EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

---

Somogyi Roland

# Stabil párosítások és a tanár-diák-projekt hozzárendelések

BSc alkalmazott matematikus szakdolgozat

Témavezető:

Jankó Zsuzsanna
Corvinus Egyetem, Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék

Belső konzulens:

Király Tamás
ELTE, Operációkutatás Tanszék

Budapest, 2016

# Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Jankó Zsuzsannának, hogy észrevételeivel, tanácsaival és lelkesedésével segítette munkámat.

És köszönet családomnak, hogy mindig mellettem álltak, és ha kellett, motiváltak a szakdolgozat írására.

# Tartalomjegyzék

# 1. Bevezetés

A stabil párosítások alaptípusa a széles körben ismert stabil házasítás problémája, mellyel először David Gale és Lloyd Shapley foglalkozott. Az 1962-ben kiadott cikkük [1] fő pontja egy ilyen párosítás megtalálására kidolgozott algoritmus volt, melyet azóta Gale-Shapley algoritmus néven tartanak számon.

A későbbiekben sok cikk foglalkozott a témával, ezeket rendszerező könyveket a következő matematikusok írták: Donald Knuth (1976) [2], Dan Gusfield és Rob Irving (1989) [3], Al Roth és Marilda Sotomayer (1990) [4], illetve David F. Manlove (2012) [7]. A történelem folyamán a stabil párosítások problémáit 3 nagy kategóriába sorolták:

(i) A kétoldalú, melynél mindkét oldal rendelkezik preferenciával (ide tartozik a stabil házasítás, a felsőoktatási felvételi jelentkezés, illetve a tanár-diák-projekt probléma is)

(ii) A kétoldalú, melynél csak az egyik oldal rendelkezik preferenciával (például az ingatlanok és a vásárlók párosítása)

(iii) Az egyoldalú, melynél mindenki rendelkezik preferenciával (pl. a stabil szobatárs probléma)

A szakdolgozatban bemutatásra kerül a Gale-Shapley algoritmus, és a stabil házasítás problémájának néhány általánosítása.

A következő fejezetben két algoritmust is mutatunk a stabil szobatárs probléma megoldására.

Az utolsó fejezetben szigorú preferenciával ellátott tanár-diák-projekt problémák típusait vizsgáljuk át. A lehetséges típusok:

SPA-S: az oktatók a diákokat rendezik preferencia sorrendbe, itt két algoritmust is vizsgálunk: a diák optimális és az oktató optimális algoritmust;

SPA-P: az oktatók a projekteket rendezik preferencia sorrendbe;

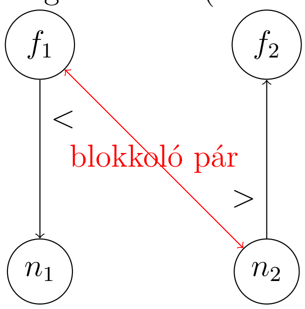
SPA-(S,P): az oktatók a diák-projekt párokat rendezik preferencia sorrendbe.

A szakdolgozat végén pedig egy linken elérhetőek a vizsgált algoritmusok adaptációjának forráskódjai.

# 2. A stabil házasítás problémája

A következő fejezet D. Gale and L. S. Shapley [1] munkájára épül.

Alapfeladat: adott $n$ nő és $n$ férfi, mindegyik egy preferencia listával a másik nem tagjairól. Ekkor egy olyan párosítást szeretnénk találni, melyben nem fordul elő olyan, hogy egy nő és egy férfi, akik nincsenek összepárosítva, jobban kedvelik egymást, mint jelenlegi társukat (a továbbiakban nevezzük ezt *blokkoló párnak*).




A párosításban szereplő párok: ($f_1$,$n_1$) és ($f_2$,$n_2$), a blokkoló pár pedig ($f_1$,$n_2$).

**2.1. Tétel.** *Mindig létezik stabil párosítás.*

**Bizonyítás:** Gale-Shapley algoritmus

Először minden férfi kiválasztja a preferencia listáján szereplő első nőt és megkéri a kezét. Azon hölgyek, akik több ajánlatot is kaptak, kiválasztják a számukra legkedvezőbbet (a preferencialistájukon előrébb lévőt), a többit visszautasítják, de ez még nem a végleges döntése, még válthat partnert.

Ezek után a párral nem rendelkező férfiak újra megkérik a listájukon következő nőnek a kezét. A hölgyek ismét kiválasztják a legkedvezőbbet az ajánlatok és a jelenlegi választott közül (ha van), majd a többit elutasítják.

Ezt fogjuk iterálni. Azon férfiak, akiket visszautasítottak a listájukon szereplő következő hölgynek megkérik a kezét, akik kiválasztják a számukra legkedvezőbbet, és a többit elküldik.

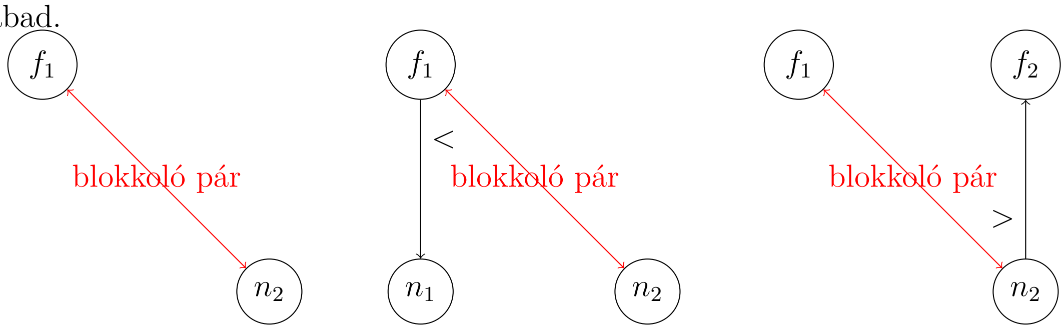
Ez a folyamat véget fog érni, mivel minden férfi minden nőnek maximum egyszer kéri meg a kezét, és minden nő fog valamikor ajánlatot kapni. Amikor az utolsó hölgy is elfogadott egy ajánlatot egy párosítást fogunk kapni. Állítjuk, hogy ez stabil.

Indirekt tegyük fel, hogy $f$ férfi és $h$ hölgy nincsenek összepárosítva, de mégis jobban szeretik egymást, mint jelenlegi párjukat. Ez azt jelentené, hogy $f$ megkérte $h$-nak a kezét de ő visszautasította, tehát $h$ már talált valaki jobbat, vagy $f$ nem kérte meg a kezét, mivel a jelenlegi párja előrébb volt a listáján.

Nem muszáj megkövetelnünk, hogy mindkét halmaznak azonos legyen az elemszáma. Az algoritmus akkor is jó, ha kevesebb férfi van mint nő, ekkor akkor ér véget az algoritmus, ha már minden férfinak van párja. Vagy abban az esetben, amikor több férfi van mint nő, akkor ér véget az algoritmus, ha minden hölgynek van párja, és a pár nélküli férfiakat már mindegyik nő visszautasította.

A leállási feltétel változását, az okozza, hogy változik a blokkoló pár definíciója:

Egy nő és egy férfi blokkoló párt alkot, ha a férfinek nincs párja, vagy jobban kedveli a nőt, mint jelenlegi párját, és a nő is jobban kedveli a férfit, mint jelenlegi párját vagy szabad.




Természetesen létezik ezzel teljesen szimmetrikus folyamat, melyben a hölgyek tesznek ajánlatot a férfiaknak.

Kérdés, hogy beszélhetünk-e optimalitásról? És, ha igen milyen értelemben?

Valaki *optimális választása* az a partner, akinél jobbat egyik stabil párosításban sem kaphat.

**2.2. Állítás.** *Az első algoritmus optimális minden férfira, míg a szimmetrikus algoritmus optimális a nőkre.*

**Bizonyítás:** Azt mondjuk, hogy $h$ hölgy lehetséges párja egy férfinak, ha létezik olyan stabil párosítás melyben $h$ a férfi párja. Futtassuk a Gale-Shapley algoritmust és vegyük azt a pillanatot, amikor egy $h$ nő először utasít vissza olyat aki lehetséges párja ($f$) lenne. Ez akkor fordulhat elő, ha $h$ már talált olyat akit jobban kedvel ($f'$), és őt csak olyanok utasították vissza akik amúgy sem lehettek volna a párjai. Indirekt tegyük fel, hogy van olyan stabil párosítás, hogy $h$ $f$-t választja. Viszont ekkor $h$ és $f'$ sértő élt alkot, tehát nem lehet a párosítás stabil.

A szimmetrikus esetre hasonlóan bizonyíthatjuk.

Ehhez nagyon hasonló probléma a felsőoktatási felvételi eljárás menete is. A különbség az, hogy az egyik oldal (a lehetséges szakok) egy $q_i$ kapacitással rendelkeznek, vagyis egynél több párt is kaphatnak. Ez egyszerűen visszavezethető a stabil házasítás problémájára: minden szakot nem 1-szer, hanem $q_i$-szer szerepeltetünk, a jelentkezők preferencialistáját pedig úgy változtatjuk, hogy először felsoroljuk az azonos szakokat azonos prioritással, majd tetszőleges módon a döntetleneket szigorú rendezéssé alakítjuk.

Az amerikai rezidens rendszer ugyanezt a problémát fogalmazza meg. Ebből eredően kapta nevét a következő tétel, mely a probléma több érdekes tulajdonságát nevezi meg:

**2.3. Tétel.** *"Vidéki kórház" ("rural hospital") tétel [8]:*

*Minden egyes adott feladatra a következők teljesülnek:*

*(i) Ugyanazokat a jelentkezőket veszik fel minden stabil párosításban;*

*(ii) Minden szakhoz ugyanannyi jelentkező van párosítva minden egyes stabil párosításban;*

*(iii) Ha egy szak valamely stabil párosításban nem érte el a létszámkorlátját, akkor minden stabil párosításban ugyanazok a jelentkezők lesznek hozzárendelve.*

# 3. A stabil szobatárs probléma

A stabil szobatársak problémája sok mindenben hasonlít a stabil házasítás problémára, az egy jelentős eltérés, hogy a szereplők nincsenek csoportokra bontva (mint nők és férfiak). Viszont ez a változás teljesen megváltoztatja a probléma tulajdonságait. Az egyik legfontosabb:

**3.1. Állítás.** *Létezik olyan feladat, melyben nincs stabil párosítás.*

**Bizonyítás:** Nézzük a következő preferencialistákat:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **a** | : | b | c | d |
| **b** | : | c | a | d |
| **c** | : | a | b | d |
| **d** | : | a | b | c |

Nézzük az ($a$,$b$) és ($c$,$d$) párosítást. Ekkor $b$ szívesebben lenne $c$-vel, és ő is szívesebben lenne $b$-vel, ezért ez egy blokkoló pár. Most nézzük az előző javított párosítását: ($a$,$d$) és ($b$,$c$). Itt $c$ szívesebben lenne $a$-val, és ő is szívesebben lenne $c$-vel, ezért ez egy blokkoló pár. Javítsuk ezt is: ($a$,$c$) és ($b$,$d$). Hasonlóan $b$ szívesebben lenne $a$-val, és ő is szívesebben lenne $b$-vel, ezért ez egy blokkoló pár. Ezt javítva viszont az első esetet kapjuk. Végigvizsgáltuk, hogy bárki is legyen $d$ szobatársa, a kapott párosítás nem lesz stabil, tehát ebben a példában nincsen stabil párosítás.

