Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Pálfi Orsolya

# A Laplace-mátrix tulajdonságai és alkalmazása feszítőfák számolására

Matematika BSc Szakdolgozat

Témavezető:

Halasi Zoltán
Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2017

# Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Halasi Zoltánnak, hogy elvállalta a konzulensi feladatokat, és tanácsaival hozzájárult a szakdolgozatom elkészüléséhez.

Nagyon hálás vagyok szüleimnek és testvéremnek, hogy támogattak és lelkesítettek a munkám során.

Végül, de nem utolsó sorban, külön köszönettel tartozom Dubai Martinnak, aki végig mellettem állt és LaTeX-beli segítségével nagyban hozzájárult ahhoz, hogy dolgozatom elnyerhesse végső formáját.

# Tartalomjegyzék

# Bevezetés

A lineáris algebra jelentős szerepet tölt be a matematikában, alkalmazhatósága rendkívül sokrétű. Többek között a gráfelmélettel áll szoros kapcsolatban. Jó néhány gráfokkal kapcsolatos kérdésről bebizonyosodott, hogy hatékonyan kezelhető lineáris algebrai módszerekkel. Az algebrai gráfelmélet célja, hogy a gráftulajdonságokat lefordítsa algebrai tulajdonságokra és az algebrai eredményeket és módszereket levezesse a gráfokról szóló tételekre. Leggyakrabban az adjacencia- és incidenciamátrixokat használják fel a gráfok algebrai leírására, ám erre a célra létezik egy további hasznos mátrix is, a Laplace-mátrix.

Az első fejezetben a dolgozat témájához kapcsolódó legfontosabb algebrai alapfogalmakat gyűjtöm össze.

A második fejezetben vezetem be a Laplace-mátrix fogalmát és vele kapcsolatos tulajdonságokat. Ezek közül az egyik leghasznosabb, hogy az incidenciamátrix segítségével szorzat alakra bontható.

A harmadik fejezetben a Laplace-mátrix sajátértékeinek fontosságára térek ki, melyek közül a legkiemelkedőbb szereppel a második legkisebb sajátértéke rendelkezik. Jelentősége abban rejlik, hogy a gráf összefüggőségét fejezi ki, de ezenkívül további tulajdonságait is megemlítem.

A Laplace-mátrixnak számos alakalmazása létezik, az utolsó fejezetben ezek közül mutatok be egyet. Az egyik legrégebbi eredménye az algebrai gráfelméletnek a Kirchoff-tétel, mely a gráfban lévő feszítőfák számát adja meg a Laplace-mátrix segítségével. A fejezet végén egy önálló feladatmegoldás található, amiben a dolgozatban szereplő ismereteket használtam fel.

A felhasznált forrásokban gyakran csak a súlyozatlan gráfokhoz tartozó Laplace-mátrixok szerepeltek, de ahol lehetséges volt, az állításokat az általánosabb súlyozott esetre fogalmaztam meg, vagy utólag tettem róla említést. Időnként eltértem a szakirodalmakban szereplő eredeti jelölésektől az egységesség céljából. A dolgozatban található megjegyzések egy részénél önálló magyarázatokkal és kiegészítésekkel igyekeztem pontosítani az adott részt. A könnyebb érthetőség érdekében számos helyen mellékeltem ábrát és mátrixot, melyeket a GeoGebra és LaTeX segítségével hoztam létre.

# 1. fejezet

# Lineáris algebrai összefoglaló

Elsőként tisztázzuk azokat a legfontosabb fogalmakat, tételeket, jelöléseket, melyek a szakdolgozat során előfordulnak. Feltételezzük, hogy az Olvasó rendelkezik alapszintű lineáris algebrai tudással, ezért alapdefiníciók nem kerülnek kimondásra, mint például: sajátérték, sajátvektor, definitség... stb. Felsorolunk néhány olyan tételt is, melyet az Olvasó nagy valószínűséggel már ismer, de fontosnak találtuk, hogy ezek szerepeljenek az összefoglalóban. Ezen ismeretek felfrissítésére [6]-ot ajánljuk. Továbbá ismertetünk olyan lineáris algebrai lemmát és tételt is, melyet talán korábban nem használt az Olvasó, de a szakdolgozatban egy-egy állítás bizonyításához elengedhetetlenek. A fejezetnek nem célja ezeket bizonyítani, mert a későbbiekben csak technikai segítséget nyújtanak a főtéma kifejtésében.

Pár alapvető jelölés felsorolva:

- Ha $A$ egy mátrix, akkor az $i$-edik sorának $j$-edik elemét $A_{ij}$-vel jelöljük.
- Az $A$ $(n \times n)$-es szimmetrikus mátrix sajátértékeit növekvő sorrendben indexeljük:
$$\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \cdots \leq \lambda_n(A).$$
- Alapvetően egy $\underline{v}$ vektor oszlopvektort fog jelenteni.
- Legyen $\underline{j}_n = (1, \ldots, 1)^T$ $n$ dimenziós oszlopvektor, $J_n$ az $(n \times n)$-es csupa 1 mátrix, valamint $I_n$ az $(n \times n)$-es egységmátrix. (Ha a környezetből egyértelmű, akkor elhagyjuk a dimenziókat jelző indexeket.)
- Jelölje $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ szokásos bázisát.

A következő fejezetben látni fogjuk, hogy a Laplace-mátrix szimmetrikus, ezért mindenképpen meg kell említenünk a szimmetrikus mátrixokra vonatkozó egyik legfontosabb tételt, a főtengelytételt.

**1.0.1. Tétel (Főtengelytétel).** *Az $\mathcal{A}$ lineáris transzformációnak akkor és csak akkor létezik ortonormált sajátbázisa valós felett, ha $\mathcal{A}$ szimmetrikus.*

Ennek köszönhetően létezik a Laplace-mátrix sajátvektorainak ortonormált rendszere, melyet a későbbiekben majd kihasználunk.

Számos módszer létezik a sajátértékek meghatározására. A szakdolgozat során a Courant-Fischer-formulát használjuk, mely a legkisebb $k$-adik sajátértéket adja meg.

**1.0.2. Tétel (Courant-Fischer-formula).** *Legyen $A$ egy $(n \times n)$-es valós szimmetrikus mátrix, melynek a sajátértékei: $\lambda_1(A) \leq \cdots \leq \lambda_n(A)$, és legyen az $\underline{f}^1, \ldots, \underline{f}^n$ az ezekhez tartozó sajátvektorokból álló bázis. Jelöljük $S_k$-val az $\underline{f}^1, \ldots, \underline{f}^k$ sajátvektorok által kifeszített alteret, és $S_k^{\perp}$-sel ennek az ortogonális kiegészítőjét. Ekkor a következőképpen határozhatjuk meg a k-adik sajátértéket:*

$$\lambda_k(A) = \min\{\langle \underline{f}, A\underline{f} \rangle : \|\underline{f}\| = 1, \underline{f} \in S_{k-1}^{\perp}\}.$$

Az $A$ mátrixához tartozó kvadratikus alak minimumát keressük olyan vektorokon, melyek 1 normájúak (különben még le kellene osztani a vektor hosszával), és a $k-1$ legkisebb sajátértékhez tartozó sajátvektorokra merőlegesek. Ezen feltételeknek a $\underline{f}^k, \ldots, \underline{f}^n$ vektorok normált alakja fog eleget tenni, és a skaláris szorzat azon a vektoron veszi fel a minimumot, amely a $k$-adik legkisebb sajátértékhez tartozik. Az $\underline{f}^1, \ldots, \underline{f}^{k-1}$ sajátvektoroknak nem kell normáltnak lenniük, mert csak az ortogonalitás szempontjából használjuk fel őket. A formula bizonyítását meg lehet találni például [10]-ben.

A következő lemma kimondása mellett a bizonyítása is hasznos lesz a későbbi fejezetek szempontjából, mivel a Courant-Fischer-formula felhasználását mutatja be a második legkisebb sajátértékkel kapcsolatosan, és ezt az elkövetkező részeknél is ilyen módon fogjuk alkalmazni. A lemmát és bizonyítását [5, 300. oldal] alapján ismertetjük.

**1.0.3. Lemma.** *Legyen $A$ egy $(n \times n)$-es szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrix, melynek sorösszegei nullával egyenlők, azaz $A\underline{j} = \underline{0}$. (Nyilván ez az oszlopösszegeire is igaz.) Ekkor a következő felső becslést lehet adni a második legkisebb sajátértékre:*

$$\lambda_2(A) \leq \frac{n}{n-1} \min_i A_{ii} \ .$$

**Bizonyítás:** Bármely négyzetes mátrixnak, amelynek sorösszegei nullával egyenlők, sajátértéke a 0 és a $\underline{j}$ egy hozzátartozó sajátvektor. Ha $A$ még emellett pozitív szemidefinit, akkor az azt jelenti, hogy $\lambda_1(A) = 0$. A második legkisebb sajátértéket pedig az előbb ismertetett Courant-Fischer-formula segítségel határozhatjuk meg:

$$\lambda_2(A) = \min\{\langle \underline{x}, A\underline{x}\rangle : \|\underline{x}\| = 1, \left\langle \underline{x}, \underline{j} \right\rangle \ = 0\}.$$

A $\underline{j}$ sajátvektorra való ortogonalitás ellenőrzéséhez elegendő csak $\underline{x}$ koordinátáinak összegét kiszámolni.

Vegyük a következő mátrixot, és mutassuk meg róla, hogy szintén pozitív szemidefinit:

$$A' = A - \lambda_2(A)\left(I - \frac{1}{n}\ J\right).$$

Ha megszorozzuk $\underline{j}$-vel, akkor azt kapjuk, hogy ennek a mátrixnak a sorösszegei is 0-val egyenlők:

$$A'\underline{j} = \underbrace{\quad A\underline{j} \quad}_{=\{underline 0} - \lambda_2(A) \underbrace{\left(I - \frac{1}{n}\ J\right)\underline{j}}_{\{underline 0} = \underline{0}$$

Legyen $\underline{y}$ egy tetszőleges $n$ dimenziós vektor, mely felbomlik $\underline{j}$-vel párhuzamos és $\underline{j}$-re ortogonális vektorok összegére: $\underline{y} = c_1\underline{j} + c_2\underline{x}$ .

Ahhoz, hogy $A'$ pozitív szemidefinit lehessen, a mátrixhoz tartozó kvadratikus alaknak kell minden $n$ dimenziós vektor esetén nemnegatívnak lennie.

$$\underline{y}^T A'\underline{y} = c_1\ \underline{j}^T \underbrace{A'c_1\ \underline{j}}_{=\underline{0}} + c_1\ \underbrace{\underline{j}^T A'}_{=\underline{0}}\ c_2\ \underline{x} + c_2\ \underline{x}^T \underbrace{A'c_1\ \underline{j}}_{=\underline{0}} + c_2\ \underline{x}^T A' c_2\ \underline{x} = c_2^2\ (\underline{x}^T A\underline{x} - \lambda_2) \geq 0$$

Miután az $A'$ mátrixot definíciója szerint kibontottuk az utolsó egyenlőségnél, a következő miatt egyszerűsödött ki a fenti kifejezéssé:

$$\underline{x}^T(I - \frac{1}{n}J)\underline{x} = \underline{x}^T I\underline{x} - \frac{1}{n}\ \underline{x}^T \underbrace{J\underline{x}}_{=\underline{0}} = \underline{x}^T\underline{x} = 1.$$

Tehát $A'$ valóban pozitív szemidefinit, ezért minden főátlóbeli eleme nemnegatív lesz. Hiszen ha a szokásos bázis elemeire vizsgáljuk meg a kvadratikus alak értékét, akkor annak is nemnegatívnak kell lennie: $\underline{e_i}^T A'\underline{e_i} = A_{ii} \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Vegyük $A'$ legkisebb főátlóbeli elemét, mely némi átalakítás után megadja a lemmabeli egyenlőtlenséget:

$$
\begin{aligned}
\min_i A_{ii} - \lambda_2(A)\left(1-\frac{1}{n}\right) \geq 0 \\
\min_i A_{ii} \geq \lambda_2(A)\left(1-\frac{1}{n}\right) \\
\frac{n}{n-1}\min_i A_{ii} \geq \lambda_2(A).
\end{aligned}
$$

■

**1.0.4. Definíció.** *Az Hermite-mátrix olyan komplex négyzetes mátrix, mely megegyezik a konjugált transzponáltjával. (Azaz A-t akkor nevezhetjük Hermite-mátrixnak, ha* $A_{ij} = \overline{A_{ji}} \qquad \forall\ 1 \leq i, j \leq n$*-re.)*

A valós szimmetrikus mátrix speciális esete az Hermite-mátrixnak. A továbbiakban csak ezzel az esettel fogunk találkozni, ám definíciója szükséges volt a következő egyenlőtlenséghez. A Courant-Weyl-egyenlőtlenségeket általában olyan feltételek mellett mondják ki, hogy a sajátértékek csökkenő sorrendbe vannak rendezve. Ám a szakdolgozat során növekvő sorrendet használunk mindenhol, ezért célszerű volt átfogalmazni a tételt, hogy egyszerűbben alkalmazhassuk majd a későbbiekben. Az eredeti megfogalmazást a [4, Theorem 2.8.1]-ben lehet megtekinteni. Hasonlóan lehet bizonyítani az átalakított verziót is, mint az eredeti állítást, csak a megfelelő egyenlőtlenségeket kell megfordítani.

**1.0.5. Tétel (Courant-Weyl-egyenlőtlenségek).** *Legyen A és B* $(n \times n)$*-es Hermite-mátrixok. Jelöljük* $\lambda_1(A) \leq \cdots \leq \lambda_n(A)$*-val az A sajátértékeit, valamint az B sajátértékeit* $\lambda_1(B) \leq \cdots \leq \lambda_n(B)$*-vel. Ekkor a következő állítások teljesülnek* $1 \leq i, j \leq n$ *esetén:*

*(i) Ha* $i + j - 1 \leq n$*, akkor* $\lambda_i(A) + \lambda_j(B) \leq \lambda_{i+j-1}(A + B)$.

