EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

A MAZUR–ULAM TÉTEL ÉS ÁLTALÁNOSÍTÁSAI

Szakdolgozat

Dobrovoczki Péter

Matematika BSc
Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Titkos Tamás
MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2018

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Elsősorban köszönöm témavezetőmnek, Titkos Tamásnak, hogy figyelmembe ajánlotta a szakdolgozatom témáját, értékes tanácsaival és munkájával segítette jelen dolgozat elkészítését. Köszönöm a családomnak, barátnőmnek, és barátaimnak, hogy támogattak, és türelemmel viseltettek irántam nem csak a dolgozat írása alatt, hanem eddigi tanulmányaim során végig.

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Történeti háttér

Stanisław Mazur (1905-1981) és Stanisław Marcin Ulam (1909-1984) XX. századi lengyel matematikusok voltak, a híres lwówi iskola tagjai, többek között Stefan Banachhal és Hugo Steinhaussal együtt. Ez egy matematikusokból álló társaság volt a két világháború között a lengyelországi Lwówban, akik együtt dolgoztak, és akik munkája a mai funkcionálanalízis megalapozásához jelentősen hozzájárult. A társaság törzshelye, a Scottish Café – a matematika történetének jó eséllyel legkiemelkedőbb kávézója – nevéhez köthető a Skót Könyv, melyben a társaság jegyzett fel felmerülő problémákat, melyek megoldását díjazták. Az egyik legérdekesebb díja egy 1936-ban lejegyzett kérdésnek volt, melynek megfejtéséért Mazur egy élő libát ajánlott fel. A megoldására 37 évet kellett várni, ekkor Per Enflo svéd matematikus személyesen Mazurtól vehette át a megfejtőnek járó jutalmat. A könyv [7] összesen 193 problémát tartalmaz, ebből 43-at Mazur, 55-öt Ulam írt.

Ulam 1933-ban doktorált Lwówban (Lviv Polytechnic National University). 1935-ben Neumann János meghívására meglátogatta a Princeton Institute of Advanced Study intézetét, és pár hónapot ott töltött. Ez idő alatt találkozott Birkhoffal is, aki meghívta tanítani a Harvardra. Sokáig ingázott Lengyelország és az Egyesült Államok között, véglegesen 1939-ben hagyta el Lengyelországot, nagyjából egy hónappal a II. világháború kitörése előtt. 1940-től a wisconsini egyetemen dolgozott, 1943-tól amerikai állampolgár. Ebben az évben kérte fel Neumann, hogy dolgozzon vele és Teller Edével egy rendkívül fontos háborús feladaton, a Manhattan-terven (a hidrogénbomba fejlesztésén) az új-mexikói Los Alamosban.

Mazur 1935-ben doktorált Banach vezetésével, az 1930-as évek alatt több közös cikkük jelent meg. Nem Banach volt az egyetlen, akivel együtt dolgozott, Ulam így írta le függvényterekre vonatkozó közös munkájukat [15, 31.oldal]:

> *„Találtunk egy bizonyítást egy végtelen dimenziós vektorterekre vonatkozó problémára. Az állítás, melyet bizonyítottunk – minden távolságtartó transzformáció lineáris– mára alapvető tétele a függvényterek geometriájának. (...) Mazur volt az, aki a matematikai gondolkodás bizonyos fázisaival megismertetett. Rengeteget tanultam tőle a kutatás lélektanáról és lelkületéről.”*

Az idézetben említett tétel maga az úgynevezett Mazur–Ulam tétel, amely a jelen dolgozat tárgyát is képezi.

1.2. Definíciók, a megértéshez szükséges fogalmak

Definíció. Egy (S,d) rendezett párt metrikus térnek nevezünk, ha S nem üres halmaz, és $d\colon S\times S\to\mathbb{R}_0^+$ metrika, azaz

(i) $\forall x,y\in S\colon d(x,y)=0 \iff x=y$

(ii) $\forall x,y\in S\colon d(x,y)=d(y,x)$

(iii) $\forall x,y,z\in S\colon d(x,y)\leq d(y,z)+d(z,x)$

Megjegyzés. A metrika a hogyományos távolság általánosítása, amelynek ötletét Maurice Fréchet fontolta meg először 1906-os doktori értekezésében [5]. Az általa javasolt, tetszőleges halmaz elemein értelmezett „távolság-funkcionál” a ma használatos metrikával teljesen megegyezik.

