

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Leipold Péter Zoltán

FOLYADÉKÁRAMLÁS LEÍRÁSA KOMPLEX
FÜGGVÉNYTANI ESZKÖZÖKKEL ÉS
MODELLEZÉSE MATLAB PROGRAMMAL

BSc Szakdolgozat

Témavezető:

Sigray István

Analízis Tanszék



Budapest, 2017

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném kifejezni köszönetemet és tiszteletemet mindenkinek, aki hozzájárult a diplomamunkám elkészüléséhez.

Mindenekelőtt szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Sigray Istvánnak, aki a hasznos ötletein, útmutatásain és a felmerülő kérdésekre adott készséges válaszain felül a türelmével és rugalmasságával is értékes segítséget nyújtott. Szeretném megköszönni a szakdolgozat kinyomtatásában és bekötésében nyújtott segítségét édesapámnak, Leipold Zoltánnak. Szeretnék továbbá köszönetet mondani az egész családomnak, a barátaimnak és az évfolyamtársaimnak, akik pozitív hozzáállásukkal átlendítettek engem a nehezebb napokon.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	5
1.1. Motiváció	5
1.2. A szakdolgozat célja	5
1.3. Történeti áttekintés	6
2. Elmélet	7
2.1. Elméleti bevezetés	7
2.1.1. A fluxus és a cirkuláció	8
2.1.2. Az áramvonalak	9
2.2. A nyomás kiszámítása	9
2.2.1. Jelölések	9
2.2.2. Számolás egy kis négyzeten	9
2.2.3. A gyorsulás	10
2.2.4. A nyomás képlete	10
2.3. A felhajtóerő kiszámítása – a Kutta-Zsukovszkij-tétel	11
3. Áramlás két akadály körül, megvalósítás Matlab programmal	14
3.1. Az akadályok - elmélet	14
3.1.1. Akadály az áramlásban	15
3.1.2. Két akadály megvalósítása	16
3.2. Az áramlás modellezése	16
3.2.1. A szimbolikus számolás nehézségei – a komplex logaritmusfüggvény	16
3.2.2. A numerikus számolás hibája	17
3.3. A program megalkotása	18
3.3.1. A numerikus számolás hibájának kezelése	18
3.3.2. A stagnációs pontok kiszámítása	19
3.3.3. Az inputparaméterek megválasztása	20
3.3.4. A programkód	21
3.3.5. Megjegyzések	23
3.4. Az áramlás kirajzolása és az eredmények értelmezése	23
3.4.1. Áramlás két akadály körül	24
3.4.2. Áramlás egy akadály körül	26

3.4.3. Különböző inputparaméterekkel kapott eredmények összehasonlítása	27
3.5. Két akadályra ható felhajtóerő	29
Irodalomjegyzék	30

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Motiváció

A témám kiválasztása során legfőképpen egy dolgot tartottam szem előtt: szerettem volna az adott kereteken belül egy minél gyakorlatiasabb, a való életből is táplálkozó példákat felsorakoztató témakörrel foglalkozni. Már középiskolás koromban is a matematikának legfőképp az a része érdekelt, ahol az elméletet könnyen át lehetett ültetni a gyakorlatba, így kézenfekvőnek éreztem a matematika és a fizika határterületén mozgó problémák tárgyalását a szakdolgozatomban.

A programozási feladat beleillik ebbe a koncepcióba. A segítségével az elsöre barátságatalannak tűnő elmélet rendkívül szemléletessé válik, az áramlások tanulmányozása pedig egy új szemszögből válik lehetségessé.

1.2. A szakdolgozat célja

A szakdolgozatom témája a hidrodinamika, a folyadékáramlások vizsgálata. A diplomamunka első felének az alapvető elméleti – matematikai és fizikai – háttér ismertetése a célja. Megismerkedünk a témához kapcsolódó fogalmak definíciójával, és megmutatjuk, hogy a komplex függvénytan segítségével hogyan lehet matematikailag leírni ezeket, milyen összefüggések teljesülnek rájuk. Behatóbban megvizsgáljuk, hogy milyen erő hat egy folyadékáramlásban elhelyezett akadályra, illetve miként lehet kiszámolni azt.

A szakdolgozat második részében szeretnénk olyan áramlásokat modellezni, amelyekben két – komplex függvénytani eszközökkel definiált – akadály van elhelyezve. A körülöttük zajló áramlásról szeretnénk képet kapni egy program segítségével. Meggondoljuk, hogy milyen szoftver a legalkalmasabb a feladatra, áttekintjük a program megalkotásának matematikai szempontból fontos részeit. A modellezés eredményeként kapott ábrákat megvizsgáljuk, és összehasonlítjuk őket egymással. Végül megpróbál-

juk az elméleti részben bemutatott képleteket alkalmazva kiszámolni az akadályokra ható felhajtóerőt.

1.3. Történeti áttekintés

A komplex számok létrejöttének a történelem során alapvetően egy fő motivációja volt: a gyökvonás művelete kivezet a valós számok halmazából, így negatív számok négyzetgyökét nem tudták értelmezni. Már az első században az ókori görög matematikus, Hérón egyik munkájában is előkerült egy csonkakúp térfogatának kiszámítása során - látszólag egy hibából adódóan - egy negatív szám, melyből gyököt kell vonni, bár ő ezt akkor egyszerűen az ellentettjére cserélte. [4]

A komplex számok valódi kialakulása azonban csak a 16. században történt meg, amikor egy igen fontos és kézzel fogható probléma, a harmadfokú egyenlet megoldása során futottak bele negatív számokba a gyökjel alatt. Az

$$x^3 + px + q = 0$$

általános alakú harmadfokú egyenlet ekkor megalkotott megoldóképletében, a Cardano-formulában ugyanis éppen abban az esetben kell negatívból gyököt vonni, amikor az egyenletnek három valós megoldása van. Szükségszerűvé vált a számfogalom kiterjesztése, definiálni kellett egy számot, amely négyzetgyöke egy negatív számnak. Ez lett az i , melyre definíció szerint igaz, hogy $i^2 = -1$.

A komplex függvénytan kifejlődésére egészen a 19. század első feléig-közepéig kellett várni, ekkor tevékenykedett a tudományág több nagy alakja, többek között Georg Friedrich Bernhard Riemann és Augustin Cauchy. [5]

2. fejezet

Elmélet

Ebben a fejezetben a komplex függvénytan hidrodinamikai alkalmazásáról lesz szó. Az alapvető fogalmak definiálása után több fontosabb tétel kerül kimondásra, melyek közül néhánynak a bizonyítását is áttekintjük. Szó lesz továbbá a fizikai jelenségek mögött megbúvó matematikáról, illetve fizikai adatok – sebesség, nyomás, fluxus, cirkuláció – kiszámításáról. A fejezetben Halász Gábor Kis hidrodinamika című jegyzetéből, valamint Sigray István Hidrodinamika komplex függvénytani eszközökkel című előadásából vannak részek feldolgozva.

2.1. Elméleti bevezetés

A komplex számsík bijektíven megfeleltethető \mathbb{R}^2 -nek, például $z = a + ib$ -t ($a, b \in \mathbb{R}$) megfeleltetve $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ -nek. Így tehát tekinthetünk \mathbb{C} -re egy \mathbb{R}^2 -tel izomorf vektortérként (ezáltal a függvényeire vektormezőkként), a sík tartományaira pedig a komplex számsík részeként.

1. Definíció. $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ vektormező, $f(z, t)$ a t időpillanatban a z pontban tartózkodó részecske sebessége. Ekkor f áramlás.

2. Definíció. Ha az áramlás időben állandó, azaz f nem függ t -től, akkor stacionárius áramlásról beszélünk.

3. Definíció. Egy áramlás forrás-nyelő mentes, ha tetszőleges görbék által határolt résztartományán egységnyi idő alatt ugyanannyi folyadék áramlik be, mint ki.