*(ii) Ha* $i + j - n \geq 1$*, akkor* $\lambda_{i+j-n}(A + B) \leq \lambda_i(A) + \lambda_j(B)$.

*(iii) Ha B pozitív szemidefinit mátrix, akkor* $\lambda_i(A) \leq \lambda_i(A + B)$.

A sajátértékekről szóló egyenlőtlenségek mellett még az aldeterminánssal kapcsolatos lineáris algebrai ismeretekre lesz nagyobb szükség a későbbi fejezetekben.

**1.0.6. Definíció.** *Egy A négyzetes mátrix* $A_{ij}$ *eleméhez tartozó előjeles aldeterminánson annak a részmátrix determinánsának a* $(-1)^{i+j}$*-szeresét értjük, amelyet az A mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának törlésével kapunk.*

Az előjeles aldeterminánsnak létezik egy általnásobb változata, amikor több sort és oszlopot törölve vesszük a részmátrix előjeles determinánsát. Ennek a definíciója [11, 3. oldal]-on találtak segítségével lett úgy megfogalmazva, ahogy aztán majd a dolgozat végén szükség lesz rá.

**1.0.7. Definíció.** *Legyen $A$ egy $(n \times n)$-es mátrix. Válasszuk ki a sorok halmazának egy $r$ elemű $I = \{i_1, \ldots, i_r\}$ részhalmazát, valamint az oszlopok halmazának egy $r$ elemű $J = \{j_1, \ldots, j_r\}$ részhalmazát, és ezeket töröljük ki az $A$ mátrixból. A kapott részmátrixhoz tartozó előjeles aldeterminánson a $(-1)^{i_1+\cdots+i_r+j_1+\cdots+j_r}$ előjellel beszorozott determinánsát értjük.*

**1.0.8. Definíció.** *Egy $A$ négyzetes mátrix (klasszikus) adjungáltjának nevezzük a mátrix előjeles aldeterminánsaiból alkotott mátrix transzponáltját, és $adj(A)$-val jelöljük.*

Fontos megjegyezni, hogy itt nem arról a komplex értelembeli adjungáltról van szó, azaz a konjugált transzponáltról, amely az Hermite-mátrix definíciójában van megfogalmazva. A klasszikus adjungáltat leginkább a mátrix inverzformulájában használhatta eddig az Olvasó.

**1.0.9. Állítás.** *Ha $A$ egy négyzetes mátrix, akkor:*

$$A \; adj(A) = det(A) \; I \ .$$

*És amennyiben $det(A) \neq 0$, akkor az előző egyenletből következik az $A$ mátrix inverzének formulája:*

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{det(A)} \ .$$

**1.0.10. Definíció.** *Az $\mathcal{A}$ leképezés rangja a képtér dimenziója, azaz:*

$$rang(\mathcal{A}) = dim\big(Im(\mathcal{A})\big) \ .$$

Ahogy az Olvasó is tudja, egy mátrix sorrangja (a mátrix soraiból álló vektorrendszer rangja) és oszloprangja (a mátrix oszlopaiból álló vektorrendszer rangja) megegyezik, és ezt a mátrix rangjának nevezzük. A mátrixnak még létezik a determinánsrangja is, ami szintén megegyezik a rangjával, és ezzel egy újabb tulajdonsággal írja le ugyanazt az értéket.

**1.0.11. Definíció.** *Egy $A$ mátrix determinánsrangja $r$, ha van olyan $(r \times r)$-es aldeterminánsa, ami nem nulla, de bármely $r$-nél nagyobb rendű aldeterminánsa (ha egyáltalán van ilyen) már nulla.*

A következő formula mátrixok szorzatának determinánsát határozza meg a két eredeti mátrixból készíthető részmátrixok determinánsainak segítségével. Bizányítását [11]-ben lehet megtekinteni.

**1.0.12. Tétel (Cauchy-Binet-formula).** *Legyen $A$ egy $(n \times m)$-es mátrix, $B$ egy $(m \times n)$-es mátrix. Jelöljük $[m]$-nel az $\{1, \ldots, m\}$ halmazt, $\binom{[m]}{n}$-mel pedig $[m]$ összes $n$ elemű részhalmazát. $S \in \binom{[m]}{n}$ esetén $A_{[n],S}$ mátrixon azt az $(n \times n)$-es részmátrixát értjük $A$-nak, ahol $S$ halmaznak megfelelően választjuk ki az oszlopokat. $B_{S,[n]}$ definiálása annyiban különbözik, hogy $B$-nek a soraiból kell választani $S$ indexhalmaznak megfelelően.*

*Ekkor a következőt állítja a Cauchy-Binet-formula:*

$$det(AB) = \sum_{S \in \binom{[m]}{n}} det(A_{[n],S}) det(B_{S,[n]}).$$

A tételnek vannak speciális esetei attól függően, hogy $n$ és $m$ értékek közül melyik a nagyobb. Ha $n = m$, akkor négyzetes mátrixokat szoroztunk össze, és a formula a determinánsok szorzástételét adja vissza: $det(AB) = det(A)det(B)$. Abban az esetben, ha $m < n$, akkor $\binom{[m]}{n}$ egy üres halmaz lesz, és a formula azt mondja, hogy $det(AB) = 0$. Ami helytálló, hiszen ekkor az $(n \times n)$-es $AB$ mátrix rangja legfeljebb $m$ lehet, amiből következik a 0 determináns. A képletnek $m > n$ esetben van jelentősége, a dolgozatban is ilyen esetben használjuk majd fel.

# 2. fejezet

# Laplace-mátrix definíciója és tulajdonságai

Ebben a fejezetben vezetjük be a Laplace-mátrix fogalmát, amit számos gráfelméleti állítás bizonyításnál fel fogunk tudni használni a későbbi fejezetekben. Ahhoz, hogy ezt megtehessük, előtte tisztázni kell néhány gráfokkal kapcsolatos definíciót, jelölést. Utána magát a Laplace-mátrixot definiáljuk, és néhány vele kapcsolatos jellemzőt ismertetünk. A fejezet leginkább [2, 2. alfejezet]-re épül, de kisebb részekhez még szükség volt [3] és [9] használatára is.

## 2.1. Gráfok súlyozása

Legyen $G = \big(V(G), E(G)\big)$ egy irányítatlan véges gráf, ahol $|V(G)| = n$, $|E(G)| = m$, valamint vegyünk egy tetszőleges, de rögzített rendezést a csúcsok között, amit jelöljünk a következőképpen: $V_G = (v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Értelmezzünk a gráfon egy nemnegatív valós súlyfüggvényt. Jelölje $a_{v_i v_j}$ a $(v_i, v_j)$ élhez rendelt értéket, és a következőket követeljük meg:

- $a_{v_i v_j} > 0$, ha $(v_i, v_j) \in E(G)$, illetve $a_{v_i v_j} = 0$, ha $(v_i, v_j) \notin E(G)$;
- a súlyozás legyen szimmetrikus, azaz $a_{v_i v_j} = a_{v_j v_i} \quad \forall v_i, v_j \in V(G)$.

**2.1.1. Megjegyzés.** Általánosan véve minden gráf súlyozottnak tekinthető ilyen értelemben. A súlyozatlan gráf egy speciális eset, amikor olyan súlyfüggvényt definiálunk, ahol az $a_{v_i v_j}$ értékhez a $v_i$ és $v_j$ csúcsok között futó élek számát rendeljük.

A gráfban esetlegesen előforduló párhuzamos éleket a súlyfüggvény definiálásával gyakorlatilag összehúzzuk, és egy nagyobb súllyal rendelkező élt veszünk helyettük. Emiatt feltehető, hogy az ilyen módon súlyozott gráfok nem fognak tartalmazni többszörös élt.

A továbbiakban a fent bevezetett súlyfüggvénnyel ellátott súlyozott gráfokról lesz szó, a súlyozatlan eseteket külön kiemeljük.

**2.1.2. Definíció.** *Egy csúcs fokszámát (a súlyozást figyelembe véve) a következőképpen definiáljuk:*

$$deg(v_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{v_i v_j} + 2a_{v_i v_i} \ .$$

Ez a formula súlyozatlan esetben a hagyományos fokszámot jelenti, azaz $v_i$ csúcsból kiinduló élek számát.

Fontos megjegyezni hogy a hurokélhez tartozó súly kétszeresen számít bele a fokszámba, így tud teljesül a gráfelméletből ismert azonosság a súlyozatlan gráfokra:

$$\sum_{v_i \in V(G)} deg(v_i) = 2|E(G)| \ .$$

Általánosabban a fokszámok összege az élek súlyozott összegének kétszeresével egyenlő, azaz:

$$\sum_{v_i \in V(G)} deg(v_i) = 2 \left( \sum_{(v_i, v_j) \in E(G)} a_{v_i v_j} \right) . \tag{2.1}$$

Jelöljük $\Delta(G)$-vel a fokszámok maximumát, $\delta(G)$-vel pedig a minimumát, hogy a későbbiekben egyszerűbben lehessen hivatkozni rájuk.

## 2.2. Laplace-mátrix definiálása

**2.2.1. Definíció.** *$G$ gráf adjacencia mátrixának (másnéven szomszédsági mátrixának) nevezzük azt a mátrixot, melynek sorait és oszlopait csúcsokkal indexeljük ugyanolyan sorrendben, az elemei pedig a következő értékek lehetnek:*

$$A(G)_{v_i v_j} = \begin{cases} a_{v_i v_j} & ha \ i \neq j \\ 2a_{v_i v_i} & ha \ i = j \end{cases} \qquad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Megállapodás alapján, ha hurokél van a gráfban, akkor a súlya kétszeres szorzóval szerepel a főátlóban.

**2.2.2. Megjegyzés.** A mátrix sorainak és oszlopainak a csúcsokkal való indexelése azt jelenti, hogy bijekció van a sorok és a csúcsok között, illetve az oszlopok és csúcsok között. Másképpen fogalmazva egyértelműen hozzárendelhető minden sorhoz és minden oszlophoz egy-egy csúcs.

**2.2.3. Definíció.** *G gráf fokszám mátrixának nevezzük azt a mátrixot, melynek sorait és oszlopait csúcsokkal indexeljük ugyanolyan sorrendben, valamint az elemei a főátlóban a fokszámok, a többi helyen nulla, azaz:*

$$D(G) = diag(\ deg(v_i) : i = 1, \dots, n\ ).$$

**2.2.4. Definíció.** *A G gráfhoz tartozó Laplace-mátrixot az előző két mátrix különbségeként kapjuk:*

$$L(G) = D(G) - A(G).$$

Mivel az adjacencia mátrix és fokszám mátrix sorai és oszlopai $V_G = (v_1, \dots, v_n)$ rögzített sorrendben lévő csúcsokkal vannak indexelve, ezért pontosabban kifejezve az előbb $L(G) = [L(G)]_{V_G}$ mátrixot definiáltuk, ahol adott a sorok és oszlopok sorrendje.

Összegezve azt mondhatjuk, hogy a $G$ gráfhoz tartozó Laplace-mátrix valójában a mátrixok egy osztályát jelenti. Annyi eleme van egy ilyen osztálynak, ahányféleképpen lehet sorrendbe rendezni a gráf csúcsait. Egy tetszőleges Laplace-mátrixból kiindulva megfelelő oszlop- és ugyanezen sorcserékkel bármely azonos osztálybeli Laplace-mátrixot megkaphatjuk. Emiatt már egy mátrix is reprezentálja az egész osztályt. A Laplace-mátrixról egyértelműen csak rögzített sorrendű csúcsok esetén lehet beszélni, ezért a következőkben $V_G$ sorrenddel indexelt Laplace-mátrixszal foglalkozunk, amíg nem vezetjük be egy célravezetőbb sorrendjét a csúcsoknak.

Számos főbb tulajdonsága a Laplace-mátrixnak könnyedén leolvasható, ha szemléletesen kiírjuk az elemeit:

$$L(G) = \begin{pmatrix} deg(v_1) - 2a_{v_1v_1} & -a_{v_1v_2} & \dots & -a_{v_1v_n} \\ -a_{v_2v_1} & deg(v_2) - 2a_{v_2v_2} & \dots & -a_{v_2v_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{v_nv_1} & -a_{v_nv_2} & \dots & deg(v_n) - 2a_{v_nv_n} \end{pmatrix}$$

- A Laplace-mátrix valós és szimmetrikus, ami a súlyfüggvény kritériumainak köszönhető.
- Minden sor-, illetve oszlopösszeg nullával egyenlő.

Ellenőrizzük le ezt az $i$-edik sorösszegen:

$$(deg(v_i) - 2a_{v_iv_i}) - \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} a_{v_iv_j} = \left( \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} a_{v_iv_j} \right) - \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} a_{v_iv_j} = 0\ .$$

Ezzel valójában az oszlopösszegre is bebizonyítottuk, hiszen a súlyfüggvény szimmetrikus.

- $L(G)$ mátrix független a G-beli hurokélektől.

Az előbbi tulajdonság miatt a továbbiakban hurokélmentes gráfokkal foglalkozunk. Ennek nagy előnye, hogy ezáltal a Laplace-mátrix főátlójában csak a csúcsok fokszámai fognak szerepelni.

## 2.3. Gráfok uniójának Laplace-mátrixa

A gráfok diszjunkt uniójának Laplace mátrixát nem kell feltétlenül definíció szerint kiszámolni, hanem egyszerűen kifejezhető a diszjunkt gráfokhoz tartozó Laplace-mátrixok segítségével. Ennek azért lesz nagy jelentősége, mert egy tetszőleges gráf valójában az összefüggő komponenseinek diszjunkt uniójának felel meg, és ez alapján az egész gráf Laplace-mátrixának meghatározásához elegendő csak az összefüggő komponensekhez tartozó Laplace-mátrixokat kiszámolni. Sőt később még az is kiderül, hogy a gráf Laplace-mátrixának sajátértékeivel és sajátvektoraival sem kell külön foglalkozni, ha a komponensekhez tartozó Laplace-mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait már ismerjük. Ám mielőtt ezekre rátérnénk, két kisebb lemmát [9, Lemma 1, Lemma 2] mondunk ki, melyekből majd következik a diszjunkt unió Laplace-mátrixának az egyszerű előállítási módja [9, Lemma 3]. A lemmák bizonyítását nem vezetjük le külön, ugyanis közvetlenül a Laplace-mátrix definíciójából adódnak.

