Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Török Anikó

Dinamikai rendszerek periodikus megoldásai

BSc szakdolgozat

Témavezető:

Dr. Kovács Sándor

Numerikus Analízis Tanszék

Budapest, 2016

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Dr. Kovács Sándornak a rengeteg segítséget, amellyel támogatta a szakdolgazatom elkészülését.

Köszönettel tartozom továbbá szüleimnek és barátaimnak, hogy végig mellettem álltak, bíztattak és támogattak.

Budapest, 2016. május 27.

Török Anikó

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **4**

2. Alapvető ismeretek **5**

2.1. Általános fogalmak, jelölések 5

2.2. Periodikus pontok 5

3. Elemi periodikus megoldások **8**

4. Floquet elmélet **12**

4.1. Lineáris rendszerek konstans együtthatókkal 12

4.2. Homogén lineáris rendszerek periodikus együtthatókkal 13

5. Gerjesztett lineáris rezgések **23**

6. A Floquet elméletről más megközelítésben **27**

7. Stabilitás **30**

8. Példák és alkalmazások **32**

8.1. Hill egyenlet 32

8.2. Mathieu egyenlet 37

8.3. Egy további példa 40

9. Fixponttételek **42**

10. Differenciaegyenletek **45**

1. Bevezetés

A természeti jelenségek között számos periodikus mozgás figyelhető meg, például a Föld keringése a Nap körül, az óraingа mozgása vagy egy motor működése. Periodikusság fedezhető fel továbbá biológiai folyamatokban is, mint ahogy a légzésben, keringésben és a szívverésben. Ezen vizsgált mozgások jelentős része az idő függvényében periodikus.

Ha a jelenség leírható paraméterekkel, úgynevezett fázis-koordinátákkal, akkor a jelenség periodikussága leírható egy fázistérbeli zárt görbével, mivel a pálya egy meghatározott idő múlva visszatér a kezdőpontjába, és ezt követve halad tovább.

A periodikus mozgást általában valamely természeti (mechanikai, fizikai vagy biológiai) törvény írja le, amely a legtöbbször differenciálegyenletek formájában írható fel.

A differenciálegyenletek periodikus megoldásaval foglalkozó témakör a Floquet-elmélet, amely a 2. és 3. fejezetben taglalt általános eredmények után a 4., 5. és 6. fejezetben kerül kifejtésre.

A 7. fejezetben leírt általános stabilitási fogalmak és tételek után, ezeket felhasználva a 8. fejezetben szó esik néhány lényegi alkalmazásról.

A 9. fejezetben kitérünk a fixponttételek alkalmazására a periodikus megoldások témakörében, majd végül, a 10. fejezetben a diszkrét halmazon értelmezett differencia-egyenletekre.

2. Alapvető ismeretek

2.1. Általános fogalmak, jelölések

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^{1+n}$ nyílt és összefüggő, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, folytonos. Tekintsünk a következő közönséges differenciálegyenletet:

$$y' = f \circ (\mathrm{id}, y). \tag{2.1}$$

Ennek az egyenletnek az $y(\tau) = \xi$ kezdeti feltételt kielégítő teljes megoldását jelölje $\varphi(\cdot; \tau, \xi)$, a megoldás értelmezési tartományát pedig $I(\tau, \xi)$. Ha $\tau = 0$, azaz a kezdeti feltétel $\varphi(0) = \xi$, akkor jelöljük ezeket $\varphi(\cdot; \xi)$-vel és $I(\xi)$-vel.

2.2. Periodikus pontok

Tekintsük most a következő autonóm differenciálegyenlet.

$$y' = f \circ y, \tag{2.2}$$

ahol $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ folytonos, és a kezdeti feltétel legyen $y(0) = \xi$.

A következő definíció és állítások erre a rendszerre vonatkoznak.

2.1. Definíció. *Egy $x_* \in \Omega$ pontot **egyensúlyi pont**nak nevezünk, ha*

$$\varphi(t; x_*) = x_*$$

minden $t \in I(x_*)$-ra.

2.2. Definíció. *Egy $x_1 \in \Omega$ pontot **periodikus pont**nak hívunk, ha létezik $T > 0$, úgy hogy*

$$\varphi(t + T; x_1) = \varphi(t; x_1)$$

minden $t \in I(x_1)$-re. A T számot x_1 pont periódusának nevezzük.

Nyilvánvalóan látszik, hogy minden egyensúlyi pont egyben periodikus pont is, hiszen ekkor $\varphi(t; x_*) = x_*$ minden $t \in I(x^*)$-ra, azaz $\varphi(t+T; x_*) = x_*$, tehát x_* periodikus pont is.

Ezen definíciókat felhasználva belátható az alábbi tétel (vö. [2]).

2.1. Tétel.

1. *Ha* $x_1 \in \Omega$ *periodikus, akkor* $[0, \infty) \subset I(x_1)$.

2. $x_1 \in \Omega$ *pontosan akkor periodikus, ha létezik* $T > 0$, *úgy hogy* $\varphi(T; x_1) = x_1$.

Bizonyítás.

1. Ha $x_1 \in \Omega$ periodikus, akkor valamely $T > 0$-ra, akkor $\varphi(T; x_1) = \varphi(0; x_1)$, tehát $T \in I(x_1)$. Ezáltal kT is $I(x_1)$-ben van minden $k \in \mathbb{N}$-re. Azaz $[0, kT) \subset I(x_1)$ minden $k \in \mathbb{N}$-re, tehát $[0, \infty) \subset I(x_1)$.

2. Ha $x_1 \in \Omega$ periodikus, akkor $\varphi(T; x_1) = \varphi(0; x_1) = x_1$. Legyen most $t \in I(x_1)$. Tudjuk, hogy
$$\varphi(t + T; x_1) = \varphi(t; x(T; x_1)).$$
Ebbe behelyettesítve az előzőt $\varphi(t + T; x_1) = x_1$ adódik, tehát x_1 T-periodikus pont. ■

2.2. Tétel. *Legyen* $x_1 \in \Omega$ *periodikus pont. Ekkor egyenértékűek az alábbi állítások.*

1. x_1 *egyensúlyi pont.*

2. $\inf\{T > 0 | \varphi(t + T; x_1) = x_1 \ \forall t \in I(x_1)\} = 0$.

Bizonyítás.

1. $\Rightarrow$ 2.

Ekkor $\varphi(t; x_1) = x_1$ minden $t \in \mathbb{R}$-re, azaz
$$\inf\{T > 0 | \varphi(t + T; x_1) = x_1 \ \forall t \in I(x_1)\} = 0.$$

2. $\Rightarrow$ 1.

Ha 2.-t igaznak tekintjük, és x_1 periodikus pont, akkor létezik egy (T_n) sorozat, melyre $\lim(T_n) = 0$ és
$$T_n > 0, \qquad \varphi(t + T_n, x_1) = \varphi(t, x_1) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

minden $t \in I(x_1)$-re, és minden $n \in \mathbb{N}$-re. Most az $\varphi(t) :\equiv \varphi(t, x_1)$ jelölést használva látható hogy

$$\lim_{T_n \to 0} \frac{\varphi(t + T_n) - \varphi(t)}{T_n} = 0,$$

azaz

$$\varphi'(t) = 0.$$

Ebből pedig

$$f(x_1) = f(\varphi(t)) = \varphi'(t) = 0$$

következik minden $t \in [0, \infty)$-re, tehát x_1 egyensúlyi pont. ■

Továbbá látható, hogy egy $x_1 \in \Omega$ periodikus pont pontosan akkor nem egyensúlyi pont, ha létezik T^*, melyre

$$T^* = \inf\{T > 0 | \varphi(t + T; x_1) = \varphi(t),\ t \in [0, \infty)\} > 0.$$

Az előzőek tiriviális következménye a

2.3. Tétel. *Legyen $x_1 \in \Omega$. Ekkor az alábbi állítások közül pontosan az egyik igaz.*

1. *x_1 egyensúlyi pont.*

2. *x_1 periodikus pont, ahol a minimális periódus pozitív.*

3. *$\varphi(t; x_1) \neq x_1$ minden $t \in I(x_1)$-re.*

Bizonyítás. Nyilvánvalóan 3. pontosan akkor nem igaz, ha 1. vagy 2. igen. Az előző tétel pedig pont azt mondja ki, hogy 1. és 2. nem teljesülhet egyszerre. ■

3. Elemi periodikus megoldások

3.4. Tétel. *Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos, periodikus függvény, továbbá $k \in \mathbb{R}$, akkor az*

$$y' + ky = f \tag{3.3}$$

elsőrendű differenciálegyenletnek van periodikus megoldása.

Bizonyítás. Mivel a (3.3) egyenlet lineáris, ezért bármely $c \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\varphi(t) := e^{-kt}\left(\int\limits_0^t f(s)e^{ks}\,\mathrm{d}s + c\right) \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{3.4}$$

függvény megoldása az (3.3) egyenletnek. Ha az f függvény T-periodikus, azaz alkalmas $T > 0$ esetén

$$f(t+T) = f(t) \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

akkor érdemes először megvizsgálni, hogy van-e olyan $c \in \mathbb{R}$, amely esetén a (3.4)-beli megoldás is T-periodikus.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy a (3.4)-beli megoldás T-periodikus volta csak a

$$c := -\frac{e^{-kT}}{e^{-kT}-1}\int\limits_0^T f(s)e^{ks}\,\mathrm{d}s$$

esetben állhat fenn. Valóban, ha (3.4)-beli megoldás T-periodikus, azaz

$$e^{-k(t+T)}\left(\int\limits_0^{t+T} f(s)e^{ks}\,\mathrm{d}s + c\right) = e^{-kt}\left(\int\limits_0^t f(s)e^{ks}\,\mathrm{d}s + c\right) \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$e^{-kT}\left(\int\limits_0^{t+T} f(s)e^{ks}\,\mathrm{d}s + c\right) = \int\limits_0^t f(s)e^{ks}\,\mathrm{d}s + c \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

ill.

$$\begin{aligned} c(e^{-kT}-1) &= \int\limits_0^t f(s)e^{ks}\,\mathrm{d}s - e^{kT}\int\limits_0^{t+T} f(s)e^{ks}\,\mathrm{d}s = \\ &= \int\limits_0^t f(s)e^{ks}\,\mathrm{d}s - e^{-kT}\left\{\int\limits_0^T f(s)e^{ks}\,\mathrm{d}s + \int\limits_T^{T+t} f(s)e^{ks}\,\mathrm{d}s\right\}. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy az f függvény T-periodikus, a $\tau := t - T$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$f(s)e^{ks} = f(\tau + T)e^{k(\tau+T)} = f(\tau)e^{k\tau}e^{kT} \qquad (s \in [T, T+t]),$$

azaz

$$\int_T^{T+t} f(s)e^{ks}\,\mathrm{d}s = e^{kT}\int_0^t f(\tau)e^{k\tau}\,\mathrm{d}\tau.$$

Ennélfogva

$$\begin{aligned} c(e^{-kT} - 1) &= \int_0^t f(s)e^{ks}\,\mathrm{d}s - e^{-kT}\int_0^T f(s)e^{ks}\,\mathrm{d}s - \int_0^t f(s)e^{ks}\,\mathrm{d}s = \\ &= -e^{-kT}\int_0^T f(s)e^{ks}\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

ami azzal egyenértékű, hogy

$$c = -\frac{e^{-kT}}{e^{-kT} - 1}\int_0^T f(s)e^{ks}\,\mathrm{d}s.$$

2. lépés. Megmutatjuk, hogy az iménti c esetén a (3.4)-beli megoldás, azaz a

$$\varphi(t) := e^{-kt}\left(\int_0^t f(s)e^{ks}\,\mathrm{d}s - \frac{e^{-kT}}{e^{-kT} - 1}\int_0^T f(s)e^{ks}\,\mathrm{d}s\right) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvény T-periodikus. Valóban, bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} \varphi(t+T) &= e^{-k(t+T)}\left(\int_0^{t+T} f(s)e^{ks}\,\mathrm{d}s - \frac{e^{-kT}}{e^{-kT} - 1}\int_0^T f(s)e^{ks}\,\mathrm{d}s\right) = \\ &= e^{-kT}e^{-kt}\left(\int_0^T f(s)e^{ks}\,\mathrm{d}s + \int_T^{t+T} f(s)e^{ks}\,\mathrm{d}s - \right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{e^{-kT}}{e^{-kT}-1}\int\limits_0^T f(s)e^{ks}\,\mathrm{d}s\Bigg) = e^{-kT}e^{-kt}\Bigg(\int\limits_0^T f(t)e^{kt}\,\mathrm{d}t+ \\
&\quad +e^{kT}\int\limits_0^t f(\tau)e^{k\tau}\,\mathrm{d}\tau - \frac{e^{-kT}}{e^{-kT}-1}\int\limits_0^T f(s)e^{ks}\,\mathrm{d}s\Bigg) = \\
&= e^{-kT}e^{-kt}\left(e^{kT}\int\limits_0^t f(\tau)e^{k\tau}\,\mathrm{d}\tau + \left\{1-\frac{e^{-kT}}{e^{-kT}-1}\right\}\int\limits_0^T f(s)e^{ks}\,\mathrm{d}s\right) = \\
&= e^{-kT}e^{-kt}\left(e^{kT}\int\limits_0^t f(\tau)e^{k\tau}\,\mathrm{d}\tau - \frac{1}{e^{-kT}-1}\int\limits_0^T f(s)e^{ks}\,\mathrm{d}s\right) = \\
&= e^{-kt}\left(\int\limits_0^t f(\tau)e^{k\tau}\,\mathrm{d}\tau - \frac{e^{-kT}}{e^{-kT}-1}\int\limits_0^T f(s)e^{ks}\,\mathrm{d}s\right) = \\
&= \varphi(t). \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

3.5. Tétel. *Ha $a, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos, T-periodikus függvény, akkor az*

$$y' + ay = f \tag{3.5}$$

elsőrendű differenciálegyenlet minden olyan φ megoldása T-periodikus, amelyre

$$\varphi(0) = \varphi(T)$$

teljesül.

