák

Ebben a fejezetben az n-dimenziós kockák esetében vizsgáljuk az intervallum élszínezhetőséget [10, 11] cikkek alapján. Megmutatjuk, hogy minden n-dimenziós kocka intervallum élszínezhető, sőt megmondjuk, hogy mi a legkisebb és a legnagyobb t, melyre létezik intervallum t-élszínezése.

Jelölje x_i egy x $\{0,1\}^n$-beli vektor i. koordinátáját. A $G = (V, E)$ gráfot nevezzük n-dimenziós kockának vagy n-kockának ($n \in \mathbb{N}^+$), ha $V = \{0,1\}^n$ és uv pontosan akkor van benne E élhalmazban, ha egyértelműen létezik olyan i index ($1 \leq i \leq n$), hogy $u_i \neq v_i$. A továbbiakban jelölje G gráfot Q_n.

29. Tétel. *Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $Q_n \in \mathfrak{N}$ és $\omega(Q_n) = n$.*

Bizonyítás. Q_n ($n \in \mathbb{N}^+$) reguláris, hiszen minden u csúcsára $d(u) = n$. Q_n páros gráf is, hiszen nem tartalmaz páratlan hosszú kört. Valóban, hiszen egy körnek, amely tartalmazza a v csúcsot, minden éle megfelel a kezdetben v-t reprezentáló $\{0,1\}^n$-beli vektor egy koordinátájának a megváltozásának. Ebből következik, hogy az eredeti vektor koordinátánként és így összesen is csak páros sok ilyen változtatással kapható vissza.

Mivel Q_n reguláris páros gráf, $\chi'(Q_n) = \Delta(Q_n) = n$. Ez teljes párosítások elhagyásával könnyen adódik. Így 10. tétel alapján már $Q_n \in \mathfrak{N}$ és $\omega(Q_n) = n$ is adódik. □

30. Lemma. $W(Q_n) \geq W(Q_{n-1}) + n$, ha $n \geq 2$.

Bizonyítás. Vesszük Q_{n-1} egy intervallum élszínezését $W(Q_{n-1})$ színnel. Ezt kibővítjük Q_n intervallum élszínezésévé $W(Q_{n-1}) + n$ színnel, amely bizonyítja a lemmát.

Legyen $V_0 = \{v | v \in \{0,1\}^n, v_n = 0\}$, $V_1 = \{v | v \in \{0,1\}^n, v_n = 1\}$. Legyen $v = (v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, 1)$ esetén $\tilde{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, 0)$. Legyen a Q_n gráf V_0 ponthalmazon lévő feszített részgráfja G. Ekkor könnyen látható, hogy $G \cong Q_{n-1}$. Legyen α intervallum élszínezés $W(Q_{n-1})$ színnel G-n. Ezt bővítsük ki β intervallum élszínezéssé Q_n-en a következő módon:

$$\beta((u,v)) = \begin{cases} \alpha((u,v)) & \text{ha } u, v \in V_0 \\ \alpha((\tilde{u},\tilde{v})) + n & \text{ha } u, v \in V_1 \\ \min S(u,\alpha) + n - 1 & \text{ha } u = \tilde{v}. \end{cases}$$

Most bebizonyítjuk, hogy ez valóban megfelelő intervallum élszínezés. Először megmutatjuk, hogy minden $t \in [\![1, W(Q_{n-1}) + n]\!]$ esetén van t színű él. Nyilván van minden $t \in [\![1, W(Q_{n-1})]\!]$ esetén, ez a kibővítésből következik. Kell tehát, hogy van minden $t \in [\![W(Q_{n-1}) + 1, W(Q_{n-1}) + n]\!]$ esetén is. Minden $u \in Q_{n-1}$ esetén $\max S(u,\alpha) - \min S(u,\alpha) = n - 2$. Minden $v \in V_1$ esetén

$$\begin{aligned} S(v,\beta) &= [\![\min S(\tilde{v},\alpha) + n, \max S(\tilde{v},\alpha) + n]\!] \cup \{\min S(\tilde{v},\alpha) + n - 1\} = \\ &= [\![\max S(\tilde{v},\alpha) - (n-2) + n, \max S(\tilde{v},\alpha) + n]\!] \cup \{\max S(\tilde{v},\alpha) - (n-2) + n - 1\} = \\ &= [\![\max S(\tilde{v},\alpha) + 2, \max S(\tilde{v},\alpha) + n]\!] \cup \{\max S(\tilde{v},\alpha) + 1\} = \\ &= [\![\max S(\tilde{v},\alpha) + 1, \max S(\tilde{v},\alpha) + n]\!], \end{aligned}$$

és v választható úgy, hogy $\tilde{v} \in V_0$-ra $\max S(\tilde{v},\alpha) = W(Q_{n-1})$. Így minden kívánt t színre van t színű él.