A további vizsgálódás során stacionárius folyadékáramlásokkal fogunk foglalkozni. Feltesszük továbbá azt is, hogy a folyadék összenyomhatatlan, örvénymentes és forrás-nyelő mentes.

Tekintsünk egy ilyen $f(z)$ sebességvektor-mezőt

$$f(x + iy) = u(x, y) - iv(x, y)$$

alakban, ahol u és v folytonosan differenciálható és $u(x, y) - iv(x, y)$ holomorf D -n (utóbbi tulajdonság ekvivalens a forrás-nyelő mentességgel).

A továbbiakban definiálunk néhány fontos, f -et jellemző számot, és megvizsgáljuk, hogy miként lehet kiszámítani őket adott f vektormezőben zajló áramlás esetén.

2.1.1. A fluxus és a cirkuláció

4. Definíció. *Az egységnyi felületen egységnyi idő alatt átáramló folyadékmennyiséget fluxusnak nevezzük.*

Egy γ egyszerű görbén a fluxus kiszámításához számoljuk ki, hogy γ egy kicsi (ezáltal egy szakasznak tekinthető), $dz = (dx + idy)$ íven mennyi folyadék halad át. Ehhez ismernünk kell $f(z)$ vektormező a szakaszra merőleges komponensének nagyságát. Világos, hogy ekkor a szakaszon átáramló folyadék mennyisége a merőleges komponens, szorozva dz -vel. $-idz$ merőleges dz -re, $f(z) - idz$ -vel párhuzamos komponense ekkor a két vektor skalárszorzata:

$$\overline{(f(z), -idz)} = (u + iv, dy - idx) = -v \cdot dx + u \cdot dy = \Im(f(z)dz) ,$$

tehát a teljes γ íven a fluxus:

$$\int_{\gamma} -v \cdot dx + u \cdot dy dz = \Im \int_{\gamma} f(z) dz .$$

5. Definíció. *Cirkulációnak nevezzük azt, hogy γ -t mennyire szeretné az áramlás negatív iránya forgatni.*

A cirkuláció kiszámítása nagyon hasonlóan történik, a dz íven most egy másik skalárszorzatot kell kiszámolnunk:

$$\overline{(f(z), dz)} = (u + iv, dx + idy) = u \cdot dx + v \cdot dy = \Re(f(z)dz) ,$$

tehát a teljes γ íven a cirkuláció:

$$\int_{\gamma} u \cdot dx + v \cdot dy dz = \Re \int_{\gamma} f(z) dz .[3]$$

Ezen a ponton érdemes megemlíteni a Cauchy-féle integráltételt, amely azt mondja ki, hogy egy egyszeresen összefüggő tartományon értelmezett komplex deriválható függvény zárt görbe mentén vett vonalintegrálja 0. A fentiek alapján a tételnek az a fizikai jelentése, hogy egy ilyen függvény által meghatározott áramlásban egy zárt görbe mentén a fluxus és a cirkuláció is 0.

2.1.2. Az áramvonalak

6. Definíció. Legyen $D \in \mathbb{C}$ tartomány, (u, v) az eddig megszokott módon definiált vektormező. Ekkor azt mondjuk, hogy $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ görbe áramvonal, ha γ sima és

$$\gamma'(t) = (u(\gamma(t)), v(\gamma(t))) .$$

Az áramvonal fizikai jelentése egy olyan sima görbe, amelynek bármely kis darabján a fluxus 0, azaz

$$\Im \int_{\gamma^*} f(z) dz = \Im (F(\gamma^*(b)) - F(\gamma^*(a))) ,$$

ahol $\gamma^* : [a, b] \rightarrow D$ γ egy kis darabja, F pedig f primitív függvénye γ^* egy kis környezetében. F létezik, ha γ^* átmérője elég kicsi. Ekkor az áramvonal egyenlete:

$$\Im F(z) = konstans.[1]$$

2.2. A nyomás kiszámítása

2.2.1. Jelölések

A további számolás során előforduló fizikai mennyiségeknél a hagyományos jelöléseiket használjuk:

- m : tömeg
- F : erő
- a : gyorsulás
- ρ : sűrűség
- p : nyomás

2.2.2. Számolás egy kis négyzeten

Szeretnénk kiszámolni, hogy az $f(x + iy) = u(x, y) - iv(x, y)$ áramlás pontjaiban mekkora a nyomás ($p(z)$). Kihasználjuk, hogy a folyadékot, amiben az áramlás zajlik, összenyomhatatlannak tekintjük, és egy kicsi $[x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - h, y_0 + h]$ négyzetre ható erőt számoljuk ki. Képzeljük a négyzetet a tengelyekkel párhuzamosnak.

Az erő vízszintes komponensét (F_x) a négyzet bal és jobb oldalára ható erők összege adja. Mivel az erő vektormennyiség, az előjel az irányt jelenti: a négyzet belsejéből kifele, vagy a külsejéből befele mutat a nyomóerő.

$$F_x = \int_{-h}^h (x_0 - h, y_0 + t) dt - \int_{-h}^h (x_0 + h, y_0 + t) dt .$$

Összevonva, és középértéktételt alkalmazva:

$$F_x = 2h(p(x_0 - h, y_0 + t_1) - p(x_0 + h, y_0 + t_1)) = -4h^2 \cdot \frac{\partial p}{\partial x}(x_0 + t_2, y_0 + t_1) .$$

Teljesen hasonló módon kapjuk a függőleges komponenst, F_y -t:

$$F_y = \int_{-h}^h (x_0 + t, y_0 - h) dt - \int_{-h}^h (x_0 + t, y_0 + h) dt$$

$$F_y = -4h^2 \cdot \frac{\partial p}{\partial y}(x_0 + t_3, y_0 + t_4) .$$

2.2.3. A gyorsulás

Newton második törvénye szerint

$$F = m \cdot a .$$

A kis négyzet homogén anyagnak tekintendő, így a tömegét kifejezhetjük a sűrűségével és a térfogatával – ami jelen esetben a négyzet területe.

$$m = \rho \cdot 4h^2 ,$$

tehát

$$a = \frac{F}{\rho \cdot 4h^2} .$$

Az erő helyébe behelyettesítve a kiszámolt formulát és egyszerűsítve adódik a gyorsulásvektor:

$$a = -\frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x}(x_0 + t_2, y_0 + t_1), \frac{\partial p}{\partial y}(x_0 + t_3, y_0 + t_4) \right) .$$

Ha h tart 0-hoz, akkor t_i -k is tartanak 0-hoz. Ekkor feltéve, hogy p folytonosan differenciálható,

$$a = -\frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y} \right)$$

adódik.

2.2.4. A nyomás képlete

Hogy $p(z)$ -re még szebb képletet kapjunk, tegyük fel, hogy $\gamma(t)$ áramvonal átmegy $z_0 = (x_0, y_0)$ ponton, és $\gamma(0) = z_0$. Mivel a gyorsulás kifejezhető az út idő szerinti második deriváltjával, $a(x_0, y_0) = \gamma''(t)$ következik. Legyen $\gamma'(t) = (u(\gamma(t)), v(\gamma(t)))$,

ezt kell még egyszer deriválni, hogy $\gamma''(t)$ -t kapjuk. Számolhatunk koordinátánként: a láncszabály szerint

$$\frac{\partial}{\partial t}(u(\gamma(t))) = u'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) .$$

$\gamma'(t)$ -t behelyettesítve, és a Cauchy-Riemann egyenleteket alkalmazva kapjuk, hogy az első koordináta egyenlő

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u^2}{\partial y}(\gamma(t)) + \frac{\partial v^2}{\partial x}(\gamma(t)) \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial |f|^2}{\partial x}(\gamma(t))$$

-vel.