Bizonyítás. Az egyértelműség következtében, ha φ és ψ az (3.5) egyenlet olyan megoldása, amelyre $\varphi(0) = \psi(0)$, akkor $\varphi = \psi$. Mivel φ megoldása az (3.5) egyenletnek, ezért

$$\varphi'(t+T) + a(t+T)\varphi(t+T) = f(t+T),$$

ahonnan az a, ill. az f függvény T-periodikussága miatt

$$\varphi'(t+T) + a(t)\varphi(t+T) = f(t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

következik. Ha most

$$\psi(t) := \varphi(t+T) \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\psi'(t) + a(t)\psi(t) = f(t) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Ha

$$\varphi(T) = \varphi(0), \quad \text{akkor} \quad \psi(0) = \varphi(0).$$

Ezért

$$\psi(t) = \varphi(t) \quad (t \in \mathbb{R}), \quad \text{azaz} \quad \varphi(t+T) = \varphi(t) \quad (t \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

4. Floquet elmélet

Ebben a fejezetben lineáris rendszerek periodikus megoldásaira fogunk kitérni. Lineáris rendszerekkel lehet modellezni számos fizikai és mechanikai problémát, például a rugalmasság, hőterjedés, hullámterjedés vagy az elektromágneses jelenségek kérdésében (vö. [4]).

4.1. Lineáris rendszerek konstans együtthatókkal

Tekintsük a következő egyenletet, A konstans együtthatómátrixszal, és egy b úgynevezett periodikus gerjesztéssel:

$$y' = Ay + b, \tag{4.6}$$

ahol A egy $n \times n$-es konstans mátrix, $b \in \mathfrak{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ pedig egy T-periodikus függvény, azaz $b(t+T) = b(t)$, ahol $t \in \mathbb{R}$. Ekkor megmutatható, hogy bármely megoldás

$$\varphi(t) = \exp(At)\varphi^0 + \int_0^t \exp(A(t-s))b(s)ds$$

alakú, ahol $\varphi^0 = \varphi(0)$.

Az (3.5.) tételből következik, hogy φ periodikus megoldása (4.6)-nak, akkor és csak akkor ha $\varphi(T) = \varphi(0)$. Tehát φ periodikusságához szükséges és elégséges feltétel:

$$\varphi(T) = \exp(AT)\varphi^0 + \int_0^T \exp(A(T-s))b(s)ds = \varphi^0. \tag{4.7}$$

Könnyen bizonyítható az alábbi tétel.

4.6. Tétel. *Ha a* (4.6)*-hoz tartozó homogén rendszernek nincs periodikus megoldása a triviális (azonosan* 0*) megoldástól eltekintve, akkor* (4.6)*-nak pontosan egy megoldása van.*

Bizonyítás. Vegyük a (4.7) periodikussági feltételt. Ezt beszorozva $\exp(-AT)$-vel, majd átrendezve, a következőt kapjuk.

$$(\exp(-AT) - I)\varphi^0 = \int_0^T \exp(-As)b(s)ds. \tag{4.8}$$

(4.7)-nek pontosan egy φ^0 megoldása van, ha

$$\det(\exp(-AT) - I) \neq 0.$$

Az együtthatómátrixot $\exp(AT)$-vel beszorozva, és a determinánsok szorzástételét alkalmazva adódik, hogy

$$\det(I - \exp(AT)) \neq 0.$$

Tudjuk, hogy $\det(I - \exp(AT)) = 0$ pontosan akkor, ha $\exp(AT)$ mátrixnak az 1 szám egy sajátértéke.

Felhasználva a tételt, hogy ha egy adott M mátrix sajátértékei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, és ezek f értelmezési tartományában vannak, akkor $f(M)$ sajátértékei $f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)$, könnyen adódik, hogy ez csak akkor eshet meg, ha $\frac{2k\pi i}{T}$ sajátértéke A-nak, valamely $k = 0, 1, 2, \ldots$-ra.

Belátható, hogy a homogén rendszernek pontosan akkor van a triviálistól eltérő T-periodikus megoldása, ha $\frac{2k\pi i}{T}$ sajátértéke A-nak. Tehát ha a homogén rendszernek nincsen ilyen megoldása, (4.8) egyértelműen megoldható, azaz (4.6)-nak pontosan egy T-periodikus megoldása van. $\blacksquare$

4.2. Homogén lineáris rendszerek periodikus együtthatókkal

Vegyük az alábbi általános alakban felírt egyenletet.

$$x' = f \circ (id, x), \tag{4.9}$$

ahol $f, f' \in \mathfrak{C}^0(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathbb{R}^n)$, Ω egy nyílt, összefüggő részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek és f periodikus az első változójában $T > 0$ peridódussal, azaz

$$f(t + T, x) = f(t, x), \qquad t \in \mathbb{R}_+, x \in \Omega.$$

Erre vonatkozóan könnyen belátható a következő tétel.

4.7. Tétel. *Az (4.9) egyenlet egy $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \Omega$ megoldása pontosan akkor T-periodikus, ha létezik egy $t_0 \in \mathbb{R}_+$, melyre $\varphi(t_0 + T) = \varphi(t_0)$.*

Bizonyítás. A szükségesség nyilvánvalóan látszik, az elégségességhez pedig elég látni, hogy $\Phi(t) :\equiv \varphi(t+t_0)$ is megoldása (4.9)-nek:

$$\Phi'(t) \equiv \varphi'(t+T) = f(t+T, \varphi(t+T)) = f(t, \Phi(t)),$$

mivel f periodikus T-ben. Továbbá, mivel $\Phi(t_0) = \varphi(t_0+T) = \varphi(t_0)$, a megoldások egyértelműgése miatt $\Phi(t) = \varphi(t)$, azaz $\varphi(t+T) = \varphi(t), t \in \mathbb{R}_+$. ■

Most tekintsük (4.9) egyenlet egy speciális (lineáris) esetét:

$$y' = Ay, \tag{4.10}$$

ahol $A \in \mathfrak{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{n\times n})$, és periodikus $T > 0$ periódussal, azaz $A(t+T) = A(t)$, ahol $t \in \mathbb{R}_+$. Feltételezzük, hogy T a legkisebb pozitív periódus.

Legyen Φ ennek a rendszernek egy alapmátrixa. Az előző bizonyításhoz hasonlóan ebből következik, hogy $\Phi(\cdot + T)$ is alapmátrixa a feladatnak. Emiatt tehát létezik egy C konstans mátrix, melyre

$$\Phi(\cdot + T)C = \Phi, \tag{4.11}$$

vagyis

$$C = \Phi^{-1}\Phi(\cdot + T) = \Phi^{-1}(0)\Phi(T).$$

Ha feltesszük, hogy Φ az az alapmátrix, amely $t = 0$-ban az egységmátrix, melyet ezentúl I-vel jelölünk, akkor ezáltal $\Phi^{-1}(0) = I$. Ebből pedig az következik, hogy $C = \Phi(T)$. Ezt visszahelyettesítve (4.11)-be, megkapjuk hogy $\Phi(\cdot + T) = \Phi\Phi(T)$.

Vegyük észre, hogy C mátrix függ az alapmátrix választásától, tehát ha az alapmátrixunk $\tilde{\Phi}$, akkor a $\tilde{C}$-t definiáló egyenlet $\tilde{\Phi}(\cdot + T) = \tilde{\Phi}C$. Mivel tudjuk, hogy létezik egy reguláris U mátrix, melyre $\tilde{\Phi} = \Phi U$, ezért ezt behelyettesítve

$$\tilde{C} = \tilde{\Phi}^{-1}(0)\tilde{\Phi}(T) = U^{-1}\Phi^{-1}(0)\Phi(T)U = U^{-1}CU.$$

Tehát C hasonló $\tilde{C}$-hoz, azaz C mátrix csak hasonlóság erejéig függ az alapmátrix megválasztásától.

C sajátértékeit nevezzük az (4.10) rendszer **karakterisztikus multiplikátor**ainak, míg C-t **principális mátrix**nak. Mivel Φ reguláris mátrix, a 0 nem lehet karakterisztikus multiplikátor.

4.8. Tétel. *Ha* λ (4.10) *egy karakterisztikus multiplikátora, akkor létezik egy nemtriviális* φ *megoldás, melyre* $\varphi(\cdot+T)=\lambda\varphi$*, visszafele pedig, ha* (4.10) *egy* φ *nemtriviális megoldására* $\varphi(T)=\lambda\varphi(0)$*, akkor* λ *egy karakterisztikus multiplikátor, melyhez tartozó sajátvektor* $\varphi(0)$*.*

Bizonyítás. Legyen λ a karakterisztikus multiplikátor, és $s\neq 0$ a hozzá tartozó sajátvektor. Vegyük (4.10) azon φ megoldását, melyre $\varphi(0)=s$. Tehát $\varphi=\Phi s$, és mivel $\Phi(\cdot+T)=\Phi\Phi(T)=\Phi C$, ezért

$$\varphi(\cdot+T)=\Phi(\cdot+T)s=\Phi Cs=\Phi\lambda s=\lambda\varphi.$$

A másik irányhoz pedig felhasználjuk, hogy $\varphi(T)=\Phi(T)\varphi(0)$. Tehát a feltétel szerint $\Phi(T)\varphi(0)=\lambda\varphi(0)$, azaz $C\varphi(0)=\lambda\varphi(0)$, ami azt jelenti, hogy λ karakterisztikus multiplikátor és a hozzá tartozó sajátvektor $\varphi(0)$. ■

4.9. Tétel. *A* (4.10) *rendszernek létezik nemtriviális* T*-periodikus megoldása pontosan akkor, ha az* 1 *szám karakterisztikus multiplikátora. Továbbá,* (4.10) *rendszernek létezik nemtriviális* $2T$*-periodikus megoldása pontosan akkor, ha a* -1 *szám karakterisztikus multiplikátora.*

Bizonyítás. A tétel első részéhez segítséget nyújt a korábban belátott (4.8.)-es tétel, mely szerint ha $\lambda=1$, akkor létezik egy nemtriviális φ megoldás, melyre $\varphi(\cdot+T)=\varphi$. Visszafele, ha φ^1 egy nemtriviális T-periodikus megoldás, akkor nyilván $\varphi^1(T)=\varphi(0)$, tehát szintén (4.8.) miatt $\lambda=1$.

Most nézzük a tétel második részét. Ha $\lambda=-1$ karakterisztikus multiplikátor, akkor $\varphi((\cdot+T)+T)=-\varphi(\cdot+T)=\varphi$, tehát φ $2T$-periodikus.

Visszafele, ha φ^2 egy nemtriviális $2T$-periodikus megoldás (de nem T-periodikus), akkor a korábbi megállapítások szerint

$$\varphi^2(2T)=C\varphi(T)=C^2\varphi^2(0)=\varphi^2(0).$$

Ezáltal C^2 sajátértéke 1, és a hozzátartozó sajátvektor $\varphi^2(0)\neq 0$. Emiatt 1 és -1 közül legalább az egyik karakterisztikus multiplikátor.

Látszik, hogy $(C^2 - I)\varphi^2(0) = (C + I)(C - I)\varphi^2(0) = 0$. Ha -1 nem lenne karakterisztikus multiplikátor, akkor $C + I$ reguláris lenne, tehát a fenti egyenlőség ekvivalens lenne $(C - I)\varphi^2(0) = 0$-val, ám ekkor $\varphi^2(T) = C\varphi^2(0) = \varphi^2(0)$, ami azt jelentené, hogy φ^2 T-periodikus, ami ellentétben áll a feltevésünkkel, tehát $\lambda = -1$. ■

Nézzük most a Floquet elmélet főtételét.