Definíció. A $(V,\|\cdot\|)$ rendezett pár normált tér, ha V vektortér $\mathbb{K}$ test felett (általában $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$), $\|\cdot\|:V\to\mathbb{R}_0^+$ pedig egy norma, azaz olyan függvény, amelyre teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

(i) $\forall x\in V\colon \|x\|=0 \iff x=0,$

(ii) $\forall x\in V,\forall\lambda\in T\colon \|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|,$

(iii) $\forall x,y\in V\colon \|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

A norma tekinthető a hossz fogalom általánosításának. Véges dimenziós normált tereket először Hermann Minkowski vezette be 1896-ban [9]. Az egyik legkorábbi definíció a végtelen dimenziós esetre a Riesz Frigyestől származik [11] 1918-ból, [12] cikkében a sup/max-normát hívta normának, és ennek segítségével átfogalmazta a függvénysorok egyenletes konvergenciáját. A normált terek és Banach-terek elméletének alapjait Stefan Banach fektette le 1922-es tézisében, és ebben fogalmazta meg a normált terekre vonatkozó axiómákat.

A szakdolgozat során kizárólag valós normált terekről lesz szó, így ha az szerepel valahol, hogy $(X, \|\cdot\|_X)$ legyen normált tér, feltételezheti az olvasó, hogy X egy valós test fölötti vektortér.

Könnyen látható, hogy tetszőleges normált téren definiálható egy metrika a következőképp:

$$d(x,y) = \|x-y\|_X .$$

Ezt a metrikát a norma által indukált metrikának nevezzük.

Definíció. A $(V, \|\cdot\|)$ normált tér Banach-tér, azaz teljes normált tér, ha minden, a térben futó Cauchy-sorozat konvergens. Tehát: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$, és

$$\begin{aligned} &(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n,m > N: \qquad \|x_n - x_m\| < \varepsilon) \\ \Rightarrow &(\exists x \in V \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N: \qquad \|x_n - x\| < \varepsilon) \end{aligned}$$

Definíció. Legyenek $(E, d_E), (F, d_F)$ metrikus terek, és $\phi : E \to F$ egy függvény. A ϕ leképezést izometriának hívjuk, ha távolságtartó, azaz

$$\forall x,y \in \operatorname{Dom}\phi : \; d_E(x,y) = d_F(\phi(x), \phi(y)).$$

Definíció. Legyenek $(E, d_E), (F, d_F)$ metrikus terek, $\phi : E \to F$ egy függvény. Azt mondjuk, hogy ϕ folytonos, ha

$$\forall x,y \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \qquad d_E(x,y) < \delta \Rightarrow d_F(\phi(x), \phi(y)) < \varepsilon$$

Könnyedén meggondolható, hogy minden izometria folytonos. Vegyük metrikus terek közötti leképezés folytonosságának, illetve az izometrikus leképezéseknek a definícióját, válasszuk δ-t ε-nak, és kész vagyunk. Továbbá az is igaz, hogy minden izometria injektív. Valóban, legyenek $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrikus terek, $\phi : X \to Y$ egy izometria. Azt kell igazolni, hogy $\phi(x) = \phi(y)$ esetén $x = y$ bármely x, y-ra ϕ értelmezési tartományában:

$$\phi(x) = \phi(y) \iff 0 = d_Y(\phi(x), \phi(y)) = d_X(x,y) \iff x = y.$$

Definíció. Legyenek X és Y nemüres halmazok. Az $f: X \to Y$ függvény bijekció, ha:

i) **injekció**, azaz $\forall x, y \in X: \qquad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, és

ii) **szürjekció**, vagyis $\forall y \in Y \quad \exists x \in X: \qquad y = f(x)$.