Figyeljük meg, hogy ez akkor következett be, amikor $d$-t már mindenki visszautasította.

## 3.1. Az Irving algoritmus

A következő fejezet R. W. Irving [5] munkájára épül.

Az algoritmus két részből áll: az elsőben úgy módosítjuk a preferencialistákat, hogy ne változzon a lehetséges stabil párosítások halmaza, míg a másodikban már csak úgy fogjuk tudni változtatni őket, hogy a lehetséges stabil párosítások halmazának elemszáma csökken ugyan, de ha létezik a feladatnak megoldása, akkor az egyiket megkapjuk, míg ha nincs a feladatnak megoldása az algoritmus azt is jelezni fogja.

*Első fázis*

Tekintsük az alábbi algoritmust:

A szereplők sorra ajánlatot tesznek a preferencialistájukon első helyen szereplő jelöltnek. A szereplők a következő módon cselekszenek:

(i) Ha $x$ ajánlatot kap $y$-tól, akkor $x$ vagy visszautasítja, ha már kapott egy jobb ajánlatot, vagy $x$ elfogadja $y$ ajánlatát és a jelenlegi (ha van) rosszabb ajánlatot visszautasítja.

(ii) Ha $x$-t visszautasították, akkor a preferencia listáján következő embernek ajánlatot tesz, ezt addig folytatja, amíg valaki el nem fogadja az ajánlatát. Ha visszautasítják, akkor folytatja a következő embertől a párkeresést.

Az algoritmus tehát akkor fog leállni, ha már mindenkinek van párja, vagy valaki a preferencialistája végére ért, vagyis mindenki visszautasította.

**3.2. Lemma.** *Ha ebben az algoritmusban $x$ visszautasítja $y$-t, akkor ők biztos nem lesznek párok egy stabil párosításban sem.*

**Bizonyítás:** Hasonlóan a stabil házasításnál használt gondolatmenethez indirekt tegyük fel, hogy az időben első visszautasítás, egy olyan pár között akik egy stabil párosításban párok, $x$ és $y$ között történt. Vegyük tehát azt az $M$ stabil párosítást melyben $x$ és $y$ egy pár. Tehát amikor $x$ visszautasította $y$-t két eset állhatott fent: $x$-nek vagy volt már egy párja, akit jobban kedvelt, mint $y$-t, vagy később valaki ajánlatát elfogadta, míg $y$-t visszautasította. Mindkét esetben jelölje $z$ azt az embert aki miatt $x$ visszautasította $y$-t. Mivel $M$ stabil párosítás, ezért $z$ jobban kell hogy kedvelje a párját (legyen $w$), mint $x$-t. Ezért mielőtt $x$ és $z$ egy párt alkothattak volna $w$-nek vissza kellett utasítania $z$-t, ez viszont ellentmondásban van azzal, hogy $(x, y)$ pár visszautasítása volt az első a lehetséges párok között.

**3.3. Következmény.** *Ha az algoritmus futása során bármikor $x$ ajánlatot tesz $y$-nak, akkor egy stabil párosításban:*

*(i) $x$-nek nem lehet jobb párja $y$-nál;*

*(ii) $y$-nak nem lehet rosszabb párja $x$-nél.*

**Bizonyítás:** (i) Ha $x$ ajánlatot tett $y$-nak akkor a preferencialistáján előrébb állók mind visszautasították, tehát a 3.2 Lemma szerint nem lehetnek a párjai stabil párosításban.

(ii) Tegyük fel, hogy egy $M$ stabil párosításban $y$-nak $x$-nél rosszabb pár jutott. Mivel (i) alapján $x$ párja nem lehet jobb $y$-nál, $x$ és $y$ blokkolnák az $M$ párosítást.

**3.4. Következmény.** *Ha valakit mindenki visszautasít, akkor abban az esetben nem létezik stabil párosítás.*

**Bizonyítás:** A lemma alapján egy stabil párosításban senki sem lehetne a párja, ezért nem is létezhet stabil párosítás.

**3.5. Következmény.** *Ha az algoritmus leállásakor mindenkinek van párja, akkor a preferencialisták lerövidíthetők az alábbi módon: ha az algoritmus során $x$ ajánlatot kapott $y$-tól, töröljük $x$ preferencialistájából azokat akik:*

*(i) $x$ preferencialistájában $y$ mögött állnak;*

*(ii) törölték a preferencialistájukból $x$-t (i) pontban.*

*Ezekben a redukált listákban $x$ $y$ preferencialistájának az első helyén áll, míg $y$ $x$ preferencialistájának az utolsó helyén áll.*

*Valamint általánosan, valaki preferencialistáján szerepel egy személy akkor és csak akkor, ha ő is szerepel a másikén.*

**Bizonyítás:** Mindez következik a lemmából és a korábbi következményekből.

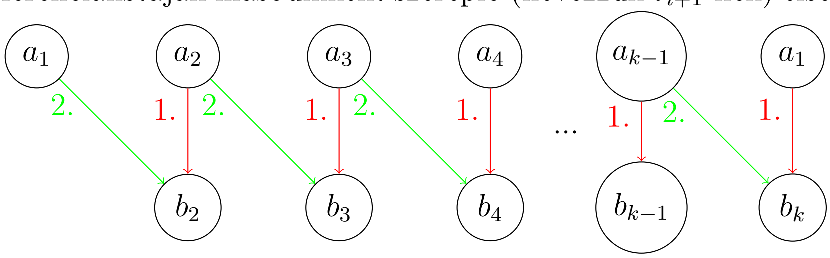
**3.6. Lemma.** *Ha a redukált listában mindenkinek csak egy személy szerepel, akkor a listák stabil párosítást határoznak meg.*

A kérdés az, hogy mit kellene csinálnunk, ha még nem kaptunk stabil párosítást. Erre a kérdésre adunk választ a következő részben:

*Második fázis*

Definiáljuk a "mindent vagy semmit köröket":

$a_1, ..., a_k$ egy *mindent vagy semmit kör*, ha minden $i = 1, ..., k$ (mod $k$ ha szükséges): $a_i$ preferencialistáján másodikként szereplő (nevezzük $b_{i+1}$-nek) első $a_{i+1}$ preferencialistáján.




A preferencialisták további redukálása abból áll, hogy arra kényszerítjük $b_i$-ket, hogy utasítsák vissza $a_i$-ket, ezáltal arra kényszeríteni $a_i$-ket, hogy tegyen ajánlatot $b_{i+1}$-nek. Ezáltal a kényszerített visszautasítással tovább tudjuk redukálni a preferencialistákat a 3.5. következmény alapján.

Vagyis az ábrán függőleges, piros színnel jelölt, meglévő ajánlatokat lecseréljük a $a_i$-k második legjobb lehetőségére.

Ezen lépés tulajdonságait a következő lemma és annak következményei mondják ki:

**3.7. Lemma.** *Legyen egy $a_1, ..., a_k$ egy mindent vagy semmit kör egy redukált preferencialistára nézve, és legyenek $b_i$-k $a_i$-k kedvencei (minden $i = 1, ..., k$). Ekkor:*

*(i) bármely lehetséges stabil párosításban $a_i$ és $b_i$ párok minden $i$-re vagy egyik $i$-re sem;*

*(ii) ha létezik egy stabil párosítás amelyben $a_i$ és $b_i$ párok, akkor létezik olyan is amelyben nem.*

**Bizonyítás:**

(i) Tegyük fel, hogy egy rögzített $i$-re egy lehetséges stabil párosításban $a_i$ és $b_i$ párt alkotnak. Ekkor $a_i$ utolsó $b_i$ preferencialistáján és $b_i$ második $a_{i-1}$ preferencialistáján, ebből következően $a_{i-1}$ szerepel $b_i$ preferencialistáján. Tehát $b_i$ jobban kedveli $a_{i-1}$-t, mint $a_i$-t. Tehát $a_{i-1}$ jobban kell, hogy szeresse jelenlegi párját, mint $b_i$-t, viszont ő csak $b_{i-1}$ lehet. Indukcióval minden $i$-re párt kell, hogy alkossanak.

(ii) Legyen $A := \{a_1, ..., a_k\}$ és $B := \{b_1, ..., b_k\}$. Ha $A \cap B$ nem üres, pl.: $a_l = b_m$, ekkor nem lehet az összes $a_i$-t a kedvencével összepárosítani, mivel $b_m$ az utolsót választja, amikor $a_m$ az elsőt. (i)-ből következően tehát $A \cap B \neq \emptyset$ azt jelenti, hogy egyik $a_i, b_i$ sem lehet pár, ezért feltehetjük, hogy $A \cap B = \emptyset$

Vegyünk egy olyan lehetséges $M$ stabil párosítást, melyben $a_i, b_i$ párt alkotnak minden $i$-re. Csináljunk ebből egy olyan $M'$ párosítást, melyben $a_i$-t $b_{i+1}$-el párosítjuk össze, míg az $A \cup B$ halmazon kívüliek párosítását nem változtatjuk. Állítjuk, hogy $M'$ stabil.

$B$ minden eleme jobb párt kapott $M'$-ben, mint ami $M$-ben volt neki. Tehát egy blokkoló pár egyik tagja mindenképpen valaki $A$-ból, nevezzük őt $a_i$-nek. Ha $a_i$ jobban szereti $x$-et, mint jelenlegi párját $b_{i+1}$-et, akkor a következő esetek lehetségesek:

(1) $a_i$ és $x$ párt alkottak $M$-ben ($x = b_i$), viszont ekkor $x$ jobban kedveli jelenlegi partnerét $a_{i-1}$-et, mint $a_i$-t.

(2) $a_i$ jobban kedveli $x$-et, mint $b_i$-t, vagyis $x$ már nem szerepel $a_i$ redukált preferencialistájában. Tehát $x$ vagy magától visszautasította $a_i$-t, vagy kényszerítették, hogy visszautasítsa, de mindkét esetben jobb párt kellett, hogy kapjon, mint $a_i$, tehát $M'$-ben lévő párja is jobb kell, hogy legyen, mint $a_i$.