4.10. Tétel. (Floquet) *A* (4.10) *rendszer* Φ *alapmátrixa felírható*

$$\Phi = P\exp(B\cdot)$$

alakban, ahol $P \in \mathfrak{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{n\times n})$ *egy reguláris,* T*-periodikus mátrix, azaz minden* $t \in \mathbb{R}_+$*-ra* $P(t + T) = P(t)$*,* $P(0) = I$*, és* $B \in C^{n\times n}$ *konstans mátrix.*

Ha az (4.10)*-beli* A *valós, és* (4.10) *egy* $2T$*-periodikus rendszer, akkor*

$$\Phi = P_1\exp(B_1\cdot),$$

ahol $P_1 \in \mathfrak{C}^1(\mathbb{R}_+, R^{n\times n})$ *reguláris* $2T$*-periodikus mátrix, azaz minden* $t \in \mathbb{R}_+$*-ra* $P_1(t + 2T) = P_1(t)$*,* $P_1(0) = I$*, és* $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *konstans mátrix.*

Bizonyítás.

Legyen B az a mátrix, melyre

$$\exp(BT) = C = \Phi(T)$$

(bizonyítható, hogy ilyen létezik). Nyilvánvalóan

$$\Phi = \Phi\exp(-B\cdot)\exp(B\cdot).$$

Legyen ekkor $P = \Phi\exp(-B\cdot)$.

Ekkor adódik, hogy

$$\begin{aligned}
&P(\cdot + T) = \Phi(\cdot + T)\exp(-B(\cdot + T))\\
&= \Phi\Phi(T)\exp(-B\cdot)\exp(-BT)\\
&= \Phi\exp(BT)\exp(-B\cdot)\exp(-BT)\\
&= \Phi\exp(-B\cdot) = P.
\end{aligned}$$

Könnyen látszik, hogy az így megadott P teljesíti a tételbeli feltételeket.

Továbbá, ha A valós, akkor bizonyíthatóan létezik B_1 valós mátrix, melyre

$$\exp(B_1 2T) = C^2 = \Phi(T,0)\Phi(T,0) = \Phi(2T,0).$$

Legyen $P_1 = \Phi \exp(-B_1 \cdot)$.

Ekkor az előzőhöz hasonló átalakítást végezve (mindössze P helyett P_1-et, B helyett B_1-et, valamint T helyett $2T$-t írva) és figyelembe véve, hogy Φ valós mátrix, könnyen látható, hogy P_1 teljesíti a tétel feltételeit. ■

A fent definiált B mátrix sajátértékeit az $y' = Ay$ rendszer **karakterisztikus kitevő**inek nevezzük. Könnyen látható, hogy ha ν karakterisztikus kitevő, akkor $\lambda = \exp(\nu T)$ karakterisztikus multiplikátor, és visszafele is. De a karakterisztikus kitevők nincsenek egyértelműen meghatározva, hiszen maga B mátrix sincs.

Ha λ karakterisztikus multiplikátor, akkor a hozzá tartozó karakterisztikus kitevők alakja a következőképpen néz ki:

$$\nu_k = \frac{1}{T} ln\lambda = \frac{ln|\lambda|}{T} + \frac{i(arg\lambda + 2k\pi)}{T} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots),$$

ahol felhasználtuk a komplex számok logaritmusának tulajdonságát.

A fenti bizonyításban definiált B_1 sajátértekei szintén ilyen alakban állnak elő, ha λ befutja a karakterisztikus multiplikátorok halmazát. Ha ν^1 B_1 sajátértéke, akkor létezik egy λ karakterisztikus multiplikátor, melyre

$$\exp(\nu^1 2T) = \lambda^2.$$

Ezért

$$\nu^1 = \frac{1}{2T} ln\lambda^2 = \frac{1}{T} ln\lambda = \frac{ln|\lambda|}{T} + \frac{i(arg\lambda + 2k\pi)}{T} = \nu_k$$

valamely $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$-re.

A megadott képlet alapján meggondolható, hogy az, hogy egy karakterisztikus kitevő valós része negatív, ekvivalens azzal, hogy a hozzá tartozó karakterisztikus multiplikátor ebszolútértéke kisebb, mint 1.

Belátható, hogy Floquet tétele alapján minden ν karakterisztikus kitevőhöz tartozik egy φ, a homogén rendszerhez tartozó megoldás, melyre

$$\varphi = \exp(\nu \cdot) p$$

ahol p T-periodikus függvény.

Ugyanis B mátrix egy ν-höz tartozó sajátvektorát jelöljük s-sel. Tehát $Bs = \nu s$, és vegyük azt a φ megoldást, melyre $\varphi(0) = s$. Ekkor

$$\varphi = P\exp(B\cdot)\varphi(0) = P\exp(B\cdot)s = Pe^{\nu\cdot}s = e^{\nu\cdot}p$$

ahol $p = Ps$ láthatóan T-periodikus.

4.2.1. Egyszerűbb alakra transzformálás

A következőkben nézzünk néhány tételt a reducibilitásra vonatkozóan, azaz hogy minden homogén, periodikus együtthatós, lineáris rendszer áttranszformálható lineárisan egy lineáris rendszerré, konstans együtthatókkal.

4.11. Tétel. (Ljapunov I.) *Ha A valós mátrix, akkor létezik egy reguláris, T-periodikus $P \in \mathfrak{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{n\times n})$ mátrix, melyre $P(0) = I$, úgy hogy az $y = Pz$ transzformáció átviszi* (4.10)*-t egy homogén, lineáris rendszerbe konstans együtthatókkal.*

Továbbá, ha A valós mátrix, akkor létezik egy reguláris $2T$-periodikus $P \in \mathfrak{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{n\times n})$ mátrix, melyre $P(0) = I$, úgy hogy az $y = Pz$ transzformáció átviszi (4.10)*-t egy homogén, lineáris rendszerbe valós konstans együtthatókkal.*

Bizonyítás.

A tételben szereplő feltételeknek eleget tesz a

$$P = \Phi\exp(-B\cdot)$$

mátrix, ahol B az a mátrix melyre $\exp(BT) = C = \Phi(T)$. Helyettesítsünk be $y = Pz$-t (4.10)-be. Ekkor az alábbi egyenletet kapjuk z-re.

$$P'z + Pz' = APz,$$

azaz, átrendezve

$$z' = P^{-1}(AP - P')z.$$

A rendszer együtthatómátrixáról elemi átalakításokkal a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned}
&P^{-1}(AP - P') = \\
&= \exp(B\cdot)\Phi^{-1}(A\Phi \exp(-B\cdot) - \Phi' \exp(-B\cdot) + \Phi B \exp(-B\cdot)) \\
&= \exp(B\cdot)\Phi^{-1}(\Phi' \exp(-B\cdot) - \Phi' \exp(-B\cdot) + \Phi B \exp(-B\cdot)) \\
&= \exp(B\cdot)\Phi^{-1}\Phi B \exp(-B\cdot) = B.
\end{aligned}$$

Tehát z megoldása a

$$z' = Bz$$

homogén, lineáris, konstans együtthatós rendszernek.

A tétel második fele hasonlóan bizonyítható, P helyett P_1, B helyett B_1-t írva, a korábban definiáltak alapján. ■

4.12. Tétel. (Ljapunov II.) *Legyen $S \in \mathfrak{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{n\times n})$ reguláris és T-periodikus. Ekkor az $y = Sz$ transzformáció átviszi* (4.10)*-t egy homogén lineáris rendszerbe, T-periodikus együtthatómátrixszal, melynek karakterisztikus multiplikátorai megegyeznek* (4.10) *karakterisztikus multiplikátoraival.*

Bizonyítás. Az $y = Sz$ transzformációt (4.10)-be helyettesítve a következőt kapjuk.

$$S'z + Sz' = ASz, \tag{4.12}$$

tehát z megoldása a

$$z' = S^{-1}(AS - S')z$$

rendszernek. Az $S^{-1}(AS - S')$ együtthatómátrix folytonos és T-periodikus.

Legyen Φ a (4.10) rendszer azon alapmátrixa, melyre $\Phi(0) = I$. Ekkor (4.12) alapmátrixa $\Psi = S^{-1}\Phi$. Ekkor (4.12) karakterisztikus multiplikátorai a $\Psi^{-1}(0)\Psi(T)$ mátrix sajátértékei. Látszik azonban, hogy

$$\Psi^{-1}(0)\Psi(T) = \Phi^{-1}(0,0)S(0)S^{-1}(T)\Phi(T,0) = IS(0)S^{-1}C = C,$$

mivel S^{-1} is T-periodikus. Tehát a karakterisztikus multiplikátorok megegyeznek. ■

4.2.2. Approximáció a karakterisztikus multiplikátorokra

Beláttuk tehát, hogy a karakterisztikus multiplikátorok az imént definiált differenciálegyenleteknél invariáns halmazt alkotnak. Ennek a halmaznak a tulajdonságai meghatározzák a megoldások viselkedését, a periodikus megoldás létezését, és a stabilitást is. Ám ahhoz, hogy a karakterisztikus multiplikátorokat meghatározzuk, ismernünk kell az alapmátrixot, melyhez kell az összes, lineárisan független megoldás.

Ezt elkerülvén készíteni fogunk egy algoritmust, mely egy közelítést ad a karakterisztikus multiplikátorokra. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy A valós mátrix. Osszuk fel a $[0,T]$ intervallumot N darab egyenlő részre:

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T.$$

Ekkor egy rész hossza $h = t_{k+1} - t_k = T/N, k = 0, 1, \ldots, N-1$. Most pedig az

$$Y' = AY \tag{4.13}$$

differenciálegyenlet együtthatómátrixát módosítsuk a következő szakaszonként konstans $A_h(t)$ mátrixra:

$$A_h(t) = A_{hk}, \qquad t \in [t_k, t_{k+1}), \qquad (k = 0, 1, \ldots, N-1),$$

ahol A_{hk} egy konstans mátrix, melyre

$$\min A(t) \leq A_{hk} \leq \max A(t), \qquad t \in [t_k, t_{k+1}]. \tag{4.14}$$

Természetesen $\min A(t)$ azt a mátrixot jelöli, melynek minden eleme $A(t)$ megfelelő elemének a minimuma, $\max A(t)$ hasonlóan. Azt, hogy A mátrix kisebb mint egy B definiáljuk úgy, hogy a dimenziójuk megegyezik, és A minden eleme kisebb, mint a neki megfelelő B-beli elem.

Látható A_{hk} lehet például $A(t_k)$.

Most legyen $Y_h : [0,T] \to \mathbb{R}^{n \times n}$ egy folytonos mátrix, amelyre

$$Y_h' = A_h Y_h \tag{4.15}$$

teljesül A_h folytonossági pontjaiban, azaz $t \in \bigcup\limits_{k=0,\ldots,N-1} (t_k, t_{k+1})$, és $Y_h(0) = I$.

Ekkor

$$Y_h(t) = \exp((t-t_k)A_{hk}) \exp(hA_{h,k-1}) \dots \exp(hA_{h0}), \tag{4.16}$$

$$t \in [t_k, t_k + 1], \qquad (k = 0, \dots N-1).$$

Ebből látszik, hogy

$$Y_h(T) = \exp(hA_{h,N-1}) \exp(hA_{h,N-1}) \dots \exp(hA_{h0}). \tag{4.17}$$

Jelöljük (4.13) megoldásait, melyet teljesítik $Y(0) = I$-t Y-nal. Emiatt, a korábbiak alapján $Y(T)$ az (4.10) egyenlet alapmátrixa. Tehát sajátértékei a rendszer karakterisztikus multiplikátorai.

Most meg fogjuk mutatni, hogy

$$Y_h(T) \to Y(T), \text{ha } h \to 0.$$

Integrálva (4.13)-t, és (4.15)-t, a következőket kapjuk.

$$Y(t) = I + \int_0^t A(\tau)Y(\tau)d\tau \qquad (t \in [0,T))$$

$$Y_h(t) = I + \int_0^t A_h(\tau)Y_h(\tau)d\tau \qquad (t \in [0,T))$$

Tehát, $t \in [0,T)$-re, $A(\tau)Y_h(\tau)$-t kivonva és hozzáadva:

$$Y_h(t) - Y(t) = \int_0^t (A_h(\tau) - A(\tau))Y_h(\tau)d\tau + \int_0^t A(\tau)(Y_h(\tau) - Y(\tau))d\tau.$$

Bármilyen szokásos mátrixnormával felírható a következő becslés, $t \in [0,T)$-re:

$$\|Y_h(t) - Y(t)\| \leq \int_0^t \|A_h(\tau) - A(\tau)\| \|Y_h(\tau)\| d\tau + \int_0^t \|A(\tau)\| \|Y_h(\tau) - Y(\tau)\| d\tau. \tag{4.18}$$

Legyen $\|A(t)\| \leq M$, ha $t \in [0,T]$. Ekkor (4.14) miatt

$$\|A_{hk}\| \leq M(k = 0, 1, \dots, N-1),$$

és (4.16) miatt

$$\|Y_h(t)\| \leq \exp(h\|A_{hk}\|) \cdot \exp(h\|A_{h,k-}\|) \cdot \ldots \cdot \exp(h\|A_{h,0}\|) \leq \exp(hNM) = \exp(TM),$$

ahol $t \in [0,T]$.