Teljesen hasonló módon jön ki, hogy

$$\frac{\partial}{\partial t}(v(\gamma(t))) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial |f|^2}{\partial y}(\gamma(t)) .$$

Ekkor $a(x_0, y_0) = \gamma''(t)$ miatt $t = 0$ esetén

$$a = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial |f|^2}{\partial x}, \frac{\partial |f|^2}{\partial y} \right) ,$$

ezt összevetve a gyorsulásra korábban kapott képlettel

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\rho}{2} \cdot \frac{\partial |f|^2}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\rho}{2} \cdot \frac{\partial |f|^2}{\partial y}$$

következik, tehát

$$p(x, y) = p(z) = -\frac{\rho}{2}|f|^2 + c . [2]$$

2.3. A felhajtóerő kiszámítása – a Kutta-Zsukovszkij-tétel

Legyen $D \in \mathbb{C}$ tartomány, $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ pozitív irányítású Jordan-görbe. A kérdés az, hogy mekkora erő hat az áramlásban elhelyezett zárt görbére?

Tekintsük γ egy $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ felosztását. A görbére ható felhajtóerő megegyezik a befelé ható erővel, amit ki lehet számítani a $\gamma(t_{j-1}) \frown \gamma(t_j)$ ívekre befelé ható erők összegeként.

A befelé ható erő a görbére nehezedő nyomásból fakad. Tudjuk, hogy a nyomóerő kiszámítható a nyomás és a nyomott felület szorzataként, azaz a hagyományos jelölésekkel

$$F = p \cdot A .$$

Mivel a nyomást az eddigiek alapján egy pontban tudjuk csak kiszámolni, így a teljes ívre a nagyságát az ív egy $\gamma(\xi_j)$ pontjára ható nyomás és az ív hosszának szorzataként

számolhatjuk (közéértéktételt felhasználva). Az ív hosszát a kezdő- és végpont különbségével közelítjük. Az erő iránya az ívre merőlegesen, befelé mutat, így (a pozitív irányítás miatt) egy i -vel való szorzást produkál. Tehát

$$F_j \approx p(\gamma(\xi_j)) \cdot (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})) \cdot i ,$$

így

$$F = \sum_{j=1}^n F_j \approx p(\gamma(\xi_j)) \cdot (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})) \cdot i \rightarrow \int_{\gamma} i \cdot p(z) dz ,$$

amint a felosztás egyre finomodik. Behelyettesítve a nyomásra korábban kiszámolt képletet:

$$F = \int_{\gamma} -\frac{i\rho}{2} |f|^2(z) dz ,$$

a konstansokat kihozva

$$F = -\frac{i\rho}{2} \cdot \int_{\gamma} |f|^2(z) dz .$$

Ez kiszámolható, ha γ reguláris függvény, például egy áramvonal. Ekkor

$$\gamma'(t) = (u(\gamma(t)), v(\gamma(t))) \sin(u + iv)(\gamma(t)) \approx \bar{f}(\gamma(t)) .$$

Kihasználva a komplex vonalintegrál definícióját, valamint az iménti egyenlőséget,

$$\int_{\gamma} |f|^2(z) dz = \int_a^b |f|^2(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b (f \cdot \bar{f})(\gamma(t)) \cdot \bar{f}(\gamma(t)) dt = \int_a^b f \cdot (\bar{f}^2(\gamma(t))) dt$$

adódik.

$$\overline{\int_{\gamma} |f|^2(z) dz} = \int_a^b (\bar{f} \cdot f^2)(\gamma(t)) dt = \int_a^b \gamma(t) \cdot f^2(\gamma(t)) dt = \int_{\gamma} f^2(z) dz ,$$

így

$$F = -\frac{i\rho}{2} \cdot \overline{\int_{\gamma} f^2(z) dz} . \quad (\#)$$

A továbbiakban ennek a képletnek a fizikai jelentését vizsgáljuk meg. Ehhez felteesszük, hogy $ext\gamma \in D$ és $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ létezik és véges. Ekkor $f(z)$ Laurent-sora elég nagy R és $|z| > R$ esetén

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^0 a_n z^n ,$$

továbbá

$$f^2(z) = \sum_{n=-\infty}^0 b_n z^n .$$

Mivel

$$\int_{\gamma} f^2(z) dz = \int_{|z|=R^* > R} f^2(z) dz ,$$

így a reziduum tétel szerint

$$\int_{\gamma} f^2(z) dz = \int_{|z|=R^*} \sum_{n=-\infty}^0 b_n z^n dz = \int_{|z|=R^*} b_{-1} z^{-1} dz = 2\pi i \cdot b_{-1} .$$

Világos, hogy $b_{-1} = 2 \cdot a \cdot a_{-1}$, mivel $f(z)$ Laurent-sorát négyzetre emelve $\frac{1}{z}$ csak a konstans tag és $\frac{1}{z}$ szorzataként jöhet létre. Tehát

$$\int_{\gamma} f^2(z) dz = 4\pi i \cdot a_0 \cdot a_{-1} ,$$

ezért

$$F = -\frac{i\rho}{2} \cdot \overline{4\pi i \cdot a_0 \cdot a_{-1}} = -\rho \cdot 2\pi \cdot \overline{a_0} \cdot \overline{a_{-1}} .$$

Mivel $\overline{a_0} = \lim_{z \rightarrow \infty} \overline{f(z)} = \lim_{z \rightarrow \infty} \overline{(u(z) - iv(z))}$, $\overline{a_0}$ a sebesség határértéke a végtelemben.

Kihasználva, a Cauchy-alaptételt, valamint, hogy $\int_{\gamma} f(z) dz$ áramvonal, így a fluxusa 0, tehát az integrál tisztán valós,

$$a_{-1} = 2\pi \cdot \int_{|z|=R^*} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma} f(z) dz ,$$

vagyis $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \times \text{cirkuláció}$ és $\overline{a_{-1}} = -\frac{1}{2\pi i} \times \text{cirkuláció}$.

Mindent behelyettesítve adódik, hogy $F = -i \times \text{sűrűség} \times \text{sebesség} \times \text{cirkuláció}$, ez a Kutta-Zsukovszkij tétel. [2]

3. fejezet

Áramlás két akadály körül, megvalósítás Matlab programmal

Ebben a fejezetben az eddig látott elméletet ültetjük át a gyakorlatba: elhelyezünk két darab akadályt az áramlásban. A már ismerttetett tételek segítségével meggondoljuk, hogy hogyan nézhet ki egy ilyen áramlás, egy matematikai programsomaggal modellezzük azt, és megvizsgáljuk az eredményt.

3.1. Az akadályok - elmélet

7. Definíció. Legyenek $D_1, D_2 \in \mathbb{C}$ tartományok, $g : D_1 \rightarrow \mathbb{C}$, $f : D_2 \rightarrow \mathbb{C}$ áramlások, $\phi : D_1 \rightarrow D_2$ konform bijekció. Ekkor azt mondjuk, hogy g hasonló f -hez, ha $g = f \circ \phi \cdot \phi'$.