(3) $a_i$ jobban kedveli $b_i$-t, mint $x$-et, ami azt jelenti, hogy $x$ $b_i$ és $b_{i+1}$ közé esik $a_i$ eredeti preferencialistájában, de hiányzik a redukáltban. Ez amiatt lehetséges, hogy $x$ kapott egy jobb ajánlatot $a_i$-nál, és emiatt visszautasította, tehát $M'$-beli partnerét jobban kedveli, mint $a_i$-t.

**3.8. Következmény.** *Ha az eredeti problémának van megoldása, akkor bármely redukált preferencialistával megadott feladatnak is kell, hogy létezzen megoldása.*

**3.9. Következmény.** *Ha valaki redukált preferencialistája üres, akkor nem létezik stabil párosítás.*

És mondjuk ki a 4.6. lemma kiegészítését is.

**3.10. Lemma.** *Ha mindenki (akárhányszor) redukált preferencialistáján csak egy személy szerepel, akkor az egy stabil párosítást határoz meg.*

## 3.2. Példa az algoritmus futására

Vegyük az alábbi feladatot:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **a** | : | b | e | f | d | c |
| **b** | : | e | c | d | a | f |
| **c** | : | a | b | d | e | f |
| **d** | : | a | f | c | b | e |
| **e** | : | f | b | c | a | d |
| **f** | : | b | c | d | e | a |

1. ábra

**Megjegyzés:** A további táblázatokban **félkövérrel** jelezzük azt $x$ preferencialistáján, hogy $x$ kinek tett ajánlatot, illetve *dőlttel*, hogy kitől kapta $x$ az eddigi legjobb ajánlatot.

Első lépésben $a$ ajánlatot tesz $b$-nek, ekkor $b$ kitörli az $a$-nál kevésbé kedvelt jelölteket ($f$-t), az ő listájukból pedig $b$-t. (2. ábra)

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **a** | : | **b** | e | f | d | c | \| | **a** | : | **b** | | f | *d* | |
| **b** | : | e | c | d | *a* | | \| | **b** | : | **e** | c | d | *a* | |
| **c** | : | a | b | d | e | f | \| | **c** | : | | b | d | | f |
| **d** | : | a | f | c | b | e | \| | **d** | : | **a** | f | c | b | |
| **e** | : | f | b | c | a | d | \| | **e** | : | f | *b* | | | |
| **f** | : | | c | d | e | a | \| | **f** | : | | c | d | e | a |

2. ábra | 3. ábra

Következő lépésben $b$ ajánlatot tesz $e$-nek, majd $c$ $a$-nak, és $d$ is $a$-nak, ekkor $a$ visszautasítja $c$ ajánlatát. (3. ábra)

Most jöjjön $e$, aki ajánlatot tesz $f$-nek, majd $f$ $c$-nek. (4. ábra)

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **a** | : | **b** | | | *d* | | \| | **a** | : | | | | *d* | |
| **b** | : | **e** | c | d | *a* | | \| | **b** | : | **e** | *c* | | | |
| **c** | : | | b | d | | *f* | \| | **c** | : | | **b** | d | | *f* |
| **d** | : | **a** | f | c | b | | \| | **d** | : | **a** | f | c | | |
| **e** | : | **f** | *b* | | | | \| | **e** | : | **f** | *b* | | | |
| **f** | : | | **c** | d | *e* | | \| | **f** | : | | **c** | d | *e* | |

4. ábra | 5. ábra

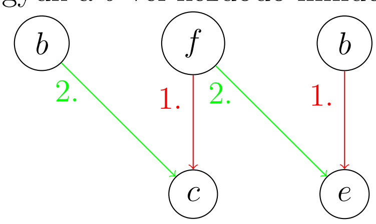
Ezek után csak $c$-nek nincs élő ajánlata, ezért ajánlatot tesz $b$-nek, aki emiatt elutasítja $a$-t. (5. ábra)

Most $a$ tesz ajánlatot $d$-nek, akik ezek után egy párt fognak alkotni. (6. ábra)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **a** | : | | | ***d*** | |
| **b** | : | **e** | *c* | | |
| **c** | : | | **b** | | *f* |
| **d** | : | ***a*** | | | |
| **e** | : | **f** | *b* | | |
| **f** | : | | **c** | *e* | |

6. ábra

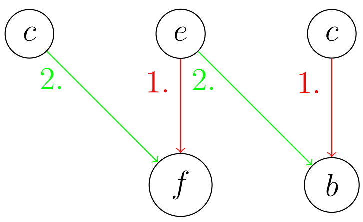
Ekkor az algoritmus első fázisa véget ér, mert mindenki tett ajánlatot valakinek. Viszont még nem kaptunk stabil párosítást, ezért meghívjuk az algoritmus második részét. Vegyük a $b$-vel kezdődő mindent-vagy-semmit kört: $(b,\ f)$.




Ekkor $c$ visszautasítja $f$-t, míg $e$ $b$-t. Ekkor a második résszel is végeztünk, mivel mindenki preferencialistáján már csak egy személy szerepel.

Ebből már kiolvashatjuk a stabil párosítást, amit kaptunk: $M = \{(a,d),\ (b,c),\ (e,f)\}$.

**Megjegyzés:** Ha nem a $b$-vel kezdődő mindent-vagy-semmit kört vesszük, hanem a $c$-vel kezdődőt, akkor az $M = \{(a,d),\ (b,e),\ (c,f)\}$ stabil párosítást kapnánk.



## 3.3. A Tan algoritmus

A következő fejezet J. J. M. Tan és Y.-C. Hsueh [6] munkájára épül.

A Tan algoritmus célja, hogy megtaláljon egy stabil párosítást, ha létezik. Ha pedig nem létezik, az algoritmus megad egy úgynevezett stabil felosztást.

Legyen $n$ résztvevő, halmazukat jelöljük $S$-sel, mindegyikük egy $S_i$ preferencialistával, valamint jelöljük a preferencialisták ezen táblázatát $T$-vel. Az $S$ alaphalmazt és a $T$ preferenciatáblázatot együtt *preferencia relációnak* nevezzük.

Jelöljük $(a|b)$-vel, ha $b$ szerepel $a$ preferencialistáján, és $r(a|b)$-vel, hogy hányadikként. Ez alapján $r(a|b) < r(a|c)$ azt jelenti, hogy $a$ jobban kedveli $b$-t, mint $c$-t. Legyen $A$ a részvevők egy részhalmaza. $|A|$-val jelöljük $A$ számosságát. $\Pi(A)$ egy ciklikus permutáció $A$ elemeiből: $\langle a_1, ..., a_k \rangle$, ahol $|A| = k$.

$\Pi(A)$-t *kvázi permutációnak* hívjuk, ha a következők közül legalább az egyik teljesül:

(i) $|A| \geq 3$ és $\forall i = 1, ..., k$ (mod $k$ ha szükséges): $r(a_i|a_{i+1}) < r(a_i|a_{i-1})$

(ii) $|A| = 2$ és mindketten szerepelnek a másik preferencialistáján

(iii) $|A| = 1$.

Egy adott $\Pi(A) = \langle a_1, ..., a_k \rangle$ kvázi permutációban szereplők preferencialistáinak elemeit az alábbiak alapján osztályozzuk:

(I) $|A| \geq 3$, az $(a_i|b)$ elemet

- (i) fölérendeltnek nevezzük $\Pi(A)$ viszonylatában, ha $r(a_i|b) < r(a_i|a_{i-1})$;
- (ii) alárendeltnek nevezzük $\Pi(A)$ viszonylatában, ha $r(a_i|b) \geq r(a_i|a_{i-1})$;
- (iii) szomszédnak nevezzük $\Pi(A)$ viszonylatában, ha $b = a_{i+1}$ vagy $b = a_{i-1}$ .

(II) $|A| = 2$, az $(a_i|b)$ elemet

- (i) fölérendeltnek nevezzük $\Pi(A)$ viszonylatában, ha $r(a_i|b) < r(a_i|a_{i-1})$;
- (ii) alárendeltnek nevezzük $\Pi(A)$ viszonylatában, ha $r(a_i|b) > r(a_i|a_{i-1})$;
- (iii) szomszédnak nevezzük $\Pi(A)$ viszonylatában, ha $b = a_{i-1}$ .

(III) $|A| = 1$, akkor $(a_i|b)$ elemet fölérendeltnek nevezzük $\Pi(A)$ viszonylatában minden olyan $b$-re aki $a_i$ preferencialistáján szerepel.

Az összes szereplőt szétosztjuk diszjunkt csoportokra. Egy $(S, T)$ preferencia relációban egy $\Pi$ *stabil felosztása* $S$ diszjunkt részhalmazainak uniójából áll: $S = \cup_{i=1}^{m} A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, ha $i \neq j$, és $\Pi(A_i)$ kvázi permutáció $A_i$ elemeiből, a következő stabilitási tulajdonsággal: ha $(a|b)$ fölérendelt akkor, $(b|a)$ alárendelt.

Egy ilyen $\Pi$ stabil felosztásban $a$ és $b$ össze vannak párosítva, ha $a, b$ csoport szerepel a felosztásban.

**3.11. Tétel.** *Egy teljes stabil párosítás egy olyan stabil felosztás, melyben a csoportok számossága 2, és fordítva.*

**3.12. Következmény.** *Egy stabil felosztás, amiben nincs páratlan csoport egy teljes stabil párosítást indukál.*

**Megjegyzés:** Egy $\Pi \supseteq \Pi(A_i) = \langle a_1, ..., a_{2k} \rangle$ csoport felbontható a következőképpen csoportokra, ami egy új $\Pi'$ stabil felosztást eredményez: $\langle a_1, a_2 \rangle$, $\langle a_3, a_4 \rangle$, ..., $\langle a_{2k-1}, a_{2k} \rangle$.

**3.13. Következmény.** *Egy adott stabil szobatárs feladatban akkor és csak akkor létezik stabil párosítás, ha nincs páratlan csoport benne.*

**Megjegyzés:** Bármely két stabil felosztásban ugyanazok a páratlan csoportok szerepelnek.

**Az alternáló soros algoritmus:**

**Megjegyzés:** Az algoritmust tudjuk úgy kezdeni, hogy csak egy ember van, vagy akár egy pár, ezt az alábbi módszerrel tudjuk majd tovább bővíteni.

Legyen $R = (S, T)$ egy preferencia reláció és $\alpha_0 \in S$. Adott $\Pi_0$, ami egy stabil felosztása $(R - \alpha_0)$-nak.