Továbbá, A egyenletes folyotonossága miatt a $[0,T]$ intervallumon, minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, úgy hogy minden $\tau_1, \tau_2 \in [0,T]$-re, ha $|\tau_1 - \tau_2| < \delta(\varepsilon)$, akkor $\|A(\tau_1) - A(\tau_2)\| \leq \varepsilon$. Tehát (4.14) miatt következik, hogy $\|A_h(\tau) - A(\tau)\| \leq \varepsilon$ minden $\tau \in [0,T]$-re, ha $h < \delta(\epsilon)$. Emiatt (4.18) becslést így folytathatjuk, ha $h < \delta(\epsilon)$, és $t \in [0,T)$:

$$\|Y_h(t) - Y(t)\| \leq \varepsilon \exp(TM)T + \int_0^t M\|Y_h(t) - Y(t)\| d\tau.$$

Most szükségünk lesz a Grönwall lemmára, amely így szól.

4.13. Tétel. (Grönwall-lemma) *Ha* $u, f \in \mathfrak{C}^0([t_0,t_1]), u(t), f(t), k > 0, t \in [t_0,t_1]$, *és*

$$u(t) \leq k + \int_{t_0}^t f(\tau)u(\tau)d\tau,$$

akkor

$$u(t) \leq k \exp \int_{t_0}^t f(\tau)u(\tau)d\tau.$$

Alkalmazva ezt

$$\|Y_h(t) - Y(t)\| \leq \varepsilon \exp(TM) \exp(\int_0^t M)d\tau = \varepsilon \exp(TM + Mt) \qquad (t \in [0,T]).$$

Azaz,

$$\|Y_h(t) - Y(t)\| \leq \varepsilon T \exp(2TM) \qquad (t \in [0,T])$$

melyből következik, hogy

$$Y(T) = \lim_{h \to 0} Y_h(T).$$

Mivel a mátrix sajátértékei folytonosan függnek a bemenettől, $Y_h(T)$ sajátértékei az (4.10) rendszer karakterisztikus multiplikátoraihoz tartanak.

Az $Y_h(T)$ mátrixot numerikusan meghatározhatjuk bármely pozitív h esetén az (4.16) egyenletet alkalmazva.

5. Gerjesztett lineáris rezgések

Ebben a fejezetben inhomogén lineáris periodikus rendszerekkel fogunk foglalkozni, azaz nézzük az alábbi egyenletet.

$$y' = Ay + b, \tag{5.19}$$

ahol az A együtthatómátrix, és a b úgynevezett gerjesztő tag folytonos, és T-periodikus függvények, azaz $A \in \mathfrak{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{n\times n}), b \in \mathfrak{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$, és $A(t+T) = A(t)$, $b(t+T) = b(t)$, valamely $T > 0$-ra, minden $t \in \mathbb{R}_+$-ra.

A korábbi tételeket fogjuk kiterjeszteni az ilyen alakú rendszerekre.

5.14. Tétel. *Ha az* (5.19)*-hoz tartozó homogén rendszernek nincs a triviálistól periodikus megoldása T periódussal, akkor* (5.19)*-nek pontosan egy T-periodikus megoldása van.*

Bizonyítás. Ljapunov első tétele szerint létezik egy T-periodikus mátrixfüggvény, P, mely (5.19)-hez tartozó homogén rendszert az $y = Pz$ transzformációval a

$$z' = Bz \tag{5.20}$$

rendszerbe viszi, ahol B egy konstans mátrix. Ugyanez a transzformáció (5.19)-et átviszi

$$z' = Bz + P^{-1}b \tag{5.21}$$

rendszerbe.

Ha a homogén rendszernek nincs periodikus megoldása, akkor nyilván (5.20)-nak sem. Emiatt, az (4.6.) tételt alkalmazva (5.21)-nek van T-periodikus megoldása, tehát (5.19)-nek is.

A megoldások egyértelműsége pedig abból látszik, hogy ha (5.19)-nak két különböző periodikus megoldása lenne, akkor a különbségük egy nemtriviális T-periodikus megoldása lenne a homogén rendszernek, amely ellentmond a feltevésünknek. ■

Az alábbi következmény pedig látszik az előző tételekből.

5.15. Tétel. *Ha az* 1 *szám nem karakterisztikus multiplikátora a homogén rendszernek, akkor* (5.19)*-nek pontosan egy T-periodikus megoldása van.*

A következő tételt Massera fogalmazta meg 1950-ben.

5.16. Tétel. (Massera) *Ha az* (5.19) *rendszernek van korlátos megoldása* $[0,\infty]$*-en, akkor van* T*-periodikus megoldása is.*

Bizonyítás. Jelöljük ezt a korlátos megoldást φ-vel, és Φ-vel a homogén rendszer alapmátrixát, melyre $\Phi(0) = I$.

Ekkor a megoldás felírható az alábbi alakban:

$$\varphi(t) = \Phi(t)\varphi^0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)ds,$$

ahol $\varphi^0 = \varphi(0)$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Ekkor nyilván

$$\varphi(T) = \Phi(T)\varphi^0 + \int_0^T \Phi(T)\Phi^{-1}(s)ds,$$

azaz

$$\varphi(T) = \Phi(T)\varphi^0 + c. \tag{5.22}$$

Mivel $\varphi(\cdot + T)$ szintén megoldás, mely a 0-ban $\varphi(T)$-t vesz fel, ezért

$$\varphi(t+T) = \Phi(t)\varphi(T) + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)ds. \qquad (t \in \mathbb{R}_+)$$

Ebből látszik, hogy

$$\varphi(2T) = \Phi(T)\varphi(T) + \int_0^T \Phi(T)\Phi^{-1}(s)ds = \Phi(T)\varphi(T) + c.$$

Ide (5.22)-őt behelyettesítve adódik, hogy

$$\varphi(2T) = \Phi^2(T)\varphi^0 + (\Phi(T) + I)c.$$

Ezt bármely $m = 1, 2 \ldots$-ra felírva

$$\varphi(mT) = \Phi^m(T)\varphi^0 + \sum_{k=0}^{m-1} \Phi^k(T)c.$$

Most indirekt módon feltételezzük, hogy (5.19)-nek nincs T-periodikus megoldása.

Mivel

$$\varphi(T) = \Phi(T)\varphi^0 + c,$$

ha φ (5.19) egy megoldása, az indirekt feltevés azt jelenti, hogy a

$$\Phi(T)\varphi^0 + c = \varphi^0$$

periodikussági feltételnek nincs megoldása.

Átrendezve

$$(I - \Phi(T))\varphi^0 = c$$

adódik.

Megjegyezzük, hogy a $Bx = c$ egyenletrendszernek létezik x megoldása, akkor és csak akkor, ha nem létezik egy v, melyre $v'\bar{B} = 0$, $v'\bar{c} \neq 0$, ahol v'-vel v transzponáltját jelöljük.

Ez nyilván igaz, hiszen ha létezne ilyen v, az azt jelentené, hogy B oszlopai által generált alterére merőleges, ám c-re nem. De ez pont ellentmond annak, hogy c benne van B oszlopterében, azaz létezik x melyre $Bx = c$. A másik irány hasonlóképp, ha létezik x, úgy hogy $Bx = c$, akkor c benne van B oszlopterében, tehát nem létezhet v, amely merőleges B oszlopterére, de c-re nem.

Alkalmazva ezt a mi tételünkre, az, hogy $(I - \Phi(T))y^0 = c$ egyenletrendszernek nincs megoldása, azzal ekvivalens, hogy létezik egy v vektor, melyre

$$v'(I - \bar{\Phi}(T)) = 0, v'\bar{c} \neq 0.$$

Transzponálva ezt, megkapjuk, hogy

$$(I - \Phi^*(T))v = 0, c^*v \neq 0,$$

ahol $*$-gal az adjungáltat jelöljük. Az első egyenletrendszerből az látszik, hogy $\Phi^*(T)v = v$, azaz Φ^*-gal balról szorozva

$$\Phi^{*k}(T)v = v, \text{ ahol } k = 0, 1, \ldots.$$

Most vegyük $\varphi(mT)$ skaláris szorzatát v-vel, ahol $'$-vel a transzponáltat jelöljük. Az eddig belátottak alapján

$$\varphi'(mT)\bar{v} = \varphi^{0'}\Phi^{m'}(T)\bar{v} + \sum_{k=0}^{m-1} c'\Phi^{k'}(T)\bar{v}$$

$$= \varphi^{0'}\overline{\Phi^{*m}(T)v} + \sum_{k=0}^{m-1}\overline{c * \Phi^{*k}(T)v}$$

$$= \varphi^{0'}\bar{v} + \sum_{k=0}^{m-1}\overline{c * v} = \varphi^{0'}\bar{v} + m\overline{c * v}.$$

Ha m végtelenhez tart, akkor a jobboldal is, hiszen ott egy m-es szorzó. Tehát a bal oldalon $\varphi'(mT)\bar{v}$ is végtelenhez tart, azaz $\varphi'(mT) \to \infty$, ha $m \to \infty$. Ez pedig ellentmond annak, hogy φ korlátos. Tehát ha φ korlátos, akkor létezik periodikus megoldás, tehát a tételt beláttuk.

Továbbá érdemes megjegyezni azt is, hogy ha egy megoldás T-periodikus, akkor szükségképpen korlátos is, hiszen

$$|\varphi(t)| \leq \max\{|\varphi(\vartheta)| \vartheta \in [0, T]\} < \infty$$

minden $t \in \mathbb{R}_+$-ra. ■

A most belátottakból könnyen következik az alábbi tétel.

5.17. Tétel. *Ha az* (5.19) *rendszernek nincs periodikus megoldása, akkor egy megoldás sem korlátos* $t \in \mathbb{R}_+$*-on.*

6. A Floquet elméletről más megközelítésben

A korábban definiált principális mátrixot és karakterisztikus multiplikátorokat bevezethetjük másképp is (vö. [7]).

Nézzük az

$$x' = Ax \tag{6.23}$$

differenciálegyenletet, ahol $A \in \mathfrak{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{n\times n})$ folytonos, és T-periodikus, azaz $A(t+T) = A(t)$, ahol $t \in \mathbb{R}_+$.

Jelölje $u = \varphi(\cdot; \tau, \xi)$ azt a megoldását (6.23)-nak, melyre $u(\tau) = \xi$.

Ekkor

$$\varphi(\cdot; \tau, \xi) = \varphi(\cdot + T; \tau + T, \xi),$$

hiszen ha u megoldás, akkor $u(\cdot + T)$ is.

Most definiáljuk az $F(\tau; \cdot)$ úgynevezett T-leképezést:

$$F(\tau; \xi) := \varphi(\tau + T; \tau, \xi).$$

F egy diszkrét dinamikai rendszer, amely jellemzi (6.23) viselkedését.

6.18. Tétel. *A* (6.23) *egyenletnek létezik T-periodikus $u(t)$ megoldása pontosan akkor, ha $\xi_0 := u(\tau)$ fixpontja az $F(\tau; .)$ T-leképezésnek, azaz*

$$F(\tau; \xi_0) = \xi_0.$$

Bizonyítás. Ez nyilván igaz, hiszen ha u T-periodikus, akkor $u(\tau) = u(\tau + T)$, azaz

$$\varphi(\tau; \tau, \xi_0) = \varphi(\tau + T; \tau + T, \xi_0).$$

Ezáltal $\xi_0 = u(\tau) = F(\tau; \xi_0)$. ■ Legyen $\tau = 0$, és $F := F(0; \cdot)$.

Valamint legyen most $F(\xi_0) = \xi_0$, és $u(t)$ az ehhez tartozó T-periodikus megoldás, továbbá

$$DF(\xi_0) := \frac{\partial \varphi}{\partial x}(T; 0, \xi_0)$$

Az így kapott egyenlet

$$Y' = AY, \qquad Y(0) = I.$$

Itt $DF(\xi_0) = Y(T)$.

A $DF(\xi_0)$ mátrix sajátértékei a karakterisztikus multiplikátorok, melyek az u T-periodikus megoldáshoz tartoznak.

A következőkben autonóm rendszerekhez fogjuk definiálni a Poincaré-leképezést.

Legyen $x' = f \circ x$, u egy T-periodikus megoldás, és γ az ehhez tartozó periodikus pálya. A Poincaré-leképezés minden fixpontja megfelel egy periodikus pályának. Előnye a T-leképezéssel szemben, hogy az ismeretlen T-periódust megkapjuk a fixpont úgynevezett visszatérési idejeként.

Legyen H az az $n-1$ dimenziós hipersík, amely irányvektora a pálya $f(z)$ érintővektora $z \in \gamma$ pontban.

A $z + H$ hipersíkot transzverzálisnak hívjuk $z \in \gamma$-ban, ha

$$\mathbb{R}^n = \langle f(z) \rangle \oplus H,$$

ahol $\langle f(z) \rangle$ az $f(z)$ vektor által kifeszített egydimenziós altér.