3.1.0.1. Tétel. Legyen $z_0, \omega_0 \in \mathbb{C}$, $\phi : B(z_0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}$ konform és $\phi(z_0) = \omega_0$. Legyenek továbbá $D_1 = \dot{B}(z_0, \epsilon)$, $D_2 = \phi(\dot{B}(z_0, \epsilon))$ tartományok, $g : D_1 \rightarrow \mathbb{C}$, $f : D_2 \rightarrow \mathbb{C}$ reguláris, hasonló függvények. Ekkor, ha g -nek z_0 -ban k -adrendű pólusa van, akkor f -nek is k -adrendű pólusa van ω_0 -ban, továbbá $k = \text{Res}[g(z)]_{z=z_0} = \text{Res}[f(w)]_{w=\omega_0}$. [1]

Bizonyítás A hasonlóság definíciója alapján $g = f \circ \phi \cdot \phi'$, így

$$\text{Res}[g(z)]_{z=z_0} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|z-z_0|=\epsilon} g(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|z-z_0|=\epsilon} (f \circ \phi)(z) \cdot \phi'(z) dz$$

átváltunk ω szerinti integrálásra:

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|z-z_0|=\epsilon} (f \circ \phi)(z) \cdot \phi'(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|z-z_0|=\epsilon} f(\omega) d\omega = \text{Res}[f(\omega)]_{\omega=\omega_0}.$$

A bizonyítás második része a pólus rendjéről szól, k képletében $g(z)$ -t behelyettesítjük, használva a szorzat deriválásának szabályát, illetve a láncszabályt:

$$k = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|z-z_0|=\delta} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|z-z_0|=\delta} \frac{(f \circ \phi)(z) \cdot (\phi')^2(z) + (f \circ \phi)(z) \cdot \phi''(z)}{(f \circ \phi)(z) \cdot \phi'(z)} dz$$

Kihasználjuk, hogy az integrál második tagja 0, ekkor

$$-\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|z-z_0|=\delta} \frac{(f \circ \phi)(z) \cdot \phi'(z)}{(f \circ \phi)(z)} dz = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\phi(|z-z_0|=\delta)} \frac{f'(\omega)}{f(\omega)} d\omega = k .$$

Tehát f pólusának a rendje ω_0 -ban éppen k . [1]

8. Definíció. *Két áramlást egy-egy (akár izolált szingularitási) pontjukban akkor mondunk lokálisan hasonlónak, ha a pontok alkalmas nyílt környezetére megszorítva azokat hasonlóak lesznek.*

3.1.0.1. Állítás (Lokális hasonlóság tétele). *A pólusok rendjének és a reziduummoknak a megegyezése elégséges feltétele a lokális hasonlóságnak.*

A bizonyítás hosszadalmas és nehéz, ezért azt részletesen nem nézzük meg. A bizonyítás alapvetően az implicit függvénytételre támaszkodik.

3.1.0.2. Tétel (Implicit függvénytétel). *Legyen $H(z, s)$ folytonos és mindkét változója szerint reguláris függvény $(z_0, s_0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ egy kis környezetében. Ha*

$$H(z_0, s_0) = 0, \quad H_s(z_0, s_0) \neq 0,$$

akkor z_0 egy elég kis környezetében létezik $S(z)$ reguláris függvény, amelyre

$$H(z, S(z)) = 0, \quad S(z_0) = s_0 .$$

Az ötlet az, hogy ha egy ügyesen megválasztott függvényre belátjuk, hogy teljesülnek a tétel feltételei, akkor meggondolható, hogy következik egy olyan ϕ függvény létezése, mint ami a hasonlóság definíciójában van.

3.1.1. Akadály az áramlásban

A $g(z) = \frac{A}{z}$ függvénynek az origóban elsőrendű pólusa van.

$$\int_{|z|=r} \frac{A}{z} = 2\pi A$$

a konjugáltjának az origó körüli körön vett vonalintegrálja. Ekkor $g(z)$ $2\pi A$ erősségű forrás. Ennek valós része az origóban keletkező fluxus, képzetes része a cirkuláció. [3] Legyen A tisztán képzetes, ekkor az origóban keletkező fluxus 0, tehát létezik olyan görbe a pólus körül, melyen nem áramlik át folyadék. Mivel egy áramvonalnak bármely kis részén 0 folyadék áramlik át, így ez a görbe egy áramvonal, ami záródik a pont körül. Ez a zárt áramvonal tekinthető egy akadállynak az áramlásban.

3.1.2. Két akadály megvalósítása

Legyen $\overline{f(z)}$ olyan, hogy

$$f(z) = \frac{\alpha}{z-a} + \frac{\beta}{z-b} + c.$$

Ekkor $\overline{f(z)}$ -nek elsőrendű pólusa van a -ban és b -ben. A lokális hasonlóság tétele szerint ekkor az a -beli pólus kis környezetében az áramlás hasonló $g(z) = \frac{\alpha}{z}$ -hez, hiszen a pólusaiak rendje és a reziduumaik is megegyeznek. Ha α tisztán képzetes, akkor a pólus körül van záródó áramvonal, ami hasonlóan az előbbihez felfogható úgy, mint egy akadály az áramlásban. Természetesen mindkét pólus esetén elmondható a gondolatmenet, így megkapható a két akadály.

3.2. Az áramlás modellezése

A bevezetésben már taglalt feladat megvalósításához módot kell találni arra, hogy képet kaphassunk az \overline{f} által meghatározott vektormezőben zajló áramlásról. A legkézenfekvőbb megoldás az, ha a program inputként \overline{f} függvény paramétereit kapja, outputként pedig egy 2 dimenziós (így a komplex számsíknak megfelelő) ábrát ad vissza, mely tartalmazza az akadályokat, az áramlás stagnációs pontjait (azokat a pontokat, ahol a vektormező értéke 0), valamint néhány célszerűen megválasztott ponton áthaladó áramvonalat.

A feladat tehát ezen objektumok kiszámítása, a szoftver kiválasztása során ezt kell figyelembe venni.

3.2.1. A szimbolikus számolás nehézségei – a komplex logaritmusfüggvény

Az áramvonalak pontos meghatározása érdekében kézenfekvő lenne egy szimbolikus matematikai szotvert használni. Az ok, amiért ez nem lehetséges, az áramvonalak kiszámításának matematikai nehézsége.

Láttuk, hogy egy áramvonalat az $\Im(F(z)) = c$ egyenlet ad meg, ahol $F' = f$ és c konstans.

$$F(z) = \int f(z) dz = \int \frac{\alpha}{z-a} + \frac{\beta}{z-b} + c dz = \alpha \cdot \log(z-a) + \beta \cdot \log(z-b) + cz + C$$

3.2.1.1. Állítás. *A komplex exponenciális függvény nem invertálható egyértelműen.*

Bizonyítás Ahhoz, hogy egy olyan logaritmusfüggvényt lehessen definiálni, mely a komplex exponenciális függvény inverze, utóbbinak injektívnek kellene lennie. Ez

azonban triviálisan nem igaz, hiszen tetszőleges w komplex szám esetén

$$e^w = e^{w+2\pi i}. \bullet$$

A hagyományos értelemben vett logaritmusfüggvény tehát nem működik komplex számok esetén, ezért egy olyan kell definiálni, ami egyértelmű.

9. Definíció (Komplex logaritmusfüggvény). *A $\log(z) = \log|z| + i \cdot \arg(z)$ végtelen értékű függvény. Ha z -t megszorítjuk $\Im(z) > 0$ -ra, akkor $\log(z) = \log|z| + i \cdot \arg(z)$ egyértékű függvény és $\log'(z) = \frac{1}{z}$.*

Más részről az $\Im(F(z)) = c$ egyenlet megoldása is túl nehéz.

3.2.2. A numerikus számolás hibája

A numerikus matematikai programok egyik egyértelmű hátránya a szimbolikusakkal szemben a pontosság. Előbbiek nem tudnak tökéletesen pontos értéket kiszámítani minden esetben, ilyenkor kerekítenek, ami hibával jár.

Az áramvonalak numerikus közelítése a következőképp történik: a vektormező egy adott pontjából indulva a hozzá tartozó vektor irányába lépünk, majd az újabb pontból az ahhoz tartozó vektor irányába, s így tovább. Könnyen látható, hogy egy kis kerekítési hiba sok lépés után (az újabb hibákkal összeadódva) rossz eredményt adhat. Szépen szemlélteti a jelenséget az a példa, amikor az áramvonal kör alakú (például egy pólus közelében). Ekkor a vektormező a körvonal minden pontjában érintő irányú vektort tartalmaz. Így ha a pontbéli vektor irányába lépünk, akkor lekerülünk a körvonalról, ezáltal az áramvonalról is, és a pontsorozat egy növekvő csigavonalat fog leírni.