$\alpha_0, \beta_1, \alpha_1, \beta_2, ..., \beta_k, \alpha_k$ sort alternáló sornak nevezzük, ha létezik egy $\Pi_i$ $(i = 0, 1, ..., k)$ stabil felosztásokból álló olyan sorozat, hogy $\Pi_i$ stabil felosztása $(R - \alpha_i)$-nek és az alábbiak is teljesülnek:

(i) $(\alpha_i | \beta_{i+1})$ az első olyan elem $\alpha_i$ preferencia listáján, hogy $(\beta_{i+1} | \alpha_i)$ fölérendelt elem $\Pi_i$ viszonylatában;

(ii) $\langle \beta_{i+1}, \alpha_{i+1} \rangle$ egy kétszemélyes csoport $\Pi_i$-ben;

(iii) $\Pi_{i+1} = (\Pi_i - \{\langle \beta_{i+1}, \alpha_{i+1} \rangle\}) \cup \{\langle \alpha_i, \beta_{i+1} \rangle\}$

Legyen $\alpha_0, \beta_1, \alpha_1, \beta_2, ..., \beta_k, \alpha_k, \beta_{k+1}, \alpha_{k+1}$ egy alternáló sor. Ha $\beta_{k+1} = \alpha_i$ valamilyen $0 \leq i \leq k - 1$-re, akkor azt mondjuk, hogy a sornak visszatér $\beta_{k+1}$-ben. Legyen $i_0$ a legnagyobb olyan $i$, amelyre ez teljesül. Ekkor $\alpha_{i_0}, \beta_{i_0+1}, \alpha_{i_0+1}, \beta_{i_0+2}, ..., \beta_k, \alpha_k, \beta_{k+1}$ részsort $\beta_{k+1}$-nek megfelelő visszatérő sornak nevezzük.

**3.14. Tétel.** *Legyen* $\alpha_0, \beta_1, \alpha_1, \beta_2, ..., \beta_k, \alpha_k$ *egy alternáló sor. Tegyük fel, hogy* $\beta_{k+1}$*-ben visszatérése van, ekkor az alternáló sor kibővíthető úgy, hogy egy megfelelő lépésben, legyen ez* $\beta_{k+m+1}$*,* $\alpha_k$*-hoz tér vissza. Az ehhez tartozó visszatérő sor a következő tulajdonságokkal rendelkezik:*

*(i)* $\alpha_k, \beta_{k+1}, \alpha_{k+1}, \beta_{k+2}, ..., \beta_{k+m}, \alpha_{k+m}$ *sorban* $2m + 1$ *különböző személy szerepel;*

*(ii)* $A = \langle \alpha_{k+m}, \beta_{k+m}, \alpha_{k+m-1}, \beta_{k+m-1}, ..., \beta_k, \alpha_k \rangle$ *egy páratlan csoportot alkot, sőt* $(\Pi_0 - \{\langle \beta_i, \alpha_i \rangle | k + 1 \leq i \leq k + m\}) \cup \{A\}$ *egy stabil felosztása R-nek.*

**Megjegyzés:** Ezek alapján már láthatjuk, hogy egy $\alpha_0$ új ember hozzá vétele egy adott $R$ preferencia relációhoz a következőképpen történik: generálunk egy $\alpha_0$-val kezdődő alternáló sort. Ez vagy véget ér és egy stabil felosztást kapunk $(R + \alpha_0)$-hoz, vagy egy visszatérés történik. Tegyük fel, hogy az első visszatérés $\beta_{k+1}$-nél történik. Az így létrejövő visszatérő sor egy páratlan csoportot határoz meg, és így is egy stabil felosztáshoz jutunk.

# 4. A tanár-diák-projekt probléma

## 4.1. SPA-S

A következő fejezet David J. Abraham, Robert W. Irving és David F. Manlove [9] munkájára épül.
**Megjegyzés:** Az SPA an angol "student-project allocation" rövidítése, míg SPA-S, azt hivatott jelölni, hogy az oktatók a diákokat rendezik preferencia sorrendbe.

### 4.1.1. SPA-S definíciók

Sok egyetemen jelentkeznek a diákok projektekre, melyeket oktatók felügyelnek. Természetesen a diákoknak van egy preferencia-sorrendjük, hogy mely projektekre szeretnének jelentkezni. A projekteknek van egy létszámkorlátja is, valamint az oktatóknak is lehet preferenciája egyes diákok felé, illetve kvótája, hogy hány diákot hajlandó felügyelni összesen az összes általa felkínált projekteken.

Legyen $D = \{d_1, ..d_n\}$ a diákok halmaza, $P = \{p_1, ..p_m\}$ a projektek halmaza, míg $O = \{o_1, ..o_l\}$ az oktatók halmaza. Minden diákhoz tartozik egy preferencialista, ami $P$ egy rendezett részhalmaza. Ha $p$ projekt szerepel $d$ diák preferencialistáján, akkor azt mondjuk, hogy $d$ diák elfogadhatónak találja $p$ projektet. Jelöljük $d$ diák által elfogadhatónak talált projektek halmazát $A_d$-vel.

Mindegyik $o$ oktató felajánlja a projektek egy $P_o$ nem üres részhalmazát, melyek páronként diszjunktak és uniójuk $P$. Jelölje $D_o = \{d \in D | P_o \cap A_d \neq \emptyset\}$ azokat a diákokat, akik $o$ oktató valamelyik projektjét elfogathatónak találják. Minden $o$ oktató preferencialistába rendezi $D_o$ elemeit, jelöljük ezt a preferencialistát $L_o$-val. $\forall p \in P_o$-ra definiáljuk $L_o^p$-t, mely $L_o$ leszűkítése azon diákokra, akik elfogadhatónak találják $p$ projektet.

Minden $p \in P$ projektre legyen $r_p$ a projekt létszámkorlátja, míg $\forall o \in O$ oktatóra legyen $q_o$ az oktató kvótája. Feltesszük, hogy $\max\{r_p | p \in P_o\} \leq q_o \leq \sum\{r_p | p \in P_o\}$

Egy $M$ *beosztás* olyan részhalmaza $D \times P$-nek, amire teljesül hogy:
(I) $(d, p) \in M \Rightarrow p \in A_d$, vagyis $d$ diák elfogadhatónak tartja $p$ projektet;
(II) $\forall d \in D$: $|\{(d, p) \in M | p \in P\}| \leq 1$;

Ha $(d, p) \in M$, akkor azt mondjuk, hogy $d$ diák $p$ projekthez van hozzárendelve, és $p$ projekt $d$ diák felelőssége. Tehát (ii) szerint minden diák legfeljebb egy projekthez van hozzárendelve $M$ beosztásban. Szintén mondhatjuk, hogy ha $d$ diák hozzá van rendelve

$p$ projekthez az $M$ beosztásban, akkor $d$ diák hozzá van rendelve $o$ oktatóhoz, és $d$ diák $o$ oktató felelőssége, ahol $p \in P_o$.

Minden $d \in D$ diák, ha hozzá van rendelve egy $p$ projekthez $M$ beosztásban, akkor jelentse $M(d)$ a $p$ projektet, illetve ha nincsen hozzárendelve egy projekt sem, akkor azt mondjuk, hogy $d$ szabad/nem foglalt $M$ beosztásban. Minden $p$ projektre jelentse $M(p)$ azon diákok halmazát akik $p$ projekthez vannak hozzárendelve. Hasonlóan minden $o$ oktatóra jelentse $M(o)$ azon diákok halmazát akik $o$ oktatóhoz vannak hozzárendelve.

Egy $p$ projekt telítetlen/telített/túljelentkezett attól függően, hogy $|M(p)|$ kevesebb/egyenlő/több, mint $r_p$. Egy $o$ oktató telítetlen/telített/túljelentkezett attól függően, hogy $|M(o)|$ kevesebb/egyenlő/több, mint $q_o$.

Egy $M$ párosítást beosztásnak nevezünk, ha:

(III) $\forall p \in P$: $|M(p)| \leq r_p$, vagyis egyik projekt sem túljelentkezett;

(IV) $\forall o \in O$: $|M(o)| \leq q_o$vagyis egyik oktató sem túljelentkezett.

Egy $(d, p) \in (D \times P) \setminus M$ (ahol $p$-t $o$ ajánlotta fel) blokkolja $M$ beosztást, ha a (i), (ii) és a maradék három közül, legalább egy teljesül:

(i) $d$ diák elfogadhatónak tartja $p$ projektet;

(ii) $d$ vagy szabad, vagy $d$ diák jobban kedveli $p$ projektet, mint $M(d)$-t (a jelenlegit);

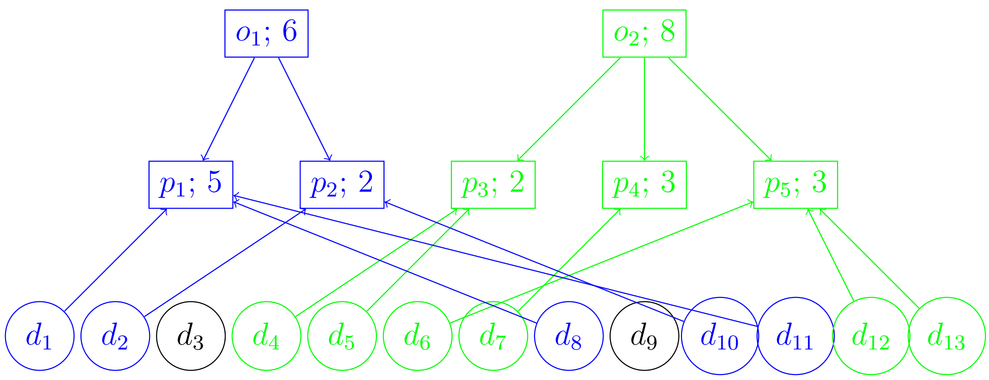
(iii-a) $p$ és $o$ is alul-jelentkezett, vagy

(iii-b) $p$ alul-jelentkezett és $o$ telített és vagy $d \in M(o)$ vagy $o$ jobban kedveli $d$-t, mint a legkevésbé kedvelt diákját $M(o)$-ban, vagy

(iii-c) $p$ telített és $o$ jobban kedveli $d$-t, mint a legkevésbé kedvelt diákját $M(p)$-ben.

Egy ilyen $(d, p)$ pár *blokkoló párja* $M$-nek. Egy beosztás *stabil párosítás*, ha nem tartalmaz blokkoló párt.

Egy szemléltető gráf egy lehetséges kimenetelre:



### 4.1.2. SPA-S diák

Ebben a részben a diákok lesznek az aktív résztvevők.

Az algoritmus ezen formája hasonló a stabil házasításhoz. A diákok jelentkeznek az egyes projektekre, amire vagy felvételt nyernek, vagy valamilyen ok miatt (lásd lejjebb) nem.

Az algoritmus a következőképpen fut:

Kezdetben minden diák szabad, és semelyik projekthez, se oktatóhoz sincs egy diák se hozzárendelve.

Amíg van olyan szabad diák ($d$), akinek nem üres a preferencialistája, addig ő jelentkezik a preferencialistáján első helyen lévő projektre ($p$), amit $o$ ajánlott fel. Ekkor $d$ diákot ideiglenesen hozzárendeljük $p$ projekthez (ezzel $o$ oktatóhoz is).