Most belátjuk, hogy minden csúcs szomszédai egymást követő színekkel vannak színezve. Egyrészt $v_0 \in V_0$ esetén

$$\begin{aligned} S(v_0,\beta) &= S(v_0,\alpha) \cup \{\min S(v_0,\alpha) + n - 1\} = \\ &= [\![\min S(v_0,\alpha), \max S(v_0,\alpha)]\!] \cup \{\min S(v_0,\alpha) + n - 1\} = \\ &= [\![\min S(v_0,\alpha), \min S(v_0,\alpha) + n - 2]\!] \cup \{\min S(v_0,\alpha) + n - 1\} = \\ &= [\![\min S(v_0,\alpha), \min S(v_0,\alpha) + n - 1]\!]. \end{aligned}$$

Másrészt $v_1 \in V_1$ esetén

$$\begin{aligned} S(v_1,\beta) &= [\![\min S(\tilde{v_1},\alpha) + n, \max S(\tilde{v_1},\alpha) + n]\!] \cup \{\min S(\tilde{v_1},\alpha) + n - 1\} = \\ &= [\![\min S(\tilde{v_1},\alpha) + n, \min S(\tilde{v_1},\alpha) + n + n - 2]\!] \cup \{\min S(\tilde{v_1},\alpha) + n - 1\} = \\ &= [\![\min S(\tilde{v_1},\alpha) + n - 1, \min S(\tilde{v_1},\alpha) + 2n - 2]\!]. \end{aligned}$$

Így β valóban intervallum élszínezés Q_n-en, valóban $W(Q_{n-1}) + n$ színnel, így a lemmát beláttuk. $\square$

31. Tétel. $W(Q_n) \geq \frac{n(n+1)}{2}$ *minden* $n \in \mathbb{N}^+$ *esetén.*

Bizonyítás. 30. lemma alapján

$$\begin{aligned} W(Q_n) &\geq W(Q_{n-1}) + n, \\ W(Q_{n-1}) &\geq W(Q_{n-2}) + n - 1, \\ &\vdots \\ W(Q_2) &\geq W(Q_1) + 2. \end{aligned}$$

Mivel $W(Q_1) = 1$ triviális, ezeket összegezve $W(Q_n) \geq \frac{n(n-1)}{2}$ valóban adódik. □

Már az előző tétel bizonyításakor felmerült a sejtés, hogy $W(Q_n) = \frac{n(n-1)}{2}$. Ez a sejtés később igaznak bizonyult, ezt fogjuk most bizonyítani [11] alapján.

Legyen $e, e' \in E(Q_n)$. Legyen $e = (u_1, u_2)$, $e' = (v_1, v_2)$. Ekkor definiáljuk e és e' élek távolságát a következőképpen:

$$d(e, e') = \min_{i,j=1,2} \{d(u_i, v_j)\}.$$

Legyen α intervallum élszínezése Q_n-nek. Definiáljuk $sp_\alpha(e, e')$-t $e, e' \in E(Q_n)$ esetén a következőképpen:

$$sp_\alpha(e, e') = |\alpha(e) - \alpha(e')|.$$

Továbbá $k = 0, \ldots, n-1$ esetén definiáljuk $sp_{\alpha,k}$-t is:

$$sp_{\alpha,k} = \max\{sp_\alpha(e, e') | e, e' \in E(Q_n) \text{ és } d(e, e') = k\}.$$

Nyilvánvalóan $sp_{\alpha,0} = n - 1$.