3.3. A program megalkotása

A következő pontokban a programkód létrehozásához szükséges matematikai megfontolásokat, számolásokat ismerhetjük meg.

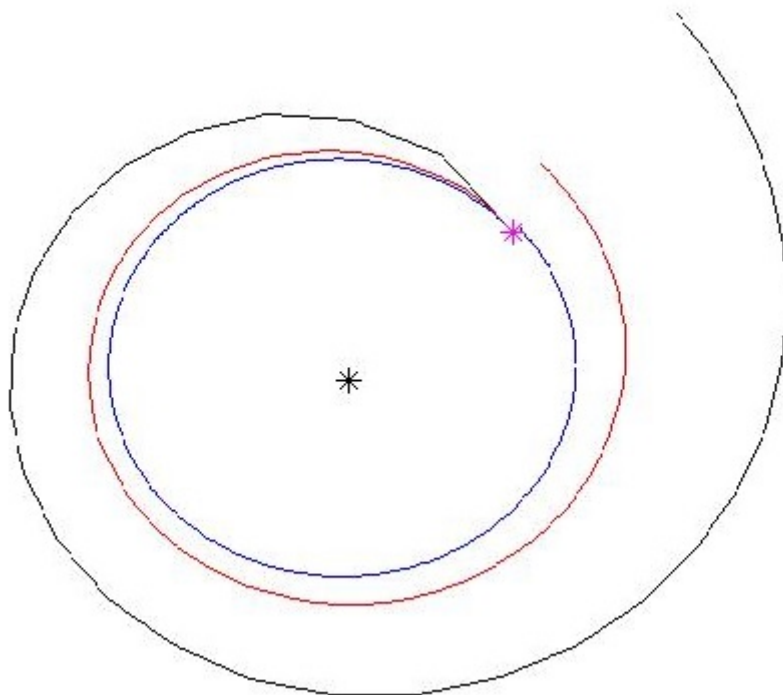
3.3.1. A numerikus számolás hibájának kezelése

A hibát teljes egészében nem lehet eltüntetni, csupán a nagyságát tudjuk csökkenteni. A cél az, hogy közel maradjunk az áramvonalhoz.

Az ötlet az, hogy a lépéseknek apróknak kell lenniük. A w pontból ne $w + \overline{f(w)}$, hanem

$$w + \frac{\overline{f(w)}}{M}$$

pontba lépünk, ahol pl. $M = 10000$. Minél nagyobb M , annál közelebb marad a kapott pontsorozat az áramvonalhoz.



3.1. ábra. A belső kék vonalnál $M = 10000$, a pirosnál $M = 1000$, a feketénél $M = 200$. Látható, hogy míg az első majdnem pontosan a kiindulási pontba ér vissza, a másik kettőnél a kisebb M érték miatt már igen jelentős a hiba.

Természetesen még egy nagyon nagy M sem szünteti meg a korábban példaként említett jelenséget, mely során kör alakú áramvonal helyett növekvő csigavonalat kapunk a numerikus számolás eredményeként, csupán a csigavonal átmérője növekszik lassabban.

3.3.2. A stagnációs pontok kiszámítása

A stagnációs pont definíciója alapján az

$$\overline{f(z)} = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. Mivel egy komplex szám akkor és csak akkor 0, ha a valós és a képzetes része is 0, elhagyhatjuk a konjugálást. Kibontva $f(z)$ -t:

$$\frac{\alpha}{z-a} + \frac{\beta}{z-b} + c = 0.$$

A nevezőkkel szorozzunk fel, majd rendezzük az egyenletet:

$$\alpha(z-b) + \beta(z-a) + c(z-a)(z-b) = 0$$

$$cz^2 + (\alpha + \beta - ca - cb)z - \alpha b - \beta a + cab = 0$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletének segítségével megkapjuk a keresett pontokat:

$$z_1 = \frac{cb + ca - \alpha - \beta + \sqrt{(\alpha + \beta - ca - cb)^2 - 4c(-\alpha b - \beta a + cab)}}{2c}$$

$$z_2 = \frac{cb + ca - \alpha - \beta - \sqrt{(\alpha + \beta - ca - cb)^2 - 4c(-\alpha b - \beta a + cab)}}{2c}$$

Egy ilyen hosszú képlet esetén a számolás helyességéről úgy győződhetünk meg, ha a Viéte-formulák szerint kiszámoljuk a gyökök összegét, illetve szorzatát, és ellenőrizzük, hogy az eredményekre stimmelnek-e.

3.3.3. Az inputparaméterek megválasztása

A program megalkotásának egyik legfontosabb fázisa az, hogy eldöntsük, mely paraméterekkel hívjuk meg a programot. Mivel a vektormezőnk $\overline{f(z)}$, ahol $f(z) = \frac{\alpha}{z-a} + \frac{\beta}{z-b} + c$, mindenképpen szükség van az α, β, a, b, c paraméterekre. Megválasztásuk során észben kell tartanunk, hogy

- α és β tisztán képzetesek
- a és b az áramlás elsőrendű pólusai, ők határozzák meg az akadályokat
- c olyan, hogy az áramlás sebessége a végtelenben \bar{c} , mivel $\lim_{z \rightarrow \infty} \overline{f(z)} = \bar{c}$

Meg kell adnunk továbbá, hogy mely pontokon áthaladó áramvonalakat rajzoljuk ki. Ezeket a pontokat nem muszáj inputparaméterként beolvasni, a programon belül is ki lehet számolni. A végeredmény szempontjából érdekesek (ahogy azt később látni is fogjuk) a stagnációs pontok közelében, illetve az akadályok között futó áramvonalak.

Szükség van a lépésszám beolvasására is, ez azt fogja megadni, hogy az áramvonalak kirajzolása során hányszor tesszük meg a korábban már taglalt lépést, mely során az adott pontból a hozzá rendelt vektor irányába lépünk, a vektor nagyságának egy kis hányadával.