6.19. Tétel. *Legyen*

$$H = \{w \in \mathbb{R}^n : \langle w, x \rangle = 0\}, \qquad \textit{valamely } w \neq 0\textit{-ra}$$

Ekkor $z + H$ transzverzális $z \in \gamma$-ban pontosak akkor, ha

$$\langle w, f(z) \rangle \neq 0.$$

Továbbá, $U \subset z + H$ lokális transzverzális metszete a γ pályának z pontban, pontosan akkor ha

$$\langle w, f(x) \rangle \neq 0,$$

minden $x \in U$-ra.

6.20. Tétel. *Legyen γ egy T-periodikus pályája $x' = f \circ x$ autonóm egyenletnek, és legyen $z + H$ egy transzverzális hipersík $z \in \gamma$-ban. Ekkor létezik egy U lokális transzverzális metszete a γ pályának z pontban, és egy $\vartheta : U \to \mathbb{R}$, melyre*

- $\vartheta(z) = T$

- $\gamma^{\vartheta(x)}(x) \in z + H \qquad mindenx \in Ura$

- *ϑ folytonosan differenciálható.*

A ϑ függvényt visszatérési időnek hívjuk. A függvény egyértelmű abban az értelemben, hogy az U környezet választható úgy, hogy létezik egy pozitív ε, melyre ha

$$x \in U, \qquad \gamma^t(x) \in z + H, \qquad |t + T| < \varepsilon$$

teljesül, akkor $t = \vartheta(x)$.

A

$$\Pi : U \to z + H, \qquad x \to \gamma^{\vartheta(x)}(x)$$

Poincaré leképezés folytonosan differenciálható és létezik z fixpontja.

Bizonyítás.[vázlat] A tétel belátható, ha alkalmazzuk az inverzfüggvény tételt $g(t,x) = 0$-ra, ahol

$$g(t,x) := \langle w, (\gamma^t(x) - z)\rangle, \qquad g : \mathbb{R}^n \times R \to \mathbb{R},$$

felhasználva, hogy $g(T,z) = 0$.

7. Stabilitás

Most essen néhány szó a stabilitásról. Tekintsük a következő, általános alakban megadott rendszert.

$$x' = f \circ (id, x), \tag{7.24}$$

ahol $f, f' \in \mathfrak{C}^0(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathbb{R}^n)$, ha $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ egy összefüggő, nyílt tartomány.

7.3. Definíció. *Egy $\psi : \mathbb{R}_+ \to \Omega$ megoldását* (7.24)*-nek* ***Ljapunov értelemben stabil****nak nevezünk, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz és $\tau \geq 0$-hoz létezik egy ε-tól és τ-tól függő $\delta > 0$, úgy hogy ha*

$$\|\xi - \psi^0\| < \delta,$$

akkor bármely $\varphi(t; \tau, \xi)$ $[\tau, +\infty)$-n értelmezett megoldásra, minden $t > \tau$-ra

$$\|\varphi(t; \tau, \xi) - \psi(t)\| < \varepsilon,$$

ahol $\psi^0 = \psi(\tau)$, valamely $\tau > 0$-ra

7.4. Definíció. *Egy $\psi : \mathbb{R}_+ \to \Omega$ megoldását* (7.24)*-nek* ***attraktor****nak nevezünk, ha minden $\tau \geq 0$-hoz létezik egy τ-tól függő η, úgy hogy, ha*

$$\|x^0 - \psi^0\| < \eta,$$

akkor

$$\lim_{t \to \infty} \|\varphi(t; \tau, \xi) - \psi(t)\| = 0$$

7.5. Definíció. *Egy $\psi : \mathbb{R}_+ \to X$ megoldását* (7.24)*-nek* ***aszimptotikusan stabilis****nak nevezünk, ha stabilis és attraktor.*

A továbblépéshez, vegyük a következő rendszert

$$y' = Ay, \tag{7.25}$$

ahol $A \in \mathfrak{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{n \times n})$, $A(t + T) = A(t)$ valamely $T > 0$-ra és minden $t \in \mathbb{R}_+$-ra.

Bebizonyítható az alábbi tétel (vö. [4]):

7.21. Tétel. *(a) A* (7.25) *rendszer akkor és csak akkor aszimptotikusan stabil, ha minden karakterisztikus multiplikátorának abszolútértéke kisebb, mint* 1.

(b) A rendszer akkor és csak akkor Ljapunov értelemben stabil, ha minden karakterisztikus multiplikátorának abszolútértéke kisebb vagy egyenlő 1*-gyel, és amelyeknek abszolútértéke* 1*, azok a minimálpolinomban egyszeres multiplicitással rendelkeznek.*

(c) A renszer instabil, ha van egy karakterisztikus multiplikátora, melynek abszolútértéke nagyobb, mint egy, vagy pontosan egy és multiplicitása a minimálpolinomban nagyobb mint egy.

8. Példák és alkalmazások

8.1. Hill egyenlet

A korábbi eredményeink alkalmazásaképp írjuk fel Hill egyenletét:

$$y'' + py = 0, \tag{8.26}$$

ahol $p \in \mathfrak{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $p(t+T) = p(t)$ valamely $T > 0$-ra, ahol $t \in \mathbb{R}_+$.

Különösen fontos foglalkoznunk ezzel az egyenlettel, hiszen belátható, hogy bármely másodrendű lineáris differenciálegyenlet periodikus és folytonosan differenciálható együtthatókkal, visszavezethető (8.26)-ra. Tehát számos probléma megoldását könnyítik meg ezek az általános eredmények.

A visszavezetéshez tehát legyen $a_1 \in \mathfrak{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $a_0 \in \mathfrak{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $a_1(t+T) = a_1(t)$, és $a_0(t+T) = a_0(t)$ valamely $T > 0$-ra, ahol $t \in \mathbb{R}_+$. Vegyük a

$$z'' + a_1 z' + a_0 z = 0 \tag{8.27}$$

rendszert.

Bevezetve egy új y ismeretlen függvényt a

$$z(t) = y(t) \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t a_1(s)ds\right) \qquad (t \in \mathbb{R}_+) \tag{8.28}$$

transzformációval , azt kapjuk, hogy z kielégíti a (8.27)-et pontosan akkor, ha y kielégíti (8.26)-t, ahol

$$p = a_0 - a_1^2/4 - a_1'/2.$$

Mindez könnyen látszik, ha az így megadott z-t behelyettesítjük (8.27)-be, majd a deriválásokat elvégezve valóban (8.26)-t kapjuk.

Visszatérve (8.26)-hez, most Ljapunov módszerét ismertetjük, mely meghatározza az általános megoldást, és a stabilitási feltételeket.

Az (8.26) rendszer egy ekvivalens felírása

$$y_1' = y_2, \qquad\qquad y_2' = -py_1. \tag{8.29}$$

Először (8.29) $\Phi(t)$ alapmátrixát fogjuk meghatározni, melyre $\Phi(0) = I$. Ezt végtelen sor formájában tesszük meg.

Most (8.26) helyett egy általánosabb alakú differenciálegyenletet nézünk:

$$y'' = \mu p y, \tag{8.30}$$

ahol $\mu \in \mathbb{R}$. Itt μ helyébe -1-et helyettesítve megkapjuk Hill egyenletét. Az (8.30) rendszer $y(0) = 1, y'(0) = 0$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldását nevezzük φ_μ-nek. Nyilván (8.26) φ megoldására $\varphi = \varphi_{-1}$.

Tegyük fel, hogy a φ_μ megoldások felírhatóak konvergens hatványsor alakban az alábbi módon:

$$\varphi_\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \mu^k. \tag{8.31}$$

Ezt visszahelyettesítve (8.30)-ba, adódik, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k'' \mu^k = \sum_{k=0}^{\infty} p \varphi_k \mu^{k+1}$$

Ahhoz, hogy μ azonos hatványaihoz tartozó együtthatók megegyezzenek, kell:

$$\varphi_0'' = 0, \qquad \varphi_k'' = p\varphi_{k-1} \qquad (k = 1, 2 \ldots).$$

Ahhoz, hogy a kezdeti feltételek teljesüljenek, legyen

$$\varphi(0) = 1, \varphi_0'(0) = 0, \varphi_k(0) = \varphi_k'(0) = 0, \text{ ha} k \geq 1,$$

Ezeket felhasználva, kiintegrálva az előző feltételeket, megkapjuk, hogy

$$\varphi_0(t) = 1, \qquad \varphi_k(t) = \int_0^t \left(\int_0^{t_1} p(t_2)\varphi_{k-1}(t_2) dt_2 \right) dt_1. \qquad (t \in \mathbb{R}_+)$$

A második integrálból adódik, hogy

$$\varphi_k(t) = \int_0^t \left(\int_{t_2}^t p(t_2)\varphi_{k-1}(t_2) dt_1 \right) dt_2 = \int_0^t (t-\tau) p(\tau) \varphi_{k-1}(\tau) d\tau \qquad (t \in \mathbb{R}_+),$$

ahol felhasználtuk a Fubini-tételt, illetve, hogy a belső integrál nem függ t_1-től.

Indukcióval látható, hogy ha a periodikus p függvénynek M felső korlátja, akkor

$$|\varphi_k(t)| \le \frac{M^k t^{2k}}{(2k)!} \qquad t \in \mathbb{R}_+, \quad k = 1, 2 \dots$$

és $\varphi_k \in C^2(\mathbb{R})$.

Tehát tetszőleges $\mu > 0$-ra és $t_0 > 0$-ra a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_0^k M^k t_0^{2k}}{(2k)!} = \mathrm{ch}(t_0(\mu_0 M)^{1/2})$$

konvergens sorozat felülről becsli (8.31)-et, ha $|t| < t_0$ és $|\mu| < |\mu_0|$ tehát (8.31) abszolút konvergens, és összege valóban (8.30) megoldása.

Azaz beláttuk, hogy (8.26) megoldása, mely teljesíti a megadott kezdeti feltételeket

$$\varphi = \varphi_{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varphi_k.$$

Hasonlóképp belátható, hogy (8.26) megoldása, melyre $y(0) = 0, y'(0) = 1$ a következőképp néz ki:

$$\psi(t) = t + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \psi_k(t) \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

ahol $\psi_0(t) = t$, és

$$\psi_k(t) = \int_0^t (t-\tau)p(\tau)\psi_{k-1}(\tau)d\tau, \qquad t \in \mathbb{R}_+, \quad k = 1, 2 \dots.$$

Ekkor a Φ alapmátrixa (8.26)-nek, amely teljesíti a $\Phi(0) = I$ feltételt

$$\begin{pmatrix} \varphi & \psi \\ \varphi' & \psi' \end{pmatrix}.$$

A karakterisztikus multiplikátorok a $|C - \lambda I| = 0$ egyenlet megoldásai, ahol $C = \Phi(T)$.

A folytatáshoz írjuk fel a következő lemmát, mely Lioville nevéhez köthető.

8.1. Lemma. *Legyen Y az $Y' = AY$ megoldása, és legyen $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Ekkor minden $t \in (\alpha, \beta)$-ra*

$$\det(Y(T)) = \det(Y(t_0)) \exp \int_{t_0}^{t} TrA(s)ds,$$

ahol $TrA(s)$ az $A(s)$ mátrix nyoma.

Ezt felhasználva

$$\det(\Phi(T)) = \exp \int_0^T Tr \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & 0 \end{pmatrix} dt = \exp(0) = 1.$$

Visszatérve a $\Phi(T) - \lambda I = 0$ egyenlethez, behelyettesítve $\Phi(T)$-t

$$\begin{vmatrix} \varphi(T) - \lambda & \psi(T) \\ \varphi'(T) & \psi'(T) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

adódik.

Ez a determináns

$$(\varphi(T) - \lambda)(\psi'(T) - \lambda) - \psi(T)\varphi'(T) = \lambda^2 - a\lambda + 1,$$

ahol $a = \varphi(T) + \psi'(T) = Tr\Phi(T)$, melyet **Ljapunov konstans**nak nevezünk.

8.22. Tétel. *Ha a Ljapunov konstans abszolútértéke nagyobb* 2*-nél, akkor* (8.29) *rendszer instabil, ha pedig kisebb* 2*-nél, akkor pedig Ljapunov értelemben stabil.*

Bizonyítás. A $\lambda^2 - a\lambda + 1 = 0$ egyenlet gyökei

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

A (7.21.) tételt alkalmazva, a gyökök értékét figyelembe véve a tételt beláttuk. ∎

8.23. Tétel. *Ha a Ljapunov konstans* 2*, akkor a* (8.29) *rendszer Ljapunov értelemben stabil pontosan akkor, ha minden megoldása T-periodikus. Továbbá, ha a Ljapunov konstans* -2*, akkor a* (8.29) *rendszer Ljapunov értelemben stabil pontosan akkor, ha minden megoldása $2T$-periodikus.*

Bizonyítás. Ha $a = 2$, akkor a rendszer karakterisztikus polinomja $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2$. Felhasználva a (4.9.) tételt, ekkor létezik egy nemtriviális T-periodikus megoldás.