Az is világos, hogy tetszőleges (X, d_X), (Y, d_Y) metrikus terek között ha egy ϕ izometria szürjektív, akkor létezik inverze, és az inverz is izometria. Ugyanis az előbb láttuk, hogy minden izometria injektív, így ha szürjektív is, akkor bijektív, így létezik ϕ^{-1}, amivel komponálva a ϕ-t az identitást kapjuk. Ez izometrikus is, mivel

$$d_X\left(\phi^{-1}(\phi(x)), \phi^{-1}(\phi(y))\right) = d_X(x,y) = d_Y(\phi(x), \phi(y)).$$

Definíció. Legyenek$E$ és F valós vektorterek. Azt mondjuk, hogy a $\phi: E \to F$ leképezés lineáris, ha

$$\forall x, y \in E, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}: \qquad \phi(ax + by) = a\phi(x) + b\phi(y).$$

Definíció. Legyenek E és F valós vektorterek, egy $\phi: E \to F$ leképezés affin, ha minden $t \in [0,1]$ és $x, y \in E$ esetén

$$\phi(tx + (1-t)y) = t\phi(x) + (1-t)\phi(y).$$

Igaz továbbá a következő állítás:

1. Állítás. *Bármely normált téren értelmezett izometria eltolható úgy, hogy az origót helybenhagyja.*

Bizonyítás. Legyenek $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált terek, $\psi: X \to Y$ izometria. Ekkor $\psi^*: t \mapsto \psi(t) - \psi(0)$ leképezés izometria, amely helybenhagyja az origót.

Izometria, mert tetszőleges $x, y \in X$ esetén

$$\begin{aligned}\psi^*(x) - \psi^*(y)_Y &= \|(\psi(x) - \psi(0)) - (\psi(y) - \psi(0))\|_Y \\ &= \|\psi(x) - \psi(y)\|_Y \\ &= \|x - y\|_X,\end{aligned}$$

és $\psi^*(0) = 0$, mivel

$$\psi^*(0) = \psi(0) - \psi(0) = 0.$$

□

Megfogalmazunk néhány ekvivalens definíciót arra vonatkozóan, hogy egy függvény affin abban az esetben, amikor X és Y normált terek, és a függvény izometria [14].

2. Állítás. *Legyenek* $(X,\|\cdot\|_X)$ *és* $(Y,\|(\|\cdot)_Y)$ *valós normált terek. Egy* $f\colon X\to Y$ *függvény akkor és csak akkor affin, ha létezik olyan* $A\colon X\to Y$ *lineáris operátor és* $b\in Y$ *vektor, melyekre teljesül, hogy minden* $x\in X$ *esetén* $f(x)=Ax+b$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f(x)$ előáll $Ax+b$ alakban minden $x\in X$ esetén, ahol $A\colon X\to Y$ lineáris operátor, és $b\in Y$ vektor. Ekkor bármely $t\in[0,1]$-re

$$\begin{aligned} f(tx+(1-t)y) &= A(tx+(1-t)y)+b \\ &= tAx+(1-t)Ay+b \\ &= t(Ax+b)+(1-t)(Ay+b) \\ &= tf(x)+(1-t)f(y). \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy f affin. A másik irány belátásához tegyük fel, hogy f affin, és definiáljuk az $A\colon X\to Y$ leképezést

$$A(x) := f(x)-f(0) \qquad (\forall x\in X).$$

Ezt az egyenletet átrendezve kapjuk, hogy $f(x)=A(x)+f(0)$, így elég igazolni, hogy A lineáris operátor. Ehhez belátjuk, hogy A is affin:

$$\begin{aligned} A(tx+(1-t)y) &= f(tx+(1-t)y)-f(0) \\ &= tf(x)+(1-t)f(y)-f(0) \\ &= t(f(x)-f(0)+(1-t)(f(y)-f(0)) \\ &= tA(x)+(1-t)A(y), \end{aligned}$$

ahol $x,y\in X$ és $t\in[0,1]$. Továbbá $A(0)=f(0)-f(0)=0$. Tehát A affin és $A(0)=0$, így minden $\alpha\in[0,1]$ esetén

$$\begin{aligned} A(\alpha x) &= A(\alpha x+(1-\alpha)0) \\ &= \alpha A(x)+(1-\alpha)A(0) \\ &= \alpha A(x). \end{aligned}$$

Meg kell még mutatnunk azt is, hogy A additív. Legyenek x és y tetszőleges X-beli vektorok, ekkor $\alpha = \frac{1}{2}$ esetén az előző egyenlőség miatt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}A(x+y) &= A\left(\frac{x+y}{2}\right) \\ &= A\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right) \\ &= \frac{1}{2}A(x)+\frac{1}{2}A(y) \\ &= \frac{1}{2}(A(x)+A(y)).\end{aligned}$$