3.3.4. A programkód

```
1 function []=aramlas(alpha,beta,a,b,c,n)
2 - f=@(z) alpha/(z-a)+beta/(z-b)+c;
3 - d=(a+b)/2;
4
5 %n a lépésszám
6 %N a kiindulópontok közelségét állítja
7 %M a lépésvektor nagyságát állítja
8 %L a csalás
9
10 - N=10;
11 - K=20;
12 - M=10000;
13 - L=16000;
14
15 %f(z)=0 megoldása
16
17 - z=zeros(1,2);
18 - z1=(c*b+c*a-alpha-beta+(sqrt((alpha+beta-c*b-c*a)^2-4*c*(-alpha*b-beta*a+a*b*c))))/(2*c);
19 - z2=(c*b+c*a-alpha-beta-(sqrt((alpha+beta-c*b-c*a)^2-4*c*(-alpha*b-beta*a+a*b*c))))/(2*c);
20
21 %ellenőrzés viéte-formulákkal
22
23 - z1+z2-(c*b+c*a-alpha-beta)/c
24 - z1*z2-(-alpha*b-beta*a+a*b*c)/c
25
26 %indítópontok
27
28 - p=zeros(12,n+1);
29 - p(1,1)=a+(1+1*i)/N;
30 - p(2,1)=b+(1+1*i)/N;
31 - p(3,1)=z1+(1+1*i)/K;
32 - p(4,1)=z2-(1+1*i)/K;
33 - p(5,1)=d;
34 - p(6,1)=d;
35 - p(7,1)=z1+(1+1*i)/K;
36 - p(8,1)=z2-(1+1*i)/K;
37 - p(9,1)=z1-(1+1*i)/K;
38 - p(10,1)=z2+(1+1*i)/K;
39 - p(11,1)=z1-(1+1*i)/K;
40 - p(12,1)=z2+(1+1*i)/K;
41
42
43 %plot(real(p(1,1)),imag(p(1,1)),'b','MarkerSize',20)
44
45 %plot(real(p(2,1)),imag(p(2,1)),'b','MarkerSize',10)
46
47 %plot(real(p(3,1)),imag(p(3,1)),'r','MarkerSize',20)
48
49 %plot(real(p(4,1)),imag(p(4,1)),'r','MarkerSize',10)
50
51 %az áramlások (p mátrix) tartalmazza az 5 indítópontból kiinduló áramlás
52 %további pontjait
53 %itt lett megkonjugálva a vektormező
54
```

```

55 - for j=1:n
56 -     p(1,j+1)=p(1,j)+conj(f(p(1,j)))/M;
57 -     p(1,j+1)=p(1,j+1)+(a-p(1,j+1))/L;
58 -     p(2,j+1)=p(2,j)+conj(f(p(2,j)))/M;
59 -     p(2,j+1)=p(2,j+1)+(b-p(2,j+1))/L;
60 -     p(3,j+1)=p(3,j)+conj(f(p(3,j)))/M;
61 -     p(4,j+1)=p(4,j)+conj(f(p(4,j)))/M;
62 -     p(5,j+1)=p(5,j)+conj(f(p(5,j)))/M;
63 -     p(6,j+1)=p(6,j)-conj(f(p(6,j)))/M;
64 -     p(7,j+1)=p(7,j)-conj(f(p(7,j)))/M;
65 -     p(8,j+1)=p(8,j)-conj(f(p(8,j)))/M;
66 -     p(9,j+1)=p(9,j)+conj(f(p(9,j)))/M;
67 -     p(10,j+1)=p(10,j)+conj(f(p(10,j)))/M;
68 -     p(11,j+1)=p(11,j)-conj(f(p(11,j)))/M;
69 -     p(12,j+1)=p(12,j)-conj(f(p(12,j)))/M;
70 - end
71
72 %az áramlás kirajzolása
73
74 - plot(real(p(1,:)),imag(p(1,:)));
75 - hold on;
76 - plot(real(a),imag(a),'k','MarkerSize',5);
77 - hold on;
78 - plot(real(z1),imag(z1),'r','MarkerSize',5);
79 - hold on;
80 - legend('áramvonalak','szingularitások','stagnációs pontok')
81 - plot(real(p(2,:)),imag(p(2,:)));
82 - hold on;
83 - plot(real(p(3,:)),imag(p(3,:)));
84 - hold on;
85 - plot(real(p(4,:)),imag(p(4,:)));
86 - hold on;
87 - plot(real(p(5,:)),imag(p(5,:)));
88 - hold on;
89 - plot(real(p(6,:)),imag(p(6,:)));
90 - hold on;
91 - plot(real(p(7,:)),imag(p(7,:)));
92 - hold on;
93 - plot(real(p(8,:)),imag(p(8,:)));
94 - hold on;
95 - plot(real(p(9,:)),imag(p(9,:)));
96 - hold on;
97 - plot(real(p(10,:)),imag(p(10,:)));
98 - hold on;
99 - plot(real(p(11,:)),imag(p(11,:)));
100 - hold on;
101 - plot(real(p(12,:)),imag(p(12,:)));
102 - hold on;
103
104 - plot(real(b),imag(b),'k','MarkerSize',5);
105
106 - plot(real(z2),imag(z2),'r','MarkerSize',5);
107 - %plot(real(d),imag(d),'m','MarkerSize',5);
108 - xlabel('valós tengely');
109 - ylabel('képzetes tengely');
110 - title('f(z) által meghatározott áramlás')

```

3.3.5. Megjegyzések

A program a The MathWorks Matlab R2006a numerikus matematikai programcsomagjával készült.

Mivel a Matlabban történő programozásban előzőleg nem voltam igazán jártas, program megalkotása során az előzetes tervezés helyett inkább a folyamatos tesztelést tartottam elsődleges szempontként szem előtt.

3.4. Az áramlás kirajzolása és az eredmények értelmezése

Ebben a szakaszban kielemezzük a program által kirajzolt áramlást: megnézzük közelebbről és távolabbról az akadályok körül futó áramvonalakat, összehasonlítunk különböző bemeneti értékekkel kapott ábrákat, és megvizsgáljuk, hogy mi mondható el a két akadályra ható felhajtóerőről. Megnézzük továbbá azt az esetet is, amikor csak egy akadály található az áramlásban.

A program tesztelése során sokat kellett próbálkozni különböző inputparaméterek megadásával, hogy szép ábrák szülessenek. A szép ábrát visszaadó értékek viszonylag szűk intervallumokon mozogtak. Ennek oka a korábban már taglalt pontatlansága a numerikus számolásnak.

A következő ábrák tehát a komplex síkon az

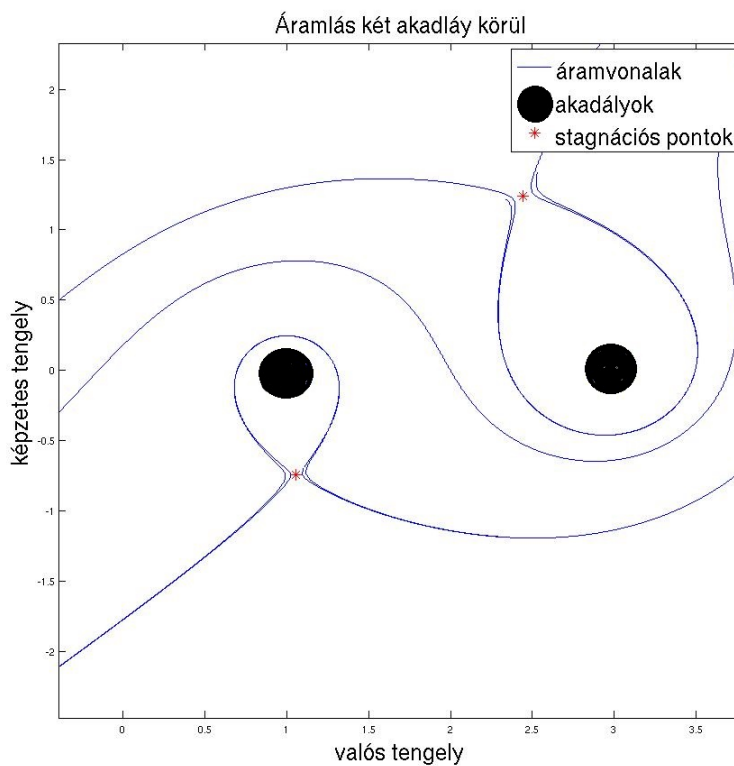
$$\overline{f(z)}, \text{ ahol } f(z) = \frac{\alpha}{z-a} + \frac{\beta}{z-b} + c$$

vektormező által meghatározott áramlást ábrázolják, különböző bemeneti paraméterek esetén.