A (7.21.) tétel szerint a rendszer pontosan akkor Ljapunov értelemben stabil, ha a minimálpolinomja $q(\lambda) = \lambda - 1$, mert így az 1 karakterisztikus multiplikátor multiplicitása egyszeres.

Továbbá, $q(\lambda) = \lambda - 1$ minimálpolinom pontosan akkor, ha $C - I = 0$, ahol

$$C = \Phi(T) = \begin{pmatrix} \varphi(T) & \psi(T) \\ \varphi'(T) & \psi'(T) \end{pmatrix}.$$

Ezt elemenként felírva,

$$\varphi(T) = 1 = \varphi(0), \varphi'(T) = 0 = \varphi'(0), \psi(T) = 0 = \psi(0), \text{ és } \psi'(T) = 1 = \psi'(0).$$

Tehát ez a két független megoldás, általuk az összes megoldás T-periodikus.

Ha $a = -2$, akkor a rendszer karakterisztikus polinomja $p(\lambda) = (\lambda + 1)^2$. Tehát létezik egy nemtriviális $2T$-periodikus megoldás.

A rendszer Ljapunov értelemben stabil, ha a minimálpolinom $q(\lambda) = \lambda + 1$. Emiatt $C + I = 0$. Elemenként,

$$\varphi(T) = -1 = -\varphi(0), \varphi'(T) = 0 = \varphi'(0), \psi(T) = 0 = \psi(0), \text{ és} \psi'(T) = -1 = -\psi'(0).$$

Tehát

$$[\varphi(T), \varphi'(T)] = -[\varphi(0), \varphi'(0)], \text{ és } [\psi(T), \psi'(T)] = -[\psi(0), \psi'(0)].$$

Ezáltal

$$[\varphi(2T), \varphi'(2T)] = -[\varphi(T), \varphi'(T)] = [\varphi(0), \varphi'(0)],$$

és

$$[\psi(2T), \psi'(2T)] = -[\psi(T), \psi'(T)] = [\psi(0), \psi'(0)],$$

azaz minden megoldás $2T$-periodikus. ■

Összefoglalva

1. Ha $|a| > 2$, akkor a rendszernek van egy valós karakterisztikus multiplikátora, melynek abszolútértéke nagyobb, mint 1, és egy másik valós, melynek kisebb, mint 1. Ebből belátható, hogy a Hill egyenlet néhány megoldása exponenciálisan végtelenbe tartó amplitúdókkal oszcillálhat, és néhány a 0-ba tart, ha $t \to \infty$.

2. Ha $|a| < 2$, akkor a rendszernek van kettő (komplex konjugált) karakterisztikus multiplikátora, melyek abszolútértéke 1. Ez azt jelenti, hogy a Hill egyenlet minden megoldása korlátos, oszcillál, de a triviálisokon kívül egyik sem T-, vagy $2T$-periodikus.

3. Ha $a = 2$ (illetve $a = -2$), akkor vagy minden megoldás T-periodikus (illetve $2T$-periodikus), vagy van egy nemtriviális T-periodikus (illetve $2T$-periodikus) megoldás, és minden más megoldás független ettől, és végtelenbe tartó amplitúdóval oszcillál.

8.2. Mathieu egyenlet

Az alábbi fejezetben alkalmazásokkal, és egy a Hill egyenlet egy speciális esetével, a Mathieu egyenlettel fogunk foglalkozni.

Egy lényeges alkalmazás bemutatásaképp beszéljünk a hullámokról. Ez egy olyan probléma, amely az élet számos területén előfordul, például ha megpendítünk egy gitárhúrt, ráütünk egy dobra, vagy beledobunk egy követ a vízbe. Beszélhetünk rugalmas, elektromágneses, vagy számos egyéb hullámról.

Most kétdimenziós hullámokkal fogunk foglalkozni. A terjedésüket a kétdimenziós hullámegyenlet írja le:

$$U'' = c^2 \Delta U,$$

ahol $'$-vel a t szerinti deriválást jelöljük, $c > 0$ konstans, U pedig a hullám amplitúdója, $U(t, x, y)$ jelöli az (x, y) koordinátájú pont függőleges kitérését a t időpillanatban, ahol $t \in \mathbb{R}_+$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Itt a Δ jelölés pedig a Laplace operátor, tehát $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, ha $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétszer deriválható függvény.

Tegyük fel, hogy a rezgés harmonikus, és alkalmazzuk a változók szétválasztásának módszerét. Ekkor belátható, hogy

$$U(t, x, y) = \exp(i\omega t)u(x, y) \qquad (t \in R_+, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \omega \in \mathbb{R})$$

. Ezt visszahelyettesítve a hullámegyenletbe

$$-\exp(i\omega t)u(x, y)\omega^2 = c^2 \left(\exp(i\omega t)\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \exp(i\omega t)\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \right),$$

azaz egyszerűsítve és átrendezve az egyenletet

$$\Delta u + k^2 u = 0 \tag{8.32}$$

adódik, ahol $k = \omega/c$.

Tegyük fel, valós problémákra alaphozva, hogy a peremfeltételek egy ellipszis mentén vannak megadva. Ehhez vezessük be (vö. [3]) a ξ és η ortogonális elliptikus koordinátákat az alábbi transzformációval

$$x = h_1 \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \qquad\qquad y = h_1 \operatorname{sh} \xi \sin \eta,$$

ahol $h_1 > 0$ konstans, $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ Alkalmazva a Laplace operátort ezekre a görbe vonalú ortogonális koordinátarendszerbeli koordinátákra, (8.32) egyenletből

$$\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \eta^2} + \frac{k^2 h_1}{2}(\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)u(\xi,\eta) = 0 \tag{8.33}$$

lesz, ahol a most szereplő u függvény ξ-től és η-tól függ.

Újból a változók szétválasztásának módszerét alkalmazva legyen

$$u(\xi,\eta) = A(\xi)B(\eta).$$

Ezt visszahelyettesítve (8.33)-be, AB-vel leosztva

$$A''(\xi)/A(\xi) + 2h^2 \operatorname{ch} 2\xi = -B''(\eta)/B(\eta) + 2h^2 \cos 2\eta = r$$

adódik, ahol $h = kh_1/2$ és r tetszőleges szám, és $'$-vel a saját változó szerinti deriválást jelöljük.

Ezáltal a következő két differenciálegyenletet kapjuk

$$A''(\xi)(r - 2h^2 \operatorname{ch} 2\xi)A(\xi) = 0, \qquad\qquad B''(\eta)(r - 2h^2 \cos 2\eta)B(\eta) = 0.$$

Egy komplex tanszformációval a két egyenlet könnyen átvihető egymásba, tehát most vizsgáljuk a

$$\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} + (r - 2q\cos 2t)y(t) = 0 \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{8.34}$$

egyenletet. Ezt a másodrendű differenciálegyenletet nevezik Mathieu egyenletnek.

Számos olyan fizikai probléma során előkerül, melyben valamiféle elliptikus szimmetria szerepel, például a hővezetés, elekromágnesesség, rugalmas jelenségek, vagy a már tárgyalt hullámterjedés.

Látható, hogy Mathieu egyenlete Hill egyenletének speciális esete, ahol minden $t \in \mathbb{R}$-re $p(t) = r - 2q\cos 2t$, amely t-ben π-periodikus.

A fizikai problémák megoldásához sok esetben csak a π-, vagy 2π-periodikus megoldásokra van szükségünk. Mint ahogy a példának okáért hullámterjedésnél is, hiszen η periodikus pont, azaz a megoldások ugyanazt az értéket veszik fel t-ben és $t + 2\pi$-ben minden $t \in \mathbb{R}$-re.

Továbbá, (8.34)-at tekintve q értékét több tényező is befolyásolja, mint például a feladathoz tartozó fizikai és geometriai adatok, a differenciálegyenlet paraméterei, és az ellipszis alakja, mely körül a peremfeltételek vannak megadva.

Ha $q \in \mathbb{R}$ rögzített, akkor r azon értékei, melyre (8.34)-nak létezik π-, vagy 2π-periodikus megoldása, diszkrét halmazt alkotnak. Ezek pontosan azok az értékek, melyre $|a| = 2$, ahol a a korábban definiált Ljapunov konstans.

Karakterisztikus értékeknek nevezzük azon $r(q)$ értékeket, melyre (8.30)-nak létezik nemtriviális π-, vagy 2π-periodikus megoldása. Ezen megoldásokat elliptikus henger -, vagy elsőfajú Mathieu függvényeknek nevezzük.

Bizonyítható, hogy minden m pozitív egész számhoz tartozik két karakterisztikus érték, ρ_m és σ_m. Ezeket r helyébe visszahelyettesítve a Mathieu egyenletbe, az egyenletnek van nemtriviális π, illetve 2π-periodikus páros, illetve páratlan megoldása, melynek pontosan m darab zérushelye van $[0, \pi)$-n. Ezeket a Mathieu függvényeket $ce_m(t, q)$-val és $se_m(t, q)$-val jelöljük, ahol $t \in \mathbb{R}$. Ha m páros akkor 2π-, ha m páratlan, akkor π-periodikusak.

Most tekintsük a $q = 0$ esetet. Ekkor Mathieu egyenlete az

$$y'' + ry = 0 \tag{8.35}$$

alakot veszi fel. Ez az egyenlet pontosan akkor rendelkezik π-, illetve 2π-periodikus megoldással, ha $r = m^2$, ahol m pozitív egész szám. Tehát ekkor

$$ce_m(t, 0) = \cos mt, \; se_m(t, 0) = \sin mt, \; \rho_m(0) = \sigma_m(0) = m^2 \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Ezen függvényeknek valóban m darab zérushelyük van $[0, \pi)$-n.

Ezenfelül, ha $q \neq 1$, akkor $\rho_m(0) \neq \sigma_m(0)$, és ha (8.34)-nak van nemtriviális π-, illetve 2π-periodikus megoldása, akkor egyik másik lineárisan független megoldás sem lehet π-, illetve 2π-periodikus. Emiatt (8.23.)-ben nem teljesülhet a stabilitás feltétele, ha $|a| = 2$.

Ezen eredményeken felül feltehető, hogy (8.34) karakterisztikus értékei, és a hozzájuk tartozó Mathieu függvények harványsorba fejthetők q paraméter körül:

$$\rho_m(q) = m^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k q^k, \qquad ce_m(t,q) = \cos mt + \sum_{k=1}^{\infty} q^k c_k(t),$$

$$m = 0, 1, \ldots$$

$$\sigma_m(q) = m^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k q^k, \qquad se_m(t,q) = \sin mt + \sum_{k=1}^{\infty} q^k s_k(t),$$

$$m = 1, 2, \ldots, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Az α_k, β_k együtthatók, és c_k, s_k függvények meghatározhatók az (8.34) egyenletbe való behelyettesítéssel.

8.3. Egy további példa

Végül nézzünk egy gyakran előfoduló matematikai problémát, amely szintén a Mathieu egyenletre vezethető vissza. Ez a matematikai inga oszcilláló felfüggesztési ponttal. Egy m tömegű anyagi pont fel van függesztve egy súly nélküli l hosszú rúdra, amely O felfüggesztési pont körül forog. Tegyük fel, hogy a rúd mozgása vízszintes harmonikus rezgés $A > 0$ amplitúdóval és $\omega > 0$ körkörös frekvenciával. A súrlódásnak csillapító hatása van, $b > 0$ együtthatóval, mely arányos a szögsebességhez.

A mozgásegyenlet ekkor a következőképp néz ki:

$$lm\theta''(t) = -mg \sin\theta(t) + mA\omega^2 \cos(\omega t)\sin\theta(t) - b\theta'(t) \qquad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Tegyük fel, hogy a θ szögeltérés kicsi, és $\sin\theta$-t helyettesítsük θ-val. Ekkor átrendezés után a

$$\theta''(t) + \frac{b}{lm}\theta'(t) + \left(\frac{g}{l} + \frac{A\omega^2}{l}\cos(\omega t)\right)\theta(t) \qquad (t \in \mathbb{R}_+)$$

egyenletet kapjuk.

Ezáltal, alkalmazva a fejezet elején bemutatott (8.28) transzformációt:

$$\theta(t) = \psi(t)\exp\left(-\frac{bt}{2lm}\right) \qquad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Ezt behelyettesítve megkapjuk az új

$$\psi''(t) + \left[\frac{g}{l} - \frac{A\omega^2}{l}\cos(\omega t) - \left(\frac{b}{2lm}\right)\right]\psi(t) = 0 \qquad (t \in \mathbb{R}_+)$$

egyenletet.

Most pedig vezessük be a $\tau = \frac{\omega t}{2}$ változót, és a

$$r = \frac{4g}{\omega^2 l} - \left(\frac{b}{2lm}\right), \qquad\qquad q = \frac{2A}{l}.$$

jelöléseket.

Ezáltal megkapjuk Mathieu egyenletét:

$$\frac{\partial^2 \psi(\tau)}{\partial \tau^2} + (r - 2q\cos 2\tau)\psi(\tau) = 0 \qquad (\tau \in \mathbb{R}_+)$$

9. Fixponttételek

A periodikus megoldások elméletében fontos szerepet játszanak a fixponttételek. Érdemes megemlíteni az alábbi tételeket.