Most ellenőrizzük a feltételeinket, hogy beosztást kapunk-e:

(I) és (II) triviálisan teljesül, különben $d$ diák nem jelentkezett volna $p$ projektre.

(III) $p$ projekt $d$ diák által túljelentkezett lett-e? Ha igen, akkor $o$ oktató visszautasítja $M(p)$ diákok közül azt, akit a legkevésbé kedvel ($d_r$). Ekkor töröljük $p$ projektet $d_r$ diák preferencialistájáról és $d_r$ diákot $L_o^p$ listáról.

(IV) $o$ oktató $d$ diák által túljelentkezett lett-e? Ha igen, akkor $o$ oktató visszautasítja $M(o)$ diákok közül azt, akit a legkevésbé kedvel ($d_r$). Ekkor töröljük $p$ projektet $d_r$ diák preferencialistájáról és $d_r$ diákot $L_o^p$ listáról.

Ezen lépések után ellenőrizzük, hogy $p$ projekt telített-e. Ha igen, akkor törölhetjük $p$ projektet az összes olyan diák preferencialistájáról, akiket $o$ oktató kevésbé kedvel, mint az $L_o^p$ diákok közül legkevésbé kedvelt diákját ($d_r$), és ezen diákokat $L_o^p$ listáról.

Ellenőrizzük azt is, hogy $o$ oktató telített-e. Ha igen, akkor törölhetjük az összes olyan projektet, amit $o$ ajánlott fel, minden olyan diák preferencialistájáról, akit $o$ oktató kevésbé kedvel, mint az $O$ diákok közül legkevésbé kedvelt diákját, és ezen diákokat $o$ oktató preferencialistájáról.

Miután ez az algoritmus befejeződik a kapott beosztás stabil párosítás lesz, mely diák optimális. A következőkben ezt bizonyítjuk.

**4.1. Lemma.** *Az SPA-S diák algoritmus beosztást ad.*

**Bizonyítás:** Minden iterációban egy szabad diák a preferencialistáján lévő első projektre jelentkezik. Egyik diák sem tud ugyanarra a projektre kétszer jelentkezni, mivel amikor visszautasítanák, akkor töröljük a projektet a preferencialistájáról. Tehát az iterációk maximális száma a diákok preferencialistáinak hosszától függ. Az algoritmusban alkotott hozzárendelések pedig triviálisan egy beosztást adnak.

**4.2. Lemma.** *Az SPA-S diák algoritmus futása során törölt párok közül egyik sem blokkolhatta volna a beosztást.*

**Bizonyítás:** Indirekt tegyük fel, hogy egy ($d$,$p$) törölt pár blokkolta volna a beosztást. Ezt az alábbi okok miatt törölhettük: (1) $p$ projekt telített lett vagy (2) $o$ oktató, aki felajánlotta $p$ projektet, telített lett.

Kezdjük (2) esettel: ($d$,$p$) nem blokkolhatja $M$ beosztást, mivel ha egyszer egy oktató telített lesz utána már sosem lesz alul-jelentkezett, és csak olyan diákokat kaphat, akiket jobban kedvel.

(1) eset: belátjuk, hogy (iii-a), (iii-b) és (iii-c) sem teljesülhet ($d$,$p$) párra.

(iii-a) *$p$ és $o$ is alul-jelentkezett.* $p$ csak úgy válhat újra alul-jelentkezetté, ha $o$ túltelítetté válik, és az akit visszautasít $p$ projekthez volt beosztva, de ekkor viszont $o$ nem lehet alul-jelentkezett.

(iii-b) *$p$ alul-jelentkezett és $o$ telített és vagy $d \in M(o)$ vagy $o$ jobban kedveli $d$-t, mint a legkevésbé kedvelt diákját $M(o)$-ban ($d_r$).* Legyen ($d'$,$p$) az a pár aminek törlésekor $p$ alul-jelentkezetté vált. Tehát $o$ oktató jobban kedveli $d'$ diákot, mint $d$ diákot. A feltétel miatt $o$ oktató vagy jobban kedveli $d$ diákot, mint $d_r$ diákot, vagy kettejük ugyanaz a diák ($d = d_r$). Tehát $o$ oktató jobban kedveli $d'$ diákot, mint $d_r$ diákot. Viszont ekkor ($d'$,$p$) törlése után rögtön törölni fogja ($d_r$,$M(d_r)$) párt is. Ez viszont ellentmondás, mivel $M$ töröletlen párok halmaza.

(iii-c) *$p$ telített és $o$ jobban kedveli $d$-t, mint a legkevésbé kedvelt diákját $M(p)$-ben ($d_r$).* Viszont ekkor ($d$,$p$) törlése után rögtön törölni fogja ($d_r$,$p$)) párt is. Ez viszont ellentmondás, mivel $M$ töröletlen párok halmaza.

**4.3. Lemma.** *Az SPA-S diák algoritmus stabil párosítást generál.*

**Bizonyítás:** 4.1. Lemma alapján legyen $M$ az algoritmus által generált beosztás, és tegyük fel, hogy ($d$,$p$) blokkolja $M$ párosítást. Meg fogjuk mutatni, hogy ($d$,$p$) ki lett törölve az algoritmus futása során, ami ellentmondásban lenne 4.2. Lemmával. Indirekt tegyük fel, hogy nem lett törölve. Tehát $d$ diák be kell hogy legyen osztva egy $M(d) \neq p$ projekthez, különben szabad lenne nem üres preferencialistával, ellentmondásban állva azzal, hogy az algoritmus végig futott. De mikor $d$ jelentkezik $M(d)$ projektre, az a preferencialistájának elején áll. Tehát ($d$,$p$) párt törölni kell, hiszen ahhoz, hogy blokkolja $M$ párosítást $d$ jobban kell szeresse $p$ projektet, mint $M(d)$-t.

*Stabil párnak* hívunk egy olyan ($d$,$p$) párt, ami pár egy lehetséges stabil párosításban.

**4.4. Lemma.** *Az SPA-S diák algoritmus futása során nem törlünk stabil párt.*

**Bizonyítás:** Indirekt tegyük fel, hogy ($d$,$p$) az első stabil pár ami törlődik az algoritmus futása során. Legyen $M$ a párosítás ami rögtön a törlés után jön létre, míg $M'$ egy olyan stabil párosítás mely tartalmazza ($d$,$p$) párt. ($d$,$p$) törölve lett mert vagy (1) $p$ projekt telített lett, vagy (2) $o$ oktató (aki felajánlotta $p$ projektet) telített lett.

(1) eset:
Rögtön ($d$,$p$) pár törlése után $p$ projekt telített és $o$ oktató jobban kedveli az $M(p)$ diákokat, mint $d$ diákot. Tehát $d \in M'(p) \setminus M(p)$, és mivel $p$ projekt telített, kell hogy legyen egy $d' \in M(p) \setminus M'(p)$. Megmutatjuk, hogy ($d'$,$p$) blokkoló pár $M'$ stabil párosításban. Mivel ($d$,$p$) volt az első törölt stabil pár, ezért $d'$ diák jobban kedveli $p$ projektet, mint az összes olyan többit, mint amivel stabil párt alkotna. Mivel ($d$,$p$)$\in M'$ és $o$ oktató jobban kedveli $d'$ diákot $d$ diáknál, ebből következik, hogy $o$ oktató jobban kedveli $d'$ diákot, mint a legkevésbé kedvelt diákját $M'(p)$ és $M'(o)$ diákok közül. Tehát a blokkoló pár bármely (iii) tulajdonságát kielégíti ($d'$,$p$) pár, tehát blokkoló pár.

(2) eset:
Rögtön ($d$,$p$) pár törlése után $o$ oktató telített és $o$ oktató jobban kedveli az $M(o)$ diákokat, mint $d$ diákot.
Először tegyük fel, hogy $|M'(p)| > |M(p)|$. Mivel $o$ oktató telített, kell hogy legyen egy olyan $p'$ projekt, melyre $|M'(p')| < |M(p')|$ teljesül (tehát $p'$ projekt alul-jelentkezett $M'$ stabil párosításban). Mivel ($d$,$p$) volt az első törölt stabil pár, ezért $d'$ diák jobban kedveli $p'$ projektet, mint az összes olyan többit, mint amivel stabil párt alkotna. És $o$ oktató jobban kedveli $d'$ diákot $d$ diáknál, ebből következik, hogy $o$ oktató jobban kedveli $d'$ diákot, mint a legkevésbé kedvelt diákját $M'(o)$ diákok közül. Tehát a blokkoló pár bármely (iii) tulajdonságát kielégíti ($d'$,$p'$) pár, tehát blokkoló pár.
Most tegyük fel, hogy $|M'(p)| \leq |M(p)|$. Mivel ($d$,$p$)$\notin M$, kell hogy legyen egy $d \neq d' \in M(p) \setminus M'(p)$. Most $p$ projekt alul-jelentkezett $M$ beosztásban, különben ($d$,$p$) pár amiatt került volna törlésre, hogy $p$ projekt telített, ami ellentmondásban áll a mostani feltevésünkkel, miszerint amiatt töröltük ki a párt, hogy $o$ oktató telített lett.

Emiatt $p$ alul-jelentkezett $M'$ stabil párosításban is. Mint fentebb $d'$ diák jobban kedveli $p'$ projektet, mint az összes olyan többit, mint amivel stabil párt alkotna, mivel ($d$,$p$) volt az első törölt stabil pár. És szintén $o$ oktató jobban kedveli $d'$ diákot $d$ diáknál, ebből következik, hogy $o$ oktató jobban kedveli $d'$ diákot, mint a legkevésbé kedvelt diákját $M'(o)$ diákok közül. Tehát a blokkoló pár bármely (iii) tulajdonságát kielégíti ($d'$,$p$) pár, tehát blokkoló pár.

**4.5. Tétel.** *Egy adott SPA feladatra, az SPA-S diák algoritmus bármely futása egy stabil párosítást generál, melyben minden diák a lehető legjobb projekthez van beosztva (nincs egy olyan stabil párosítás sem melyben jobb projekthez van beosztva), míg a szabad diákok szabadok bármely stabil párosításban.*

**Bizonyítás:** 4.3. Lemma alapján legyen $M$ az algoritmus által generált stabil párosítás. $M$ stabil párosításban minden diák a redukált preferencialistájának első helyén álló projekthez van beosztva (ha egyáltalán be van osztva valahova). 4.4. Lemma alapján viszont egy stabil párt sem töröltünk, tehát $M$ stabil párosításban minden diák a lehető legjobb projekthez van beosztva, míg akik nincsenek beosztva azok egyik stabil párosításban sincsenek sehova sem beosztva.

#### 4.1.3. SPA-S oktató

Hasonlóan a stabil házasítás problémájához, itt is nézhetjük a folyamatot a másik oldalról: az oktatók oldaláról. A következőkben megmutatjuk, hogy hogyan fut egy algoritmus, ahol az oktatók ajánlják fel a projektjeiket a diákoknak. És kiderül, hogy ez az algoritmus egy oktató optimális párosítást fog találni.

