Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Toma Zsófia

Erősen reguláris gráfok

BSc alkalmazott matematikus szakdolgozat

Témavezető:

Csikvári Péter

Számítógéptudományi Tanszék

Budapest, 2017

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni a folyamatos támogatást a családomnak és a barátaimnak, valamint témavezetőmnek a dolgozat alapos áttanulmányozását, az esetleges hibák kijavítását.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Számomra a matematika egyik legérdekesebb része a gráfelmélet, ahol sok szép struktúrát ismerhettem meg. Azért választottam ezt a témát, mert szeretem látni azt, ahogy a matematika különböző területei összeérnek, ebben az esetben az algebra és a kombinatorika.

A reguláris gráfok elméletének eredetét egyes források Julius Petersen (1839-1910) nevéhez kötik, aki bár a matematika szinte minden területén tevékenykedett, gráfelméleti munkái lettek a leghíresebbek, a róla elnevezett gráf mára ikonikus lett. Az általam feldolgozott terület jeles szakértői közé tartozik Alan Hoffman (1924-) is, aki jelentős eredményeket ért el gráfok sajátértékeinek tanulmányozásával. Napjainkban többek között Andries Brouwer foglalkozik a témával, honlapján a legtöbb ismert erősen reguláris gráf, és rengeteg konstrukció leírása megtalálható (ennek elérhetőségét feltüntettem az irodalomjegyzékben).

Szakdolgozatomban a szükséges előismeretek leírása után egy speciális gráfosztályt, az erősen reguláris gráfokat, és alapvető tulajdonságaikat, a paramétereik közti összefüggéseket, valamint a létezésükhöz szükséges feltételeket (mint az integralitási feltétel) mutatom be, valamint néhány fontos példát a Petersen-gráftól a Paley-gráfokig. A negyedik fejezetben olyan különleges gráfok is előkerülnek, amikhez szükséges a véges testek, vagy a blokkrendszerek ismerete, de latin négyzeteken alapuló szerkezetet is látunk majd. Az ötödik fejezetben szó lesz az asszociációs sémákról, ezek segítségével bebizonyítom a Krein-feltételt, illetve két példán keresztül szemléltetem "működését".

2. fejezet

Gráfelméleti és algebrai bevezető

2.1. Gráfok

2.1.1. Definíció. Gráfnak egy $G = (V, E)$ rendezett párt nevezünk, ahol V nemüres halmaz a csúcsok halmaza, E pedig a V-ből képezhető párok egy halmaza, elemeit éleknek nevezzük.

Egy pontra illeszkedő élek száma a pont fokszáma. Egy gráf *d-reguláris*, ha minden pontjának foka d.

$G = (V, E)$ komplementere az a $\overline{G} = (V, \overline{E})$ gráf, amit úgy kapunk, hogy V-nek pontosan azokat az elemeit kötjük össze, amiket G-ben nem.

2.2. Lineáris algebrai alapfogalmak

2.2.1. Definíció. Legyen a T test $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, vagy $\mathbb{Q}$ valamelyike. Egy $n \times m$-es mátrix egy n sorból és m oszlopból álló táblázat, amiben T elemei vannak. Ezek halmaza $T^{n\times m}$. Az $M = (a_{ij}) \in T^{n\times m}$ azt az n sorból és m oszlopból álló mátrixot jelöli, amelyben az i. sor j. eleme $a_{ij} \in T$.

A továbbiakban I az $n \times n$-es egységmátrixot (a főátlóban 1-esek vannak, mindenhol máshol 0-k), J pedig az 1-esekből álló mátrixot jelöli.

2.2.2. Definíció. Egy $A \in T^{n\times m}$ mátrix transzponáltja az az $A^T \in T^{m\times n}$ mátrix, amelyet A sorainak és oszlopainak felcserélésével kapunk, vagyis $a^T_{ij} = a_{ji}$.

$A \in T^{n\times n}$ szimmetrikus, ha $A^T = A$.

Egy n pontú gráfot reprezentálhatunk egy $n \times n$-es $A = (a_{ij})$ mátrixszal, ahol

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha az i. és a j. csúcs össze van kötve} \\ 0 & \text{ha nincsenek.} \end{cases}$$

Ez a gráf szomszédsági vagy adjacenciamátrixa.

2.2.3. Tétel. *$B = A^2$ elemei a 2 hosszú séták száma az i és j csúcsok között.*

Bizonyítás. B egy b_{ij} eleme az A i. sorának és j. oszlopának a skalárszorzata. Ebben a k-adik összeadandó a gráf v_i-ből v_k-ba és v_k-ból v_j-be vezető élei számának szorzata. A skalárszorzat ezeknek összegzése, tehát b_{ij} a v_i és v_j közötti 2 élből álló séták száma. □

2.2.4. Definíció. Legyen $A \in T^{n \times n}$, $\underline{v} \in T^n$. Ha $A\underline{v} = \lambda \underline{v}$ (ahol $\underline{v} \neq 0$), akkor λ egy sajátértéke, $\underline{v}$ pedig egy λ-hoz tartozó sajátvektora A-nak.

2.2.5. Észrevétel. Ha $Av = \lambda v$, akkor $A^2\underline{v} = \lambda^2\underline{v}$, ugyanis $A(A\underline{v}) = A(\lambda\underline{v}) = \lambda\lambda\underline{v} = \lambda^2\underline{v}$.

2.2.6. Definíció. Egy gráf spektruma az adjacenciamátrixa sajátértékeinek halmaza, multiplicitásokkal.

2.2.7. Állítás. *Egyszerű gráf esetén a sajátértékek összege 0.*

Fennáll az is, hogy $\sum_i \lambda_i^2 = 2|E(G)|$.

Bizonyítás. A főátlóban 0-k állnak, $\sum_i \lambda_i = tr(A) = 0$.

$tr(A^2)$ főátlójában a 2 hosszú zárt séták vannak, ez a pontok fokszámával egyenlő, amiknek összege a gráf élszámának kétszerese. □

2.2.8. Állítás. *Irányítatlan d-reguláris gráfnak d a legnagyobb sajátértéke, multiplicitása pedig a gráf összefüggő komponenseinek száma.*

Bizonyítás. [10] Ha a gráf d-reguláris, akkor az $\mathbf{1} = (1, \ldots 1)$ vektor sajátvektor. Az $A\mathbf{1} = d\mathbf{1}$ egyenletből következik, hogy d sajátérték. Mivel minden csúcs foka d, ezért nem lehet d-nél nagyobb sajátértéke a gráfnak. □

2.2.9. Tétel. *Irányítatlan gráf esetén az A mátrix valós és szimmetrikus, tehát minden sajátértéke valós.*

2.2.10. Lemma. *Valós szimmetrikus mátrix különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok merőlegesek egymásra.*

A most következő részre az 5. fejezetben lesz szükségünk.

2.2.11. Lemma. *Tegyük fel, hogy A és B szimmetrikus mátrixok. Ekkor*

$$AB \text{ pontosan akkor szimmetrikus, ha } AB = BA.$$

Bizonyítás. $\Rightarrow$: $AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$.

$\Leftarrow$: $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$, tehát AB szimmetrikus. $\square$

2.2.12. Definíció. Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix pozitív szemidefinit, ha $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $x^T A x \geq 0$ (vagyis ha minden sajátértéke nemnegatív).

2.2.13. Lemma. *Ha A pozitív szemidefinit, akkor mindig előáll ZZ^T alakban.*

Bizonyítás. Először meggondoljuk, hogy A felírható így is: $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i v_i^T$.

Ha A valós és szimmetrikus, $V = (v_1, \ldots, v_n)$, ahol a v_i-k ortonormált sajátvektorai A-nak, $S = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, akkor $A = VSV^T$, mert ha $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, akkor $VSV^T v_i = VSe_i = (\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n)e_i = \lambda_i v_i = Av_i$. Tehát $A = VSV^T$, ami ekvivalens a kívánt alakkal.

Most térjünk vissza a lemma bizonyítására.

$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i v_i^T$.

Legyen $w_i = \sqrt{\lambda_i} \cdot v_i$, ekkor $w_i w_i^T = \lambda_i v_i v_i^T$.

A W mátrix álljon a w_i oszlopvektorokból, $i = 1 \ldots n$.

Nézzük a WW^T szorzatot. Ez $\sum w_i w_i^T$-vel egyenlő, vagyis éppen $\sum \lambda_i v_i v_i^T$-vel, ami az A mátrix, tehát felbontottuk A-t ZZ^T alakú szorzatra. $\square$

2.2.14. Definíció. A $Z = z_{ij} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ és az $U = u_{ij} \in \mathbb{R}^{p\times q}$ mátrixok Kronecker-szorzata (vagy tenzorszorzata) az a $Z \otimes U \in \mathbb{R}^{mp\times nq}$ mátrix, amit úgy kapunk, hogy Z minden elemét megszorozzuk a U mátrixszal.

Például ha $Z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, akkor

$$Z \otimes U = \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 8 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 5 & 10 & 6 & 12 \\ 12 & 16 & 15 & 20 & 18 & 24 \end{pmatrix}.$$

2.2.15. Tulajdonságok.

1. Általában $(A \otimes B) \neq (B \otimes A)$.
2. Minden A-ra és B-re $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$.
3. Ha az A és B négyzetes mátrixok szimmetrikusak, akkor $(A \otimes B)$ is az.
4. Ha léteznek az inverzek, akkor $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.

2.2.16. Lemma. ([11]) *Legyen* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{r \times s}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $D \in \mathbb{R}^{s \times t}$. *Ekkor* $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD \in \mathbb{R}^{mr \times pt}$.