**2.3.1. Lemma.** *Ha $G$ és $H$ olyan gráfok, melyeknek megegyezik a csúcshalmaza $\big(V(G) = V(H)\big)$, akkor a két gráf (él)uniójának Laplace-mátrixára a következő igaz:*

$$L(G \cup H) = L(G) + L(H).$$

**2.3.2. Megjegyzés.** Abban az esetben, ha az élhalmazok nem diszjunktak, akkor az unióban kialakuló többszörös élek helyett egyből egyszeres élre gondoljunk, melynek az élsúlya megegyezik az eredeti élek súlyainak összegével.

**2.3.3. Lemma.** *Ha $G$ gráfnak $v_i$ egy izolált csúcsa, akkor a hozzátartozó Laplace-mátrix $v_i$ csúcshoz tartozó oszlopában és sorában csupa nulla szerepel, azaz:*

$$L(G)_{v_i v_j} = 0 \text{ és } L(G)_{v_j v_i} = 0 \quad \forall j\text{-re.}$$

**2.3.4. Állítás.** *Ha $G$ és $H$ olyan gráfok, melyek csúcshalmazai diszjunktak, akkor a gráfok diszjunkt uniójának Laplace-mátrixa megegyezik a két gráf Laplace-mátrixainak direkt összegével:*

$$L(G \sqcup H) = L(G) \oplus L(H) = \begin{pmatrix} L(G) & 0 \\ 0 & L(H) \end{pmatrix} . \tag{2.2}$$

**2.3.5. Megjegyzés.** Pontosabban az állítás azt mondja ki, hogy $L(G \sqcup H)$ ekvivalencia osztálynak az egyik eleme a (2.2)-es mátrix lesz, azaz a csúcsoknak van olyan sorrendje, hogy ilyen alakú lesz a $G \sqcup H$ gráfhoz tartozó Laplace-mátrix. A megfelelő sorrend pedig a következő lesz:

$$\big(V_G, V_H\big) = \big(v_{G,1}\ , \ldots,\ v_{G,n}\ ,\ v_{H,1}\ , \ldots,\ v_{H,n'}\big), \tag{2.3}$$

ahol először a $G$ csúcsait vesszük a rögzített sorrendjükben ($v_{G,i}$-vel jelölve őket), majd $H$ csúcsai következnek szintén a rögzített sorrendjükben ($v_{H,j}$-vel jelölve őket).

**Bizonyítás:** Vegyük $G \sqcup V(H) = \big(V(G) \cup V(H), E(G)\big)$ segédgráfot, amely annak felel meg, hogy $G$ gráfhoz hozzávesszük $H$ csúcsait. Hasonlóan definiáljuk $V(G) \sqcup H$ segédgráfot is. Ennek a két gráfnak a csúcshalmazai megegyeznek, mindkettőn rögzítsük a csúcsok sorrendjét a (2.3)-nak megfelelően.

Mivel $V(H)$ csúcsok izoláltak lesznek $G \sqcup V(H)$ gráfban, és $V(G)$ csúcsok pedig izoláltak lesznek $V(G) \sqcup H$ gráfban, ezért a 2.3.3 Lemma szerint:

$$L(G \sqcup V(H)) = \begin{pmatrix} L(G) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad L(V(G) \sqcup H) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L(H) \end{pmatrix} .$$

Egyszerű meggondolni, hogy $G$ és $H$ gráfok diszjunkt uniója megegyezik az általunk bevezetett két segédgráf uniójával: $G \sqcup H = \big(G \sqcup V(H)\big) \cup \big(V(G) \sqcup H\big)$, és erre az átalakított verzióra alkalmazhatjuk a 2.3.1 Lemmát:

$$L(G \sqcup H) = L\big(G \sqcup V(H)\big) + L\big(V(G) \sqcup H\big) = \begin{pmatrix} L(G) & 0 \\ 0 & L(H) \end{pmatrix} = L(G) \oplus L(H) .$$

■

**2.3.6. Következmény.** $L(G)$ megegyezik $G = (G_1 \sqcup G_2 \sqcup G_3 \sqcup \dots)$ gráf összefüggő komponenseihez tartozó Laplace-mátrixok direkt összegével, ha a csúcsok sorrendjét a komponensek szerint csoportosítjuk.

$$
\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{cccc} \overbrace{\hspace{4em}}^{\text{1. komp.}} & \overbrace{\hspace{3em}}^{\text{2. komp.}} & \overbrace{\hspace{5em}}^{\text{3. komp.}} & \cdots \end{array} \\
\begin{array}{r}
\left.\begin{array}{r}\text{1. komponenshez}\\ \text{tartozó csúcsok}\end{array}\right\} \\
\left.\begin{array}{r}\text{2. komponenshez}\\ \text{tartozó csúcsok}\end{array}\right\} \\
\left.\begin{array}{r}\text{3. komponenshez}\\ \text{tartozó csúcsok}\end{array}\right\} \\
\vdots
\end{array}
&
\begin{pmatrix}
\boxed{L(G_1)} & & \mathbf{0} & \\
 & \boxed{L(G_2)} & & \\
\mathbf{0} & & \boxed{L(G_3)} & \\
 & & & \ddots
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

A továbbiakban a csúcsok sorrendjét a következményben leírtak alapján rögzítjük, hogy a gráfhoz tartozó Laplace-mátrixnak ehhez hasonló blokkos alakja legyen.

## 2.4. Laplace-mátrix szorzatra bontása

Az egyik leghasznosabb tulajdonsága a Laplace-mátrixnak, hogy a gráfon vett tetszőleges irányításhoz tartozó incidenciamátrix segítségével szorzat alakra bonthatjuk, mely sok esetben hasznosabbnak fog bizonyulni, mint a mátrix eredeti alakja.

Vegyünk egy tetszőleges irányítást a $G$ gráf élein, és a következőképpen definiáljuk a hozzátartozó $Q$ incidenciamátrixot, ahol a sorok a csúcsokkal, az oszlopok az élekkel vannak indexelve ( tehát ez egy $(n \times m)$-es mátrix):

$$
Q_{v_i e} = \begin{cases} -\sqrt{a_{v_i v_j}} & \text{ha } v_i \text{ kezdőcsúcsa az } e = (v_i, v_j) \text{ élnek,} \\ \sqrt{a_{v_i v_j}} & \text{ha } v_i \text{ végcsúcsa az } e = (v_j, v_i) \text{ élnek,} \\ 0 & \text{ha } v_i \text{ csúcs nem illeszkedik az } e \text{ élre,} \end{cases}
$$

ahol $a_{v_i v_j}$ a $G$-beli élsúlyok.

**2.4.1. Állítás.** *Legyen $G$ egy gráf, $Q$ pedig az előbb definiált incidenciamátrix tetszőleges irányítással az éleken. Ekkor a Laplace-mátrix szorzat alakra bomlik a következőképpen:*

$$L(G) = QQ^T.$$

**Bizonyítás:** Súlyozatlan esetre található egy bizonyítás [3, Proposition 4.8]-ban. Ám könnyen továbbgondolható az általánosabb súlyozott eset is, ezt mutatjuk be a továbbiakban.

Azt fogjuk belátni, hogy a jobboldali mátrix minden eleme megegyezik a $L(G)$ megfelelő elemével.

$(QQ^T)_{v_iv_j}$ elemet úgy kapjuk, hogy $Q$ $i$-edik sorát megszorozzuk $Q^T$ $j$-edik oszlopával, azaz $Q$ $j$-edik sorának a transzponáltjával. Tehét valójában ekkor az eredeti mátrix két sorának a skaláris szorzatát vesszük.

Ha $i \neq j$, akkor a két sor pontosan akkor tartalmaz nemnulla elemet ugyanabban az oszlopban, ha $v_i$ és $v_j$ között fut él. Ekkor ezek a $-\sqrt{a_{v_iv_j}}$ és $\sqrt{a_{v_iv_j}}$ értékek lesznek, és így $(QQ^T)_{v_iv_j} = -a_{v_iv_j}$.

Hasonlóan jön ki $(QQ^T)_{v_iv_i}$ is, ahol $Q$ $i$-edik sorának önmagával vett skaláris szorzatát vesszük. Azokban az oszlopokban vannak nemnulla elemek, amelyeknek megfelelő élekre $v_i$ illeszkedik. Így az eredmény $deg(v_i)$ lesz.

$L(G)$ mátrix szorzatra bontásához valóban tetszőleges irányítást lehet választani, mert a hozzátartozó incidenciamátrix és transzponáltjának szorzata minden esetben ugyanazt adja eredményül. Ugyanis ha megfordítanánk egy tetszőleges élet az irányított gráfban, akkor $Q$-ban $(-1)$-gyel kellene megszorozni az ehhez az élhez tartozó oszlopot, valamint $Q^T$-ben ugyanehhez az élhez tartozó sort. Az alábbi módosítások pedig éppen kiütik egymást a mátrixszorzás során. Csak arra kell figyelni, hogy amilyen sorrendű csúcsokkal indexelt $G$-hez tartozó Laplace-mátrixot akarunk megkapni, olyan sorrendben kell az incidenciamátrixnál a sorokat is indexelni. ■

## 2.5. Csúcsokon értelmezett függvények és $n$ dimenziós vektorok

Legyen az $\mathbb{R}^{V(G)} = \{f : V(G) \to \mathbb{R}\}$ olyan függvények halmaza, melyek a csúcsokhoz rendelnek valós számot. A szokásos vektorműveletekkel ellátva (pontonkénti összeadással és skalárral való szorzással) az $\mathbb{R}^{V(G)}$ egy $n$ dimenziós valós vektorteret alkot.

Az $\mathbb{R}^{V(G)}$ vektortéren válasszuk szokásos bázisnak az $e_1, e_2, \ldots, e_n$ függvényeket, ahol $e_i$ a Kronecker-deltának felel meg, azaz

$$e_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ha } i \neq j \\ 1 & \text{ha } i = j \end{cases}$$

Szavakkal kifejezve: a szokásos bázis $i$-edik függvénye olyan, hogy $v_i$ csúcson 1 értéket vesz fel, az összes többin pedig 0-t.

Minden $\mathbb{R}^{V(G)}$-beli függvényre lehet úgy gondolni, mint valós $n$ dimenziós oszlopvektorra. Kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van a két vektortér elemei között:

$$f : V(G) \to \mathbb{R} \quad \leftrightarrow \quad \underline{f} = \begin{pmatrix} f(v_1) \\ f(v_2) \\ \vdots \\ f(v_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \ , \tag{2.4}$$

ahol $\underline{f}$ vektor $i$. koordinátájában az $f$ függvény $v_i$ csúcson felvett értéke szerepel. Sőt ezzel a hozzárendeléssel az $\mathbb{R}^{V(G)}$-beli szokásos bázis elemek éppen az $\mathbb{R}^n$ szokásos bázis elemeivel állnak bijekcióban: $e_i \leftrightarrow \underline{e}_i$.

Ez a kölcsönös megfeleltetés nagyon hasznosnak fog bizonyulni, ugyanis így áttérhetünk az egyik fogalomról a másikra attól függően, hogy éppen egy vektor, vagy egy függvény fogalomra van szükségünk. Illetve abban van az igazán nagy jelentősége, hogy gráfelméleti jelentéssel tudtuk felruházni az $n$ dimenziós vektorokat, csúcsokkal indexeltük meg a koordinátákat. Ezáltal egy-egy algebrai műveletet ki lehet fejezni a csúcsokon értelmezett függvények és a gráf tulajdonságainak segítségével.

Például vizsgáljuk meg, hogy hogyan fog kinézni az a vektor, melyet akkor kapunk, ha a Laplace-mátrixot megszorozzuk egy csúcsokkal indexelt vektorral: $\underline{g} = L(G)\underline{f}$. Mivel a $\underline{\mathrm{g}}$ vektort is meg lehet feleltetni egy csúcsokon értelmezett függvénynek, a vektor koordináit a függvény csúcsokon felvett értékeivel lehet kifejezni:

$$g(v_i) = \sum_{j=1}^{n} \big(L(G)\big)_{v_i v_j} f(v_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{v_i v_j} \big(f(v_i) - f(v_j)\big) \quad \forall v_i \in V(G). \tag{2.5}$$

Az $L(G)$ valós és szimmetrikus mátrixhoz egyértelműen tartozik egy $\mathbb{R}^n$-en értelmezett kvadratikus alak. A következő tételben [2, Theorem 2.3] ennek a kifejtett alakját látjuk a (2.5)-ös egyenlet alakjához hasonlóan.

**2.5.1. Tétel.** *Ha $G$ egy gráf, akkor a Laplace-mátrixához tartozó kvadratikus alakot a következőképpen fejezhetjük ki:*

$$\big\langle \underline{f}, L(G)\underline{f} \big\rangle = \sum_{(v_i,v_j)\in E(G)} a_{v_i v_j} \big(f(v_i) - f(v_j)\big)^2 \qquad \forall f \in \mathbb{R}^V.$$

**Bizonyítás:** Ha felhasználjuk a 2.4.1 Állításban szereplő alakját a Laplace-mátrixnak, akkor a következő módon tudjuk átalakítani:

$$\left\langle \underline{f}, L(G)\underline{f} \right\rangle = \left\langle \underline{f}, (QQ^T)\underline{f} \right\rangle = \underline{f}^T(QQ^T)\underline{f} = (Q^T\underline{f})^T Q^T \underline{f},$$

ahol viszont $Q^T$ mátrixnak csak az oszlopai vannak csúcsokkal indexelve, sorai az élekkel állnak bijekcióban. Emiatt a $Q^T\underline{f} = \underline{g}$ szorzás eredménye egy élekkel indexelt vektor lesz, és ekkor következőképpen fejezhető be a bizonyítás:

$$(Q^T\underline{f})^T Q^T \underline{f} = \sum_{e \in E(G)} \left( \sum_{i=1}^{n} Q^T_{ev_i} f(v_i) \right)^2 = \sum_{(v_i,v_j) \in E(G)} a_{v_i v_j} \big( f(v_j) - f(v_i) \big)^2.$$

■

**2.5.2. Megjegyzés.** A bizonyításban szerepelő élekkel indexelt vektor az $\mathbb{R}^{E(G)}$ halmaz éleken értelmezett függvényeivel áll bijekcióban, ahol $\mathbb{R}^{E(G)}$ hasonlóan van definiálva, mint $\mathbb{R}^{V(G)}$.