32. Tétel. *$W(Q_n) \leq \frac{n(n+1)}{2}$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.*

Bizonyítás. Legyen α intervallum élszínezése Q_n-nek. Először megmutatjuk, hogy $k = 1, \ldots, n-1$ esetén

$$sp_{\alpha,k} \leq sp_{\alpha,k-1} + n - k.$$

Legyen e, e' tetszőleges Q_n-beli élek, melyekre $d(e, e') = k$. Feltehető, hogy $\alpha(e) \geq \alpha(e')$. Mivel $d(e, e') = k$ léteznek olyan $u \in e$ és $v \in e'$ csúcsok, amelyekre $d(u, v) = k$. Léteznek továbbá olyan $v_1, \ldots, v_k$ különböző csúcsok (4.7 ábra), melyekre $d(u, v_i) = k - 1$ és $(v_i, v) \in Q_n$ $i = 1, \ldots, k$ esetén. Hiszen $d(u, v) = k$ azt jelenti, hogy u és v pont k darab koordinátában különbözik. Ezen koordináták közül egyet-egyet megváltoztatva v-ben adódik a k darab ilyen csúcs.

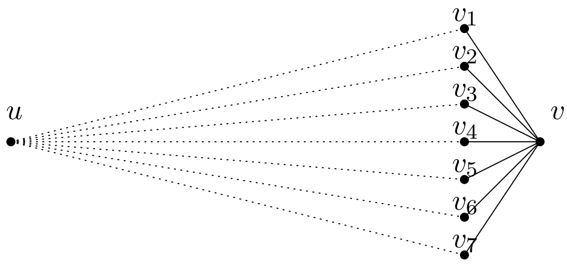
Mivel Q_n n-reguláris,

$$\min_{i=1,\ldots,k} \{\alpha((v_i, v))\} \leq \alpha(e') + n - k \tag{4.12}$$

adódik.

Legyen e'' az az él, melyre $\alpha(e'') = \min_{i=1,\ldots,k}\{\alpha((v_i, v))\}$. (4.12) alapján

$$\alpha(e') \geq \alpha(e'') - (n - k) \text{ és } d(e, e'') = k - 1.$$



4.7. ábra. Példa $v_1, \ldots, v_k$ csúcsokra $k = 7$ esetén. A folyamatos vonalakkal éleket, a pontozottakkal 6-hosszú utakat jelölünk.

Így

$$sp_\alpha(e, e') = |\alpha(e) - \alpha(e')| = \alpha(e) - \alpha(e') \leq \alpha(e) - \alpha(e'') + n - k = |\alpha(e) - \alpha(e'') + n - k| \leq$$
$$\leq |\alpha(e) - \alpha(e'')| + n - k \leq sp_{\alpha,k-1} + n - k$$

adódik. Mivel e és e' tetszőleges volt,

$$sp_{\alpha,k} \leq sp_{\alpha,k-1} + n - k.$$

Ebből, és abból, hogy $sp_{\alpha,0} = n - 1$, indukcióval adódik, hogy

$$sp_{\alpha,n-1} \leq \frac{n \cdot (n+1)}{2} - 1.$$

Mivel $d(e, e') \leq n - 1$ bármely két e és e' élre Q_n-ből,

$$W(Q_n) \leq \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Ezzel a tételt beláttuk. $\square$

Így 31. és 32. tételeket összegezve:

33. Következmény. $W(Q_n) = \frac{n(n+1)}{2}$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.

4.7. Összegzés

Ebben a fejezetben egy táblázatban összegezzük a speciális gráfosztályokról az előző fejezetekben tárgyaltakat.

	Az intervallum élszínezhetőség feltétele	ω	W	Megjegyzés
reguláris	$\chi'(G) = \Delta(G)$	$\omega(G) = \Delta(G)$		Minden $\omega(G)$ és $W(G)$ közti t-re t színnel is intervallum t-élszínezhető.
fák	mindig	$\omega(D) = \Delta(D)$	$W(D) = M(D)$	Minden $\omega(D)$ és $W(D)$ közti t-re t színnel is intervallum t-élszínezhető.
teljes páros gráfok	mindig	$\omega(K_{m,n}) = m + n - \sigma(m, n)$	$W(K_{m,n}) = m + n - 1$	Minden $\omega(K_{m,n})$ és $W(K_{m,n})$ közti t-re t színnel is intervallum t-élszínezhető.
teljes gráfok	páros csúcsszám	$\omega(K_{2n}) = 2n - 1$	$W(K_{2n}) \geq 4n - 2 - p - q$, ahol $n = p \cdot 2^q$	
kockák	mindig	$\omega(Q_n) = n$	$W(Q_n) = \frac{n(n+1)}{2}$	

5. fejezet

Ciklikus megközelítés

Ebben a fejezetben az intervallum élszínezés problémájának egy általánosabb, ciklikus megközelítéséről lesz szó [12] cikk alapján.