Bizonyítás. $(A \otimes B)(C \otimes D) = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11}D & \dots & c_{1p}D \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1}D & \dots & c_{np}D \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}c_{k1}BD & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}c_{kp}BD \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}c_{k1}BD & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}c_{kp}BD \end{pmatrix} = AC \otimes BD.$$

□

3. fejezet

Erősen reguláris gráfok

A most következő részben definiálom az erősen reguláris gráfokat, és leírok pár egyszerű, ám fontos összefüggést, [1], [6] és [5] segítségével.

3.1. Alaptulajdonságok

3.1.1. Definíció. Egy egyszerű, irányítatlan, nem teljes és nem üres gráfot (n, d, a, b) paraméterű *erősen reguláris gráf*nak nevezünk, ha n csúcsa van, d reguláris, minden szomszédos pontnak ugyanannyi közös szomszédja van (a), és bármely két, nem összekötött csúcs közös szomszédainak száma is azonos (b).

3.1.2. Állítás. *Ha G erősen reguláris (n, d, a, b) paraméterekkel, akkor a komplementere, $\overline{G}$ is erősen reguláris $(n, n-d-1, n-2d+b-2, n-2d+a)$ paraméterekkel.*

Bizonyítás. $\overline{n} = n$ és $\overline{d} = n - d - 1$ nyilvánvaló. $\overline{a}$-t úgy kapjuk meg, hogy G-ben két nem szomszédos csúcshoz megszámoljuk azokat a csúcsokat, amelyek egyikkel sincsenek összekötve, ez $n - (2d - b) - 2$ csúcs; illetve két összekötött csúcs esetében számoljuk meg azokat a csúcsokat, amelyek egyikkel sincsenek összekötve, így kapjuk, hogy $\overline{b} = n - 2d + a$. $\square$

3.1.3. Állítás. $d(d - a - 1) = (n - d - 1)b$.

Bizonyítás. Egy rögzített v-vel szomszédos pontok, és a v-vel nem szomszédos pontok halmazai között fogjuk megszámolni az éleket kétféleképpen. Minden csúcsnak d szomszédja van, tehát $n - d - 1$ csúccsal nem szomszédos. Először is, mind a d szomszéd össze van kötve magával v-vel, v-nek a darab szomszédjával (ezek a közös szomszédok), illetve $d - a - 1$ darab, v-vel nem szomszédos csúccsal, azaz ennyi él lesz egy v-vel szomszédos csúcs és a vele nem szomszédos pontok halmaza között, mind a d csúcsra ez összesen $d(d-a-1)$ él. Másodszor, mind az $n-d-1$ darab, v-vel nem szomszédos csúcs össze van kötve v-nek b db szomszédjával (nem összekötött csúcsok közös szomszédai), ami $(n-d-1)b$ élet jelent. $\square$

3.1.4. Alkalmazás. Legyen $G = (n, d, 0, 2)$. A $d(d-1) = 2(n-d-1)$ egyenlőségből következik, hogy ekkor G csúcsainak száma: $n = \frac{d^2+d+2}{2}$.

3.1.5. Definíció. Egy erősen reguláris G gráfot imprimitívnek nevezünk, ha G, vagy a komplementere nem összefüggő, különben primitívnek.

3.1.6. Példa. Teljes gráfok uniója erősen reguláris: ha mK_t jelöli m db, t méretű teljes gráf együttesét, akkor a paraméterei $(mt, t-1, t-2, 0)$, mivel minden csúcs $t-1$ másikkal van összekötve, két csúcsnak $t-2$ közös szomszédja van, és a teljes részgráfok nincsenek összekötve egymással sehol. A gráf spektruma $(t-1)^{(m)}$, $(-1)^{(m(t-1))}$.

Ennek komplementere $K_{m\times t}$, aminek pontjai m db t méretű halmazra vannak osztva, és a különböző csoportokban lévő pontok vannak összekötve. A paraméterei $(mt, (m-1)t, (m-2)t, (m-1)t)$, a spektruma $(m-1)t$, $0^{(m(t-1))}$, $(-t)^{(m-1)}$.

3.1.7. Tétel. *Az imprimitív erősen reguláris gráfok közé csak teljes gráfok uniója, amit mK_t-vel jelölünk, és ennek komplementere, $K_{m\times t}$ tartozik.*

Bizonyítás. Ha G-nek van több komponense, akkor $b = 0$ és $d = a + 1$, mert a különböző komponensekben lévő pontok nem lehetnek összekötve. Megfordítva, ha $b = 0$ vagy $d = a + 1$, akkor $G = mK_t$.

Ha $\overline{G}$ áll több komponensből, akkor $d = b$. Visszafelé, ha $d = b$, akkor $G = K_{m\times t}$, azaz mK_t komplementere, tehát tényleg nincs másik imprimitív erősen reguláris gráf. $\square$

3.2. Sajátértékek

Legyen a $G = (n, d, a, b)$ paraméterű primitív erősen reguláris gráf adjacenciamátrixa A. A^2 a következőképpen néz ki: a főátlóban d-k vannak, a többi elem a vagy b attól függően, hogy A-ban azon a helyen 1 vagy 0 áll, mert a 2.2.3. Tétel értelmében 2 hosszú sétákat keresünk. Ha $i = j$, akkor $A^2_{ij} = d$. Ha két különböző csúcsot nézünk, akkor a közös szomszédjaik mentén kapjuk a sétákat, ha i és j össze van kötve, akkor ez a, ha nem szomszédosak, akkor b. (Például a (4,2,0,2) paraméterű négyzetre:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} d & a & b & a \\ a & d & a & b \\ b & a & d & a \\ a & b & a & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.)$$

Ez így is felírható: $A^2 = dI + aA + b(J - I - A)$.

(Ez azt jelenti, hogy A^2 az A, I, J mátrixok lineáris kombinációja. Ez akkor és csak akkor van így, ha G erősen reguláris.)

Ebből átrendezéssel azt kapjuk, hogy $A^2 + (b-a)A - (d-b)I = bJ$.

Ezen egyenlet segítségével ki tudjuk számítani A sajátértékeit:

Mivel G d-reguláris, ezért d az A egyik sajátértéke, a csupa 1 sajátvektorral. A 2.2.8. Lemmából következik, hogy A bármelyik másik sajátvektora merőleges $\mathbf{1}$-re. Ha v egy sajátvektor a $\lambda \neq d$-hez, akkor $A^2v + (b-a)Av - (d-b)Iv = bJv$.

A $\lambda^2 + (b-a)\lambda - (d-b) = 0$ egyenletből kapunk még 2, d-től különböző sajátértéket, legyenek ezek λ_1 és λ_2:

$$\lambda_1 = \frac{a-b+\sqrt{(b-a)^2+4(d-b)}}{2}, \ \lambda_2 = \frac{a-b-\sqrt{(b-a)^2+4(d-b)}}{2}.$$

A multiplicitásukat jelölje rendre m_1 és m_2. Ekkor $m_1 + m_2 = n - 1$. Mivel a sajátértékek összege A nyoma, ami 0, és d egyszeres, ebből következik, hogy $\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + d = 0$. A multiplicitásoknak egész számoknak kell lenniük, így ez egy elég erős feltételt szab:

3.2.1. Tétel. (Integralitási feltétel) *Egy G=(n,d,a,b) paraméterű erősen reguláris gráfnál legyenek m_1 és m_2 a λ_1 és λ_2 sajátértékek multiplicitásai. Ekkor*

$$m_1, m_2 = \frac{1}{2}\left(n - 1 \pm \frac{(n-1)(b-a)-2d}{\sqrt{(b-a)^2+4(d-b)}}\right) \in \mathbb{Z}_+.$$

Ennek segítségével egy adott paraméternégyesről el tudjuk dönteni, hogy létezhet-e egyáltalán ilyen paraméterű erősen reguláris gráf. Például $(10, 4, 1, 2)$ esetében a multiplicitások nem lennének egész számok, tehát biztosan nincs ilyen gráf.

Az 5. fejezetben találkozni fogunk még egy nagyon fontos kritériummal, ez a Krein-feltétel, ami szintén erősen reguláris gráfok létezésének szab határt, sajátértékeinek segítségével.

3.2.2. Tétel. (Hoffman-Singleton tétel) *Tegyük fel, hogy (n, d, 0, 1) egy erősen reguláris gráf paraméterei, ahol $d \geq 2$. Ekkor (n, d) csakis a következők lehetnek:*

$$(5, 2), (10, 3), (50, 7), (3250, 57).$$

Bizonyítás. A 3.1.3. Állításból következik, hogy $n = d^2 + 1$.

A gráf sajátértékei d és $\lambda_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{4d-3}}{2}$, a multiplicitásuk pedig

$$m_1, m_2 = \frac{1}{2}\left(d^2 \pm \frac{d^2-2d}{\sqrt{4d-3}}\right)$$

Ha $d^2 - 2d = 0$, akkor $d = 0$ vagy 2. A $d = 0$ feltétel nem ad összefüggő gráfot, tehát ebben az esetben $d = 2$ és $n = 5$.

Ha $d^2 - 2d \neq 0$, akkor $\sqrt{4d-3}$ racionális, vagyis $4d - 3$ teljes négyzet, azaz $4d - 3 = z^2$. Ekkor

$$m_1, m_2 = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{z^2+3}{4}\right)^2 \pm \frac{\left(\frac{z^2+3}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{z^2+3}{4}\right)}{z}\right)$$

Nézzük ebből m_1-et: $m_1 = \frac{z^5+z^4+6z^3-2z^2+9z-15}{32z}$. Mivel m_1-nek egésznek kell lennie, ezért z osztja 15-öt, tehát $z \in \{1, 3, 5, 15\}$. A $z = 1$ eset kizárható $\Rightarrow$ $d \in \{3, 7, 57\}$, és ezzel párhuzamosan $n \in \{10, 50, 3250\}$. $\square$

3.2.3. Megjegyzés. A $n = 5$ eset az ötszöget, $n = 10$ a Petersen-gráfot, $n = 50$ a Hoffman-Singleton-gráfot adja, de az nem ismert, hogy a $(3250, 57, 0, 1)$ paraméterű erősen reguláris gráf létezik-e.