Ha egy csúcsokkal indexelt vektorral szorzom be $Q^T$ mátrixot, akkor $\underline{g} = Q^T\underline{f}$ vektor egyértelműen megfelel egy éleken értelmezett függvénynek. A vektor koordinátáit a $g$ függvény éleken felvett értékeivel lehet kifejezni:

$$g(e) = \sum_{i=1}^{n} Q^T_{ev_i} f(v_i) = \sqrt{a_{v_i v_j}} \big( f(v_j) - f(v_i) \big) \ ,$$

ahol az $e = (v_i, v_j)$ irányított él.

# 3. fejezet

# Laplace-sajátértékek

A következő szakaszban a Laplace-mátrix sajátértékeit fogjuk hosszabban tárgyalni. $L(G)$ jellemzői közül a sajátértékei rendelkeznek az egyik legjelentősebb szereppel, ugyanis számos gráf tulajdonságot lehet a Laplace-sajátértékekkel kifejezni. Ez a rész [2, 3. alfejezet] főbb gondolatait veszi sorra, melyeket [1],[5] és [9] segítségével egészítettük ki.

## 3.1. Nemnegatív valós sajátértékek

Mivel a Laplace-mátrix valós és szimmetrikus, ezért van $n$ db valós sajátértéke. Viszont ennél többet is meg tudunk állapítani. A 2.5.1 Tételben a kvadratikus alaknak egy olyan egyszerűsített formája szerepel, mely alapján rögtön igazolható, hogy $L(G)$ pozitív szemidefinit. Mivel $a_{v_iv_j} \geq 0 \quad \forall v_i, v_j \in V$, ezért

$$\langle \underline{f}, L(G)\underline{f} \rangle = \sum_{(v_i,v_j)\in E} a_{v_iv_j}(f(v_i) - f(v_j))^2 \geq 0 \qquad \forall \underline{f} \in \mathbb{R}^n \ .$$

Ebből az következik, hogy a Laplace-mátrix sajátértékei mind nemnegatívak. Jelöljük őket $\lambda_i\big(L(G)\big)$-vel, és szokás csak egyszerűen ezeket a $G$ gráf Laplace-sajátértékeinek nevezni.

A Laplace-mátrix sajátságai között szerepelt, hogy sorösszegei nullával egyenlők, ezért a 0 sajátérték és a hozzátartozó triviális sajátvektor $\underline{j} = (1, 1, \ldots, 1)^T$ lesz. Tehát $L(G)$ valóban pozitív szemidefinit mátrix.

Rendezzük a Laplace-sajátértékeket növekvő sorrendbe, így $\lambda_1\big(L(G)\big) = 0$ lesz mindig a legkisebb sajátérték, és $\lambda_n\big(L(G)\big)$ pedig a legnagyobb:

$$0 = \lambda_1\big(L(G)\big) \leq \lambda_2\big(L(G)\big) \leq \cdots \leq \lambda_n\big(L(G)\big)$$

Mivel $L(G)$ valós szimmetrikus mátrix, ezért használható a Courant-Fischer-formula (1.0.2 Tétel) a sajátértékek meghatározására, miszerint

$$\lambda_k\big(L(G)\big) = \min\{\langle \underline{f}, L(G)\underline{f}\rangle : \|\underline{f}\| = 1,\ \underline{f} \perp \underline{f}^i,\ 1 \le i < k\},$$

ahol $\underline{f}^1, \ldots, \underline{f}^{k-1}$ páronként ortogonális sajátvektorok a $\lambda_1\big(L(G)\big), \ldots, \lambda_{k-1}\big(L(G)\big)$ sajátértékekkel.

Mivel $G$ hurokélmentes, ezért a sajátértékek összege, azaz a mátrix nyoma éppen a fokszámok összege lesz:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\big(L(G)\big) = tr\big(L(G)\big) = \sum_{v_i \in V} deg(v_i). \tag{3.1}$$

Az egyenlőség tovább folytatható a (2.1)-es alapján.

## 3.2. Az összefüggő gráf és $\lambda_2\big(L(G)\big)$ kapcsolata

A legkisebb sajátértékét mindig ismerjük a Laplace-mátrixnak. Ám attól függően, hogy gráfunk hány összefüggő komponensből áll, tudunk nyilatkozni arról is, hogy még mennyi sajátérték lesz 0-val egyenlő [2, Theorem 3.1]. Az erről szóló tételben szükségünk lesz a 2.3 alfejezet elején megemlített tulajdonságra, miszerint a diszjunkt unióhoz tartozó Laplace-mátrix sajátértékei és sajátvektorai kifejezhetők a diszjunkt gráfok Laplace-sajátértékeinek és sajátvekorainak segítségével. Ezt egy lemmában [9, Theorem 4] fogalmazzuk meg pontosabban.

**3.2.1. Lemma.** *Legyen $G$ egy $n$ csúcsú gráf és $H$ egy $n'$ csúcsú gráf. Legyenek $L(G)$ sajátértékei $\lambda_1\big(L(G)\big) \le \cdots \le \lambda_n\big(L(G)\big)$ és legyenek $\underline{f}_1(G), \ldots, \underline{f}_n(G)$ ezekhez tartozó sajátvektorok; továbbá legyenek $L(H)$ sajátértékei $\lambda_1\big(L(H)\big) \le \cdots \le \lambda_{n'}\big(L(H)\big)$ és legyenek $\underline{f}_1(H), \ldots, \underline{f}_{n'}(H)$ ezekhez tartozó sajátvektorok. Ekkor $L(G \sqcup H)$ sajátértékei*

$$\lambda_1\big(L(G)\big), \ldots, \lambda_n\big(L(G)\big), \lambda_1\big(L(H)\big), \ldots, \lambda_{n'}\big(L(H)\big)$$

*értékek és ezekhez tartozó $n + n'$ dimenziós sajátvektorok*

$$\underline{f}_1(G) \oplus \underline{0}_{n'}, \ldots, \underline{f}_n(G) \oplus \underline{0}_{n'}, \underline{0}_n \oplus \underline{f}_1(H), \ldots, \underline{0}_n \oplus \underline{f}_{n'}(H),$$

*ahol $\underline{0}_n$ az $n$ dimenziós nullvektor, $\underline{0}_{n'}$ pedig az $n'$ dimenziós nullvektor.*

**Bizonyítás:** Ellenőrizzük le, hogy $\underline{f}_1(G) \oplus \underline{0}_{n'}$ valóban egy $\lambda_1\big(L(G)\big)$ sajátértékhez tartozó sajátvektora az $L(G \sqcup H)$ mátrixnak:

$$L(G \sqcup H)(\underline{f}_1(G) \oplus \underline{0}_{n'}) = \begin{pmatrix} L(G) & 0 \\ 0 & L(H) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{f}_1(G) \\ \underline{0}_{n'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\big(L(G)\big)\underline{f}_1(G) \\ \underline{0}_{n'} \end{pmatrix}$$

Hasonlóan igazolható a többi vektor esetén is, hogy a felsorolt sajátértékekhez tartozó sajátvektorai lesznek a diszjunkt unió Laplace-mátrixának. ■

**3.2.2. Következmény.** $L(G)$ sajátértékei az összefüggő komponensek Laplace-saját-értékeinek uniójával egyezik meg. A hozzájuk tartozó sajátvektorokat pedig a komponensekhez tartozó Laplace-sajátvektorok kibővítésével kapjuk olyan módon, hogy kiegészítjük nullákkal a többi komponenshez tartozó koordinátákban. $L(G)$ sajátértékei az összefüggő komponensek Laplace-saját-értékeinek uniójával egyezik meg. A hozzájuk tartozó sajátvektorokat pedig a komponensekhez tartozó Laplace-sajátvektorok kibővítésével kapjuk olyan módon, hogy kiegészítjük nullákkal a többi komponenshez tartozó koordinátákban.

**3.2.3. Tétel.** *$G$ gráf összefüggő komponenseinek száma megegyezik a 0 Laplace-sajátérték multiplicitásával.*

**Bizonyítás:** Az egyenlőséget két részletben bizonyítjuk be, elsőként a következő állítást fogjuk belátni:

Ha a gráf $k$ db összefüggő komponensből áll, akkor a 0 legalább $k$-szoros Laplace-sajátértéke lesz.

A 3.2.1 Lemma alapján tudjuk, hogy a $k$ db komponens Laplace-sajátértékeinek az uniója lesz $L(G)$ sajátértékei, melyben így biztosan előfordul legalább $k$ db 0 érték, hiszen minden komponenshez a legkisebb Laplace-sajátérték a 0. A hozzájuk tartozó sajátvektorok pedig úgy néznek ki, hogy egy adott komponenshez tartozó koordinátákban csak 1-esek szerepelnek, a többiben pedig nullák. Így ezek biztosan lineárisan függetlenek.

Tehát $k$ db komponens esetén a 0-hoz tartozó sajátaltér legalább $k$ dimenziós. A bizonyítás befejezéséhez azt kell még belátni, hogy ennél nem is lehet több, azaz:

Ha $k$ komponens van, akkor a 0-hoz tartozó sajátaltér pontosan $k$ dimenziós.

Elég belátni egy $G'$ összefüggő gráf esetén, hogy Laplace-mátrixának a 0 sajátértékhez tartozó sajátaltere 1 dimenziós. Mivel $L(G)$-nél, ahol $k$ db összefüggő gráf Laplace-mátrixának a direkt összege szerepel, a 0 sajátértékhez tartozó sajátalterek dimenziói összeadódnak, hiszen a blokkok sajátalterei lineárisan függetlenek.

Tehát legyen $G'$ egy $l$ csúcsú összefüggő gráf, és legyen $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_l)^T$ egy 0-hoz tartozó sajátvektor. Vegyük a következő vektort:

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_l \end{pmatrix} - c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{ahol } c \in \mathbb{R}.$$

Az altérbeli elemek lineáris kombinációja is benne marad az altérben, így $\underline{b}$ -nek is 0-hoz tartozó sajátvektornak kell lennie.

Legyen $c = min\{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$. Ezzel a választással $\underline{b}$ minden koordinátája nemnegatív, és biztosan 0 lesz az egyik közülük. Tegyük fel, hogy $\underline{b}_i = 0$.

$$L(G')\underline{b} = \underline{0} \tag{3.2}$$

$$(L(G')\underline{b})_i = \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{l} L(G')_{ij}\underline{b}_j \tag{3.3}$$

Mivel $L(G')_{ij} \leq 0$ és $\underline{b}_j \geq 0 \quad (i, j = 1, \ldots, l)$, ezért a (3.3)-ban minden tagnak 0-nak kell lennie, hogy ki tudja elégíteni a (3.2)-ben megfogalmazott sajátvektor tulajdonságot.

Ha $v_i$ és $v_j$ nem szomszédosak, akkor $L(G')_{ij} = 0$. Ám ez nem ejti ki az összes tagot, hiszen a részgráfban biztosan lesz szomszédja $v_i$-nek. (Ha a részgráf csak $v_i$ izolált csúcsból állna, akkor a hozzátartozó blokk csak $1 \times 1$-es lenne. Ebben a triviális esetben nyilván csak 1 dimenziós az altér.)

Ha $v_i$ és $v_j$ szomszédos, akkor $\underline{b}_j = 0$-nak kell teljesülnie mindenképpen. Most gondoljunk úgy $\underline{b}$ vektorra, mint $\mathbb{R}^{V(G')}$-beli $b$ függvényre a (2.4)-nél lévő megfeleltetés szerint. Ebben az esetben $b_j = 0$-nak az a jelentése, hogy $b$ függvény a $v_j$ csúcshoz a 0 számot rendelte. Amikor majd $(L(G')\underline{b})_j$ koordinátát vizsgáljuk, akkor $v_j$ szomszédaira kell igaznak lennie, hogy a $b$ függvény 0-t rendel hozzájuk. Ha ezt így folytatjuk, akkor sorra kiderül, hogy minden csúcshoz a 0 érték van rendelve a $b$ függvény által, hiszen $G'$ összefüggő gráf, tetszőleges csúcsból el lehet jutni tetszőlgesbe. Tehát $b$ az azonosan nulla függvény, és a hozzátartozó vektor pedig $\underline{b} = \underline{0}$. Ez pedig azt jelenti, hogy $\underline{a} = c(1, 1, \ldots, 1)^T$, azaz 1 dimenziós a 0-hoz tartozó sajátaltér.

Az első állításból azt tudtuk meg, hogy $k$ összefüggő komponensnél legalább $k$ db 0 sajátértékhez tartozó lineárisan független sajátvektor van, a másodikból viszont azt, hogy $k$-nál több nem lehet. Így a 0 pontosan $k$-szoros sajátérték lesz $k$ összefüggő komponens esetén. ■

**3.2.4. Megjegyzés.** $\lambda_2\big(L(G)\big) > 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha a gráf összefüggő. Emiatt a második legkisebb Laplace-sajátértéknek kiemelt szerepe van, szokták algebrai összefüggőségnek nevezni [5, 298. oldal].