G gráf egy élszínezése az $1, \ldots, t$ színekkel **intervallum ciklikus t-élszínezés**, ha az $1, \ldots, t$ színek mindegyikét használjuk, és minden v csúcs esetén v szomszédos élei $d(v)$ egymást követő színnel vannak színezve modulo t. Egy gráf egy élszínezése **intervallum ciklikus élszínezés**, ha van olyan t pozitív egész, melyre intervallum ciklikus t-élszínezés. Az intervallum ciklikus élszínezhető gráfok halmazát jelöljük $\mathfrak{N}_c$-vel. Legyen G intervallum ciklikus élszínezhető, ekkor jelölje $\omega_c(G)$ illetve $W_c(G)$ a legkisebb illetve a legnagyobb t számot, melyre létezik intervallum ciklikus t-élszínezése G-nek.

5.1. A ciklikus és a nem ciklikus megközelítés kapcsolata

Az első természetes kérdés az lehet, hogy milyen kapcsolat áll fenn az intervallum élszínezhetőség és az intervallum ciklikus élszínezhetőség között. Az intervallum ciklikus élszínezhetőség könnyen látható, hogy gyengébb feltételt támaszt egy gráf felé. Ha egy gráf intervallum élszínezhető, akkor intervallum ciklikus élszínezhető is, így következik az alábbi tétel.

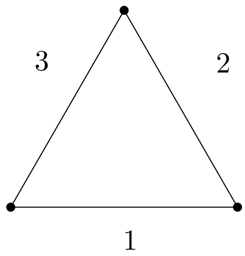
34. Tétel. $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}_c$.

Most megmutatjuk, hogy az intervallum élszínezhetőség valóban erősebb feltétel, azaz $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}_c$. Ehhez elég mutatnunk egy olyan gráfot, amely nem intervallum élszínezhető, de intervallum ciklikus élszínezhető. C_3 (5.1 ábra) ilyen, hiszen láthatóan nem intervallum élszínezhető, és 10. tétel (i) része alapján sem az, viszont az ábrán látható módon intervallum ciklikus élszínezhető.

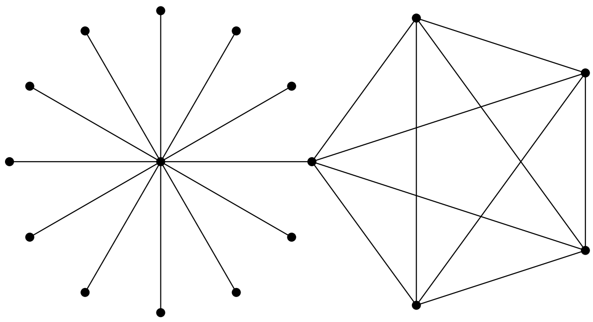
35. Következmény. $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}_c$.

Megjegyezzük, hogy bármely pozitív egész k esetén C_{2k+1} jó példa, ami a következő fejezetben a reguláris gráfokról tárgyaltak speciális eseteként adódik. Természetesen nem minden gráf intervallum ciklikus élszínezhető. A következő gráf (5.2 ábra) például nem az.

Ez a jelenleg ismert legkisebb, nem intervallum ciklikus élszínezhető gráf.



5.1. ábra. Példa nem intervallum élszínezhető gráf intervallum ciklikus élszínezésére



5.2. ábra. Példa nem intervallum ciklus élszínezhető gráfra

5.2. A ciklikus megközelítés speciális gráfosztályok esetén

Először foglalkozzunk a reguláris gráfokkal. Ennek érdekében ismertetjük az alábbi tételt.

36. Tétel (Vizing). *[13] Minden G gráf esetén $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

37. Tétel. *Minden G reguláris gráf intervallum ciklikus élszínezhető.*

Bizonyítás. Legyen G reguláris. Ha $\chi'(G) = \Delta(G)$, akkor 10. tétel (i) része alapján intervallum élszínezhető és így intervallum ciklikus élszínezhető is.