3.3. Egyéb feltételek

Most megemlítek néhány állítást erősen reguláris gráfok sajátértékeiről, egy részét bizonyítás nélkül.

Az abszolút becslés egy erősen reguláris gráf csúcsainak számára ad korlátot:

3.3.1. Tétel. (Seidel) *Egy (n, d, a, b) paraméterekkel rendelkező gráf csúcsszámára teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek (m_1 és m_2 a megfelelő sajátértékek multiplicitásai):*

$$n \leq \frac{m_1(m_1+3)}{2}, \text{ illetve } n \leq \frac{m_2(m_2+3)}{2}.$$

3.3.2. Állítás. *Ha egy összefüggő reguláris gráfnak pontosan 3 különböző sajátértéke van, akkor a gráf erősen reguláris.*

Bizonyítás. ([6] alapján) Tegyük fel, hogy G összefüggő és reguláris, d, λ_1 és λ_2 sajátértékekkel. Ha $A = A(G)$, akkor a mátrix polinomjának:

$$M = \frac{1}{(d-\lambda_1)(d-\lambda_2)}(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)$$

csak 0 vagy 1 a sajátértéke. A bármelyik sajátvektora, ami λ_1-hez, vagy λ_2-höz tartozik, M magjában van (vagyis 0 lesz), tehát M rangja megegyezik d multiplicitásával, ami az összefüggőség miatt 1. Mivel $M\mathbf{1} = \mathbf{1}$, ezért $M = \frac{1}{n}J$. Megkaptuk, hogy J négyzetes polinom A-ban, tehát A^2 lineáris kombinációja I-nek, A-nak és J-nek, vagyis G erősen reguláris. □

3.3.3. Állítás. *Egy (n, d, a, b) paraméterű, $d > \lambda_1 > \lambda_2$ sajátértékekkel rendelkező erősen reguláris gráf esetén teljesül a $(d - \lambda_1)(d - \lambda_2) = nb$ egyenlőség.*

Bizonyítás. Először is $(d - \lambda_1)(d - \lambda_2) = d^2 - d(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2$.

A $\lambda^2 + (b - a)\lambda - (d - b) = 0$ egyenletre a Viète-formulákat alkalmazva kapjuk, hogy $\lambda_1 + \lambda_2 = -(b - a)$ és $\lambda_1\lambda_2 = -d + b$. Ezeket beírva a fenti egyenletbe:

$$\begin{aligned}(d - \lambda_1)(d - \lambda_2) &= d^2 - d(a - b) + b - d = \\ &= d(d - a - 1) + (d + 1)b = (n - d - 1)b + (d + 1)b = nb\end{aligned}$$

□

3.3.4. Állítás. *Ha összeszorozzuk egy primitív erősen reguláris gráf λ_1 és λ_2 sajátértékeit, akkor $d - b$-t kapunk, ami negatív, tehát ezekre a gráfokra fennállnak a $\lambda_1 > 0$ és $\lambda_2 < 0$ relációk.*

3.3.5. Állítás. *Egy primitív erősen reguláris gráfra teljesül a $b \leq (\lambda_2)^3(2\lambda_2 + 3)$ egyenlőtlenség. Amennyiben egyenlőség van, akkor $\lambda_1 = -(\lambda_2)^2(2\lambda_2 + 3)$.*

Ez egyenlőséggel teljesül például a Schläfli-gráf (27, 16, 10, 8) és a McLaughlin-gráf (275, 162, 105, 81) esetében, ahol $\lambda_2 = -2$ és $\lambda_2 = -3$. ([1])

Olyan eset is létezik, hogy egy paraméternégyes a fenti feltételek mindegyikét kielégíti, mégsem tudjuk eldönteni, hogy valóban létezik-e az általa leírt erősen reguláris gráf. A legkisebb csúcsszámú eldöntetlen eset a (65, 32, 15, 16). Az is előfordul, hogy ugyan létezik a gráf, de nem tudni, hogy hány különböző gráfot kapunk azonos paraméterekkel, például (37, 18, 8, 9) esetében.

4. fejezet

Példák

4.1. Közismert példák

Ebben a szakaszban bemutatok pár nevezetes gráfot, és fontos tulajdonságaikat. (A képek forrása a Wikipedia.)

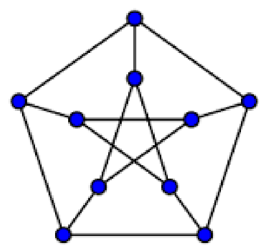
Először is, a négyszög erősen reguláris (4, 2, 0, 2) paraméterrel, a sajátértékei 2, 0 és -2. Az ötszög pedig (5, 2, 0, 1) paraméterű, 2, és $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ sajátértékekkel.

4.1.1. Példa. (A Petersen-gráf) Ez az egyetlen erősen reguláris gráf $(10, 3, 0, 1)$ paraméterekkel. A spektruma 3, 1^5, $(-2)^4$.

A gráfot $K_{5,2}$ Kneser-gráfként is ismerjük: minden csúcs egy 5 elemű halmaz 2 elemű részhalmazának felel meg, és két csúcs akkor van összekötve, ha a nekik megfelelő részhalmazok diszjunktak.

A gráfban van Hamilton-út, de nincs Hamilton-kör. Egy sejtés szerint a Petersen-gráf kivételével minden összefüggő erősen reguláris gráf tartalmaz Hamilton-kört.

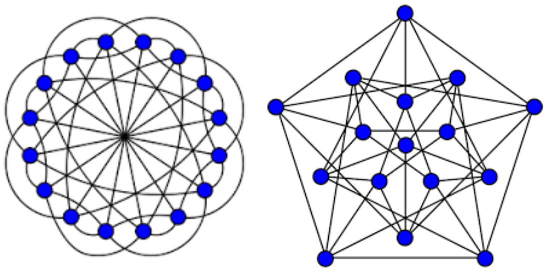
A gráf arra az állításra ellenpélda, hogy egy összefüggő háromszögmentes 3-reguláris gráf élei 3 színnel színezhetők, de sok más kijelentést is meg lehet vele cáfolni.



4.1.2. Példa. (A Clebsch-gráf) Ennek paraméterei $(16, 5, 0, 2)$, spektruma pedig $5, 1^{10}, (-3)^5$.

Érdekesség, hogy bármelyik csúcsot nézve, a vele nem szomszédos csúcsok egy Petersen gráfot alkotnak. Továbbá a 16 pontú teljes gráf, K_{16} élei felbonthatók 3 diszjunkt halmazra, amik 1-1 Clebsch gráfot formálnak. Ha nézzük a $(27, 16, 10, 8)$ paraméterű Schläfli-gráf egy pontját, akkor a vele szomszédos csúcsok részgráfja egy Clebsch-gráfot ad, más szóval a Schläfli-gráf lokális gráfja a Clebsch-gráf.

Vannak, akik ennek komplementerét (aminek paraméterei (16, 10, 6, 6)) nevezik Clebsch-gráfnak.



A 16 pontú gráfoknál maradva, a Shrikhande-gráf paraméterei $(16, 6, 2, 2)$, míg $L_2(4)$-é (később definiálom) $(16, 6, 2, 2)$. A paraméterek ugyan megegyeznek, de a két gráf mégsem izomorf egymással. Érdekes adat, hogy 32548 olyan, egymással nem izomorf gráf létezik, amelyeknek mind (36, 15, 6, 6) a paraméterei.

4.1.3. Példa. (Konferenciagráfok) Ha egy erősen reguláris gráf d-től különböző sajátértékeinek azonos a multiplicitása, akkor a gráfot konferenciagráfnak hívjuk.

A következő állításhoz szükségünk van egy lemmára:

4.1.4. Lemma. *Legyen G erősen reguláris gráf (n, d, a, b) paraméterekkel és d, λ_1, λ_2 sajátértékekkel. Ekkor*

$$m_1 m_2 = \frac{nd\overline{d}}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}$$

Bizonyítás. [[5]] Legyen P az a mátrix, aminek oszlopaiban I, A, és $\overline{A}$ sajátértékei állnak, ahol utóbbiak G és $\overline{G}$ adjacenciamátrixai.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & d & \overline{d} \\ 1 & \lambda_1 & -1-\lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 & -1-\lambda_2 \end{pmatrix}$$

Megmutatjuk, hogy

$$M := P^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix} P = n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & \overline{d} \end{pmatrix}$$

Könnyen kiszámolható, hogy M diagonális mátrix, a diagonálelemei n, $\mathrm{tr}^2(A)$ és $\mathrm{tr}^2(\overline{A})$. A 2. fejezetben láttuk, hogy utóbbi két mennyiség 2 hosszú zárt sétákat jelent a megfelelő gráfokban, vagyis rendre nd-vel, illetve $n\overline{d}$-vel egyenlőek.

Most vegyük mindkét oldal determinánsát a fenti mátrixegyenletben:

$$(\det P)^2 m_1 m_2 = n^3 d\overline{d}$$

Ki lehet számolni, hogy $\det(P) = n(\lambda_2 - \lambda_1)$, ezt beírva és átrendezve megkapjuk a kívánt egyenlőséget. $\square$

4.1.5. Állítás. *Egy konferenciagráfnak, valamint komplementerének is* $(n, \frac{n-1}{2}, \frac{n-5}{4}, \frac{n-1}{4})$ *a paraméterei.*

Bizonyítás. Először megbizonyosodunk róla, hogy $(\lambda_1 - \lambda_2)^2$ egész: a 10. oldalon levő képletekből látjuk, hogy ez $(b-a)^2 + 4(d-b)$-vel egyenlő, ami valóban egész.