Már korábbról is tudjuk, hogy $det\big(L(G)\big) = 0$, hiszen sor-, illetve oszlopösszege 0-val egyenlő. Tehát biztosan elmondható, hogy $rang\big(L(G)\big) < n$. Valójában az előző tétel következményeként megmondható a Laplace-mátrix rangja, de egy külön állításként [1, 216. oldal] fogalmazzuk ezt meg.

**3.2.5. Állítás.** *Ha $G$ egy $k$ komponensből álló gráf, akkor*

$$rang\big(L(G)\big) = n - k\ .$$

**Bizonyítás:** A 3.2.3 Tételnél láttuk, hogy $k$ komponens esetén $L(G)$-nek $k$ db lineárisan független 0 sajátértékhez tartozó sajátvektora van, azaz

$$dim\big(Ker\ L(G)\big) = k.$$

A következőkben szükségünk lesz a Laplace-mátrixhoz tartozó lineáris operátorra, mely a rögzített bázis miatt egyértelműen hozzárendelhető $L(G)$-hez, jelöljük $\mathcal{L}$-lel. Ez az operátor a 2.5 alfejezetben definiált $\mathbb{R}^{V(G)}$ függvénytéren hat. A magtere megegyezik a Laplace-mátrix magterével, ezért : $dim\big(Ker\ \mathcal{L}\big) = k$. Mivel a leképezés rangja a képtér dimenziója, így a dimenziótételt is felhasználva azt kapjuk, hogy:

$$rang\big(\mathcal{L}\big) = dim\big(Im\ \mathcal{L}\big) = n - k.$$

Innen pedig már csak arra kell hivatkoznunk, hogy a leképezés rangja megegyezik a mátrixának a rangjával. ■

## 3.3. Gráf komplementerének Laplace-sajátértékei

Ha $G$ egy súlyozatlan gráf, akkor komplementerével együtt kiteszik az $n$ csúcsú teljes gráfot. Ez jelenleg azért hasznos, mert pontosan ismerjük a teljes gráf Laplace-mátrixát. Bármely két csúcs között vezet él, ezáltal ismerjük a nem főátlóbeli elemeket, de ugyanezen ok miatt a csúcsok fokszámát is pontosan tudjuk, melyek a főátlóban helyezkednek el. A mátrixot egyedül a csúcsok száma határozza meg. Tehát egyszerű kapcsolat fogalmazható meg $G$ és komplementerének Laplace-mátrixai között [2, 118. oldal, (6)]. Emiatt a későbbiekben azt is látni fogjuk, hogy elegendő csak az egyik gráf esetén meghatározni a Laplace-sajátértékeket [2, Theorem 3.2], és általuk a másik gráfhoz tartozókat is ismerni fogjuk.

**3.3.1. Lemma.** *Legyen $G$ egy súlyozatlan gráf, $\overline{G}$ pedig a komplementere. Ekkor:*

$$L(G) + L\big(\overline{G}\big) = nI - J \ , \tag{3.4}$$

*ahol $J$ a csupa 1-es mátrix.*

**Bizonyítás:** A 2.3.1 Lemma alapján $L(G) + L\big(\overline{G}\big) = L\big(G \cup \overline{G}\big) = L(K_n)$, ahol $K_n$ az $n$ csúcsú teljes gráfot jelöli. Ezért egyszerűen csak annyit kell meggondolni, hogy a teljes gráf Laplace-mátrixa valóban így néz ki:

$$L(K_n) = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}.$$

$K_n$-ben minden csúcs össze van kötve minden másik csúccsal, ezért a főátlóban a fokszámok $(n-1)$-gyel és a nem diagonálbeli elemek pedig $(-1)$-gyel egyenlők. ■

**3.3.2. Megjegyzés.** Általánosabb súlyozott esetre is átvihető a 3.3.1 Lemma, ha $\overline{G}$ élsúlyait a következőképpen definiáljuk:

$$\overline{a_{v_iv_j}} = 1 - a_{v_iv_j} \quad (i \neq j).$$

Azért, hogy ezek a súlyok is nemnegatívak lehessenek, meg kell követelnünk $G$ élsúlyaira, hogy $0 \leq a_{v_iv_j} \leq 1$.

Tegyük fel, hogy a következőkben ezen feltételek teljesülnek $G$ és $\overline{G}$ gráfok súlyfüggvényeire.

**3.3.3. Tétel.** *Ha $G$ gráf Laplace-sajátértékei $\lambda_1\big(L(G)\big) \leq \dots \leq \lambda_n\big(L(G)\big)$ értékek, akkor komplementerének a Laplace-sajátértékei a következőképpen fejezhetők ki:*

$$\lambda_1\big(L(\overline{G})\big) = 0 \quad \textit{és} \quad \lambda_i\big(L(\overline{G})\big) = n - \lambda_{n-i+2}\big(L(G)\big) \qquad (2 \leq i \leq n).$$

**Bizonyítás:** Az állítás első fele triviális, hiszen minden Laplace-mátrixnak a legkisebb sajátértéke 0.

A bizonyítás második felében belátjuk, hogy az $n - \lambda_i\big(L(G)\big)$ értékek valóban sajátértékei lesznek az $L\big(\overline{G}\big)$-nek ($\forall\ 2 \le i \le n$-re).

Legyen $\underline{f}^1, \underline{f}^2, \ldots, \underline{f}^n$ egy ortogonális rendszere $L(G)$ sajátvektorainak oly módon, hogy $\underline{f}^1 = (1, \ldots, 1)^T$ és $L(G)\underline{f}^i = \lambda_i\big(L(G)\big)\underline{f}^i$. Ilyen rendszer a főtengelytétel miatt létezik, hiszen $L(G)$ szimmetrikus.

A bizonyítás a 3.3.1 Lemmát használja fel. Először szorozzuk meg a (3.4)-es egyenletet $\underline{f}^i$ vektorral ($2 \le i \le n$):

$$L(G)\underline{f}^i + L\big(\overline{G}\big)\underline{f}^i = nI\underline{f}^i - J\underline{f}^i$$
$$\lambda_i\big(L(G)\big)\underline{f}^i + L\big(\overline{G}\big)\underline{f}^i = n\underline{f}^i$$

Mivel $\underline{f}^1, \underline{f}^2, \ldots, \underline{f}^n$ ortogonális rendszer, ezért $\big\langle \underline{f}^1, \underline{f}^i \big\rangle = 0 \quad (i = 2, \ldots, n)$. Amikor $J$ mátrixot beszorozzuk az $\underline{f}^i$ vektorral, akkor valójában minden sorban az $\big\langle \underline{f}^1, \underline{f}^i \big\rangle$ skaláris szorzás történik. Ezért az előbb említett okok miatt az eredmény $\underline{0}$ lesz.

$$L\big(\overline{G}\big)\underline{f}^i = \big(n - \lambda_i\big(L(G)\big)\big)\underline{f}^i$$

Az egyenlet átrendezése után adódik, hogy $\underline{f}^i$ sajátvektora lesz $L\big(\overline{G}\big)$-nek is, és a hozzátartozó sajátérték $n - \lambda_i\big(L(G)\big)$. Egyszerű meggondolás után adódik, hogy ez a $\lambda_{n-i+2}\big(L\big(\overline{G}\big)\big)$ sajátértéknek felel meg. ■

## 3.4. Laplace-sajátértékek egyenlőtlenségei

A továbbiakban $G$ legyen egy összefüggő gráf. A legfontosabb Laplace-sajátértékek a két extremális nemnulla sajátérték, melyek az összefüggő esetben a második legkisebb és a legnagyobb sajátértékek. A 3.3.3 Tételből ismerjük a közöttük lévő kapcsolatot, miszerint:

$$\lambda_2\big(L(G)\big) = n - \lambda_n\big(L\big(\overline{G}\big)\big). \tag{3.5}$$

Ennek segítségével az egyikről kimondott állítás átfogalmazható lesz a másikra is.

Ahogy korábban említettük, a $k$-adik legkisebb sajátérték meghatározására a Courant-Fischer-formulát használhatjuk. Ha ezt konkrétan felírjuk a második legkisebb sajátértékre, akkor a következőt kapjuk:

$$\lambda_2\big(L(G)\big) = \min\{\big\langle \underline{f}, L(G)\underline{f} \big\rangle : \big\|\underline{f}\big\| = 1,\ \underline{f} \perp \underline{j}\}.$$

Ugyanis $\underline{j}$ egy $\lambda_1\big(L(G)\big)$-hez tartozó sajátvektor. Erre a vektorra való ortogonalitást pedig egyszerűen lehet ellenőrizni, hiszen a koordináták összegének nullával kell egyenlőnek lennie.

A következő állításban $G$ gráf fokszámainak segítségével egyszerű felső becslést tudunk adni $\lambda_2(G)$-re [2, Lemma 3.4].

**3.4.1. Állítás.** *Bármely nem szomszédos $v_t, v_s \in V$ csúcsok esetén fennáll a következő egyenlőtlenség:*

$$\lambda_2\big(L(G)\big) \le \frac{1}{2}(deg(v_t) + deg(v_s)).$$

**Bizonyítás:** Vegyük azt az $f \in \mathbb{R}^V$ függvényt, mely

$$f(v_i) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{ha } v_i = v_t, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{ha } v_i = v_s, \\ 0 & \text{bármely más csúcs esetén .} \end{cases}$$

A kiválasztott függvénynek megfelelő vektorra teljesül, hogy $\|\underline{f}\| = 1$ és $\underline{f} \perp \underline{j}$, ezért azon függvények közé tartozik, amelyeken a kvadratikus alak minimumát keressük a Courant-Fischer-formulában. Tehát:

$$\lambda_2\big(L(G)\big) \le \langle \underline{f}, L(G)\underline{f} \rangle = \sum_{(v_k,v_l)\in E} a_{v_k v_l}\big(f(v_k) - f(v_l)\big)^2 = \tag{3.6}$$

$$= \sum_{v_l \in V} a_{v_t v_l} f^2(v_t) + \sum_{v_k \in V} a_{v_k v_s} f^2(v_s) = \tag{3.7}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{v_l \in V} a_{v_t v_l} + \frac{1}{2}\sum_{v_k \in V} a_{v_k v_s} = \frac{deg(v_t) + deg(v_s)}{2}$$

A (3.6)-nál lévő szummában csak azon élekhez tartozó tagok nem nullák, ahol az él egyik végpontja vagy $v_t$, vagy $v_s$ csúcs. Az állításban szereplő feltétel szerint nem illeszkednek egy élre, tehát a szomszédjaikon mindig nulla értékű a függvény, ezért a négyzetre emelés a (3.7)-nél látható módon kiegyszerűsödik. A behelyettesítések után pedig a csúcsok fokszámának a definíciója jelenik meg, éppen aminek ki kellett jönnie. ■

A továbbiakban súlyozatlan gráfok Laplace-mátrixának sajátértékeivel kapcsolatos egyenlőtlenségeket vizsgálunk. A most következő állítás szintén fokszámokkal kapcsolatos becslés lesz, de speciálisabban a legkisebb és legnagyobb fokszámokat használjuk fel [5, 3.5 és 3.7].

**3.4.2. Állítás.** *Ha $G$ egy $n$ csúcsú súlyozatlan gráf, akkor következő egyenlőtlenségek teljesülnek:*

$$\lambda_2\big(L(G)\big) \leq \frac{n}{n-1}\delta(G) \quad \textit{és} \quad \frac{n}{n-1}\Delta(G) \leq \lambda_n\big(L(G)\big) \leq 2\Delta(G).$$

**Bizonyítás:** A tétel második legkisebb sajátértékre vonatkozó része egyszerűen az 1.0.3 Lemma alkalmazása $L(G)$-re.

A legnagyobb sajátértékről szóló egyenlőtlenségeket külön-külön bizonyítjuk be. Nézzük először a jobboldali egyenlőtlenséget:

$$\lambda_n\big(L(G)\big) \leq 2\Delta(G) \ . \tag{3.8}$$

Mivel a sajátértékek nemnegatívak, ezért a Laplace-mátrixnak a legnagyobb sajátértéke lesz egyben a spektrálsugara is, azaz:

$$\rho(L(G)) = max\{|\lambda| : \lambda \text{ sajátértéke } L(G)\text{-nek}\} = \lambda_n\big(L(G)\big).$$

A (3.8)-as egyenlőtlenség jobb oldalán a legnagyobb fokszám kétszeresére gondolhatunk úgy is, mint a kétszeres fokszámok maximumára, ami éppen az $L(G)$ abszolút sorösszegeinek maximumával egyenlő. Ezt az értéket szokták a mátrix végtelen normájának nevezni.

$$\max_{v_i \in V} 2\ deg(v_i) = \max_i \sum_j |L(G)_{v_i v_j}| = \|L(G)\|_\infty$$

A bizonyítás befejezéséhez szükségünk van egy numerikus analízisbeli állításra [12, 1.2 fejezet, (1.17) egyenlet], miszerint bármely mátrixnorma esetén igaz a következő egyenlőtlenség:

$$\rho(L(G)) \leq \|L(G)\| \ .$$

Tehát ez a végtelen norma esetén is teljesül, és ezzel igazoltuk a (3.8)-as egyenlőtlenséget.

Most lássuk be a baloldali egyenlőtlenséget is:

$$\frac{n}{n-1}\Delta(G) \leq \lambda_n\big(L(G)\big) \ .$$

Az állítás második legkisebb sajátértékéről szóló részét alkalmazzuk $\overline{G}$ komplementer gráfra:

$$\lambda_2\big(L(\overline{G})\big) \leq \frac{n}{n-1}\ \delta(\overline{G}) \ .$$

Az egyenlőtlenség bal oldalán használjuk ki a (3.5)-ös azonosságot, jobb oldalon pedig azt a tényt, hogy egy $n$ csúcsú súlyozatlan gráf legkisebb fokszámmal rendelkező csúcsa a komplementer gráfban a legnagyobb fokszámmal rendelkező csúcs lesz, és ezek összege $n-1$.

$$\begin{aligned} n - \lambda_n\big(L(G)\big) &\leq \frac{n}{n-1}\,(n-1-\Delta(G)) \\ n - \lambda_n\big(L(G)\big) &\leq n - \frac{n}{n-1}\,\Delta(G) \\ \frac{n}{n-1}\,\Delta(G) &\leq \lambda_n\big(L(G)\big) \end{aligned}$$

Így megkaptuk a kívánt egyenlőtlenséget. ■

A további állításokban a Laplace-sajátérték egyenlőtlenségeket a gráfok különböző unióműveletei kapcsán vizsgáljuk meg [5, 3. alfejezet].