Ha pedig $\chi'(G) = \Delta(G)+1$, akkor ha egy ilyen, $\Delta(G)+1$ színű színezést tekintünk, akkor az biztosan olyan lesz, hogy minden csúcs szomszédjai az $1, \dots, \Delta(G) + 1$ színek közül $\Delta(G)$ darab különböző színnel lesznek színezve. Ez azt jelenti, hogy ezek a színek egy olyan halmazt alkotnak, amely az $\{1, \dots, \Delta(G) + 1\}$ halmazból egy elem elvételével adódik, amely intervallum modulo $\Delta(G) + 1$. Így G intervallum ciklikus élszínezhető $\Delta(G) + 1$ színnel. $\square$

Teljes gráfok esetén egyrészt 27. tételből triviálisan adódik, hogy $W_c(K_{2n}) \geq 4n - 2 - p - q$, ahol $n = p2^q$. Másrészt K_{2n+1} nem intervallum élszínezhető, viszont intervallum ciklikus élszínezhető, mivel reguláris. $W_c(K_{2n+1})$-re a következő tétel ad alsó becslést.

38. Tétel. *Minden n pozitív természetes szám esetén $W_c(K_{2n+1}) \geq 3n$.*

Legyen $l, m, n \in \mathbb{N}^+$, $U = \{u_1, \ldots, u_l\}$, $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$, és $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$. Ekkor legyen $K_{l,m,n}$ az a gráf, melyre $V(K_{l,m,n}) = U \cup V \cup W$ és $E(K_{l,m,n}) = \{(u_i, v_j) | 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m\} \cup \{(u_i, w_k) | 1 \leq i \leq l, 1 \leq k \leq n\} \cup \{(v_j, w_k) | 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n\}$. Ez a páros gráfok megfelelőleje 2 helyett 3 pontosztály esetén. Ezeken a gráfokon vizsgálható az intervallum ciklikus élszínezhetőség.

Tetszőleges l, m, n pozitív természetes számok esetén konstruálható intervallum ciklikus $(l+m+n)$-élszínezés $K_{l,m,n}$-en, amelyből következik az alábbi tétel.

39. Tétel. *Tetszőleges l, m, n pozitív természetes számok esetén $K_{l,m,n}$ intervallum ciklikus élszínezhető, és $\omega_c(K_{l,m,n}) \leq (l + m + n) \leq W_c(K_{l,m,n})$.*

Szintén megmutattuk, hogy minden pozitív természetes szám esetén Q_n intervallum élszínezhető, így természetesen intervallum ciklikus élszínezhető is. Megmutattuk 33. következményben, hogy $W(Q_n) = \frac{n(n+1)}{2}$. A ciklikus esetben $W_c(Q_n)$-re a következő alsóbecslés adható.

40. Tétel. *Tetszőleges $n \geq 2$ természetes szám esetén $W_c(Q_n) \geq 4(n - 1)$.*

Páros gráfok esetén pedig a következő felsőbecslés adható.

41. Tétel. *Legyen G összefüggő páros gráf. Ha $G \in \mathfrak{N}_c$, akkor $W_c(G) \leq 1 + 2 \cdot diam(G)(\Delta(G) + 1)$.*

5.3. Általános becslések, tételek ciklikus megközelítés esetén

Ebben a részben általánosabb G esetén ismertetünk becsléseket $W_c(G)$-re. Sokszor a tételek feltételrendszere egy-egy 3. fejezetbeli tételével azonos, vagy ahhoz hasonló.

42. Tétel. *Legyen G összefüggő, háromszögmentes gráf legalább két csúccsal. Ha $G \in \mathfrak{N}_c$, akkor $W_c(G) \leq |V(G)| + \Delta(G) - 2$.*

43. Tétel. *Legyen G összefüggő gráf legalább két csúccsal. Ha $G \in \mathfrak{N}_c$, akkor $W_c(G) \leq 2|V(G)| + \Delta(G) - 4$. Továbbá ha legalább 3 csúcsú, akkor $W_c(G) \leq 2|V(G)| + \Delta(G) - 5$.*

44. Következmény. Legyen G összefüggő gráf legalább két csúccsal. Ha $G \in \mathfrak{N}_c$, akkor $W_c(G) \leq 3|V(G)| - 5$. Továbbá ha legalább 3 csúcsú, akkor $W_c(G) \leq 3|V(G)| - 6$.