$m_1 = m_2$ esetén mindkettő $\frac{n-1}{2}$-vel egyenlő, és így m_1 és n relatív prímek, tehát az előző lemma alapján m_1^2 osztja $d\overline{d}$-t. Mivel $d+\overline{d} = n-1$, ezért $d\overline{d} \leq (n-1)^2/4 = m^2$, egyenlőség csak akkor van, ha $d = \overline{d}$, vagyis d és $\overline{d}$ egyenlőek, és $n = 2d+1$. Ebből következik, hogy $b - a = 1$. $d(d-a-1) = \overline{d}b = db$ miatt $b + a = d - 1$ és $b = \frac{d}{2}$. Kaptuk: $d = \frac{n-1}{2}, a = b+1 = \frac{n-5}{4}, b = \frac{n-1}{4}$.

A komplementer gráf paraméterei az erre vonatkozó képletből ellenőrizhetők. $\square$

4.1.6. Állítás. *Legyen* $G = (n, d, a, b)$ *erősen reguláris gráf. Ha valamilyen* k*-ra* $(n, d, a, b) \neq (4k+1, 2k, k-1, k)$*, akkor* G *minden sajátértéke egész. Vagyis* G *vagy konferenciagráf, vagy egész a spektruma.*

Bizonyítás. Ha 3.2.1-ben a gyök alatti kifejezés nem racionális, akkor a multiplicitások csak akkor lesznek egész számok, ha $(n-1)(b-a) - 2d = 0$, tehát azt kell megnézni, hogy $(b-a)(n-1) = 2d$ mikor teljesül. $0 \leq d \leq n-1$ miatt d csak 0, $\frac{1}{2}(n-1)$, vagy $n-1$ lehet, azonban 0 és $n-1$ esetén G az üres, illetve a teljes gráf, amiknek a sajátértékei egészek. Ha $d = \frac{1}{2}(n-1)$, akkor a fenti egyenlőségben $b - a = 1$. 3.1.3. miatt, mivel itt $n - d - 1 = d$, ezért $b = d - a - 1$. Ebből $2b = (a+1) + (d-a-1) = d$, vagyis $b = \frac{1}{4}(n-1)$ és $a = \frac{1}{4}(n-5)$, azaz G konferenciagráf.

Ha pedig 3.2.1-ben a gyök alatti kifejezés racionális, vagyis egész, akkor a λ_1 és λ_2 sajátértékek is egészek lesznek. $\square$

4.1.7. Állítás. *Tegyük fel, hogy* G *egy nem üres, nem teljes erősen reguláris gráf* (p, d, a, b) *paraméterekkel, ahol* p *prímszám. Ekkor* G *konferenciagráf.*

Bizonyítás. Egy egész sajátértékű reguláris gráf komplementerének is egészek a sajátértékei, ezért elég megmutatni, hogy ha $d \leq \frac{p-1}{2}$, akkor G üres gráf.

A $(d-\lambda_1)(d-\lambda_2)=pb$ $(*)$ egyenlőségből kiindulva (3.2.6. Állítás), mivel a számok egészek (előző állítás), ezért $p \mid (d-\lambda_1)(d-\lambda_2)$. Az is igaz továbbá, hogy $|d-\lambda_1|, |d-\lambda_2| \leq 2d \leq p-1$, ezért $(d-\lambda_1)$, vagy $(d-\lambda_2)=0$. Ekkor $(*)$ miatt $b=0$, vagyis G azonos méretű teljes gráfok uniója, vagy p darab független pont. mK_p-ben a fokszám $p-1$, ami viszont nagyobb, mint $\frac{p-1}{2}$, tehát G az üres gráf. □

4.1.8. Állítás. ([6]) *Minden konferenciagráfra igaz, hogy a csúcsainak száma két négyzetszám összege.*

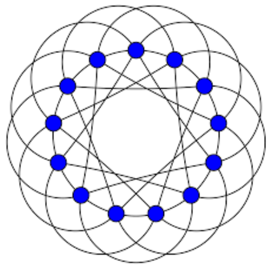
A $(21, 10, 4, 5)$ paraméterű gráf sajátértékeinek $(\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2})$ multiplicitása egyaránt 10, ezekszerint a gráfnak konferenciagráfnak kellene lennie, de mivel a 21 nem bontható fel két négyzetszám összegére, ezért nem létezik ilyen paraméterű erősen reguláris gráf.

4.1.9. Példa. (Paley-gráfok) Legyen q $4t+1$ alakú prímhatvány. A $P(q)$ Paley-gráf az a gráf, aminek csúcshalmaza az $\mathbb{F}_q$ véges test, és két csúcs akkor van összekötve, ha a különbségük nem-nulla négyzetelem. Ezek a gráfok izomorfak a komplementerükkel.

4.1.10. Állítás. *Ha q a fenti alakú, akkor $P(q)$ erősen reguláris $(4t+1, 2t, t-1, t)$ paraméterekkel. A sajátértékei k, és $\frac{-1\pm\sqrt{q}}{2}$, utóbbiak azonos, $2t$ multiplicitással, tehát a Paley-gráfok a konferenciagráfok közé tartoznak.*

Bizonyítás. [[5]] A kongruencia (q választása) miatt ha $x-y$ négyzetelem $\mathbb{F}_q$-ban, akkor $y-x$ is, tehát a gráf irányítatlan lesz. Ha $u \in \mathbb{F}_q$, akkor az $x \mapsto x+u$ hozzárendelés G egy automorfizmusa. Ebből következik, hogy G reguláris. Ha e egy négyzetelem $\mathbb{F}_q$-ban, akkor az $x \mapsto xe$ is egy automorfizmusa lesz G-nek, ami a 0-t fixen hagyja, és az 1 helyett e lesz az egyik szomszédja. Tehát 0 és e közös szomszédainak száma független e választásától. Ezért egy 0-ból kiinduló élet tartalmazó háromszögek száma független az él választásától.(Minden élre ugyanannyi ilyen háromszög van.) Mivel $\mathrm{Aut}(G)$-ben G minden csúcsa ekvivalens egymással, ezért bármely két szomszédos pontnak ugyanannyi közös szomszédja van. Most tegyük fel, hogy c nem négyzetelem $\mathbb{F}_q$-ban. Tudjuk, hogy $\mathbb{F}_q$-ban egy négyzetelem és egy nem-négyzetelem szorzata nem-négyzetelem, illetve két nem négyzetelem (és két négyzetelem) szorzata négyzetelem; ebből következően az $x \mapsto xc$ hozzárendelés a 0-t fixen hagyja, szomszédos pontpárokat nemszomszédos pontpárokba, nemszomszédos pontpárokat szomszédos pontpárokba visz. Ez egy izomorfizmus G és a komplementere között. Ezért minden $\overline{G}$-beli szomszédos pontpárnak ugyanannyi közös szomszédja van, amiből azt kapjuk, hogy G-ben minden nem-szomszédos pontpárnak ugyanannyi közös szomszédja van, tehát G erősen reguláris. Mivel G komplementere izomorf önmagával, ezért $d = \overline{b} = (q-1)/2$. Mivel $a = \overline{a}$, ezért $a - b = n - 2d - 2 = -1$. $d(d-a-1) = \overline{d}b$, ebből $a + b = d - 1$. Ezekből $b = d/2$ és $a = b - 1$. $\square$

A képen a $P(13)$ Paley-gráf látható.



4.2. További példák

Most néhány különlegesebb, kevésbé ismert gráf leírása következik.

A példák előtt áttekintjük a blokkrendszerek fogalmát [9] és a véges matematikából tanultak segítségével.

Adott egy X véges halmaz, aminek elemeit pontoknak hívjuk, $|X| = v$ és $k, r, \lambda \geq 1$ egész számok. Egy 2-(v, k, λ) blokkrendszer (B-vel jelöljük, angolul design) X k elemű részhalmazainak (blokkok, $|B| = b$) családja úgy, hogy X minden pontja r blokkban szerepel, és minden különböző pontpár λ blokkban szerepel együtt. Ha minden blokk különböző, akkor a blokkrendszer egyszerű. Ennek paraméterei (v, b, r, k, λ). Feltesszük, hogy $v > k$, ezzel elkerüljük azt, hogy egy blokk minden elemet tartalmaz. Ezek a paraméterek nem függetlenek egymástól, v, k, és λ segítségével kiszámíthatjuk r-et és b-t.

4.2.1. Állítás.

$$\lambda(v-1) = r(k-1)$$

és

$$bk = vr$$

érvényes minden 2-blokkrendszerre, így a rendszert elég a (v, k, λ) paraméterekkel jelölni.

Bizonyítás. Kettős leszámlálással, egy rögzített P pont mellett a $\{(P', B) | P' \neq P,\ P, P' \in B\}$ halmaz számosságát fogjuk kétféleképpen megszámolni. Egyrészt P' választására $v - 1$ lehetőségünk van, és a két pont közös blokkjainak száma λ. Másrészt P r blokkban szerepel, mindegyikben $k-1$-féleképpen választhatjuk ki mellé P'-t. Kaptuk: $(v-1)\lambda = r(k-1)$.

A másik egyenletet is hasonlóan bizonyítjuk, itt a $\{(P,B)|P \in B\}$ halmazt nézzük. Mivel v pont van az alaphalmazban, ezért ennyi lehetőség van P választására, és P mindenféleképpen r blokkban lesz benne, tehát a halmaz mérete vr. A másik irányból nézve, b darab blokk van, mindegyikben k pont, vagyis bk elemű a halmaz. $\square$

Fontos egyenlőtlenséget fogalmazott meg a híres statisztikus, Ronald Fisher: $b \geq v$ teljesül minden 2-blokkrendszerre. Ez a Fisher-egyenlőtlenség. Amennyiben egyenlőség van, azaz a pontok és a blokkok száma azonos, úgy szimmetrikus blokkrendszerről beszélünk. Ekkor $b = v$ mellett $r = k$, és minden két különböző blokknak λ közös pontja van. Ryser tétele kimondja, hogy a megfordítás is igaz: ha X egy v elemű halmaz, B pedig k elemű részhalmazok v elemű halmaza úgy, hogy bármely két különböző blokknak λ közös pontja van, akkor (X, B) egy szimmetrikus blokkrendszer. A paramétereire teljesül, hogy $\lambda(v-1) = k(k-1)$.