9.24. Tétel. (Brouwer-féle fixponttétel) *Az* $(\mathbb{R}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *euklideszi tér esetén minden folytonos* $\varphi : B_1(0) \to B_1(0)$ *leképezésnek van fixpontja.*

9.25. Tétel. (Schauder-féle fixponttétel) *Legyen* $(X, \|\cdot\|)$ *Banach-tér,* $\emptyset \neq K \subset X$ *konvex, korlátos és zárt halmaz,*

$$\varphi : K \to K$$

folytonos operátor. Ekkor létezik $u \in K$*, hogy* $\varphi(u) = u$*, azaz* φ*-nek van fixpontja.*

A Brouwer-féle fixponttétel felhasználásával bizonyítható a következő tétel (vö. [5]).

9.26. Tétel. *Az* $(\mathbb{R}^d, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *Euklideszi tér esetén legyen adott a* $\|\cdot\| := \langle\cdot,\cdot\rangle$ *norma,* $\xi \in \mathbb{R}^d$ *vektor és* $T > 0$ *szám. Tegyük fel, hogy*

- *Az* $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to R^d$ *függvény* T*-periodikus az első változójában, tehát* $f(x+T, y) = f(x, y)$*, ahol* $(x, y) \in \mathbb{R}^n$*.*
- *Az* f *függvény folytonos, és alkalmasan választott* $L > 0$*-ra*

  $$\|f(x, y) - f(x, z)\| \leq L\|y - z\|,$$

  ahol $(x, y), (x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$*, tehát második változójában Lipschitz-folytonos.*
- *Minden* $y \in \partial B_1(0)$*-ra* $\langle f(x, y), y\rangle < 0$*, ahol* $x \in \mathbb{R}$*.*

Ezen feltételek mellett az

$$y' = f \circ (id, y), \qquad y(0) = \xi \tag{9.36}$$

kezdetiérték-feladatnak létezik a

$$\varphi(0) = \varphi(T)$$

feltételt teljesítő megoldása.

Bizonyítás. A második feltétel miatt a feladatnak pontosan egy lokális megoldása létezik, mely a $\varphi : I(\xi) \to \mathbb{R}^d$ megoldássá folytatható.

A harmadik feltételt felhasználva látszik, hogy $B_1(0)$ invariáns halmaz, tehát minden $\xi \in B_1(0)$-ra a fázistér ezen pontjából induló pályák $B_1(0)$-ban maradnak. Ugyanis, ha bármely $\tau \in I(\xi)$-re $\|\varphi(\tau)\| = 1$ (tehát valóban az egységgömb határán van), akkor a $\phi(x) := \frac{1}{2}\|\varphi(x)\|^2$ függvényre, ahol $x \in I(\xi)$

$$\phi'(\tau) = \langle \varphi'(\tau), \varphi(\tau) \rangle = \langle f(\tau, \varphi(\tau)), \varphi(\tau) \rangle < 0.$$

Azaz, alkalmasan választott $\varepsilon > 0$-ra a $\phi|_{[\tau,\tau+\varepsilon)}$ függvény monoton csökkenő, azaz minden $x \in [\tau, \tau + \varepsilon)$-ra $\varphi(x) \in B_1(0)$.

Legyen most $\xi_1, \xi_2 \in B_1(0)$. Ezen kezdeti értékekhez tartozó ψ_1, ψ_2 maximális megoldásokra

$$(\psi_1 - \psi_2)(x) = \xi_1 - \xi_2 + \int_0^x \left(f\left(t, \psi_1(t) - f(t, \psi_2(t))\right)\right) dt,$$

ahol $x \in [0, \infty)$. Ezt becsülve, az első feltételt felhasználva

$$\|(\psi_1 - \psi_2)(x)\| \leq \|\xi_1 - \xi_2\| + \int_0^x L\|(\psi_1 - \psi_2)(t)\| dt$$

adódik. Erre alkalmazva a Grönwall-lemmát,

$$\|(\psi_1 - \psi_2)(x)\| \leq \|\xi_1 - \xi_2\| \exp(Lx).$$

Emiatt a

$$P : B_1(0) \to B_1(0), \qquad P(\xi) := \phi(T)$$

Poincaré-leképezés folytonos, emiatt a Brouwer-féle fixponttételt alkalmazva P-nek van fixpontja, mégpedig $\varphi(0)$. Tehát $\varphi(T) = P(\varphi(0)) = \varphi(0)$.

Alkalmazva az első feltételt, látható, hogy φ és $\varphi(\cdot + T)$ is megoldása a (9.36)-nak, továbbá ezek az egyértelműség miatt egyenlőek. Így beláttuk, hogy (9.36) φ megoldása T-periodikus. ■

A Schauder-féle fixponttételt alkalmazva bebizonyítható az alábbi tétel (vö. [6]).

9.27. Tétel. *Legyen* $e : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *folytonos,* T*-periodikus függvény, azaz*

$$e(t+T) = e(t) \qquad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Továbbá legyen

$$\int_0^T e(s)ds = 0.$$

Ha $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény folytonos és*

$$g(x)/x \to 0, \ \textit{ha} \ |x| \to \infty,$$

és létezik egy b *szám melyre*

$$xg(x) \geq 0, \ \textit{ha} \ |x| \geq b,$$

akkor bármely $c \in \mathbb{R}$ *számra a*

$$x'' + cx' + g(x) = e$$

differenciálegyenletnek létezik legalább egy T*-periodikus megoldása.*

10. Differenciaegyenletek

A differenciaegyenletek a differenciálegyenletekkel ellentétben diszkrét halmazon vannak értelmezve. A matematikai alkalmazásaiban számos területen előfordulnak, legyen szó valószínűségszámításról, biológiai populáció kérdésekről, vagy programozásról. Gyakorlatilag bárhol, ahol rekurzív sorozatokkal találkozhatunk (vö. [1]).

Az előzőekhez hasonlóan itt is fontos szerepet kapnak a periodikus megoldások. Ebben a fejezetben erre nézünk néhány definíciót és tételt.

Legyen $n \in \mathbb{N}_0$, és $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Ekkor az

$$y(n+1) = f(n, y(n)) \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{10.37}$$

differenciaegyenlettel fogunk foglalkozni.

A (10.37) megoldása egy olyan $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^m$ sorozat, melyre

$$\varphi(n+1) = f(n, \varphi(n)) \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

teljesül.

A (10.37) differenciaegyenlet felírható két ekvivalens formában:

$$y(n+1) = d(n)y(n) + b(n), \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{10.38}$$

vagy

$$\Delta y(n) = a(n)y(n) + b(n), \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{10.39}$$

ahol a korábbiakkal ellentétben pedig Δ a differenciaoperátort jelöli, azaz $\Delta y(n) = y(n+1) - y(n)$. A második egyenletből az elsőt egy egyszerű $a(n) = d(n) - 1$ behelyettesítéssel kapjuk.

10.6. Definíció. *A $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ sorozatot p-**periodikus**nak nevezzük, ha $\varphi(n+p) = \varphi(n)$ minden $n \in \mathbb{N}_0$-re, és p pozitív egész. Az p-t alapperiódusnak nevezzük, ha nem létezik másik p_1 periódus, melyre $p_1 < p$.*

Ha $a = b \equiv 0$, akkor (10.39) megoldásai a konstans függvények, melyek 1-periodikusak.

Ha $a \equiv 0$, akkor a megoldás

$$\varphi(n) = c + \sum_{l=0}^{n-1} b(l), \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

alakú, ahol c tetszőleges konstans. Ez az (10.39)-be való behelyettesítéssel ellenőrizhető. Az $\varphi(n+p) = \varphi(n)$ egyenletbe való behelyettesítéssel pedig az adódik, hogy az p-periodikussághoz szükséges és elégséges feltétel

$$\sum_{l=0}^{p-1} b(l) = 0,$$

és b függvény pedig legyen p-periodikus.

Szintén ellenőrizhető, hogy a $b \equiv 0$ esetben a megoldás

$$\varphi(n) = c \prod_{l=0}^{n-1} (1 + a(l)), \qquad n \in \mathbb{N}_0 \tag{10.40}$$

alakú, ahol c tetszőleges konstans.

Tehát ha $a(j) = -1$ valamely $j \in \mathbb{N}_0$-ra, akkor $y(n) = 0$, ha $n > j$, tehát létezik 1-periodikus triviális megoldás megfelelően nagy n-re. Ha ez nem teljesül, akkor a szükséges és elégséges feltétele a nemtriviális periodikus megoldás létezésének az, hogy a p-periodikus és

$$\prod_{l=0}^{p-1} (1 + a(l)) = 1.$$

Ha $a \neq 0$, $b \neq 0$, akkor a megoldás

$$\varphi(n) = c \prod_{l=0}^{n-1} (1 + a(l)) + \sum_{l=0}^{n-1} \left(\prod_{j=l+1}^{n-1} (1 + a(j)) \right) b(l), \qquad n \in \mathbb{N}_0 \tag{10.41}$$

alakú, amely szintén ellenőrizhető behelyettesítéssel.

Először nézzük azt az esetet mikor a és b függvények p-periodikusak.

10.28. Tétel. *Legyenek $a, b : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ függvények p-periodikusak. Ha*

$$\prod_{l=0}^{p-1} (1 + a(l)) \neq 1,$$

akkor (10.39)*-nek létezik egy egyértelmű p-periodikus megoldása az*

$$y(0) = \left[\sum_{l=0}^{p-1} \left(\prod_{j=l+1}^{p-1} (1 + a(j)) \right) b(l) \right] \left[1 - \prod_{j=0}^{p-1} (1 + a(j)) \right]$$

kezdeti értékkel.

Ha

$$\prod_{l=0}^{p-1}(1+a(l))=1, \qquad \sum_{l=0}^{p-1}\left(\prod_{j=l+1}^{p-1}(1+a(j))\right)b(l)=0,$$

akkor minden megoldás p-periodikus.

Ha

$$\prod_{l=0}^{p-1}(1+a(l))=1, \qquad \sum_{l=0}^{p-1}\left(\prod_{j=l+1}^{p-1}(1+a(j))\right)b(l)\neq 0,$$

akkor nincs p-periodikus megoldás.

Bizonyítás. Az (10.41) általános megoldás alakjából, $\varphi(p)=\varphi(0)$ periodikussági feltételt felírva a tétel átalakításokkal adódik. ■

Az eddig belátott feltételekből látszik, hogy (10.39)-nek pontosan akkor van egyértelmű p-periodikus megoldása, ha a

$$\Delta x(n)=a(n)x(n), \qquad n\in\mathbb{N}_0 \tag{10.42}$$

homogén egyenletnek nincsen nemtriviális p-periodikus megoldása.

A továbbiakban ne tegyük fel a és b periodicitását.

10.29. Tétel. *Ha az a függvény nem p-periodikus semmilyen $p\in\mathbb{N}$-re, akkor* (10.39)-*nek legfeljebb egy p-periodikus megoldása lehet.*

Bizonyítás. Indirekt módon, tegyük fel, hogy u és v két különböző p-periodikus megoldása (10.39)-nek.

Ha valamely $j\in\mathbb{N}_0$-ra $u(j)=v(j)$, tehát (10.39) $y(n+1)=(1+a(n))y(n)+b(n)$ alakjából következik, hogy $u(n)=v(n)$ minden $n>j$-re. Ezáltal, u és v periodikussága miatt $u(n)=v(n)$, minden $n\in\mathbb{N}_0$-ra. Emiatt semelyik két különböző u és v megoldás nem veheti fel ugyanazt az értéket sehol. Emiatt $u(n)-v(n)$ egy soha el nem tűnő p-periodikus megoldása a (10.42) homogén egyenletnek. De ekkor a már belátott feltételek miatt a függvénynek muszáj periodikusnak lennie, tehát ellentmondásra jutottunk. ■

Tudjuk, hogy minden periodikus megoldás korlátos. Tehát a korlátosság szükséges feltétele a periodicitás szükséges feltétele is egyben. Például, ha $\sum_{l=0}^{\infty}a(l)$ abszolút konvergens, akkor a periodikus megoldás létezésének szükséges feltétele a $\left(\sum_{l=0}^{n}b(l)\right)_{n=0}^{\infty}$ sorozat korlátossága. De sajnos a korlátosság, bár szükséges, de nem elégséges feltétele a periodikus megoldás létezésének.

A továbbiakban vezessünk be néhány új, a periodikussággal kapcsolatos definíciót, és kapcsoljuk össze tulajdonságaikat az eddig látottakkal.

10.7. Definíció. *Az $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ függvény* ***aszimptotikusan p-periodikus****, ha léteznek olyan u és v függvények, melyekre $\varphi(n) = u(n) + v(n)$ minden $n \in \mathbb{N}_0$-ra, úgy hogy u p-periodikus, és $\lim_{n\to\infty} v(n) = 0$.*

Nyilvánvalóan minden p-periodikus függvény aszimptotikusan p-periodikus, $v \equiv 0$, $\varphi(n) \equiv u(n)$ választással.