**3.4.3. Állítás.** *Ha $G, H$ gráfok ugyanazzal a csúcshalmazzal, de diszjunkt élhalmazzal rendelkeznek, akkor:*

$$\lambda_2\big(L(G)\big) + \lambda_2\big(L(H)\big) \leq \lambda_2\big(L(G \cup H)\big)\ .$$

**Bizonyítás:** Az $L(G\cup H) = L(G) + L(H)$ azonosságot felhasználjuk a Courant-Fischer-formulában a második legkisebb sajátérték keresésénél:

$$\lambda_2\big(L(G_1 \cup G_2)\big) = \min\{\big\langle \underline{f}, (L(G)+L(H))\underline{f}\big\rangle : \big\|\underline{f}\big\| = 1, \underline{f} \perp \underline{j}\}\ .$$

Válasszunk ki egy tetszőleges $\underline{f}$ vektort abból a halmazból, amelyen keressük a kvadratikus alak minimumát.

$$\begin{aligned} \big\langle \underline{f}, L(G)\underline{f}\big\rangle &\geq \lambda_2\big(L(G)\big) \\ \big\langle \underline{f}, L(H)\underline{f}\big\rangle &\geq \lambda_2\big(L(H)\big) \end{aligned}$$

A két egyenlőtlenséget összeadva, és kihasználva a skaláris szorzás linearitását, a következőt kapjuk:

$$\big\langle \underline{f}, L(G)\underline{f} + L(H)\underline{f}\big\rangle \geq \lambda_2\big(L(G)\big) + \lambda_2\big(L(H)\big)\ .$$

Mivel f̲ tetszőleges vektor, ezért minden halmazbeli elemre teljesülni fog az egyenlőtlenség, és közöttük még arra is, amelyen a minimum felvétetik. Ezáltal meg is kaptuk az állítást:

$$\lambda_2\big(L(G \cup H)\big) \geq \lambda_2\big(L(G)\big) + \lambda_2\big(L(H)\big).$$

■

**3.4.4. Állítás.** *Ha $G, H$ gráfok ugyanazzal a csúcshalmazzal rendelkeznek, és $G \subseteq H$, akkor a következő egyenlőtlenség teljesül:*

$$\lambda_2\big(L(G)\big) \leq \lambda_2\big(L(H)\big) \ .$$

**Bizonyítás:** A 3.4.3 Állításból tudjuk, hogy

$$\lambda_2\big(L(G)\big) + \lambda_2\big(L(H-G)\big) \leq \lambda_2\big(L(H)\big) \ ,$$

ahol $H - G$ azon élekből álló gráf, melyek $H$-ban szerepelnek, de $G$-ben nem. Mivel $\lambda_2\big(L(H-G)\big) \geq 0$, ezért ezt elhagyva a bal oldalról, az egyenlőtlenség igaz marad.

■

**3.4.5. Állítás.** *Ha $G, H$ gráfok ugyanazzal a csúcshalmazzal rendelkeznek, és $G \subseteq H$, akkor a legnagyobb Laplace-sajátértékek esetén fennáll a következő egyenlőtlenség:*

$$\lambda_n\big(L(G)\big) \leq \lambda_n\big(L(H)\big) \ .$$

**Bizonyítás:** A feltételben szereplő gráftartalmazásból következik, hogy a komplementerekre $\overline{H} \subseteq \overline{G}$ teljesül. Alkalmazzuk a 3.4.4 Állítást a komplementer gráfokra:

$$\begin{aligned} \lambda_2\big(L(\overline{H})\big) &\leq \lambda_2\big(L(\overline{G})\big) \\ n - \lambda_2\big(L(\overline{G})\big) &\leq n - \lambda_2\big(L(\overline{H})\big) \\ \lambda_n\big(L(G)\big) &\leq \lambda_n\big(L(H)\big) \end{aligned}$$

Ekvivalens átalakítások után megjelenik a kívánt egyenlőtlenség. ■

A 3.4.4 és 3.4.5 Állításokban láttuk, hogy adott $G$ gráf és ugyanazzal a csúcshalmazzal rendelkező, de bővebb $H$ gráf esetén a második legkisebb Laplace-sajátértékeknél és legnagyobb Laplace-sajátértékeknél is a bővebb gráfhoz tartozó értékek bizonyultak nagyobb vagy egyenlőnek. Felmerül a kérdés, hogy ez igaz lesz-e a többi Laplace-sajátérték esetén is. Nyilván a legkisebb sajátértéknél teljesül, hiszen mindkét gráfnál ez nulla lesz. Viszont az összes többi esetén ez nem triviális. További lehetséges felvetés, hogy vajon azon egyenlőtlenségek, amelyeket súlyozatlan gráfoknál láttunk, azt át lehet-e vinni az általánosabb súlyozott gráfok esetére is. Ekkor úgy értelmezzük $G \subseteq H$ tartalmazást, hogy $H$ gráf élsúlyai nagyobbak vagy egyenlők, mint $G$ gráf élsúlyai. Először két olyan gráfon vizsgáljuk meg ezeket a kérdéseket, amelyek alig különböznek egymástól [2, 121.oldal].

Adott egy $G$ gráf, $G'$ gráfot pedig úgy kapjuk $G$-ből, hogy valamely $e$ élsúlyát megnöveljük 1-gyel: $a'_e = a_e + 1$. (Ha eddig $a_e = 0$ volt, akkor a súlynöveléssel bekerült $G'$ gráfba az $e$ él.) Ekkor a két gráf Laplace-mátrixainak különbsége egy 1 rangú mátrix lesz.

Ezt ellenőrizzük le egy kisebb példán, legyen $G$ egy $n = 3$ csúcsú gráf, és $(v_1, v_2)$ él súlyát növeljük meg:

$$L(G') - L(G) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Általánosan elmondható, hogy egy $n$ csúcsú gráf esetén is 2 db 1-es lesz a két mátrix különbségének főátlójában, hiszen az $e$ élre illeszkedő csúcsok fokszáma nőtt meg, illetve 2 db $-1$-es jelenik meg szimmetrikusan az $e$ élsúlynak megfelelő helyeken. Ez a mátrix tekinthető annak a gráfnak a Laplace-mátrixának, melyben egyedül csak az 1 súlyú $e$ él szerepelne. Laplace-sajátértékei a 2 egyszeresen és a 0 pedig $(n-1)$-szeresen.

**3.4.6. Tétel.** *Az előbb definiált $G$ és $G'$ gráfok Laplace-sajátértékei között a következő kapcsolat áll fenn:*

$$0 = \lambda_1\big(L(G)\big) = \lambda_1\big(L(G')\big) \le \lambda_2\big(L(G)\big) \le \cdots \le \lambda_n\big(L(G)\big) \le \lambda_n\big(L(G')\big).$$

**Bizonyítás:** A bizonyításban a Courant-Weyl-egyenlőtlenségeket (1.0.5 Tétel) fogjuk használni. A feltétele szerint csak Hermite-mátrixokra lehet alkalmazni, ám valós esetben ez ekvivalens azzal, hogy a mátrixnak szimmetrikusnak kell lennie. Tehát jogosan alkalmazhatjuk Laplace-mátrixokra.

Valójában az egyenlőtlenség lánc bizonyításához elegendő két egyenlőtlenség belátása:

$$\lambda_i\big(L(G)\big) \le \lambda_i\big(L(G')\big) \tag{3.9}$$

$$\lambda_j\big(L(G')\big) \le \lambda_{j+1}\big(L(G)\big) \tag{3.10}$$

A (3.9)-es bizonyításához a Courant-Weyl-egyenlőtlenség $(iii)$-as állítását alkalmazzuk $A = L(G)$-re és $B = L(G') - L(G)$-re. Az előbb gondoltuk végig, hogy $L(G') - L(G)$ pozitív szemidefinit, így a behelyettesítés után adódik az, amit szerettünk volna:

$$\lambda_i\big(L(G)\big) \le \lambda_i\Big(L(G) + \big(L(G') - L(G)\big)\Big) = \lambda_i\big(L(G')\big)\ .$$

A (3.10)-eshez $A = -L(G)$ és $B = L(G')$ választásra lesz szükségünk, de ehhez előtte ki kell fejeznünk $-L(G)$ sajátértékeit. Ezek $L(G)$ sajátértékeinek $(-1)$-szeresei lesznek, de olyan módon, hogy még a nagyság szerinti sorrend is megváltozik:

$$-\lambda_n\big(L(G)\big) \leq -\lambda_{n-1}\big(L(G)\big) \leq \cdots \leq -\lambda_1\big(L(G)\big)$$
$$\lambda_1\big(-L(G)\big) \leq \lambda_2\big(-L(G)\big) \leq \cdots \leq \lambda_n\big(-L(G)\big)$$

A két mátrix sajátértékei közötti kapcsolatot általánosan felírva:

$$\lambda_k\big(L(G)\big) = -\lambda_{n-k+1}\big(-L(G)\big).$$

A (3.10)-esnél ezt a kapcsolatot kihasználva továbbalakíthatjuk ekvivalens módon a bizonyítandó egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} \lambda_j\big(L(G')\big) &\leq \lambda_{j+1}\big(L(G)\big) \\ \lambda_j\big(L(G')\big) &\leq -\lambda_{n-j}\big(-L(G)\big) \\ \lambda_j\big(L(G')\big) + \lambda_{n-j}\big(-L(G)\big) &\leq 0 \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőtlenségről pedig már tudjuk, hogy igaz, hiszen éppen megfelel Courant-Weyl-egyenlőtlenség $(i)$-es állításának, hiszen $j + (n-j) \leq n$ teljesül, és ekkor:

$$\lambda_j(A) + \lambda_{n-j}(B) \leq \lambda_{n-1}(A+B),$$

egyenlőtlenség teljesül, ahol $A+B = L(G') - L(G)$ mátrix, aminek sajártértékei a 2 egyszeresen és a 0 pedig $(n-1)$-szeresen. Emiatt az $(n-1)$-edik legkisebb sajátértéke 0 lesz. ■

**3.4.7. Megjegyzés.** Vegyük a $G$-hez és $G'$-höz tartozó azonos indexű Laplace-sajátértékek a különbségeinek összegét. Ekkor a (3.1)-es azonosság alapján a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\big(\lambda_i\big(L(G')\big) - \lambda_i\big(L(G)\big)\big) &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\big(L(G')\big) - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\big(L(G)\big) = \\ &= 2\Big(\sum_{(v_i,v_j)\in E} a_{v_iv_j} + 1\Big) - 2\Big(\sum_{(v_i,v_j)\in E} a_{v_iv_j}\Big) = 2\,. \end{aligned}$$

Emiatt legalább egy egyenlőtlenségnek szigorúnak kell lennie.

Ezt az egyenlőtlenségláncot csak ebben az esetben lehetett garantálni, amikor egy élnek a súlyát növeltük meg 1-gyel. Ha több módosítást is végzünk az élsúlyokon, akkor már előfordulhat, hogy felborulnak az egyenlőtlenségek. A (3.9)-es típusúak teljesüni fognak, hiszen ha a több módosítást egymás után végezzük el, egyszerre csak mindig egy élsúlyt növelve, akkor a nagyobb gráf Laplace-sajátértéke minden alkalommal felülről becsüli az előzőét. Így az eredeti gráf és a tetszőlegesen bővebb gráf azonos indexű Laplace-sajátértékei között is fenn fog állni az egyenlőtlenség. Ám a (3.10)-es típusú egyenlőtlenségek bizonyos mennyiségű élsúly növelés után elromlanak. Mivel az egyenlőtlenségek jobb oldalán adott értékek állnak, viszont az újabb és újabb élsúlyok növelésével a bal oldalak közül valamelyik mindig biztosan nőni fog (ezt a megjegyzésben láttuk). Így előbb-utóbb nem fog az egyik indexre az egyenlőtlenség teljesülni.

# 4. fejezet

# A Laplace-mátrix alkalmazása

A korábbi fejezetekben számos jellemzőjét bemutattuk a Laplace-mátrixnak, hogy a gráf bizonyos tulajdonságait pontosan hogyan is viszi át lineáris algebrai tulajdonságokra. A következőkben egy gráfelméletbeli kérdést fogunk megoldani a Laplace-mátrixok segítségével.

## 4.1. Feszítőfák száma a gráfban

Az egyik legismertebb alkalmazása a Laplace-mátrixnak a Kirchoff-tétel, melynek ismertebb elnevezése angolul *'matrix-tree theorem'*. A tétel a gráfban szereplő feszítőfák számára ad könnyen kiszámolható módszert a Laplace-mátrix segítségével. A bizonyítás [3, 6.fejezet] alapján kerül bemutatásra, melyet [8] segítségével egészítettünk ki.

$G$ gráf feszítőfáinak számát jelöljük $\tau(G)$-vel. Természetesen, ha $G$ nem összefüggő, akkor $\tau(G) = 0$. Összefüggő esetre pedig majd a Kirchoff-tétel ad egy formulát. Ehhez szükségünk lesz a következő lemmára, ami a Laplace-mátrix adjungáltjára vonatkozik.