3.4.1. Áramlás két akadály körül

A tesztelések során a következő paraméterek igen szép eredményt adtak:

- $\alpha = i$
- $\beta = -2i$
- $a = 1$
- $b = 3$
- $c = 1 - i$
- $n = 50000$



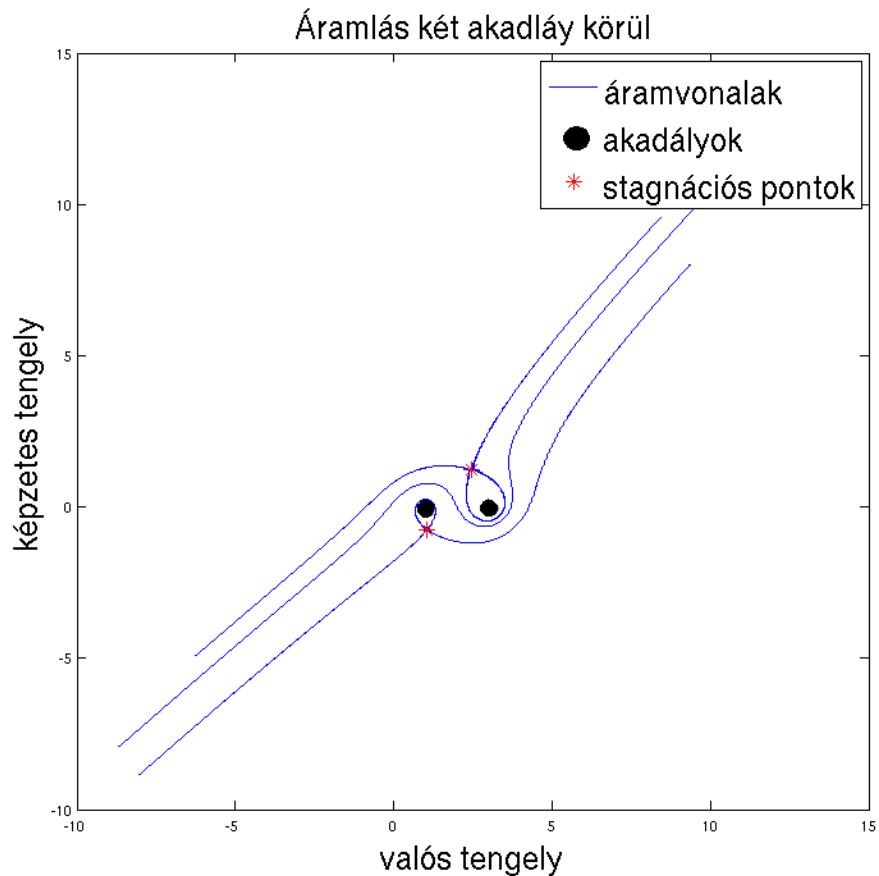
3.2. ábra. $\overline{f(z)}$ ($f(z) = \frac{i}{z-1} + \frac{-2i}{z-3} + 1 - i$) vektormezőben zajló áramlás (áramlás két akadály körül)

A stagnációs pontokhoz közel futó áramlások szorosan megkerülik az akadályokat. Az akadályok között futó áramvonal különböző irányból, a stagnációs pontokkal ellentétes oldalon kerüli ki a két akadályt.

A következő ábrán jól látható az áramlás iránya, amit a függvény c paramétere határoz meg, mivel $\lim_{z \rightarrow \infty} \overline{f(z)} = \bar{c}$. A bemeneti értékek:

- $\alpha = i$
- $\beta = -2i$
- $a = 1$
- $b = 3$
- $c = 1 - i$
- $n = 100000$

Csak n -et növeltük meg, hogy az áramvonalak hosszabban kirajzolódjanak, így az akadályok nagyobb környezetéről kapunk képet.



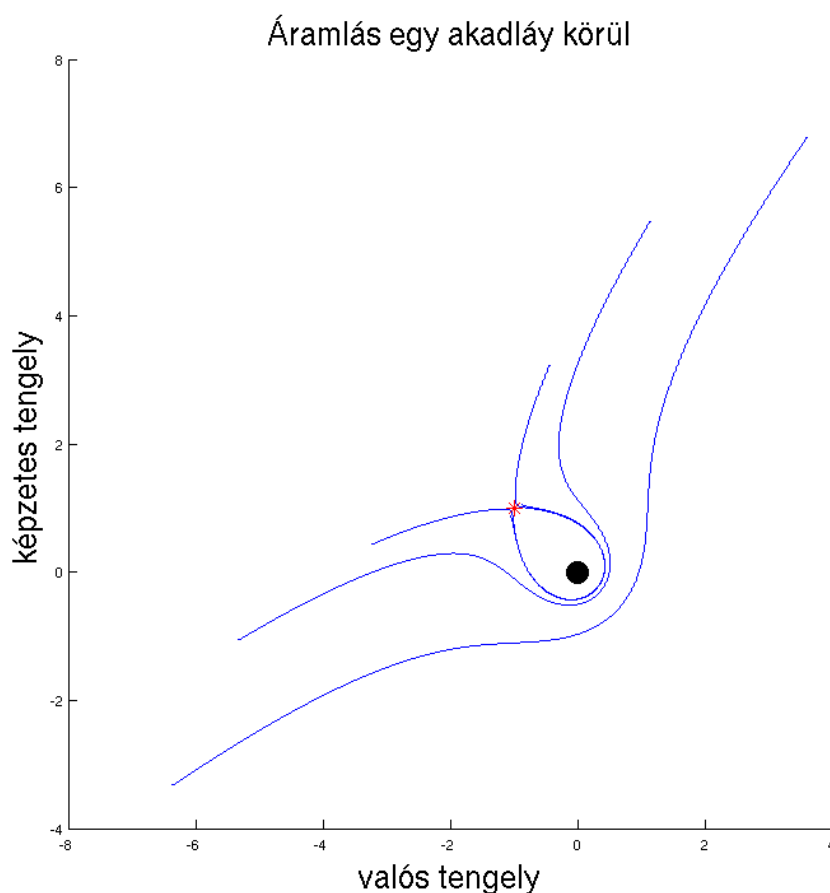
3.3. ábra. $c = 1 - i$, ekkor az áramvonalak iránya $\bar{c} = 1 + i$ vektor iránya, ez csak az akadályok közelében változik meg lokálisan.

3.4.2. Áramlás egy akadály körül

Vizsgáljuk $f(z)$ -t a következő paraméterekkel:

- $\alpha = 0$
- $\beta = -2i$
- $a = 1$
- $b = 0$
- $c = 1 - i$
- $n = 50000$

Ekkor $f(z) = \frac{\beta}{z} + c$, ami annak felel meg, hogy csak egy akadály van az áralásban.



3.4. ábra. $f(z) = \frac{-2i}{z} + 1 - i$ Egy akadály körül hasonlóan viselkednek az áramvonalak, mint kettő esetén: a stagnációs ponthoz közeledek szorosan megkerülik az akadályt.

3.4.3. Különböző inputparaméterekkel kapott eredmények összehasonlítása

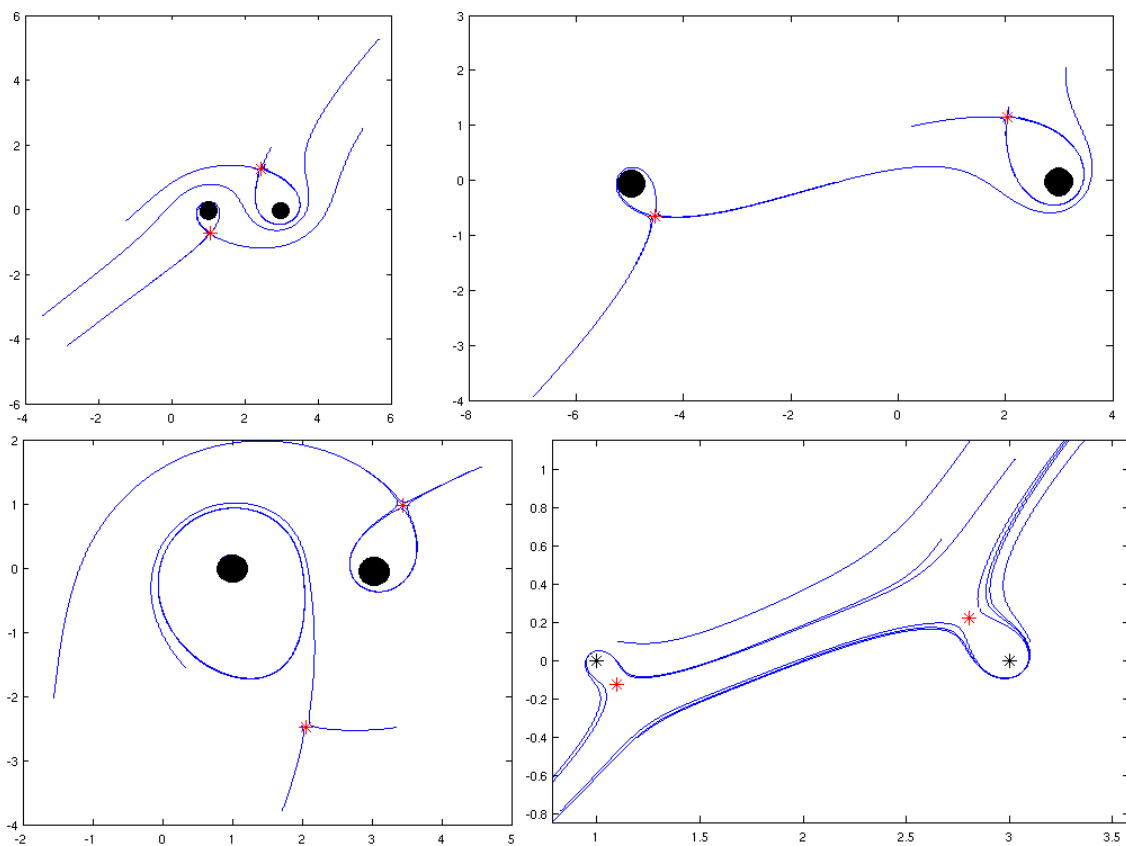
Ebben az alszakaszban azt fogjuk vizsgálni, hogy egy-egy paraméter megváltoztatása milyen hatással van az áramlás képére. Összehasonlítási alapként kirajzoljuk az áramlást az eddig használt paraméterekkel:

- $\alpha = i$
- $\beta = -2i$
- $a = 1$
- $b = 3$
- $c = 1 - i$
- $n = 50000$

Ehhez képest figyeljük meg, hogy milyen eltérést okoznak a megváltozott bemeneti értékek. Három esetet vizsgálunk meg. $f(z)$ képlete

$$f(z) = \frac{\alpha}{z - a} + \frac{\beta}{z - b} + c$$

is jól mutatja, hogy az öt paraméterből kettő-kettő (α és β valamint a és b) hasonló fizikai jelentést hordoz, így ezeket a párokat nem fogjuk külön esetekként kezelni, hanem csak az egyiket nézzük meg.



3.5. ábra. A bal felső ábrán $f(z) = \frac{i}{z-1} + \frac{-2i}{z-3} + 1 - i$, a jobb felsőn $a = 5$, a bal alsón $\alpha = 5i$, a jobb alsón pedig $c = 5 - 5i$, valamint $n = 5000$.

A jobb felső ábrán az egyik akadály helyét változtattuk meg más a paraméter megadásával. Az áramlás képe nagyon hasonló az eredetihez, de az akadályok között futó áramvonal sokkal közelebb ér a stagnációs pont közelében haladó áramvonalhoz, majdnem megegyeznek.

Bal alsó ábra (mely a látszat ellenére nem egy kortárs művészeti alkotás): α megnövelésével a vektormezőben található vektorok nagysága változik. Ez – elsősorban az $\frac{\alpha}{z-a}$ által leírt akadály közelében, mivel ott $z - a$ kicsi, így $\frac{\alpha}{z-a}$ nagy, és α változtatásával jelentősen változik – jelentősen megváltoztatta az áramlás képét. A két akadály közti szakasz felezőpontjából induló áramvonal záródott a bal oldali akadály körül.

Jobb alsó ábra: itt az látszik, hogy nem sikerült létrehozni az akadályokat, mivel a (fekete csillagokkal jelölt) szingularitások körül nem záródtak az áramvonalak. Ennek oka az, hogy túl nagy a sebessége az áramlásnak: c itt ötszöröse az eddigi értéknek, ez volt az oka annak is, hogy a kirajzoláshoz elég volt az eddigi érték tizedrésze, $n = 5000$.

Érdemes megjegyezni, hogy az alsó két ábra esetén az áramlás sebessége alapvetően nagyobb, így a numerikus számolás is nagyobb hibát produkál.

3.5. Két akadályra ható felhajtóerő

Az elméleti fejezetben beláttuk a felhajtóerő kiszámítására alkalmas Kutta-Zsukovszkij tételt. Most azt a kérdést szeretnénk körüljárni, hogy milyen módon lehet kiszámítani az áramlásunkban elhelyezett két akadályra ható erőt, és mik a buktatói ennek.

Az lenne a legjobb, ha ki tudnánk számolni, hogy mekkora erő hat a két akadályra külön-külön. A Kutta-Zsukovszkij-tétel bizonyítása során a (#)-tel jelölt képlet alkalmazható. A továbbiakat nem használhatjuk, hiszen nem teljesülnek a szükséges feltételek.

A képletben $\int_{\gamma} f^2(z) dz$ kiszámítása az érdekes.

$$f^2(z) = \frac{\alpha^2}{(z-a)^2} + \frac{2\alpha\beta}{(z-a)(z-b)} + \frac{2\alpha c}{z-a} + \frac{\beta^2}{(z-b)^2} + \frac{2\beta c}{z-b} + c^2.$$

Számoljuk ki az a középpontú akadályra ható felhajtóerőt: ehhez egy a körüli γ görbén kell integrálnunk. Ha γ belsejében nincs benne b pont, akkor a jobb oldal utolsó három tagja reguláris $\text{int}(\gamma)$ -n, azaz az integráljuk 0.

$$\int_{\gamma} f^2(z) dz = \int_{\gamma} \frac{\alpha^2}{(z-a)^2} + \frac{2\alpha\beta}{(z-a)(z-b)} + \frac{2\alpha c}{z-a} dz.$$

Használjuk a Reziduúmtételt!

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f^2(z) dz &= 2\pi i \cdot \text{Res} \left[\frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta \frac{z-a}{z-b} + 2\alpha c(z-a)}{(z-a)^2} \right]_{z \rightarrow a} \\ \int_{\gamma} f^2(z) dz &= 2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow a} \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha^2 + 2\alpha\beta \frac{z-a}{z-b} + 2\alpha c(z-a) \right) \\ \int_{\gamma} f^2(z) dz &= 2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow a} \left(2\alpha\beta \frac{(z-b) - (z-a)}{(z-b)^2} + 2\alpha c \right) \\ \int_{\gamma} f^2(z) dz &= 2\pi i \cdot \left(\frac{2\alpha\beta}{a-b} + 2\alpha c \right) \end{aligned}$$

Az akadályra ható felhajtóerő ekkor

$$F = 2\pi i \cdot \frac{i\rho}{2} \cdot \overline{\left(\frac{2\alpha\beta}{a-b} + 2\alpha c \right)}.$$

Amennyiben α és β tisztán képzetes, a és b is tisztán képzetes és c valós, úgy

$$F = -\pi\rho \cdot \left(-\frac{2\alpha\beta}{a-b} - 2\alpha c \right),$$

és a másik akadályra a felhajtóerő (teljesen hasonlóan számolva):

$$F_2 = -\pi\rho \cdot \left(-\frac{2\alpha\beta}{b-a} - 2\beta c \right).$$

Tehát ebben az esetben az akadályokra ható mindkét erő a képzetes tengellyel párhuzamos, mivel tisztán képzetesek.

Irodalomjegyzék

- [1] Gilányi Gergely Tamás (2012), Hidrodinamikai problémák
- [2] Sigray István, Hidrodinamika komplex függvénytan eszközeivel előadás 2016/2017/2 félév
- [3] Halász Gábor, Kis hidrodinamika
- [4] Nahin, Paul J. (2007), *An Imaginary Tale: The Story of $\sqrt{-1}$* , Princeton University Press, ISBN 978-0-691-12798-9
- [5] Wikipedia