Blokkrendszert alkotnak például a véges projektív síkok: ha q prímszám, akkor az alaphalmaz mérete $v = q^2+q+1$, ennek $b = q^2+q+1$ részhalmaza van, minden részhalmazban $k = q+1$ elem van, $r = q+1$ db részhalmaz tartalmaz minden pontot, $\lambda = 1$ részhalmaz tartalmaz minden párt, és 2 részhalmaznak 1 közös pontja van. Például a Fano-sík ilyen, $q = 2$-vel.

Ha egy városnak pl. $v = 43$ lakosa van, $b = 43$ klub üzemel, mindenki 7 klub tagja, és bármely két embernek 1 közös klubja van, akkor ez is egy szimmetrikus blokkrendszert ad, és ekkor a fenti két egyenlet közül az első annak a leszámlálása kétféleképpen, hogy ha mindenki meghívja a klubtársait vacsorázni, akkor hány eseményt rendeznek, a második pedig a városlakóknál lévő összes tagsági igazolvány megszámlálása. (Ez egy fiktív példa, a valóságban ezekkel a számokkal nem létezik blokkrendszer, ugyanis ez $q = 6$ véges projektív sík lenne.)

Egy 2-blokkrendszer feloldható, ha blokkjait párhuzamos osztályokra lehet bontani úgy, hogy mindegyik osztály a rendszer pontjainak egy partícióját adja.

Feladat: adott 15 lány, akik úgy szeretnének egy héten át hármasával sétálni menni, hogy a hét során semelyik kettő se kerüljön egymás mellé egynél többször. Ennek egy megoldása a 2-(15, 3, 1) rendszer particionálása. Például sportmérkőzések megszervezését is blokkrendszerek segítségével lehet megoldani.

Általánosítás: Egy adott t pozitív egész számra egy t-blokkrendszer olyan blokkrendszer, amiben X minden t elemű részhalmazára követeljük meg, hogy λ blokkban szerepeljenek együtt. Ennek jelölése t-(v, k, λ).

Egy t-blokkrendszert Steiner-rendszernek nevezünk, ha $\lambda = 1$ és $t \geq 2$. Egy

t, v, k paraméterű Steiner-rendszer (jelölése t-$(v, k, 1)$) egy v elemű S halmaz, és ennek k elemű részhalmazai (ezek a blokkok) úgy, hogy S minden t elemű részhalmaza pontosan egy blokkban van benne. (Egyes forrásokban a Steiner-rendszereket $S(t, k, v)$-vel jelölik.)

Minden S Steiner-rendszerből tudunk egy G blokkgráfot gyártani. G csúcsai S blokkjai, és két csúcs szomszédos, ha a megfelelő blokkoknak van közös pontja.

4.2.2. Állítás. *Az így kapott gráf erősen reguláris, paraméterei:*
$n = \frac{\binom{v}{2}}{\binom{k}{2}}$, $d = k(\frac{v-1}{k-1} - 1)$, $a = \frac{v-1}{k-1} - 2 + (k-1)^2$, $b = k^2$.

Bizonyítás. A $\{(P, P', B)|P, P' \in B, P \neq P'\}$ halmaz számosságát fogjuk kétféleképpen megszámolni. Egyrészt P-t v-féleképpen választhatjuk, ennyi pont van az alaphalmazban, ezután $v-1$ lehetőségünk marad P' választására. A két pont együtt λ blokkban van. Másrészt b blokkunk van, mindegyikben k pont, így két pontot $k(k-1)$-féleképpen tudunk kiválasztani, tehát összességében azt kapjuk, hogy $v(v-1)\lambda = bk(k-1)$. A Steiner-rendszerekben $\lambda = 1$, ezért $b = \frac{v(v-1)}{k(k-1)} = \frac{\binom{v}{2}}{\binom{k}{2}}$ a blokkok, vagyis a gráf csúcsainak száma.

Egy B blokkbeli két pontnak (legyenek ezek P és P') nem lehet másik közös blokkja, a $\lambda = 1$ kritérium miatt. Ezért a többi P-t tartalmazó blokk csak P-ben találkozhat B-vel. k pont van a blokkokban, mindegyiknek $r-1$ másik párja van, így a gráf fokszáma $d = k(r-1)$, ami továbbírható: $d = k(\frac{bk}{v} - 1) = k(\frac{\frac{v(v-1)}{k(k-1)}k}{v} - 1) = k(\frac{v-1}{k-1} - 1)$.

Ha két olyan blokkot nézünk, B_1-et és B_2-t, amiknek P_0 a közös pontja, akkor erre a pontra még $r-2$ blokk illeszkedik, illetve úgy is kaphatunk a két blokkal közös blokkot, hogy a P_0-tól különböző $P_1 \in B_1$ és a $P_2 \in B_2$ csúcsokat tesszük egy blokkba, ezt $(k-1)(k-1)$ módon tehetjük meg, vagyis a gráf harmadik paramétere ($r = \frac{v-1}{k-1}$ felhasználásával, lásd előző bekezdés) $a = \frac{v-1}{k-1} - 2 + (k-1)^2$.

Végezetül két diszjunkt blokk közös szomszédai azok a blokkok, amik mindkettőből egy-egy pontot tartalmaznak, ebből $b = k^2$ van. $\square$

A szimmetrikus 2-blokkrendszerek (BIBD) olyan erősen reguláris gráfoknak felelnek meg, amiknek paraméterei (n, d, a, a).

Most térjünk vissza pár konkrét erősen reguláris gráf bemutatására.

A teljes páros gráfokat leszámítva 7 db háromszögmentes gráf ismert (zárójelben a paraméterek): az ötszög (5, 2, 0, 1), a Petersen-gráf (10, 3, 0, 1), a Clebsch-gráf (16, 5, 0, 2), a Hoffman-Singleton-gráf (50, 7, 0, 1), a Gewirtz-gráf (56, 10, 0, 2), az úgynevezett M_{22}-gráf (77, 16, 0, 4), és a Higman-Sims-gráf (100, 22, 0, 6). Látható, hogy mindegyiknek a harmadik paramétere 0, ez ekvivalens a háromszögmentességgel, ugyanis két szomszédos csúcsnak egyetlen közös szomszédja sem lehet, mivel ekkor háromszöget kapnánk.

4.2.3. Példa. Ezek közül a Hoffman-Singleton gráf egyik lehetséges megkonstruálása az alábbi.

Vegyünk 5 darab ötszöget, jelölje ezeket P_i, $i = 0 \dots 4$, és 5 darab ötágú csillagot, S_j-vel jelölve, $j = 0 \dots 4$, és számozzuk meg a csúcsokat. Ezután P_i h-adik csúcsát kössük össze S_j $ij + h$-adik csúcsával, modulo 5.

(Egy másik lehetséges előállítás Fano-síkok segítségével történhet.)

4.2.4. Példa. A Higman-Sims gráf (100, 22, 0, 6) paraméterekkel rendelkezik, sajátértékei $22, 2$ és -8. Elkészítése a következő: veszünk egy csúcsot, ennek 22 szomszédja a 3-(22, 6, 1) (vagy $S(3, 6, 22)$) Steiner-rendszer 22 alappontja lesz, a többi 77 csúcs pedig a rendszer blokkjait jelöli. Egy pont és egy blokk szomszédos, ha a blokk tartalmazza a pontot. Két blokk akkor van összekötve, ha diszjunktak.

Érdekesség, hogy több módon is felbontható 2 Hoffman-Singleton gráfra.

A gráf egyik részgráfja az M_{22} gráf, ez 3-$(22, 6, 1)$ blokkjain (mint csúcsok) van értelmezve, két csúcs szomszédos, ha a blokkok diszjunktak. Ez a gráf is erősen reguláris (77, 16, 0, 4) paraméterekkel.

4.2.5. Példa. A Cameron-gráf is a 3-$(22, 6, 1)$ Steiner-rendszeren alapszik. A csúcsok az alappontokból alkotott rendezetlen párok, ebből $\binom{22}{2} = 231$ van. Két pár szomszédos, ha diszjunktak, és a négy pont unióját tartalmazza egy blokk. Ez a gráf szintén erősen reguláris, a paraméterei $(231, 30, 9, 3)$.

Az egyik legtöbb csúccsal rendelkező nevesített erősen reguláris gráf a Suzuki-gráf, $(1782, 416, 100, 96)$ paraméterekkel és $416, 20^{780}, (-16)^{1001}$ spektrummal.

4.2.6. Példa. Egy G gráf élgráfja az az $L(G)$ gráf, amelynek csúcsai G élei, és két csúcs akkor szomszédos, ha a nekik megfelelő éleknek van közös pontja G-ben.

K_n és $K_{n,n}$ élgráfjai két különböző erősen reguláris gráfcsaládot generálnak, előbbiek a trianguláris gráfokat, míg utóbbiak a négyzetháló-gráfokat adják.

A *trianguláris* gráf, $T(m)$ csúcsai egy m elemű halmaz párjainak felelnek meg, és két csúcs szomszédos, ha van közös elemük.