**4.1.1. Lemma.** *Legyen $G$ gráf, ekkor a hozzátartozó Laplace-mátrix adjungáltja a csupa* 1 *mátrix többszöröse, azaz*

$$adj\big(L(G)\big) = cJ \qquad (c \in \mathbb{R}). \tag{4.1}$$

**Bizonyítás:** Esetszétválasztással először vizsgáljuk meg azt, ha $G$ összefüggő. Ekkor a 3.2.5 Állítás miatt tudjuk, hogy $rang\big(L(G)\big) = n - 1$, és így $det\big(L(G)\big) = 0$. Ha ezt a tudást felhasználjuk az 1.0.9 Állításban, akkor a következőt kapjuk:

$$L(G)\ adj\big(L(G)\big) = 0_{n\times n},$$

ahol jobb oldalt az $n \times n$-es nullmátrix szerepel.

Ebből az következik, hogy $adj\big(L(G)\big)$ oszlopai a $Ker\big(L(G)\big)$-ben vannak. De a magtér 1-dimenziós, $\underline{j} = (1, \ldots, 1)^T$ kifeszítettje, hiszen összefüggő gráf esetén csak ez a 0-hoz tartozó sajátvektor. Ezért $adj\big(L(G)\big)$ minden oszlopának $\underline{j}$ többszörösének kell lennie. Mivel $L(G)$ szimmetrikus, így adjungáltja is az, és ezért minden szorzónak egyenlőnek kell lennie. Ennélfogva $adj\big(L(G)\big)$ a $J$ mátrixnak a többszöröse.

Ha $G$ nem összefüggő, akkor biztosan tudjuk, hogy $rang\big(L(G)\big) < n-1$. Emiatt $L(G)$ minden előjeles aldeterminánsa 0, tehát az adjungált mátrix a nullmátrix. Ezek alapján erre az esetre is teljesülni fog a lemma, hiszen

$$adj\big(L(G)\big) = 0 \cdot J \ .$$

■

A folytatáshoz szükségünk lesz még egy további lemmára, mely egy lineáris algebrai tulajdonsághoz kapcsolja azt a kérdést, hogy egy élhalmaz feszítőfája-e az összefüggő gráfnak, vagy sem [8, 1. Lemma].

**4.1.2. Lemma.** *Legyen $G$ egy összefüggő súlyozatlan gráf, $U \subseteq E(G)$, $|U| = n-1$. Jelöljük $Q_U$-val azt az $(n-1) \times (n-1)$-es részmátrixát a $Q$ incidenciamátrixnak (tetszőleges irányítás esetén), ami az $U$-beli élekhez tartozó $n-1$ oszlopból és bármely $n-1$ sorból áll. Ekkor a következő két állítás teljesül:*

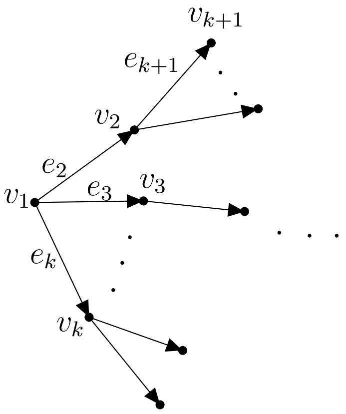
*(i) $U$ akkor és csak akkor a $G$ gráf egy feszítőfájának élhalmaza, ha $det(Q_U) = \pm 1$.*

*(ii) $U$ akkor és csak akkor nem egy feszítőfa élhalmaza, ha $det(Q_U) = 0$.*

**Bizonyítás:** A két állítás feltételei komplementer lehetőségek, ezért elegendő mindkét esetben az "csak akkor" irányt bizonyítani, ugyanis a visszairány indirekt módon következik a másik állítás "csak akkor" részéből.

Először tegyük fel azt, hogy $U$ egy feszítőfa $G$-ben. Ekkor megmutatjuk, hogy sor- és oszlopcserékkel $Q_U$ felső háromszögmátrix alakra hozható.

Jelöljük $Q'$-vel az $U$-hoz tartozó $n \times (n-1)$-es incidenciamátrixot. Ebből még el kell hagyni egy tetszőleges csúcshoz tartozó sort, jelöljük ezt $v_1$-gyel, és így majd az első sortól fogunk megválni, hogy megkapjuk $Q_U$ mátrixot. Az elhagyandó csúcsból kiindulva (ez lesz a gyökér) szélességi vagy mélységi kereséssel bejárjuk a feszítőfát, és megszámozzuk a csúcsokat és éleket olyan módon, hogy minden csúcs ugyanolyan számot kapjon, mint az oda bemenő él, amin keresztül elértük.



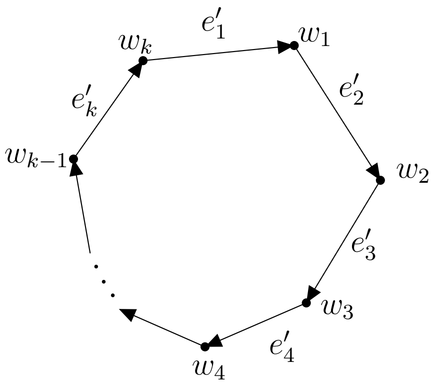

$$
\begin{array}{cc}
 & \overbrace{e_2 \quad e_3 \quad e_4 \quad \cdots \quad e_k}^{v_1\text{-ből kiinduló élek}} \;\; \overbrace{e_{k+1} \quad \cdots}^{v_2\text{-ből kiinduló élek}} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ \\ v_k \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ \\ \end{array} &
\left(\begin{array}{ccccccccc}
1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
-1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\
0 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \quad \ldots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\multicolumn{5}{c}{\mathbf{0}} & \multicolumn{4}{c}{\boxed{\mathbf{-I}}} \\
 & & & & & & & & \ddots
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Ha ezen számozás szerint felsoroljuk a csúcsokat és oszlopokat, majd $v_1$ sorát elhagyjuk, akkor valóban egy felső háromszögmátrixot kapunk, melynek főátlójában csak $-1$-esek szerepelnek. Ezek szorzata lesz $det(Q_U)$, ami így tényleg $\pm 1$-gyel lesz egyenlő.

Most megvizsgáljuk a második állítást. $U$ csak abban az esetben nem lehet feszítőfa, ha van benne kör.

Jelölje egy $U$-beli kör élhalmazát $C = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_k\}$. A $C$-beli élek irányítását tekintve két eset lehetséges. Ha a körben szereplő élek irányítása azonos, és ha nem. Az utóbbival nem kell foglalkozni, mivel tetszőlegesre változtathatom egy-egy él irányítását. Ekkor a determináns értéke ellentettjére változik, ami az állítás szempontjából lényegtelen.

Vegyük a $Q_U$ mátrixban a kör éleinek megfelelő oszlopok és csúcsainak megfelelő sorok által meghatározott részmátrixot. Feltehető, hogy ezen sorok és oszlopok egymás mellett helyezkednek el a mátrixban. Ha nem így lenne, akkor sor- és oszlopcserékkel ez kiküszöbölhető, ami csupán előjelét változtatja a determinánsnak, és ez a lemma szempontjából nem számít.




$$
\begin{array}{c}
\\ \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ \\ w_k \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} e'_1 & e'_2 & e'_3 & \dots & e'_{k-1} & e'_k \end{array} \\
\left(\begin{array}{c|cccccc|c}
 & & & & 0 & & & \\
\hline
 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\
 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & \\
 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & \\
 & & & \vdots & \ddots & & \vdots & \\
 & & & & & 1 & -1 & \\
 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \\
\hline
 & & & & 0 & & & \\
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Ahogy az ábrán is látható, $Q'$ mátrixban is és bármely sor elhagyása után kapott $Q_U$ mátrixban is a kör éleinek megfelelő oszlopok összefüggőek, így $Q_U$ rangja $(n-1)$-nél kisebb, tehát $det(Q_U) = 0$. ■

Még mielőtt tovább haladnánk a [3]-ban szereplő bizonyítással, új jelölést célszerű bevezetnünk. A következőkben fontos jelentőséggel fog bírni, hogy egy-egy részmátrix kialakításakor mely sorokat és mely oszlopkat hagytuk el a mátrixból, ezért jelölje $M(S_1|S_2)$ azt a részmátrixot, melyet $M$-ből kaphatunk, ha az $S_1$ indexhalmaznak megfelelő sorokat, illetve az $S_2$ indexhalmaznak megfelelő oszlopokat elhagyjuk. Mivel a Laplace-mátrixnál csúcsokkal indexeltük a sorokat és oszlopokat, így kifejezőbb, ha $S_1, S_2 \subseteq V(G)$. Könnyebb olvashatóság kedvéért $S_1 = \{v_1, \dots, v_k\}$ és $S_2 = \{w_1, \dots, w_j\}$ halmazok esetén $L(G)(v_1, \dots, v_k|w_1, \dots, w_j)$-val jelöljük a részmátrixot (elhagyjuk a kapcsos zárójelet). Hasonlóan jelöljük $Q$ incidenciamátrix esetén is ezt, csak annyi a különbség, hogy $S_1 \subseteq V(G)$ és $S_2 \subseteq E(G)$.

**4.1.3. Tétel (Kirchoff-tétel).** *Legyen $G$ egy súlyozatlan gráf, ekkor a hozzátartozó Laplace-mátrix bármely előjeles aldeterminánsa megegyezik a gráfban lévő feszítőfák számával, azaz*

$$\tau(G) = (-1)^{i+j} det(L(G)(v_i|v_j)) \qquad (i, j = 1, \dots, n).$$

**Bizonyítás:** A 4.1.1 Lemmából tudjuk, hogy az $adj\big(L(G)\big)$ minden eleme megegyezik, tehát minden előjeles aldetermináns ugyanannyi. Így valóban elegendő annyit belátni, hogy egy előjeles aldeterminánsa $L(G)$-nek egyenlő $\tau(G)$-vel. Szintén a 4.1.1 Lemmánál láttuk, hogy ha $G$ nem összefüggő, akkor minden előjeles aldeterminánsa $L(G)$-nek nullával egyenlő, így ekkor a formula valóban azt adja vissza, hogy nem lehet feszítőfa a gráfban. Ezért a bizonyításban a továbbiakban feltehetjük, hogy $G$ összefüggő gráf.

Tetszőleges előjeles aldeterminánsra bebizonyíthatjuk az állítást, de egyszerűség kedvéért válasszunk olyat, ahol $(-1)^{i+j} = 1$, így elegendő csak az aldeterminánssal foglalkozni. Vegyük a $Q(v_n|\emptyset)$ mátrixot, ekkor $Q(v_n|\emptyset)Q(v_n|\emptyset)^T$ mátrix determinánsa éppen $\big(L(G)\big)_{v_n v_n}$ elemhez tartozó aldetermináns lesz, hiszen a szorzásnál az első mátrixnak hiányzik az utolsó sora, a második mátrixnak az utolsó oszlopa, így $L(G)$-nek éppen az utolsó sora és oszlopa fog hiányozni.

Következő lépésként erre az aldeterminánsra fogjuk alkalmazni a Cauchy-Binet-formulát (1.0.12 Tétel). $Q(v_n|\emptyset)$ egy $(n-1) \times m$-es mátrix, így a szummázás során $n-1$ elemszámú részhalmazt kell kiválasztani $\{1, \ldots, m\}$ indexhalmazból. Ez azt jelenti szemléletesen az incidenciamátrix esetén, hogy a gráfnak kiválasztjuk $n-1$ élét. A formula alkalmazása után a következő egyenlőséget kapjuk:

$$det(Q(v_n|\emptyset)Q(v_n|\emptyset)^T) = \sum_{|U|=n-1} det(Q_U)det(Q_U^T) = \sum_{|U|=n-1} det(Q_U)^2, \tag{4.2}$$

ahol $Q_U$ jelöli a négyzetes mátrixát $Q(v_n|\emptyset)$-nek, melyben már csak $U \subseteq E(G)$ élekhez tartozó oszlopok szerepelnek.

A 4.1.2 Lemmából tudjuk, hogy $U$ feszítőfa esetén lesz csak $det(Q_U)$ nemnulla, és ekkor a pontos értéke $\pm 1$. (A lemma bármely sor elhagyása utáni négyzetes mátrixról állítja ezt, ezért ugyanígy bizonyíthattuk volna, ha más csúcshoz tartozó sort hagytunk volna el.) Emiatt ha a (4.2)-es egyenlet jobb oldalán $U$ élhalmaz egy feszítőfája a gráfnak, akkor eggyel nő az összeg, és végül a feszítőfák száma lesz az eredmény.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a Laplace-mátrix egy tetszőleges aldeterminánsa éppen $\tau(G)$-vel egyenlő. ■

**4.1.4. Megjegyzés.** A 4.1.3 Tétel átalakítható általános súlyozott gráfok esetére is [2, Theorem 2.1]. Egy tetszőleges $U$ feszítőfa $a(U)$ súlyán az $U$-beli élek súlyainak szorzatát értjük. Súlyozott esetben a feszítőfákat is súlyozottan kell összeszámolni, azaz

$$\tau(G) = \sum \{a(U) : U \text{ feszítőfája a gráfnak}\},$$

ami szintén egyenlő lesz $L(G)$ egy tetszőleges előjeles aldeterminánsával. Ennek a bizonyítása a súlyozatlan esethez hasonlóan zajlik, a Cauchy-Binet-formula használatával annak igazolására vezethető vissza, hogy $det(Q_U)det(Q_U^T)$ egyenlő az $U$ feszítőfa élsúlyainak szorzatával. (A szummában ismét nullák lesznek azok a tagok, melyeknél $U$ nem feszítőfa.) Ez pedig egyből adódik a 4.1.2 Lemmának a súlyozott esetre módosított $(i)$ állításából, miszerint $det(Q_U) = \pm\sqrt{a(U)}$. Ezt az állítást az eredeti bizonyítás némi módosításával tudjuk igazolni ($Q_U$ főátlójában $-\sqrt{a_{v_i v_j}}$ elemek fognak szerepelni).