10.30. Tétel. *Legyen a p-periodikus, $a(n) \neq -1$, $b(n) = c(n) + q(n)$ minden $n \in \mathbb{N}_0$, ahol $c(n)$ p-periodikus. Ha*

$$\prod_{l=0}^{p-1}(1 + a(l)) = 1,$$

$$\sum_{j=0}^{p-1}\left(\prod_{j=l+1}^{p-1}(1 + a(j))\right)c(l) = 0,$$

és

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\prod_{l=0}^{l}(1 + a(j))^{-1}\right)q(l) < \infty,$$

akkor (10.39) *minden megoldása aszimptotikusan p-periodikus.*

Bizonyítás. A (10.28.) tétel miatt a $\Delta y(n) = a(n)y(n)+c(n)$ egyenlet minden megoldása p-periodikus, mert $a(n)$ és $c(n)$ is p-periodikus és teljesülnek az erre vonatkozó feltételek. Legyen ζ a

$$\Delta z(n) = a(n)z(n) + c(n) + q(n), \qquad n \in \mathbb{N}_0 \tag{10.43}$$

egyenlet egy megoldása. Továbbá legyen $\omega(n) = \zeta(n) - \varphi(n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Ekkor ω megoldása a $\Delta w(n) = a(n)w(n) + q(n)$ egyenletnek, ugyanis

$$\Delta w(n) = a(n)z(n) + c(n) + q(n) - a(n)y(n) - c(n) = a(n)w(n) + q(n).$$

Az egyenletet átírhatjuk $w(n+1)-(1+a(n))w(n)=q(n)$ alakba, melyet beszorozva $\left(\prod_{l=0}^{n}(1+a(l))^{-1}\right)$-zel

$$\left(\prod_{l=0}^{n}(1+a(l))^{-1}\right)w(n+1)-\left(\prod_{l=0}^{n-1}(1+a(l))^{-1}\right)w(n)=\left(\prod_{l=0}^{n}(1+a(l))^{-1}\right)q(n)$$

adódik.

Ezt szummázva $l=0$-tól $n-1$-ig, figyelembe véve a kieső tagokat megkapjuk hogy

$$\left(\prod_{l=0}^{n-1}(1+a(l))^{-1}\right)w(n)=w(0)+\sum_{l=0}^{n-1}\left(\prod_{l=0}^{n}(1+a(l))^{-1}\right)q(n).$$

Ha n-nel tartunk a végtelenbe, a jobb oldalon lévő kifejezés a tételben feltett feltétel miatt egy konstans σ számhoz tart, tehát a bal oldalnak is ide kell konvergálnia, ha $n\to\infty$. Vagyis

$$\left(\prod_{l=0}^{n-1}(1+a(l))^{-1}\right)w(n)=\sigma+\phi(n),$$

ahol $\phi(n)\to 0$, ha $n\to\infty$.

Vagyis átrendezve és visszahelyettesítve az eredeti (10.43) egyenletbe

$$\zeta(n)=\varphi(n)+\sigma\prod_{l=0}^{n-1}(1+a(l))+\phi(n)\prod_{l=0}^{n-1}(1+a(l))$$

adódik. Itt az első két tag összege p-periodikus, míg az utolsó tag a $\phi(n)$-s szorzó miatt 0-hoz tart. Ezzel beláttuk, hogy (10.43) minden megoldása aszimptotikusan p-periodikus.

■

Most két másik periodikussággal kapcsolatos fogalmat fogunk bevezetni.

10.8. Definíció. *Az $\varphi:\mathbb{N}_0\to\mathbb{R}$ függvényt **lineárisan súlyozott p-periodikus**nak (l.s.p-periodikusnak) nevezzük, ha létezik egy λ konstans, és egy véges $\{\alpha(0),\ldots,\alpha(p-1)\}$ sorozat, úgy hogy minden $t\in\mathbb{N}_0$-ra és $s\in\{0,1,\ldots,p-1\}$-re*

$$\varphi(tp+s)=\alpha(s)+t\lambda.$$

10.9. Definíció. *Az $\varphi:\mathbb{N}_0\to\mathbb{R}$ függvényt **exponenciálisan súlyozott p-periodikus**nak (e.s.p-periodikusnak) nevezzük, ha létezik egy λ konstans, és egy véges $\{\alpha(0),\ldots,\alpha(p-1)\}$ sorozat, úgy hogy minden $t\in\mathbb{N}_0$-ra és $s\in\{0,1,\ldots,p-1\}$-re*

$$\varphi(tp+s)=\lambda^t\alpha(s).$$

Megjegyezzük, hogy ha a fenti definíciókban λ a feladat szempontjából fontos akkor λ-l.s.p-, illetve λ-e.s.p-periodikusságról beszélünk.

Látható, hogy az p-periodikusság ekvivalens a 0-l.s.p-, és 1-e.s.p-periodikussággal.

Továbbá egy λ_1-l.s.p-, és egy λ_2-l.s.p-periodikus függvény összege $(\lambda_1 + \lambda_2)$-l.s.p-periodikus, valamint λ_1-e.s.p-, és egy λ_2-e.s.p-periodikus függvény szorzata $(\lambda_1\lambda_2)$-e.s.p-periodikus.

Látható, hogy ha b p-periodikus, akkor a $\Delta y(n) = b(n)$ egyenlet minden φ megoldása $\left(\sum\limits_{l=0}^{p-1} b(l)\right)$-l.s.$p$-periodikus, ahol $\alpha(s) = \varphi(s), s \in \{0, 1, \dots p-1\}$. A fejezet elején tárgyalt periodikussági feltételt teljesítő általános megoldást behelyettesítve az l.s.p-periodikusság definíciójában szereplő képletbe, adódik a megoldás.

Valamint, hasonlóképp belátható, hogy ha a p-periodikus akkor a $\Delta y(n) = a(n)y(n)$ egyenlet minden φ megoldása $\left(\prod\limits_{l=0}^{p-1}(1 + a(l))\right)$-e.s.$p$-periodikus, ahol $\alpha(s) = \varphi(s), s \in \{0, 1, \dots p-1\}$.

10.10. Definíció. *Az $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ függvényt (ϕ, ψ)**-súlyozott** p**-periodikus**nak ((ϕ, ψ)-s.p-periodikusnak) nevezzük, ha létezik egy véges $\{\alpha(0), \dots, \alpha(p-1)\}$ sorozat, úgy hogy minden $t \in \mathbb{N}_0$-ra és $s \in \{0, 1, \dots, p-1\}$-re*

$$\varphi(tp + s) = \phi(t)\alpha(s) + \psi(t),$$

ahol $\phi, \psi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$.

A $\phi \equiv 1$ esetben az $(1, \psi)$-s.p-periodikus függvényt ψ-additívan súlyozott p-periodikusnak (ψ-a.s.p-periodikusnak) nevezzük.

A $\psi \equiv 0$ esetben az $(\phi, 0)$-s.p-periodikus függvényt ϕ-multiplikatívan súlyozott p-periodikusnak (ϕ-m.s.p-periodikusnak) nevezzük.

A ϕ függvény jellemzi a tagok viselkezését a periódusokban, míg ψ a periodusok viselkedését.

Látható, hogy minden λ-e.s.p-periodikus függvény ϕ-m.s.p-periodikus $\phi(t) = \lambda^t$-nel. Hasonlóképp minden λ-l.s.p-periodikus függvény ψ-a.s.p-periodikus $\psi(t) = \lambda t$-vel.

Most lássuk be az alábbi felbonthatósági tételt.

10.31. Tétel. *Legyenek a, b p-periodikus függvények, és $a(n) \neq -1$ bármely $n \in \mathbb{N}_0$-ra. Ekkor minden $\varphi(n)$ megoldása (10.39)-nek felbontható*

$$\varphi(n) = u(n) + v(n), n \in \mathbb{N}_0$$

alakban, ahol u $\left(\prod_{l=0}^{p-1}(1+a(l))\right)$-e.s.p-periodikus, v pedig $\left(\sum_{l=1}^{t}\lambda^l\right)$-m.s.p-periodikus.

Bizonyítás. Legyen φ az (10.39) egy megoldása, χ a homogén (10.42) egyenlet megoldása, ha feltesszük, hogy $x(0) \neq 0$. Tegyük fel továbbá, hogy

$$\varphi(n) = c(n)\chi(n),$$

ahol c ismeretlen függvény. Ezt visszahelyettesítve (10.39)-be, elemi számolással látható, hogy c-re

$$\Delta c(n) = \frac{b(n)}{\chi(n)(1+a(n))}$$

adódik, amelyből

$$c(n) = c(j) + \sum_{l=j}^{n-1} \frac{b(l)}{\chi(l)(1+a(l))} \qquad j, n \in \mathbb{N}_0, j \leq n \tag{10.44}$$

ered.

Legyen $s \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, és (10.44)-ban $j = s$, $n = tp + s$, mely által

$$c(tp+s) = c(s) + \sum_{l=s}^{tp+s-1} \frac{b(l)}{\chi(l)(1+a(l))} = c(s) + \sum_{j=1}^{t} \left(\sum_{l=(j-1)p+s}^{jp+s-1} \frac{b(l)}{\chi(l)(1+a(l))} \right).$$

Mivel χ a homogén egyenlet megoldása, (10.40) miatt, rekurziót alkalmazva

$$\chi(n) = \chi(j) \prod_{l=j}^{n-1}(1+a(l)), j, n \in \mathbb{N}_0, j \leq n.$$

Ebből,

$$\chi((j-1)p+s+i) = \chi(s+i) \prod_{l=s+i}^{(j-1)p+s+i-1} (1+a(l)) = \chi(s+i)\lambda^{j-1}$$

$i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ esetén, alkalmazva λ tételbeli definícióját.

Következésképp, visszatérve az előző egyenlethez, felhasználva a és b periodicitását

$$\sum_{l=(j-1)p+s}^{jps-1} \frac{b(l)}{\chi(l)(1+a(l))} = \frac{1}{\lambda^{j-1}} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{b(s+i)}{\chi(s+i)(1+a(s+i))}. \tag{10.45}$$

Most legyen

$$\gamma(s) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{b(s+i)}{\chi(s+i)(1+a(s+i))}, \qquad s = 0, 1, \dots p-1.$$

Ekkor (10.45)-öt visszahelyettesítve $c(tp+s)$ képletébe,

$$c(tp+s) = c(s) + \sum_{i=0}^{t} \left(\frac{1}{\lambda^{j-1}} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{b(s+i)}{\chi(s+i)(1+a(s+i))} \right) = c(s) + \gamma(s) \sum_{i=0}^{t} \frac{1}{\lambda^{j-1}}.$$

Továbbá

$$\chi(tp+s) = \chi(s) \prod_{l=s}^{tp+s-1} (1+a(l)) = \chi(s) \prod_{l=0}^{tp-1} = \chi(s)\lambda^t.$$

Visszahelyettesítve $\varphi(n) = c(n)\chi(n)$-be a most kiszámolt értékeket

$$\varphi(tp+s) = \chi(tp+s)x(p+s) = \left(c(s) + \gamma(s) \sum_{i=0}^{t} \frac{1}{\lambda^{j-1}} \right) \chi(s)\lambda^t =$$

$$(c(s)\chi(s))\lambda^t + (\chi(s)\gamma(s)) \sum_{j=1}^{t} \lambda^j, \qquad s = 0, 1, \dots, p-1, t =, 0, 1, \dots$$

Így tehát beláttuk, hogy $\varphi(tp+s) = u(tp+s) + v(tp+s)$, ahol $u(tp+s) = (c(s)\chi(s))\lambda^t, v(p+s) = (\chi(s)\gamma(s)) \sum_{j=1}^{t} \lambda^j$.

Nyilvánvalóan u $\lambda - e.s.p$-periodikus $\alpha(s) = c(s)\chi(s)$-sel, és v ϕ-m.s.p-periodikus $\alpha(s) = \chi(s)\gamma(s)$-el, $s \in 0, 1, \dots p-1$. ■

Hivatkozások

[1] Agarwal, R. P., Young, P. Y.: *Advanced Topics in Difference Equations*, Springer Netherlands, 1997.

[2] Baumeister, J.: *Differentialgleichungen*, Goethe-Universität, 1999.

[3] Farkas, M.: *Speciális függvények műszaki-fizikai alkalmazásokkal*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1964.

[4] Farkas, M.: *Periodic motions*, *Applied Mathematical Sciences*, **104** Springer-Verlag, 1994.

[5] Kovács, S.: *Funkcionálanalízis feladatokban, egyetemi jegyzet*, (2013) ISBN: 978-963-284-445-9

[6] Lazer, A. C.: *On Schauder's Fixed Point Theorem and Forced Second-Order Nonlinear Oscillations*, Journal of Mathematical Analysis And Applications 21, 1968.

[7] Werner, B.: *Dynamical system theory and bifurcation analysis for microscopic traffic models*, University of Hamburg, 2010.