4.2.7. Állítás. *A trianguláris gráfok szintén erősen regulárisak,* $(\binom{m}{2}, 2(m-2), m-2, 4)$ *paraméterekkel, ha* $m \geq 4$. *(Az* $m = 5$ *esetben a Petersen-gráf komplementerét kapjuk.)*

Bizonyítás. Egy m elemű halmazból $\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$-féleképpen választhatunk ki 2 elemet, ez a csúcsok száma. Ha nézzük az $\{f, g\}$ részhalmazt, akkor ennek szomszédai azok lesznek, amelyekben szerepel f vagy g. Ilyenekből $2 \cdot (m-2)$ van. A szomszédos halmazok: $\{z, x\}$, $\{z, y\}$ közös szomszédai olyanok, amikben z egy x-től, y-tól, és z-től különböző elemmel van párban, ez $m-3$ halmaz, vagy az x és y által alkotott halmaz, tehát $a = m-2$. Két nem összekötött halmaz $\{p, r\}$, $\{s, t\}$ alakú, ahol p, r, s, t mindegyike különböző. Ezek közös szomszédai $\{p, s\}$, $\{p, t\}$, $\{r, s\}$, $\{r, t\}$, vagyis $b = 4$. $\square$

Ezeket a gráfokat egyértelműen meghatározzák a paramétereik, kivéve egy esetben, ha K_8 élgráfját nézzük, ugyanis a $(28, 12, 6, 4)$ paraméterek és a $(12, 4^7, (-2)^{20})$ spektrum megadnak még három különböző erősen reguláris gráfot, amiket Chang-gráfoknak hívunk. Ezek könnyen megkaphatók $L(K_8)$-ból: vegyük $L(K_8)$ bizonyos részhalmazait (S): (a): 4 független csúcsot, (b): egy 3 és egy 5 hosszú kört, vagy (c): egy 8 hosszú kört. Az eljárás a következő: minden élt, ami egy S-beli és egy nem S-beli pont között fut, töröljünk, és vegyünk hozzá a gráfhoz minden olyan élt egy S-beli és egy nem S-beli pontpárhoz, ami eddig nem szerepelt. Ezek a gráfok szintén erősen regulárisak a fenti paraméterekkel és spektrummal.

4.2.8. Definíció. Két halmaz direkt szorzata, $A \times B = \{a \in A, b \in B\}$ jelöli az (a,b) rendezett párok halmazát.

Két gráf, G és H direkt szorzatán azt a $G \square H$ gráfot értjük, aminek csúcshalmaza $V(G)$ és $V(H)$ direkt szorzata, és két pont, (a, a') és (b, b') akkor van összekötve, ha

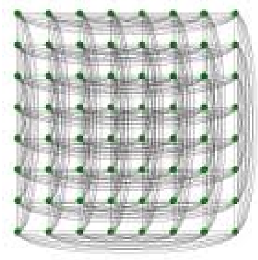
1. $a = b$ és a' szomszédos b'-vel H-ban, vagy
2. $a' = b'$ és a szomszédos b-vel G-ben.

Ha két m csúcsú teljes gráfot veszünk, akkor a direkt szorzatuk $(m^2, 2(m-1), m-2, 2)$ paraméterű erősen reguláris gráfot ad. (Például a 3×3-as rács, két háromszög direkt szorzata $(9, 4, 1, 2)$ paraméterű. Ez ugyanaz, mint a $P(9)$ Paley-gráf.)

Ezeket $L_2(m)$ *négyzetháló-gráfok*nak (Lattice graphs) szokás hívni: a pontok a sík egész pontjainak felelnek meg ($(1, 1)$-től (m, m)-ig), és két pont akkor van összekötve, ha van közös koordinátájuk. (Nem négyzetes eset is létezik persze, de azok a gráfok már nem erősen regulárisak.)

Ebből könnyű meggondolni a paraméterek bizonyítását: a csúcsszám nyilvánvaló, ezenfelül minden csúcs az oszlopában és a sorában is $m-1$ másikkal van összekötve, így $d = 2 \cdot (m-1)$. Két csúcs közös szomszédainak száma annyi, amennyivel egy sorban, vagy egy oszlopban vannak, ez $m-2$. Ha két csúcs nincs összekötve, akkor nincsenek egy sorban, és egy oszlopban sem. A közös szomszédaik azok a pontok, amikben az egyik sora metszi a másik oszlopát, vagy fordítva, ezekből a pontokból 2 van, így $b = 2$.

Az ilyen gráfokat bástya-gráfoknak (Rook's graph) is nevezik, mert az $n \times n$-es sakktáblán a bástya lehetséges lépéseit mutatják. A képen a 8×8-as eset van.



4.2.9. Példa. (Latin-négyzetek) Egy latin négyzet egy $n \times n$-es táblázat, amiben n különböző elem (szimbólum) van úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan egyszer szerepel mindegyik. Például a véges csoportok Cayley-táblázata, illetve a népszerű Sudoku puzzle minden megoldása is ilyen.

Azt mondjuk, hogy két latin négyzet, $L = (l_{ij})$ és $M = (m_{ij})$ ortogonális, ha mind az n^2 db (l_{ij}, m_{ij}), $1 \leq i, j \leq n$ rendezett pár különböző.

Egy (k, n) paraméterű ortogonális elrendezés (orthogonal array, OA) egy $k \times n^2$-es táblázat, elemei egy n elemű halmaz elemei, úgy, hogy bármelyik két sor által definiált n^2 rendezett pár különböző. Ezt $OA(k, n)$-nel jelöljük.

Egy latin négyzet megfelel egy $OA(3, n)$-nek, ha az elemeit táblázatba rendezzük úgy, hogy pl. az első sorban vannak a sorindexek, a másodikban az oszlopindexek, és a harmadikban a nekik megfelelő elemek.

Megfordítva, bármelyik $OA(3, n)$ egy latin négyzetet generál, ha a 3 sorából kettőt kinevezünk a négyzet sor- illetve oszlopszámainak. (A harmadik sor fogja tartalmazni a szimbólumokat.)

Általában $OA(k, n)$ $k-2$ latin négyzetet generál, amik páronként ortogonálisak: az első két sor legyen a sor- és az oszlopindex, a többi $k-2$ pedig az egyes négyzetek elemei azon a helyen. A négyzetek ortogonálisak lesznek, OA definíciója miatt (minden rendezett pár különböző).

Alább egy latin négyzet és ortogonális elrendezése látható.

1	2	3
2	3	1
3	1	2

1	1	1	2	2	2	3	3	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	2	3	1	3	1	2

$OA(k,n)$ segítségével csinálhatunk egy G gráfot úgy, hogy a csúcsok az ortogonális elrendezés oszlopai (k hosszú oszlopvektorként nézve), és két csúcs szomszédos, ha valamelyik koordinátájukban megegyeznek.

4.2.10. Állítás. *A gráf erősen reguláris* $(n^2, k(n-1), n-2+(k-1)(k-2), k(k-1))$ *paraméterekkel.*

Bizonyítás. n^2 nyilvánvaló, a fokszámot úgy kapjuk meg, hogy egy adott oszlop esetén mindegyik sorban megnézzük, hány azonos elem van a kiválasztott oszlopbelivel, ebből $k(n-1)$ van.

Két olyan oszlopot nézve, amiknek van közös koordinátájuk, egyrészt kapunk még $n-2$ szomszédot, a közös koordináta mentén. Ehhez még hozzá kell adni azt, hogy ha kiválasztjuk az egyik oszlop egy sorát (nem azt, amelyiket az előbb néztük), a másik oszlop ezektől különböző sorát, akkor is közös szomszédot találunk, ami a most kiválasztott elemeket tartalmazza azon a helyen. A választásra $(k-1)(k-2)$ lehetőségünk van.

Végezetül két olyan oszlop közös szomszédainak meghatározásához, amiknek minden koordinátája különböző, kiválasztunk mindkét oszlopból egy-egy (különböző) sort, és megkeressük, hogy melyik oszlop tartalmazza az adott sorokban a választott elemeket. Ezt $k(k-1)$-féleképpen tehetjük meg. □

Például egy $OA(2,n)$ által definiált gráf $L(K_{n,n})$-nel izomorf.

Permutáció erejéig két 4-rendű (4×4-es) latin négyzet létezik, az egyik a 4-edrendű ciklikus csoport Cayley-táblázatából, a másik a nem-ciklikuséból származik. Az utóbbiból képzett két ortogonális négyzet együtt megfelel $OA(4,4)$-nek. Ezeknek a 4-rendű latin négyzeteknek megfelelő gráfok komplementerei $(16,6,2,2)$ paraméterű erősen reguláris gráfokat adnak.

A Hall-Janko gráf erősen reguláris, $(100,36,14,12)$ paraméterekkel, a spektruma $(36, 6^{36}, (-4)^{63})$. A gráfot ezek a paraméterek még nem határozzák meg, bármely két 10-rendű ortogonális latin négyzetből képzett gráfnak (azaz $OA(4,10)$) ugyanezek a paraméterei, de mégsem izomorfak. Ezt a gráfot többféleképpen is meg lehet szerkeszteni, például a csúcsok particionálásával, egyrészt 1+36+63, másrészt 10+90 csúcsból kiindulva. A gráf konkrét előállítása bonyolult, sok nehéz konstrukció ismeretét igényli, így ezt itt nem írom le, de megtalálható itt:[2].

4.2.11. Példa. (Általánosított négyszögek)

4.2.12. Definíció. Egy általánosított négyszög egy incidencia-struktúra pontok és egyenesek között úgy, hogy

- bármely két pont legfeljebb egy egyenesen van (tehát bármely két egyenes legfeljebb egy pontban találkozik),
- ha a P pont nem illeszkedik az l egyenesre, akkor pontosan egy pont létezik l-en, ami P-vel egy egyenesen található.

Ha minden egyenes $s+1$ pontot tartalmaz, és minden pont $t+1$ egyenesen fekszik, akkor az általánosított négyszög rendje (s,t).

Egy általánosított négyszög pontgráfja az a gráf, aminek csúcsai a négyszög pontjai, és két pont szomszédos, ha egy egyenesen vannak.