Most kimondunk egy egzisztencia tételt.

45. Tétel. *Minden d és n egész esetén, melyekre $d \geq 2$ és $n \geq 3$, létezik olyan G összefüggő gráf, melyre $\Delta(G) = d$, $diam(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$, $G \in \mathfrak{N}_c$ és $W_c(G) = n(d - 1)$.*

6. fejezet

Sejtések, nyitott kérdések

A dolgozat zárásaként összegezzük a témában lévő nyitott kérdéseket, sejtéseket.

6.1. (3,4)-bireguláris páros gráfok intervallum 6-élszínezhetősége

A 4 fejezet 4.4 szakaszában kimondtuk a 22. sejtést.

46. Sejtés. *Minden G (3,4)-bireguláris páros gráfnak van megfelelő út-faktora.*

Ebből a sejtésből következne, hogy minden (3,4)-bireguláris páros gráf intervallum 6-élszínezhető.

6.2. $W(G)$ teljes gráfok esetén

A 4 fejezet 4.5 szakaszában kimondtuk az 28. sejtést.

47. Sejtés. *Legyen $n = p \cdot 2^q$, ahol p páratlan, q pedig nem negatív egész. Ekkor $W(K_{2n}) = 4n-2-p-q$.*

Biztató lehet, hogy a [10] cikkben megfogalmazott másik, n-kockákra megfogalmazott hasonló sejtést már sikerült igazolni.

Ezen kívül teljes gráfok esetén $W(G)$-vel kapcsolatban van egy másik sejtés is, amely ha igaznak bizonyulna, akkor egyfajta monotonitást jelentene.

48. Sejtés. $W(K_{2n+2}) \geq W(K_{2n})$.

A kérdésről eddig annyit tudunk biztosan, hogy [9] cikk alapján $n = 17$-ig igaz az állítás. Ebben a cikkben kisebb gráfokra sikerült meghatározni $W(K_{2n})$ értékét, vagy alsó és felső becslést adni rá.

Irodalomjegyzék

[1] A. Asratian and R. Kamalian. Interval colorings of edges of a multigraph. 2014. 4, 5, 10

[2] A. S. Asratian, C. J. Casselgren, J. Vandenbussche, and D. B. West. Proper path-factors and interval edge-coloring of (3, 4)-biregular bigraphs. *Journal of Graph Theory*, 61(2):88–97, 2009. 10, 18

[3] M. Axenovich. On interval colorings of planar graphs. *Congressus Numerantium*, pages 77–94, 2002. 9

[4] K. Giaro, M. Kubale, and M. Małafiejski. Consecutive colorings of the edges of general graphs. *Discrete Mathematics*, 236(1):131–143, 2001. 9

[5] R. Kamalian. Interval edge-colorings of graphs. *Doctoral dissertation, The Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Academy of Sciences of USSR, Novosibirsk*, 1:990, 1990. 9

[6] R. Kamalian. Interval colorings of complete bipartite graphs and trees. 2013. 10, 11, 14

[7] R. R. Kamalian and P. A. Petrosyan. A note on interval edge-colorings of graphs. 2010. 8, 10

[8] R. M. Karp. *Reducibility among combinatorial problems.* Springer, 1972. 11

[9] H. H. Khachatrian and P. A. Petrosyan. Interval edge-colorings of complete graphs. 2014. 31

[10] P. A. Petrosyan. Interval edge-colorings of complete graphs and n-dimensional cubes. *Discrete Mathematics*, 310(10):1580–1587, 2010. 9, 10, 21, 23, 31

[11] P. A. Petrosyan, H. H. Khachatrian, and H. G. Tananyan. Interval edge-colorings of cartesian products of graphs i. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 33(3):613–632, 2013. 10, 23, 25

[12] P. A. Petrosyan and S. T. Mkhitaryan. Interval cyclic edge-colorings of graphs. 2014. 28

[13] V. G. Vizing. On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Diskret. Analiz*, 3(7):25–30, 1964. 29

[14] V. G. Vizing. The chromatic class of a multigraph. *Cybernetics and Systems Analysis*, 1(3):32–41, 1965. 21