Ez az algoritmus a következőképpen fut:

Kezdetben minden diák szabad, és semelyik projekthez, se oktatóhoz sincs egy diák se hozzárendelve.

Amíg van alul-jelentkezett $o$ oktató, ő felajánlja a $p$ projektet $d$ diáknak, a következő feltételek mellett: $d$ diák az első olyan $o$ preferencialistáján, aki szabad vagy a jelenlegi projektjénél jobban kedveli $p$-t; és $p$ projekt $d$ legkedveltebb alul-jelentkezett projektje. Ezt az ajánlatot $d$ mindig elfogadja. Ekkor töröljük az összes olyan $p^*$ projektet $d$ preferencialistájáról, amiket kevésbé kedvel, mint $p$-t, és töröljük $d$-t $o^*$ (az az oktató aki felajánlja $p^*$-t) $p^*$-ra leszűkített preferencialistájáról is.

Ez addig folytatódik, amíg nincs több a feltételeknek megfelelő ($o$, $p$, $s$) hármas.

**4.6. Lemma.** *Az SPA-S oktató algoritmus beosztást ad.*

**Bizonyítás:** Minden lépésben egy diák vagy megkapja az első ideiglenes projektjét, vagy kap az eddiginél jobbat. Ezért az iterációk száma a diákok preferencialistájának hosszától függ, azzal lineárisan arányos. Az pedig triviálisan adódik hogy a végén kapott párosítás egy beosztás lesz.

**4.7. Lemma.** *Az SPA-S oktató algoritmus futása során nem törlünk olyan párt, ami blokkolhatná a kapott beosztást.*

**Bizonyítás:** Legyen $F$ az algoritmus egy adott futása, melyben töröltük ($d$, $p^*$) párt. Indirekt tegyük fel, hogy ez a pár blokkolja $F$ által generált $M$ beosztást. A ($d$, $p^*$) pár azért lett törölve, mert $d$ ideiglenesen hozzá lett rendelve egy $p$ projekthez, melyet jobban kedvel $p^*$-nál. A következő iterációkban $d$ még kaphat jobb ajánlatokat, de azok mind jobbak lesznek $p^*$-nál, így a végleges projektje is. Tehát ($d$, $p^*$) pár nem blokkolhatja $M$ beosztást.

**4.8. Lemma.** *Az SPA-S oktató által generált beosztás stabil párosítás.*

**Bizonyítás:** Legyen a 4.6. Lemma alapján generált beosztás $M$. Indirekt tegyük fel, hogy az ($d$, $p$) pár blokkolja a beosztást, mely 4.7. Lemma alapján biztos hogy nem lett törölve az algoritmus futása során. Legyen a $p$ projektet felkínáló oktató $o$. Ekkor $d \in O_p$

A $(d,\, p)$ párnak teljesítenie kell a blokkoló pár 3 (iii)-je közül egy tulajdonságát:

(iii-a) *$p$ és $o$ is alul-jelentkezett.* Ekkor az$(d,\, p,\, o)$ hármas teljesíti az algoritmusban feltett követelményeket, így az algoritmus még be sem fejeződött volna.

(iii-b) *$p$ alul-jelentkezett és $o$ telített és vagy $d \in M(o)$ vagy $o$ jobban kedveli $d$-t, mint a legkevésbé kedvelt diákját $M(o)$-ban ($d_r$).* Nézzük az algoritmust abban a $T$ időpontban ami rögtön azután van, hogy $d_r$ diák megkapja a végleges $p_r$ projektjét és minden törlés ami $d_r$ diákot érinti végrehajtódott. Legyen ebben az ekkori beosztás $M'$ és $B = \{d_r\} \cup \{d \in D_o | o$ jobban kedveli $d$-t, mint $d_r$-t $\}$, valamint a következő halmazt:

$H = \{p^* \in P |$van olyan $d' \in B$ diák, hogy $p^* \in A_{d'}$ és $(d',\, p^*) \notin M'$ és ez a pár még nincs is törölve a $T$ pillanatban$\}$

$H$ halmazra az alábbi tulajdonságok érvényesek:

H1: Minden az $o$ oktatót érintő hozzárendelés, ami $T$ pillanat után történik, biztos, hogy egy $H$-beli projektet is érint, mivel $d_r$ a legkevésbé kedvelt diák $M(o)$-ban.

H2: Minden $p^* \in H$ telített $T$ pillanatban, különben $o$ nem ajánlotta volna fel a $p_r$ projektet a $d_r$ diáknak.

3. $p \in H$, mivel $d \in B$ a (iii-b) feltételből, és $(d,\, p)$ pár nincs törölve a 4.7. Lemma alapján, amiből következik, hogy $(d,\, p) \notin M'$, mivel $(d,\, p) \notin M$.

$M'$ beosztásban $o$ oktatóhoz rendelt diákok száma:

$|M'(o)| = \Sigma_{p' \in H \setminus \{p\}} |M'(p')| + |M'(p)| + \Sigma_{p'' \in P_o \setminus H} |M'(p'')| \leq q_o$

Hasonlóan az $M$ beosztásban $o$ oktatóhoz rendelt diákok száma:

$|M(o)| = \Sigma_{p' \in H \setminus \{p\}} |M(p')| + |M(p)| + \Sigma_{p'' \in P_o \setminus H} |M(p'')|$

H1 tulajdonság miatt: $\Sigma_{p'' \in P_o \setminus H} |M(p'')| = \Sigma_{p'' \in P_o \setminus H} |M'(p'')|$.

H2 tulajdonság miatt pedig: $\Sigma_{p' \in H \setminus \{p\}} |M(p')| \leq \Sigma_{p' \in H \setminus \{p\}} |M'(p')|$.

Tehát a következő becslést kaphatjuk:

$|M(o)| \leq \Sigma_{p' \in H \setminus \{p\}} |M'(p')| + |M(p)| + \Sigma_{p'' \in P_o \setminus H} |M'(p'')|$

Végül a (iii-b) feltételből tudjuk, hogy $p$ alul-jelentkezett $M$ beosztásban, tehát:

$|M(p)| < |M'(p)|$, ebből pedig:

$|M(o)| < \Sigma_{p' \in H \setminus \{p\}} |M'(p')| + |M'(p)| + \Sigma_{p'' \in P_o \setminus H} |M'(p'')| = M'(o) \leq q_o$

Ebből azt kapjuk, hogy $o$ oktató alul-jelentkezett, ami ellentmondásban áll a (iii-b) feltétellel.

(iii-c) *$p$ telített és $o$ jobban kedveli $d$-t, mint a legkevésbé kedvelt diákját $M(p)$-ben ($d_r$), ahol $p$-t $o$ ajánlotta fel.* Tudjuk, hogy $o$ jobban kedveli $d$ diákot $d_r$ diáknál. Tehát amikor $o$ felajánlotta $d_r$ diáknak a $p$ projektet a $(d,\, p)$ párnak törölve kellett lennie, különben $d$ diáknak ajánlotta volna fel $o$ a $p$ projektet. Ekkor viszont $(d,\, p)$ pár nem blokkolhatja a beosztást 4.7. Lemma alapján.

**4.9. Lemma.** *Az SPA-S oktató algoritmus futása során nem törlünk stabil párt.*

**Bizonyítás:** Indirekt tegyük fel, hogy $(d, p)$ az első stabil pár, ami törlődik az algoritmus futása során. Legyen $M$ egy olyan stabil párosítás ami tartalmazza $(d, p)$ párt. A $(d, p)$ pár törlése amiatt történt, mert $d$ kapott egy $p'$ projektre ajánlatot, amit jobban kedvel, mint $p$-t. Legyen $o'$ a $p'$ projektet felajánló tanár és kvótáik $q_{o'}$, illetve $r_{p'}$.

Azon $(d', p')$ stabil párok száma, ahol $o$ jobban kedveli $d'$ diákot, mint $d$ diákot, kevesebb kell, hogy legyen mint $r_{p'}$, különben egyiküket ki kellett volna törölni, még az előtt $d$ diák hozzá lett rendelve $p'$ projekthez, ellentmondásban állva azzal, hogy $(d, p)$ az első törölt stabil pár. Ezért $M$ párosításban vagy (1) $p'$ alul-jelentkezett vagy (2) $p'$ telített, de van olyan diák hozzárendelve, akit $o'$ kevésbé kedvel, mint $d$-t.

Be fogjuk látni, hogy $(d, p')$ egy blokkoló pár. A blokkoló pár (i) és (ii) feltételeit teljesíti ($d$, $p$') pár. Tehát csak azt kell belátni a (iii)-asok közül az egyik teljesül. Ha (2) teljesül, akkor $(d, p)$ pár teljesíti a (iii-c) feltételt is.

(1) esetben viszont $p'$ alul-jelentkezett $M$ párosításban. Ha $o'$ alul-jelentkezett $M$-ben, akkor $(d, p')$ pár teljesíti a (iii-a) feltételt. Különben $o'$ telített és az egyetlen eset amikor $(d, p')$ nem tudja kielégíteni a (iii-b) feltételt az, ha $o'$ oktatóhoz olyan $q_{o'}$ diák van hozzárendelve akiket $o'$ jobban kedvel, mint $d$ diákot. Megmutatjuk, hogy ez ellentmondáshoz vezet.

Mivel $M$ egy stabil párosítás, ezért ez az $o'$-höz tartozó $q_{o'}$ darab pár mind stabil párok. Ahhoz, hogy $o'$ felajánlja $p'$ projektet $d$ diáknak az algoritmus során, csak $0 \leq z < q_{o'}$ darab van jelenleg hozzárendelve (csak így lehet $o'$ alul-jelentkezett, hogy tudjon projektet felajánlani). De a $q_{o'}$ stabil párok közül egyik sincs törölve, hiszen akkor nem $(d, p)$ lenne az első törölt stabil pár. Tehát a $q_{o'} - d$ eddig hozzá nem rendelt stabil párokat érintő projekteknek telítettnek kell lenniük (különben a $o'$ következő ajánlata őket érintené, nem pedig $(d, p')$ párt). De agy amikor $o'$ felajánlaná $p'$-t ő már telített, ami a várt ellentmondás.