4.2.13. Állítás. *Ha G egy (s,t) rendű általánosított négyszög pontgráfja, akkor erősen reguláris $((s+1)(st+1), s(t+1), s-1, t+1)$ paraméterekkel.*

Bizonyítás. Kezdjük a gráf csúcsszámával: legyen l a négyszög egy egyenese. Minden pont, ami nincs rajta l-en, pontosan egy l-beli ponttal van egy egyenesen, tehát st olyan pont van, ami egy l-beli adott ponttal van egy l-től különböző egyenesen. Ez $st(s+1)$ pontot ad összesen, ami nincs rajta l-en, ehhez még hozzá kell adni az l-beli $s+1$ pontot, tehát a gráf csúcsainak száma $(s+1)(st+1)$.

A négyszög minden P pontja $t+1$ darab, $s+1$ pontot tartalmazó egyenesen van rajta, ezek közül bármelyik kettőnek csak P van a metszetében, tehát a gráfban a pontok fokszáma $s(t+1)$.

Az a gráf, ami a P-vel egy egyenesen lévő csúcsokat tartalmazza, $t+1$ diszjunkt s méretű klikket alkot, tehát G harmadik paramétere $s-1$.

Ha Q egy olyan pont, ami nincs P-vel egy egyenesen, akkor Q minden P-t tartalmazó egyenesen pontosan egy ponttal kollineáris, tehát a negyedik paraméter $t+1$. □

4.2.14. Állítás. *G sajátértékei $s(t+1)$, $s-1$ és $-t-1$, rendre 1, $\frac{st(s+1)(t+1)}{s+t}$ és $\frac{s^2(st+1)}{s+t}$ multiplicitással.*

Természetesen még rengeteg konstrukció létezik erősen reguláris gráfokra, vannak közöttük egészen bonyolultak is, az egyszerűbbekből azonban igyekeztem minél többféle gráfot bemutatni.

5. fejezet

Asszociációs sémák

5.1. Felépítés

5.1.1. Definíció. Egy d-osztályú asszociációs séma egy $n \times n$-es, 0-1 elemű mátrixokból álló $\{A_0, \ldots, A_d\}$ halmaz, úgy, hogy

1. $A_0 = I$
2. $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$
3. $A_i^T = A_i$
4. $\forall i, j$-re az $A_i A_j$ szorzat az $A_0, \ldots, A_d$ egy lineáris kombinációja.

5.1.2. Megjegyzés. A lineáris kombináció mindig szimmetrikus lesz, tehát 2.2.11 miatt $A_i A_j = A_j A_i,\ \forall i, j$-re.

A sémák elmélete nagyon fontos szerepet játszik az algebrai kombinatorikában és a kódelméletben, sok kérdést lehet a segítségükkel megválaszolni.

Ha $\mathcal{A}$ egy asszociációs séma, akkor $\mathrm{span}(\mathcal{A})$ jelöli az $\mathcal{A}$-beli mátrixok által feszített valós vektorteret: $\mathrm{span}(\mathcal{A}) = \{\alpha_0 A_0 + \alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_d A_d \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\}$. Ez zárt a mátrixszorzásra, és az úgynevezett Schur- vagy Hadamard-szorzásra is:

5.1.3. Definíció. Két $m \times n$-es mátrix elemenkénti (vagy Hadamard-) szorzatán azt az $m \times n$-es mátrixot értjük, aminek elemei a két mátrix megfelelő elemeinek szorzatai:

$$(A \circ B)_{ij} = A_{ij} \cdot B_{ij}$$

5.1.4. Tulajdonságok.

1. Linearitás: $A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C$
2. Ha A és B pozitív szemidefinit, akkor $A \circ B$ is az.
3. A fenti A_i mátrixok erre a szorzásra nézve idempotensek, azaz $A_i^2 = A_i \circ A_i = A_i$.
4. $A_i \circ A_j = 0$ $(i \neq j)$, azaz a séma elemei páronként ortogonálisak.

Bizonyítás. Csak a 2. állítás szorul magyarázatra, a többi triviális.

Legyen $A = Z^T Z$, $a_{ij} = z_i z_j$, $B = U^T U$, $b_{ij} = u_i u_j$. Ekkor $A \circ B = a_{ij} b_{ij}$. Szeretnénk csinálni egy S mátrixot úgy, hogy $A \circ B = S^T S$ legyen, ekkor $A \circ B$ pozitív szemidefinit, mert $v^T A \circ B\ v = v^T S^T S v = \|Sv\|^2 \geq 0$.

S legyen az a mátrix, aminek i. oszlopa z_i és u_i tenzorszorzata, $s_i = z_i \otimes u_i$.

Ekkor a 2.2.11. Lemma miatt $a_{ij} b_{ij} = (z_i \otimes u_i)(z_j \otimes u_j)$, mert ekkor a jobboldal $= (z_i z_j)(u_i u_j) = a_{ij} b_{ij}$, tehát $A \circ B$ tényleg előáll $S^T S$ alakban. □

A fenti A_i mátrixok span($\mathcal{A}$) bázisát alkotják. Megmutatjuk, hogy a vektortérnek van egy másik páronként ortogonális bázisa, a rendes mátrixszorzásra nézve.

5.1.5. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ egy d-osztályú asszociációs séma $n \times n$-es, 0-1 elemű $A_0, \ldots, A_d$ mátrixokból. Ekkor létezik egy páronként ortogonális, idempotens $E_0, \ldots, E_d$ mátrixokból álló halmaz, és $p_i(j)$ valós számok úgy, hogy*

1. $\sum_{i=0}^{d} E_i = I$
2. $A_i E_j = p_i(j) E_j$
3. $E_0 = \frac{1}{n} J$
4. *$E_0, \ldots, E_d$ span($\mathcal{A}$) bázisa.*

Bizonyítás. Az állítások általános sémákra is igazak, de az erősen reguláris gráfokból származókra könnyen látszanak. □

5.1.6. Tétel. *Az E_i mátrixok minden sajátértéke 0 vagy 1, mert $E_i^2 - E_i = 0$.*

Összefoglalva, megkaptuk az alábbi tételt:

5.1.7. Tétel. *A span($\mathcal{A}$) vektortér zárt a mátrixszorzásra, és a pontonkénti szorzásra is.*

Bizonyítás. Láttuk, hogy az E_i mátrixokból álló bázis zárt a rendes szorzásra, az A_i mátrixokból álló pedig a pontonkéntira. □

Most megmutatjuk, hogy hogyan lehet az erősen reguláris gráfokat megfeleltetni egy asszociációs sémának.

5.1.8. Definíció. Egy G gráf u és v csúcsainak G-beli távolságát $dist(u,v)$ jelöli. Az u-tól r távolságra lévő csúcsok halmazát $S_r(u)$-val jelöljük.

Egy gráf átmérője a pontpárjai közötti maximális távolság.

5.1.9. Definíció. Egy összefüggő G gráf távolságreguláris, ha G bármely két u és v csúcsára, és bármely i és j egész számra $|S_i(u) \cap S_j(v)|$ csak $dist(u,v)$-től függ.

5.1.10. Állítás. *Minden összefüggő erősen reguláris gráf 2 átmérőjű távolságreguláris gráf.*

Bizonyítás. Ha két csúcs szomszédos, akkor a távolságuk 1. Ha nem szomszédosak, akkor van b közös szomszédjuk, vagyis a távolságuk 2, több lehetőség nincs. □

5.1.11. Állítás. *Minden távolságreguláris gráf megfelel egy 2 osztályú asszociációs sémának.*

Bizonyítás. Ha A_1 magának a gráfnak, A_2 pedig a komplementerének az adjacenciamátrixa, akkor ez valóban jó lesz, ugyanis a két mátrix (a két gráf) diszjunkt, és az összegük kiadja a teljes gráf adjacenciamátrixát, ehhez még hozzáadva I-t megkapjuk az egyesekből álló J mátrixot. □

5.2. A Krein-feltétel

Az előző szekcióban definiált E_i mátrixokra érvényes

$$E_i \circ E_j = \sum_{k=1}^{d} \gamma_{ij}^k E_k,$$

egyenlőségből kiindulva, ezt E_k-val beszorozva kapjuk, hogy

$$(E_i \circ E_j)E_k = (\sum_{k=1}^{d} \gamma_{ij}^k E_k)E_k = \gamma_{ij}^k E_k$$

(mert E_k idempotens), ezért -mivel az 5.1. részben igazoltuk, hogy $E_i \circ E_j$ pozitív szemidefinit- $\gamma_{ij}^k \geq 0$.

5.2.1. Tétel. (A Krein-feltétel) *Az előző egyenletben szereplő γ_{ij}^k együtthatóknak nemnegatívoknak kell lenniük, különben nem létezik az az erősen reguláris gráf, aminek ez az asszociációs sémája.*

5.2.2. Tétel. *Ebből következik az erősen reguláris gráfokra vonatkozó Krein-feltétel:*

Egy primitív (n, d, a, b) erősen reguláris gráf sajátértékei $(d,\ \lambda_1,\ \lambda_2)$ között fennáll az alábbi két összefüggés:

$(\lambda_1 + 1)(d + \lambda_1 + 2\lambda_1\lambda_2) \leq (d + \lambda_1)(\lambda_2 + 1)^2$

$(\lambda_2 + 1)(d + \lambda_2 + 2\lambda_1\lambda_2) \leq (d + \lambda_2)(\lambda_1 + 1)^2$.

Ha valamelyikben egyenlőség áll, akkor egy adott pont szomszédjai által meghatározott részgráf, illetve a ponttal nem szomszédos csúcsok részgráfja is erősen reguláris. Például a már említett Higman-Sims gráfban utóbbi paraméterei $(77, 16, 0, 4)$. A tétel bizonyítása technikai jellegű, [6]-ban megtalálható, itt most ettől eltekintünk.