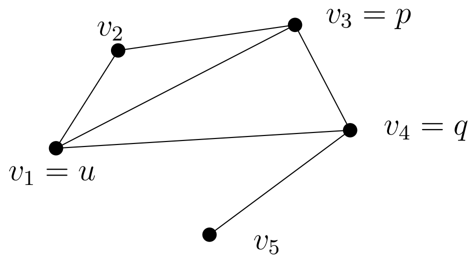
## 4.2. A 2-erdők száma a gráfban

A következő részben egy gráfelméleti feladat megoldása lesz bemutatva, melyet [7, 303. oldal 3. feladat]-ban lehet megtalálni. A feszítőfák megszámlálásának továbbgondolását boncolja a feladat.

Definiáljuk 2-erdőnek azokat a feszítőerdőket, melyek pontosan 2 komponensből állnak. Azaz a gráf csúcsait két részre osztjuk olyan módon, hogy mindkét halmazon tudjunk egy-egy feszítőfát venni a gráf éleiből. A feladat ezen 2-erdők megszámolására ad egy azonosságot, amit majd be kell bizonyítani.

**Feladat:** Legyen $G$ egy összefüggő gráf, $L(G)$ pedig a hozzátartozó Laplace-mátrix. Ha $u, p$ és $q$ különböző gráfbeli csúcsok, akkor az $L(G)(u|u)_{pq}$ elemhez tartozó előjeles aldetermináns egyenlő azon 2-erdők számával, ahol $u$ az egyik komponensben van, $p$ és $q$ pedig a másik komponensben.

Először leellenőrizzük az állítást egy kisebb példán. Vegyük a következő $G$ gráfot:



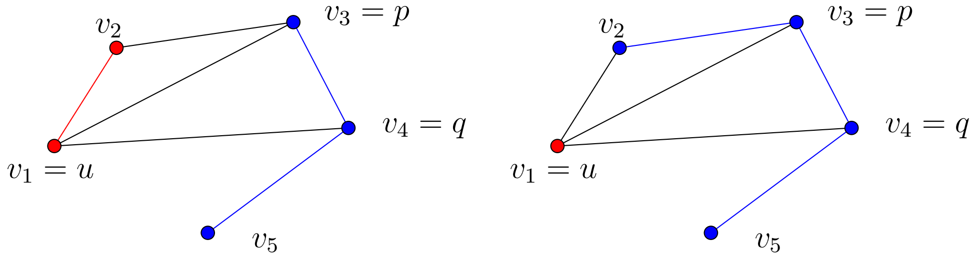

A példagráfhoz tartozó Laplace-mátrix pedig így néz ki:

$$L(G) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Azon 2-erdőket szeretnénk összeszámolni, melyekben $u = v_1$ csúcs az egyik komponensben van, míg a másik komponensben $p = v_3$-nak és $q = v_4$-nek kell szerepelnie. Vegyük észre, hogy $L(G)(v_1|v_1)_{v_3 v_4}$ elemhez tartozó részmátrix valójában megfelel $L(G)(v_1, v_3|v_1, v_4)$-nek, és az ehhez tartozó előjeles aldetermináns pedig:

$$(-1)^{(3+4)} det\big(L(G)(v_1, v_3|v_1, v_4)\big) = - \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Tehát azt kaptuk, hogy 2 db ilyen tulajdonságú 2-erdő található ebben a gráfban, melyek könnyen meg is mutathatóak.




Miután láttuk, hogy az azonosság ezen $G$ gráf esetén teljesül, bebizonyítjuk általánosan is az állítást.

Ahogy a példánál megjegyeztük $L(G)(u|u)_{p,q}$ előjeles aldeterminháns értéke $(-1)^{i_p+i_q}det\big(L(G)(u,p|u,q)\big)$, ahol $i_p$ a $p$ csúcs sorszáma, illetve $i_q$ a $q$ csúcs a sorszáma az eredeti $L(G)$ mátrixban. (A megfelelő előjel valójában $(-1)^{2i_u+i_p+i_q}$ lenne, ahol $i_u$ az $u$ csúcs sorszáma az eredeti $L(G)$ mátrixban, ám $(-1)^{2i_u} = 1$.) A Laplace-mátrixból kitöröltük az $u$ és $p$ csúcshoz tartozó sorokat, illetve az $u$ és $q$ csúcshoz tartozó oszlopokat. Ezt olyan módon kaphatjuk meg $QQ^T$ szorzatalakot felhasználva, hogy az első mátrixból $u$ és $p$ csúcshoz tartozó sort töröljük, illetve a második mátrixból az $u$ és $q$ csúcshoz tartozó oszlopot töröljük ki, azaz:

$$L(G)(u,p|u,q) = Q(u,p|\emptyset)Q(u,q|\emptyset)^T. \tag{4.3}$$

Ha vesszük mindkét oldalon a mátrixok determinánsát, akkor a jobb oldalra alkalmazhatjuk a Cauchy-Binet-formulát. Mivel $Q(u,p|\emptyset)$ egy $(n-2)\times m$-es mátrix és $Q(u,q|\emptyset)^T$ egy $m\times(n-2)$-es mátrix, így a formulában lévő szummázás során úgy kapunk ezekből négyzetes mátrixot, ha $n-2$ db élet kiválasztunk, majd az első mátrixban az ezeknek megfelelő oszlopokat és a második mátrixban az ezeknek megfelelő sorokat hagyjuk meg. Továbbá ha a kifejezést beszorozzuk $(-1)^{i_p+i_q}$ előjellel, akkor a feladatban leírt aldeterminánst kapjuk.

$$\begin{aligned}(-1)^{i_p+i_q}det[Q(u,p|\emptyset)Q^T(\emptyset|u,q)] &= \\ &= (-1)^{i_p+i_q}\sum_{|S|=n-2} det[Q(u,p|\emptyset)_S]det[Q(u,q|\emptyset)_S^T],\end{aligned} \tag{4.4}$$

ahol $S\subseteq E(G)$, és a $Q(u,p|\emptyset)_S$ és $Q(u,q|\emptyset)_S^T$ az előbb említett négyzetes mátrixokat jelöli.

A Kirchoff-tétel bizonyításához hasonlóan $det\big(Q(u,p|\emptyset)_S\big)$ és $det\big(Q(u,q|\emptyset)_S^T\big)$ értékeit kell megvizsgálni $S$ élhalmaz függvényében, és hogy ezek mit is jelentenek a gráf szempontjából.

Először foglalkozzunk $det\big(Q(u,p|\emptyset)_S\big)$-sel. Látni fogjuk, hogy azokban az esetekben lesz az értéke nulla, amikor az $S$ nem olyan 2-erdő, mely egyik komponensében az $u$ csúcs, másik komponensében a $p$ csúcs helyezkedik el. Ez vagy akkor fordulhat elő, ha a két csúcs egy komponensben helyezkedik el, vagy ha $S$ tartalmaz kört. (Meggondolható, hogy egy $n$ csúcsú összefüggő hurokélmentes gráf esetén nem lehet $n-2$ élet körmentesen úgy kiválasztani, hogy 2-nél több komponens keletkezzen.)

Ha $S$ tartalmazza az $u$ és $p$ közötti élet, akkor a neki megfelelő oszlop $Q(u,p|\emptyset)_S$ mátrixban csupa nullából fog állni. Hiszen ennek az élnek csak $u$ és $p$ csúcsokhoz tartozó sorokban voltak nemnulla értékei, amik pedig már ki vannak törölve. Tehát a determináns nulla lesz. Sőt, abban az esetben is nulla lesz, ha $u$ és $p$ között több élből álló út van $S$ élhalmazban. Ugyanis tegyük fel, hogy $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}\}$ élek mentén el lehet jutni $u$-ból $p$ csúcsba. Ekkor $Q(u,p|\emptyset)_S$ incidenciamátrixban ezen oszlopok összege a nulla oszlopvektor lesz. Hiszen az élek egymás szomszédjai, így a közbülső csúcsokhoz tartozó sorokban megjelenik az 1 és $-1$ is, melyek az összeadásnál kiütik egymást. Egyedül a kezdőcsúcs és a végcsúcs sorában maradhatna nemnulla elem, ám az $u$ és $p$ csúcshoz tartozó sorok ki vannak törölve a mátrixból. Tehát azon $S$ élhalmazokhoz tartozó tagok értéke nulla a (4.4)-es képletben, melyekben $u$ és $p$ azonos komponensben helyezkednek el.

Az $S$ élhalmaz abban az esetben nem lesz 2-erdő, ha valamely komponense nem feszítőfa, azaz tartalmaz kört. Ám a 4.1.2 Lemma bizonyításához hasonlóan itt is meggondolható, hogy a kör éleinek megfelelő oszlopok az incidenciamátrixban nem lineárisan függetlenek, ezért ebben az esetben is $det\big(Q(u,p|\emptyset)_S\big) = 0$.

Ugyanez a gondolatmenet igaz $det\big(Q(u,q|\emptyset)_S^T\big) = det\big(Q(u,q|\emptyset)_S\big)$ esetén is. Ha $S$ nem olyan 2-erdő, mely egyik komponensében az $u$ csúcs, a másik komponensében pedig a $q$ csúcs szerepel, akkor $det\big(Q(u,q|\emptyset)_S^T\big) = 0$. A Cauchy-Binet-formula alkalmazásánál egy adott $S$-hez tartozó tagnál a két determináns szorzata akkor lesz nemnulla, ha egyik tényező sem nulla. Azaz $S$ egy olyan 2-erdő, melynek egyik komponensében $u$ csúcsnak kell szerepelnie, és kizárásos alapon a másik komponensben $p$ csúcsnak és $q$ csúcsnak kell lennie.

Vegyük az $S$ 2-erdőhöz tartozó incidenciamátrixot, melyből az $u$ csúcs sora hiányzik, azaz vegyük $Q(u|\emptyset)_S$-et. Mivel $S$ két komponenst határoz meg, ezért ha megfelelően rendezzük az incidenciamátrix sorait és oszlopait, akkor két blokkot fogunk kapni.

$$
\begin{array}{cc}
 & \overbrace{e_1\quad e_2\quad \cdots\quad e_k}^{\text{1. komponens}}\ \overbrace{e_{k+1}\ \cdots\ e_{n-2}}^{\text{2. komponens}} \\
\begin{array}{r} \text{1. komponens}\left\{\begin{array}{c} v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_k\end{array}\right. \\ \text{2. komponens}\left\{\begin{array}{c} v_{k+1}\\ \vdots\\ v_{n-2}\\ v_{n-1}\end{array}\right.\end{array} &
\left(\begin{array}{cc} \boxed{\quad A \quad} & \begin{matrix}0&\dots&0\\0&\dots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\0&\dots&0\end{matrix} \\ \begin{matrix}0&0&\dots&0\\ \vdots&&\ddots&0\\0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\end{matrix} & \boxed{\quad B \quad}\end{array}\right)
\end{array}
$$

Az első blokk az $S$ 2-erdő $u$ csúcsot tartalmazó komponensének olyan incidenciamátrixa, melyből az $u$ csúcs sora ki van törölve. Ezt jelöljük $A$-val. A második blokk pedig a $p$ és a $q$ csúcsot tartalmazó komponens incidenciamátrixa. Ezt jelöljük $B$-vel. Ezen jelöléseket használva írjuk fel a (4.4)-es képletben az $S$-hez tartozó tagot:

$$det\big(Q(u,p|\emptyset)_S\big)det\big(Q(u,q|\emptyset)_S^T\big) = \big[det(A)det\big(B(p|\emptyset)\big)\big]\big[det(A^T)det\big(B(q|\emptyset)^T\big)\big].$$

Az $A$ blokk a 4.1.2 Lemmában szereplő incidenciamátrix tulajdonságainak felel meg, így alkalmazható rá a lemma. Mivel a hozzátartozó $S$-beli komponens egy feszítőfa, ezért $det(A)det(A^T) = 1$. Így a következőt kapjuk az $S$ 2-erdőhöz tartozó tagra a (4.4)-es képletben:

$$(-1)^{i_p+i_q}det\big(B(p|\emptyset)\big)det\big(B(q|\emptyset)^T\big),$$

ami éppen a második komponens Laplace-mátrixának $(BB^T)_{pq}$ elemhez tartozó előjeles aldeterminánsa. Ez pedig a Kirchoff-tétel alapján a komponensben szereplő feszítőfák számával egyezik meg, azaz 1-gyel. Tehát a szumma éppen összeszámolja a megfelelő $S$ 2-erdőket. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a feladatban leírt azonosságot.

# Irodalomjegyzék


[1] R.B. Bapat, The Laplacian matrix of graph, *The Mathematics Student* 65 (1996), 214-223.

[2] L. W. Beineke, R. J. Wilson,*Topics in Algebraic Graph Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 102, Cambridge University Press (2004), 113-136.

[3] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, 2nd edition, Cambridge University Press (1993)

[4] A. E. Brouwer, W. H. Haemers, *Spectra of Graphs*, Springer (2012)

[5] M. Fiedler, Algebraic connectivity of graphs, *Czechslovak Math. J.* 23(98) (1973), 298-305.

[6] Freud R., *Lineáris algebra*, ELTE Eötvös Kiadó (1998)

[7] C. Godsil, G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, Springer Science+Business Media New York (2001)

[8] Hajnal P., *Fák összeszámlálása II:Kirchoff tétele*, jegyzet Gráfelmélet/Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára (2016) `http://www.math.u-szeged.hu/~hajnal/courses/MSc_Diszkret/ea-fak-linalg.pdf`

[9] J. Kelner, *Topics in Theoretical Computer Science: An algorithmist's Toolkit* (lecture notes), Lecture 2: Properties of the Laplacian, positive semidefinite matricies, spectra of common graphs, connection to the continuous Laplacian (2007)

[10] J. Kelner, *Topics in Theoretical Computer Science: An algorithmist's Toolkit* (lecture notes), Lecture 3: Courant-Fischer and Rayleigh quotients, graph cutting, Cheerger's Inequality (2009)

[11] Kiss E., *Mátrix-invertálás, Laplace-kifejtés, A Cauchy-Binet-formulák, Cayley tétele*, jegyzet
http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/mat/inv_CB_Laplace.pdf

[12] Stoyan G., Takó G., *Numerikus módszerek 1*, Typotex (1993)