**4.10. Tétel.** *Egy adott SPA feladatra, az SPA-S oktató algoritmus bármely futása által generált $M$ stabil párosítás a következő tulajdonságokkal bír:*

*(i) Minden diák vagy szabad, vagy a legrosszabb projekthez van beosztva, amihez hozzá lehet rendelve egy stabil párosításban.*

*(ii) Minden $p$ projekthez a rá vetített preferencialistáról ki nem törölt diákok közül az első $x_p$ diák van rendelve ($x_p$ a futástól független).*

*(iii) Minden oktató jobban kedveli $M$ stabil párosítást, bármelyik másiknál, ahol nem ugyanazok a diákok vannak hozzárendelve.*

**Bizonyítás:** (i) Legyen $d$ bármely diák az $M$ párosításból. Az SPA-S oktató algoritmus $d$ preferencialistájáról letörli az összes olyat, amit $d$ kevésbé kedvel, mint $M(d)$ projektet. Viszont a 4.7. Lemma alapján nem törlünk stabil párt, ezért $d$-nek nem lehet rosszabb projektje, mint a mostani bármely stabil párosításban. Ezért $d$ vagy szabad $M$-ben (és bármely más stabil párosításban) vagy ahhoz a projekthez van hozzárendelve aminél rosszabbat egyik stabil párosításban sem kaphat.

(ii) Indirekt tegyük fel, hogy van olyan $(d,\ p) \notin M$ pár, hogy $d$ nem lett törölve $L_o^p$ preferencialistáról, ahol $o$ oktató ajánlja fel $p$ projektet, és $o$ jobban kedveli $d$ diákot, mint a legkevésbé kedvelt diákját $d_r$. Mivel $(d,\ p)$ nincs törölve $d$ vagy szabad, vagy jobban kedveli $p$-t, mint $M(d)$-t. Tehát $(d,\ p)$ egy blokkoló pár, ami ellentmond $M$ stabilitásának.

(iii) Legyen $M'$ egy bármilyen másik stabil párosítás, és $o$ az az oktató, akihez másik diákok vannak hozzárendelve, mint $M$-ben. Most csináljunk egy $f$ bijektív hozzárendelést $M'(o) \backslash M(o)$ és $M(o) \backslash M'(o)$ tagjai között.

Nevezzük $d \in M'(o) \backslash M(o)$ diákot domináltnak $L_o$-ban, ha $o$ jobban kedveli minden $M(o)$-beli diákját $d$-nél. Ekkor tehát minden dominált diákhoz szabadon választhatunk $f(s)$-t $M(o) \backslash M'(o)$-ból. Tehát szabadon befejezhetjük $f$ bijekciót az után, hogy a nem dominált diákokhoz találunk párokat.

Legyen $d_1 \in M'(o) \backslash M(o)$ olyan diák, akit $o$ oktató legalább egy $M(o)$-beli diáknál jobban kedvel, és $(d_1, p_1) \in M'$, ahol $p_1$ projektet $o$ oktató ajánlotta fel. A tétel (i) pontja alapján tudjuk, hogy $d_1$ jobban kedveli $p_1$ projektet, mint $M(d_1)$ projektet. Szóval, hogy $(d_1, p_1)$ ne legyen blokkoló pár $M$-ben, kell hogy:

(1) vagy $p_1$ telített $M$ párosításban, olyan diákokkal, akiket $o$ jobban kedvel, mint $d_1$ diákot; legyen $d_2$ olyan diák aki $M(p_1) \backslash M'(p_1)$-ben van;

(2) vagy $p_1$ alul-jelentkezett $M$-ben, de $o$ telített olyan diákokkal, akiket jobban kedvel $d_1$-nél.

Viszont (2) esetet elvethetjük, mivel feltevésünk szerint $d_1$ nem dominált diák $L_o$-ban. Szóval tekintsük $d_2$ diákot. Ha $d_2 \notin M'(o)$, akkor $f(d_1) = d_2$. Különben (i) szerint van $o$ oktatónak olyan $p_2$ projektje, hogy $(d_2, p_2) \in M' \backslash M$ és $d_2$ jobban kedveli $p_2$ projektet $p_1$-nél. Ahhoz, hogy $(d_2, p_2)$ ne legyen blokkoló pár az szükséges, hogy $p_2$ telített legyen $M$-ben olyan diákokkal akiket $o$ jobban kedvel, mint $d_2$ diákot; legyen $d_3$ egy ilyen diák $M(p_2 \backslash M'(p_2))$-ből. (Megjegyzendő, hogy hasonlóan az előbbiekhez, a (2)-es esetet elvethetjük, mivel $d_2$-t $o$ jobban kedveli $d_1$-nél, tehát nem dominált.)

Ha $d_3 \notin M'(o)$ akkor $f(d_1) = d_3$. Különben folytathatjuk a $d_1$, $d_2$, $d_3$, $d_4$,..., $d_t$ sorozatot, melyben minden diákot jobban kedvel $o$ az őt megelőzőnél. Mivel a diákok száma véges, ezért a sorozat véget ér egy olyan $d_t$ diáknál, aki már $M(o) \backslash M'(o)$-beli és $o$

jobban kedveli őt, mint $d_1$ diákot. Ekkor lehet $f(d_1) = d_t$.

Tehát a $d_1$,...,$d_t$ sorozat a következő tulajdonságokkal bír:

- $d_1 \in M'(o) \backslash M(o)$
- $d_i \in M'(o) \cap M(o)$ $(2 \leq i < t)$
- $d_t \in M(o) \backslash M'(o)$
- $o$ jobban kedveli $d_{i+1}$-t, mint $d_i$-t $(1 \leq i < t)$

Továbbá még biztosítanunk kell, hogy ha egy projekt többször is megjelenik különböző diákkal kezdődő sorozatokban, akkor minden esetben egy másik diákot tudjunk hozzárendelni, így biztosítva, hogy a hozzárendelés bijektív maradjon. Legyen $p_x$ egy ilyen projekt, ami $r$ alkalommal feltűnik a $(d'_1, p_x)$,...,$(d'_r, p_x) \in M' \backslash M$ párokban. Az előbbiekhez hasonlóan $p_x$ telített kell hogy legyen $M$-ben olyan diákokkal, akiket $o$ jobban kedvel, mint $d_1$,...,$d_r$ diákokat. Tehát kell hogy legyen legalább $r$ diák akik közül lehet választani, és minden esetben lehet az eddigiektől eltérőt választani.

Végül pedig, befejezzük az $f$ bijekciót a dominált diákokkal. Ekkor $f$, ahogy szerettük volna, egy bijekció $M'(o) \backslash M(o)$ és $M(o) \backslash M'(o)$ tagjai között, ahol $o$ jobban kedveli $f(d)$ diákot $d$ diáknál, minden $d$ diákra. Tehát $o$ jobban örül $M$ párosításnak, mint $M'$-nek.

Ha több oktató is van, akkor őrájuk is elmondhatjuk a fentieket.

## 4.2. SPA-P

A következő fejezet ebből a könyvből származik: [7]

Az előzőekben az oktatók a diákokat rendezték preferencia-sorrendbe. Most az oktatók a projekteket fogják rendezni preferencia alapján.

Vizsgáljuk meg, hogy az eddigi definícióink miben módosulnak.

A blokkoló pár definíciója a következőképpen változik:

Egy $(d, p) \in (D \times P) \setminus M$ blokkolja $M$-t, ha az alábbiak teljesülnek:

(i) $d$ diák elfogadhatónak tartja $p$ projektet;

(ii) $d$ vagy szabad, vagy $d$ diák jobban kedveli $p$ projektet, mint $M(d)$-t (a jelenlegit);

(iii) $p$ alul-jelentkezett és vagy

(a) $d \in M(o)$ és $o$ oktató jobban kedveli $p$ projektet, mint $M(d)$-t, vagy

(b) $d \notin M(o)$ és $o$ alul-jelentkezett, vagy

(c) $d \notin M(o)$, $o$ oktató telített és $o$ jobban kedveli $p$ projektet, mint a legkevésbé kedvelt olyan projektjét, amihez már van diák rendelve.

Viszont itt feltűnik egy újabb blokkolási lehetőség is, ezt blokkoló szövetségnek nevezzük: $\{d_1, d_1, ..., d_r\}$ $(r \geq 3)$ diákok halmaza, ahol $d_i$ jobban kedveli $M(d_{i+1})$ projektet, mint $M(d_i)$-t $\forall 1 \leq i \leq r-1$ és $d_r$ jobban kedveli $M(d_1)$-t, mint $M(d_r)$-t.

Tehát egy beosztás akkor lesz stabil párosítás, ha nem tartalmaz se blokkoló párt, se blokkoló szövetséget.

**4.11. Tétel.** *Legyen $F$ egy SPA-P feladat. Ekkor $F$-nek van stabil párosítása, mely $O(m)$ időben megtalálható, ahol $m$ a preferencialisták összhossza.[10]*

Viszont könnyű belátni, hogy $F$ különböző stabil párosításai nem lesznek azonos méretűek. Vegyük a következő példát:

$$\begin{array}{lcll} d_1 & : & p_1 & p_2 \\ d_2 & : & p_1 & \\ o_1 & : & p_1 & \\ o_2 & : & p_2 & \end{array}$$

Ebben a feladatban $M = \{(d_1, p_1)\}$ és $M' = \{(d_1, p_2), (d_2, p_1)\}$ is stabil párosítás. Mivel sok gyakorlati feladatban szeretnénk, hogy minél több diákhoz legyen projekt hozzárendelve, ezért természetes módon felvetődik a MAX SPA-P (a maximális méretű stabil párosítás megtalálása) feladat megoldhatósága.

**4.12. Tétel.** *MAX SPA-P nem közelíthető $\frac{21}{19} - \epsilon$-en belül bármely $0 < \epsilon$-ra, kivéve ha P=NP, de közelíthető $\frac{3}{2}$-en belül.[11]*

## 4.3. SPA-(S,P)

A következő fejezet ebből a könyvből származik: [7]

Most az oktatók a diák-projekt párokat rendezik sorrendbe preferencia alapján.

Ezek alapján definiáljuk a következő fogalmakat:

$B(o) = \{(d,p) \in D \times P | p \in A_d \cap P_o\}$

Vagyis azok a diák-projekt párok, ahol $d$ elfogadhatónak találja $p$ projektet, amit $o$ oktató ajánlott fel.

$M(o) = \{(d,p) \in D \times P | d \in M(p) \wedge p \in P_o\}$

Vagyis $o$ oktatóhoz azok a diák-projekt párok vannak rendelve, ahol $p$ projektet $o$ ajánlotta fel és $p$-hez $d$ hozzá van rendelve.