5.2.2 igazolása:

Bizonyítás. Általánosan, egy n pontú erősen reguláris gráfot nézve: A_1 a gráf adjacenciamátrixa, itt E_i együtthatói A sajátértékei, A_2-nél pedig, ami a gráf komplementerének adjacenciamátrixa, az együtthatók $(n - d - 1)$, $-(1 + \lambda_1)$ és $-(1 + \lambda_2)$.

$$A_0 = I = E_0 + E_1 + E_2$$

$$A_1 = A = dE_0 + \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2$$

$$A_2 = \overline{A} = (n - d - 1)E_0 - (1 + \lambda_1)E_1 - (1 + \lambda_2)E_2$$

Ezekből az egyenletekből kifejezzük az E_0, E_1, E_2 mátrixokat.

$$E_0 = \frac{1}{n}A_0 + \frac{1}{n}A_1 + \frac{1}{n}A_2$$

$$E_1 = \frac{-(\lambda_2(n-1) + d)}{n(\lambda_1 - \lambda_2)}A_0 - \frac{d - \lambda_2 - n}{n(\lambda_1 - \lambda_2)}A_1 - \frac{d - \lambda_2}{n(\lambda_1 - \lambda_2)}A_2$$

$$E_2 = \frac{\lambda_1(n-1) + d}{n(\lambda_1 - \lambda_2)}A_0 + \frac{d - \lambda_1 - n}{n(\lambda_1 - \lambda_2)}A_1 + \frac{d - \lambda_1}{n(\lambda_1 - \lambda_2)}A_2$$

Vegyük például E_1 önmagával való pontonkénti szorzatát:

$$\begin{aligned}
E_1 \circ E_1 \quad &= \quad \left(\frac{-(\lambda_2(n-1) + d)}{n(\lambda_1 - \lambda_2)}A_0 - \frac{d - \lambda_2 - n}{n(\lambda_1 - \lambda_2)}A_1 - \frac{d - \lambda_2}{n(\lambda_1 - \lambda_2)}A_2\right) \circ \\
&\quad \circ\left(\frac{-(\lambda_2(n-1) + d)}{n(\lambda_1 - \lambda_2)}A_0 - \frac{d - \lambda_2 - n}{n(\lambda_1 - \lambda_2)}A_1 - \frac{d - \lambda_2}{n(\lambda_1 - \lambda_2)}A_2\right) = \\
&= \frac{(\lambda_2(n-1) + d)^2}{(n(\lambda_1 - \lambda_2))^2}A_0 + \frac{(d - \lambda_2 - n)^2}{(n(\lambda_1 - \lambda_2))^2}A_1 + \frac{(d - \lambda_2)^2}{(n(\lambda_1 - \lambda_2))^2}A_2 = \\
&= \frac{(\lambda_2(n-1) + d)^2}{(n(\lambda_1 - \lambda_2))^2}(E_0 + E_1 + E_2) + \\
&\quad + \frac{(d - \lambda_2 - n)^2}{(n(\lambda_1 - \lambda_2))^2}(dE_0 + \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2) +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{(d-\lambda_2)^2}{(n(\lambda_1-\lambda_2))^2}((n-d-1)E_0-(1+\lambda_1)E_1-(1+\lambda_2)E_2) = \\
= \quad & \frac{\lambda_2^2 n-(d+\lambda_2)^2+dn}{(n(\lambda_1-\lambda_2))^2}E_0 + \\
& +\frac{\lambda_2^2(n^2-2n)+(2n\lambda_2)(d+\lambda_1)+(n^2+d^2-2dn)\lambda_1}{(n(\lambda_1-\lambda_2))^2}E_1 + \\
& +\frac{n^2(\lambda_2^2+\lambda_2)}{(n(\lambda_1-\lambda_2))^2}E_2
\end{aligned}
$$

Ezek az együtthatók mind nemnegatívak, mert hosszadalmas számolások után azt kapjuk, hogy E_1 együtthatója felírható az 5.2.2. Tétel után látott alakban. (A másik két együtthatóról látszik, hogy nemnegatív.) Hasonló számolással $E_2 \circ E_2$ együtthatóira is nemnegatív számok jönnek ki, ez bizonyítja, hogy a két Krein-feltétel ekvivalens. $\square$

Most bemutatom a (sémákra vonatkozó) Krein-feltételt a Petersen gráfon, és a $H = (28, 9, 0, 4)$ paraméterű gráfon.

(I az egységmátrix, A a Petersen-gráfnak, $\overline{A}$ pedig a komplementerének az adjacenciamátrixa.)

$$A_0 = I = E_0 + E_1 + E_2$$

$$A_1 = A = 3E_0 + E_1 - 2E_2$$

$$A_2 = \overline{A} = 6E_0 - 2E_1 + E_2$$

(A_1-nél E_i együtthatói A sajátértékei, A_2-nél pedig úgy kapjuk meg, hogy a három sort együtt nézve E_0 együtthatóinak összege 10 (a csúcsszám) legyen, E_1-nél és E_2-nél pedig 0.) Ebből a három egyenletből E_0, E_1, E_2 a következők:

$$E_0 = \frac{1}{10}A_0 + \frac{1}{10}A_1 + \frac{1}{10}A_2$$

$$E_1 = \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{6}A_1 - \frac{1}{6}A_2$$

$$E_2 = \frac{2}{5}A_0 - \frac{4}{15}A_1 + \frac{1}{15}A_2$$

Nézzük E_1 önmagával való pontonkénti szorzatát:

$$\begin{aligned}
E_1 \circ E_1 &= (\frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{6}A_1 - \frac{1}{6}A_2) \circ (\frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{6}A_1 - \frac{1}{6}A_2) = \\
&= \frac{1}{4}A_0 + \frac{1}{36}A_1 + \frac{1}{36}A_2 = \\
&= \frac{1}{4}(E_0 + E_1 + E_2) + \frac{1}{36}(3E_0 + E_1 - 2E_2) + \frac{1}{36}(6E_0 - 2E_1 + E_2) = \\
&= \frac{1}{2}E_0 + \frac{2}{9}E_1 + \frac{2}{9}E_2
\end{aligned}$$

Itt az együtthatók a sajátértékek, ezek mind 0 és 1 között vannak, vagyis teljesül a Krein-feltétel.

A mátrix szemléltetésül áll itt, hogy látszódjon konkrétan, miről van szó.

$$E_1 \circ E_1 = \begin{pmatrix}
\frac{1}{4} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\
\frac{1}{36} & \frac{1}{4} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\
\frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{4} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\
\frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{4} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\
\frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{4} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\
\frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{4} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\
\frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{4} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\
\frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{4} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\
\frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{4} & \frac{1}{36} \\
\frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{4}
\end{pmatrix}$$

Nézzük most H-t. (A_1 és A_2 ugyanúgy H, illetve a komplementer gráf adjacenciamátrixa.)

$$A_0 = I = E_0 + E_1 + E_2$$

$$A_1 = A = 9E_0 + E_1 - 5E_2$$

$$A_2 = \overline{A} = 18E_0 - 2E_1 + 4E_2$$

Ebből E_0, E_1, E_2 a következők lesznek:

$$E_0 = \frac{1}{28}A_0 + \frac{1}{28}A_1 + \frac{1}{28}A_2$$

$$E_1 = \frac{3}{4}A_0 + \frac{1}{12}A_1 - \frac{1}{12}A_2$$

$$E_2 = \frac{3}{14}A_0 - \frac{5}{42}A_1 + \frac{1}{21}A_2$$

Most nézzük $E_2 \circ E_2$-t!

$$\begin{aligned}
E_2 \circ E_2 &= \frac{9}{14^2} A_0 + \frac{25}{42^2} A_1 + \frac{1}{21^2} A_2 = \\
&= \frac{9}{14^2}(E_0 + E_1 + E_2) + \frac{25}{42^2}(9E_0 + E_1 - 5E_2) + \frac{1}{21^2}(18E_0 - 2E_1 + 4E_2) = \\
&= \frac{3}{14} E_0 + \frac{1}{18} E_1 - \frac{1}{63} E_2
\end{aligned}$$

Az egyik együtthatóra, vagyis az egyik sajátértékre negatív szám jött ki, de ez nem lehetséges, így ez bizonyítja, hogy nem létezik ilyen paraméterű erősen reguláris gráf.

A gráfokra vonatkozó Krein-feltétel esetében a feltétel a következő alakot ölti (a gráf sajátértékei 9, 1 és -5):

$$-4(4-10) \leq 4 \cdot 2^2,$$

de $24 \nleq 16$, vagyis ezzel a módszerrel is kijön, hogy nem létezik a gráf.

Irodalomjegyzék

[1] Andries E Brouwer és Willem H Haemers: *Spectra of graphs*. Springer Science & Business Media, 2011.

[2] Andries Brouwer honlapja: `http://www.win.tue.nl/~aeb/graphs/index.html`.

[3] Csikvári Péter: `http://www.cs.elte.hu/~csiki/spectral_graph_theory.pdf`.

[4] Gál Attila Péter: Reguláris és erösen reguláris gráfok, Szakdolgozat. `https://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_alkmat/2015/gal_attila_peter.pdf`. 2015.

[5] Chris Godsil: *Algebraic combinatorics*, volume 6. CRC Press, 1993.

[6] Chris Godsil és Gordon F Royle: *Algebraic graph theory*, volume 207. Springer Science & Business Media, 2013.

[7] Katona Gyula, Recski András, Szabó Csaba: *A számítástudomány alapjai*. Typotex Kft, 2002.

[8] Kiss Emil elöadásjegyzetei: `http://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress/oktatas/faliujsag`.

[9] Wikipedia: `https://hu.wikipedia.org/wiki/V%C3%A9ges_geometria`.

[10] `http://math.mit.edu/~fox/MAT307-lecture18.pdf`. 2. példa.

[11] `http://www.siam.org/books/textbooks/OT91sample.pdf`. 13.2. szakasz.