Így az egyenlőség bal és jobb végét ha megszorozzuk 2-vel, azt kapjuk, hogy

$$A(x+y) = A(x)+A(y).$$

Ez alapján azt kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$A(nx) = nA(x).$$

Ezt n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Először lássuk be $n = 1$-re:

$$A(1x) = A(x) = 1A(x).$$

Ezt követően tegyük fel, hogy valamely $k \in \mathbb{N}$ számra már tudjuk, hogy $A(kx) = kA(x)$, és belátjuk, hogy ekkor $k+1$-re is igaz:

$$A((k+1)x) = A(kx+x) = A(kx)+A(x) = kA(x)+A(x) = (k+1)A(x).$$

Azt kellene még belátni, hogy minden $\lambda \in \mathbb{R}$ számra $A(\lambda x) = \lambda A(x)$. Ezt három részre bontjuk: először pozitív λ-kra látjuk be, úgy, hogy rögzítünk egy λ-t, ekkor létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és $\alpha \in [0,1]$, hogy $\lambda = n+\alpha$. Tehát

$$\begin{aligned}A(\lambda x) &= A(nx+\alpha x) \\ &= A(nx)+A(\alpha x) \\ &= nA(x)+\alpha A(x) \\ &= (n+\alpha)A(x) \\ &= \lambda A(x).\end{aligned}$$

Ezután $\lambda = -1$-re is megmutatjuk, hogy igaz az azonosság.

$$\begin{aligned}0 &= A(0) \\ &= A(x+(-x)) \\ &= A(x)+A(-x),\end{aligned}$$

tehát $A(-x) = -A(x)$. Már csak az kell, hogy minden negatív λ-ra is megmutassuk, hogy $A(\lambda x) = \lambda A(x)$. Ha $\lambda < 0$, akkor $-\lambda > 0$, így

$$\begin{aligned} A(\lambda x) &= A((-\lambda)(-x)) \\ &= -\lambda A(-x) \\ &= -\lambda(-A(x)) \\ &= \lambda A(x). \end{aligned}$$

Ezzel megmutattuk, hogy A lineáris, és így beláttuk az állítást. □

A Mazur–Ulam tétel bizonyításának a most következő állítás lesz a kulcsa.

3. Állítás. *Legyenek $(X, \|(\|\cdot)_X)$ és $(Y, \|(\|\cdot)_Y)$ valós normált terek, $\phi\colon X \to Y$ folytonos függvény pontosan akkor affin, ha minden $x, y \in X$ esetén*

$$\phi\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\phi(x)+\phi(y)}{2}.$$

Bizonyítás. Az, hogy affin függvény esetén $\phi\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\phi(x)+\phi(y)}{2}$ igaz, következik az affin függvény definíciójából, $t = \frac{1}{2}$ választással.

A másik irány bizonyításához elég azt belátnunk, hogy

$$\phi(tx + (1-t)y) = t\phi(x) + (1-t)\phi(y)$$

minden $x, y \in X$ és minden $t \in [0,1]$ diadikus racionálisra, vagyis minden $n \in \mathbb{N}$-re olyan $k, l \in \mathbb{N}$-re, hogy $k + l = 2^n$ esetén igaz, hogy

$$\phi\left(\frac{kx+ly}{2^n}\right) = \frac{k}{2^n}\phi(x) + \frac{l}{2^n}\phi(y).$$

Ezt n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 1$, akkor pont a $k = l = 1$ esetet kapjuk, ami az eredeti feltétel volt. Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$, $k + l = 2^n$ esetén az egyenlőség fennáll. Legyen ezután k és l olyan, hogy $k + l = 2^{n+1}$. Ha k páros, akkor l is páros, és ekkor létezik $i, j \in \mathbb{N}$, hogy $k = 2i$, $l = 2j$. Ekkor $i + j = 2^n$, és így az indukciós feltevés miatt