A blokkoló pár definíciója is változik:

Egy $(d,p) \in D \times P$ pár blokkolja $M$ beosztást, ha

(i) $p \in A_d$

(ii) vagy $d$ szabad $M$-ben, vagy $d$ jobban kedveli $p$ projektet, mint $M(d)$-t

(iii-1) $p$ alul-jelentkezett és vagy

(a) $d$-hez van projekt hozzárendelve $M$-ben és $M(d) \in P_o$ és $o$ jobban kedveli $(d,p)$ párt, mint $(d, M(d))$-t; vagy

(b) $d$ szabad $M$-ben vagy $M(d) \notin P_o$ és $o$ alul-jelentkezett; vagy

(c) $d$ szabad $M$-ben vagy $M(d) \notin P_o$ és $o$ telített, de $o$ jobban kedveli $(d,p)$ párt, mint egy másik $(d',p') \in M(o)$ párt;

(iii-2) $p$ telített és $o$ jobban kedveli $(d,p)$ párt, mint valami $(d',p') \in M(o)$ párt, és vagy

(a) $d$ hozzá van rendelve egy projekthez $M$-ben és $M(d) \in P_o$ és $o$ jobban kedveli $(d,p)$ párt, mint $(d, M(d))$ párt; vagy

(b) $d$ szabad $M$-ben vagy $M(d) \notin P_o$;

ahol $p$-t $o$ ajánlotta fel.

Egy beosztás itt is akkor stabil párosítás, ha nem tartalmaz blokkoló párt.

**4.13. Tétel.** *Minden SPA-(S,P) feladatnak van megoldása, és a megfelelő stabil párosítás $O(m)$ időben megtalálható, ahol $m$ a preferencialisták összhossza.[12]*

## 4.4. Egy valós feladat

Az ELTE alkalmazott matematikus MSc szakán a hallgatóknak kutatási témákat kell választaniuk. A fő irányelv ebben az esetben, hogy minden hallgatónak legyen témája. Ezenfelül a diákok szigorú preferencia-sorrendbe rendezik a témákat, míg a tanárok pontozzák a hallgatókat, csoportokba osztják őket: jó, kicsit jó, biztos nem jó (gyakorlatilag megengedünk egyenlőséget a tanárok preferencialistájában). A tanároknak van kvótája, míg a projekteknek is (lehetőleg 1). A stabil párosítás pedig tanár-optimális legyen.

Nevezzük azt tiltott élnek, ha egy diák semmiképpen sem akar egy projektet, vagy egy oktató semmiképpen sem akar egy diákot (ezt úgy reprezentáljuk, hogy nem jelennek meg a preferencialistájukon).

Nézzük a legegyszerűbb esetet:

**4.14. Állítás.** *Ha minden diák és minden oktató az összes projektet sorba rendezi (tehát nincsenek tiltott élek), akkor minden esetben létezik olyan stabil párosítás, ahol minden diáknak jut projekt (feltéve, hogy $\Sigma_{p\in P} r_p \geq |D|$), és az oktató optimálist az SPA-S oktató megtalálja.*

**Bizonyítás:** Ez következik az SPA-S oktató részben kimondott tételekből.

Most vizsgáljuk meg a szigorító feltételeket külön-külön.

**4.15. Állítás.** *Abban az esetben, ha vannak tiltott élek, akkor nem biztosítható, hogy minden diáknak legyen projektje.*

**Bizonyítás:** Ellenpélda:

$d_1 \;:\; p_2$

$d_2 \;:\; p_2$ $o$ projektjei: $p_1$, $p_2$ 1 kvótával.

$o \;:\; d_1 \quad d_2$

Ekkor $d_1$ megkapja $p_2$ projektet, $d_2$ pedig projekt nélkül marad.

**Megjegyzés:** Nem csak ebben az esetben történhet ez meg. Lehet olyan diák, akit egyik tanár sem akar, vagy egy diák csak azok a projektek érdeklik, amiket azok az oktatók ajánlottak fel, akik őt nem fogadnák el (és még több bonyolultabb eset).

Nézzük a következő feltételt: egyenlőség a preferencialistában. Lényeges megjegyeznünk, hogy ebben az esetben sokféle korábban intuitív definíciót kell átfogalmaznunk, melyet akár többféleképpen is megtehetünk.

Az első ilyen a blokkoló él definíciója. Most ne tekintsük blokkoló élnek azt, amikor egy oktatónak ugyanabból a preferenciaosztályából származó két diákja versenyez ugyanazért a projektért és az egyik megkapja, míg a másik nem. Ez alapján úgy kell módosítanunk a blokkoló él definícióját, hogy szigorú egyenlőtlenségre mondjuk ki (tehát a fenti esetben a másik diák nem blokkolja a párosítást, mivel ugyanabból a preferenciaosztályban vannak).

Ezt gyenge stabilitásnak nevezik. Még két különböző stabilitást különböztetnek meg: a szuper erős és az erős stabilitást. A szuper erős stabilitás azt jelenti, hogy nincs egy olyan pár se, akik szigorúan jobban, vagy ugyanannyira szeretnék egymást, mint jelenlegi párjukat. Míg az erős stabilitás megenged az egyik oldalon egyenlőséget a másikon viszont nem.

Gyenge stabilitás esetén viszont az SPA-S oktató nem biztos, hogy "optimális" stabil párosítást talál. Vegyük például a következő példát:

$$\begin{array}{ccccc} d_1 & : & p_1 & > & p_2 \\ d_2 & : & p_1 & > & p_2 \\ o_1 & : & d_2 & = & d_1 \\ o_2 & : & d_1 & > & d_2 \end{array}$$

$o_1$ projektje: $p_1$ 1 kvótával. $o_2$ projektje: $p_2$ 1 kvótával.

Ekkor (implementációtól függően) az SPA-S oktató algoritmus az alábbi stabil párosításokat adhatja végeredményül:

$M_1 = (d_1, p_1), (d_2, p_2)$ vagy $M_2 = (d_1, p_2), (d_2, p_1)$.

Láthatjuk, hogy $o_2$ oktató jobban preferálná $M_2$ stabil párosítást, mint $M_1$-t, míg $o_1$ mindkét stabil párosítást ugyanannyira preferálja.

Az eddigi optimalitási definícióval azt mondanánk, hogy $M_2$ az optimális stabil párosítás. Ha ezt szeretnénk megtartani, akkor viszont az eddigi algoritmusunkat kellene megváltoztatni, hogy az optimálisat találja meg minden esetben.

Viszont azt is látnunk kell, hogy míg ilyen kicsi esetben könnyű volt eldönteni melyik az optimálisabb az SPA-S oktató algoritmus lehetséges kimenetelei között, nagyobb esetekben már nem biztos, hogy ilyen egyszerű.

Egy másik megközelítés az, hogy az ugyanabba a preferenciaosztályba tartozó diákok közötti egyenlőséget felbontjuk azzal, hogy véletlenszerűen sorrendbe rendezzük őket, hogy szigorú preferencialistát kapjunk.

Viszont ekkor nem beszélhetünk optimalitásról. Vegyük a következő lehetőséget: egy $o$ oktató egy négy elemű preferenciaosztályát a következőképpen bontotta fel: $d_1 > d_2 > d_3 > d_4$. Ekkor ha $M_1$ stabil párosításban $d_1, d_4$ diákokat kapta, míg egy $M_2$-ben $d_2, d_3$ diákokat. Ha csak ez a két stabil párosítás fordulna elő, akkor melyiket nevezzünk optimálisnak?

Összességében azt mondhatjuk, hogy az a feltétel, hogy minden diáknak legyen projektje egy nagyon erős feltétel, melyet csak hasonlóan erős megkötések között lehet minden esetben biztosítani.

A szakirodalom is megerősíti sejtésünket. Az eredeti feladatunk egy speciális esete az, hogy minden tanár pontosan egy projekttel rendelkezik, és annak az egy projektnek a kvótája egy. Ilyen módon visszajutunk a stabil házassági problémához, annyi különbséggel, hogy a tanárok oldalán megengedünk egyenlőséget a preferencialistában, és nem minden tanár elfogatható a diákok számára, valamint nem minden diák elfogadható a tanárok számára.

**Megjegyzés:** Egyenlőséget és tiltott éleket megengedő feladatokban a gyengén stabil párosításokra már nem érvényes a "vidéki kórház" tétel, itt lehetségesek különböző méretű stabil párosítások.

Manlove és társai [13] megmutatták, hogy a maximális méretű gyengén stabil párosítás megtalálása NP-teljes feladat, akkor is ha csak az egyik oldalon állhatnak döntetlenek (pl. mint most, csak a tanároknál). Sőt, annak az eldöntése hogy létezik-e teljes párosítás ebben a rendszerben, szintén NP-teljes.

Mivel ez speciális esete a nálunk szereplő tanár-diák-projekt feladatnak, így ebben a feladatban is annak eldöntése, hogy van-e hozzárendelés, ami minden diákot tartalmaz, NP-teljes.

# 5. Az algoritmusok Java adaptációja

Az alábbi linken elérhetőek a szakdolgozatban kifejtett algoritmusok Java adaptációja:
`https://drive.google.com/open?id=0B_dSyK1DtNdsWWhPWkRlWnUtZ0E`

# Hivatkozások


[1] D. Gale and L. S. Shapley: *College admissions and the stability of marriage.* Amer. Math. Monthly, Vol. 69, pp. 9–15, 1962.

[2] D.E. Knuth: *Mariages Stables* (Les Presses de L'Université de Montréal, 1976), English translation in Stable Marriage and its Relation to Other Combinatorial Problems, volume 10 of CRM Proceedings and Lecture Notes, American Mathematical Society, 1997.

[3] D. Gusfield and R.W. Irving : *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms*, 1989.

[4] A. E. Roth and M. A. O. Sotomayer: *Two-sided matching: a study in game-theoretic modeling and analysis*, 1990.

[5] R. W. Irving: *An efficient algorithm for the "stable roommates" problem.* J. Algorithms, Vol. 6, No. 4, pp. 577–595, 1985.

[6] J. J. M. Tan and Y.-C. Hsueh: *A generalization of the stable matching problem.* Discrete Applied Mathematics 59, pp. 87-102, 1995.

[7] David F. Manlove: *Algorithmics of matching under preferences.* pp. 269-273, 2012.

[8] D. Gale and M. Sotomayor: *Some remarks on the stable matching problem. Discrete Applied Mathematics*, Vol. 11, pp. 223–232, 1985.

[9] David J. Abraham, Robert W. Irving, David F. Manlove: *Two algorithms for the Student-Project Allocation problem.* Journal of Discrete Algorithms 5, pp. 73-90, 2007.

[10] Manlove, D.F. and O'Malley, G.: *Student project allocation with preferences over projects.* Journal of Discrete Algorithms 6, pp. 553–560, 2008

[11] Iwama, K., Miyazaki, S. and Yanagisawa, H.: *Improved approximation bounds for the student-project allocation problem with preferences over projects.* Journal of Discrete Algorithms 13, pp. 59–66, 2012.

[12] Abu El-Atta, A.H. and Moussa, M.I.: *Student project allocation with preference lists over (student,project) pairs*, in Proceedings of ICCEE 09: the 2nd International Conference on Computer and Electrical Engineering (IEEE), pp. 375–379, 2009

[13] D. Manlove, R.W. Irving, K. Iwama, S. Miyazaki, Y. Morita: *Hard variants of stable marriage* Theoretical Computer Science, 276 (1–2) (2002), pp. 261–27