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{kx+ly}{2^{n+1}}\right) &= \phi\left(\frac{ix+jy}{2^n}\right) \\ &= \frac{i}{2^n}\phi(x) + \frac{j}{2^n}\phi(y) \\ &= \frac{k}{2^{n+1}}\phi(x) + \frac{l}{2^{n+1}}\phi(y). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Ha k páratlan, akkor l is páratlan, akkor legyen i és j olyan, hogy $k = 2i+1$ és $l = 2j-1$. Legyenek továbbá u és v a következőképpen definiált vektorok:

$$u := \frac{ix+jy}{2^n}, \qquad v := \frac{(i+1)x+(j-1)y}{2^n}.$$

Ekkor az állításban a ϕ-re megfogalmazott feltétel miatt

$$\phi\left(\frac{\phi(u)+\phi(v)}{2}\right) = \frac{\phi(u)+\phi(v)}{2}.$$

Tehát azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\phi\left(\frac{kx+ly}{2^{n+1}}\right) &= \phi\left(\frac{\phi(u)+\phi(v)}{2}\right) \\
&= \frac{\phi(u)+\phi(v)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{i}{2^n}\phi(x)+\frac{j}{2^n}\phi(y)+\frac{i+1}{2^n}\phi(x)+\frac{j-1}{2^n}\phi(y)\right) \qquad (1.2)\\
&= \frac{2i+1}{2^{n+1}}\phi(x)+\frac{2j-1}{2^{n+1}}\phi(y) \\
&= \frac{k\phi(x)+l\phi(y)}{2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Ezzel az állítást beláttuk. □

Mivel ez utóbbi állítás minden folytonos függvényre teljesül, és minden izometria folytonos, így minden izometriára is ekvivalens megfogalmazásait kaptuk az affinitásnak.

2. fejezet

A Mazur–Ulam tétel

Ebben a fejezetben három lényegesen különböző bizonyítást adunk a Mazur–Ulam tételre.

2.1. A Mazur–Ulam tétel bizonyítása metrikus középpontokkal

Mielőtt a rátérnénk a tételre és bizonyítására [4], bevezetünk néhány jelölést. Ha $(X, \cdot_X)$ normált tér, $x, y \in X$ két rögzített elem, akkor

$$H_1 = H_1(x,y) := \left\{ u \in X \,\middle|\, \|x-u\|_X = \|y-u\|_X = \frac{1}{2}\|x-y\|_X \right\},$$

azaz azok a pontok, melyek egyenlő távolságra vannak x-től és y-tól. Ezek után minden $n \geq 2$-re legyen a H_n halmaz a következő:

$$H_n(x,y) := \left\{ u \in H_{n-1}(x,y) \mid \forall v \in H_{n-1} \colon \ \|u-v\|_X \leq \frac{1}{2}\operatorname{diam}(H_{n-1}(x,y)) \right\},$$

ahol

$$\operatorname{diam}(H_{n-1}(x,y)) = \sup\left\{ \left\|x'-y'\right\|_X \mid x', y' \in H_{n-1}(x,y) \right\}.$$

Látható, hogy minden $n \geq 2$-re

$$\operatorname{diam}(H_n(x,y)) \leq \frac{1}{2^{n-1}}\|x-y\|,$$

ezért a $\bigcap_{i=1}^{\infty} H_i$ halmaz vagy üres, vagy pontosan egy elemből áll. Ha $\bigcap_{i=1}^{\infty} H_i = \{h\}$ akkor azt mondjuk, hogy az x, y párnak létezik (*metrikus*) középpontja, és ezt a jóldefiniált elemet $C(x,y)$-nal jelöljük.

1. Lemma (Mazur–Ulam)**.** *Ha* $(X, \|\cdot\|_X)$ *normált tér,* $x, y \in X$*, akkor* $\frac{1}{2}(x+y)$ *az* x, y *pontpár középpontja.*

Bizonyítás. Legyen $x, y \in X$ fix, és vezessük be minden $u \in X$-re a következő jelölést:

$$\tilde{u} := x + y - u.$$

Ha $u \in H_1(x,y)$ akkor elemi számolással adódik, hogy

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u} - x\|_X &= \|x + y - u - x\|_X \\
&= \|y - u\|_X \\
&= \|x - u\|_X \\
&= \|x + y - u - y\|_X \\
&= \|\tilde{u} - y\|_X
\end{aligned}$$

tehát $\tilde{u} \in H_1$. Tegyük fel, hogy $\tilde{u} \in H_{n-1}$ ha $u \in H_{n-1}$, és legyen $u \in H_n$. Megmutatjuk, hogy $\tilde{u} \in H_n$. Tetszőleges $v \in H_{n-1}$ esetén azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u} - v\|_X &= \|(x + y - u) - v\|_X \\
&= \|(x + y - v) - u\|_X \\
&= \|\tilde{v} - u\|_X \\
&\leq \frac{1}{2}\operatorname{diam}(H_{n-1})
\end{aligned}$$

Ezzel teljes indukcióval beláttuk, hogy $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ u \in H_n \implies \tilde{u} \in H_n$.

Hasonlóan, indukcióval megmutatjuk azt is, hogy

$$z := \frac{1}{2}(x+y) \in H_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Először, látható, hogy $z \in H_1$, mivel

$$\|z - x\|_X = \left\|\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - x\right\|_X = \frac{1}{2}\|y - x\|_X.$$

Ezt követően, tegyük fel, hogy $z, u \in H_{n-1}$. Korábban beláttuk, hogy $\tilde{u} \in H_{n-1}$ és

$$\begin{aligned}
2\|z - u\|_X &= \|2(\frac{1}{2}(x+y) - u)\|_X \\
&= \|x + y - u - u\|_X \\
&= \|\tilde{u} - u\|_X \\
&\leq \operatorname{diam}(H_{n-1})
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|z - u\|_X..$$

Mivel $v \in H_{n-1}$ esetén $\tilde{v} \in H_{n-1}$ az indukciós feltevés miatt, ezért az $u \in H_n$ és $\tilde{v} \in H_{n-1}$ tartalmazásokból már következik, hogy

$$\|\tilde{u} - v\|_X = \|\tilde{v} - u\|_X \leq \frac{1}{2}\operatorname{diam}(H_{n-1}),$$

és így $\tilde{u} \in H_n$. Azaz $z \in H_n$. Tehát mivel minden $n \in \mathbb{N}$ számra $z \in H_n$, így $z \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} H_i$, ami azt jelenti, hogy $z = C(x,y)$. $\square$

Ha $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ normált terek, $\phi\colon X \to Y$ izometria, akkor $\phi(H_1(x,y)) = H_1(\phi(x), \phi(y))$, mivel

$$\begin{aligned} u \in H_1(x,y) \Rightarrow \|\phi(u) - \phi(x)\|_Y &= \|u - x\|_X \\ &= \frac{1}{2}\|x - y\|_X \\ &= \frac{1}{2}\|\phi(x) - \phi(y)\|_Y \end{aligned}$$

és y-ra ugyanígy. (Itt sem a linearitás, sem a szürjektivitás nem szükséges.)

1. TÉTEL (Mazur–Ulam)**.** *Legyenek $(X, \|\cdot\|_X)$ $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált terek, $\phi\colon X \to Y$ bijektív izometria. Ekkor ϕ affin.*

Bizonyítás. Elég megmutatni, hogy $(X, \|\cdot\|_X)$és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ valós normált terek, és $\phi\colon X \to Y$ egy szürjektív izometria esetén minden $x, y \in X$ pontpárra a metrikus középpont ϕ-képe a ϕ-képek metrikus középpontja, azaz

$$\phi(C(x,y)) = C(\phi(x), \phi(y)) \in Y.$$

Mivel ϕ egy szürjektív izometria, ezért a definícióból következik hogy

$$\phi[H_1(x,y)] = H_1(\phi(x), \phi(y)) \quad \text{és} \quad \operatorname{diam}(H_1(x,y)) = \operatorname{diam}(H_1(\phi(x), \phi(y)))$$

teljesül minden $x, y \in X$-re. Indukcióval bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $n-1$-re teljesül a

$$\phi[H_{n-1}(x,y)] = H_{n-1}(\phi(x), \phi(y))$$

egyenlőség. Ekkor

$$u \in H_n(x,y) \quad \text{és} \quad w \in H_{n-1}(\phi(x), \phi(y))$$

esetén az indukciós feltevés miatt van olyan $v \in H_{n-1}(x,y)$ amelyre $w = \phi(v)$, továbbá

$$\begin{aligned}\|\phi(u)-\phi(v)\|_Y &= \|u-v\|_X \\ &\leq \frac{1}{2}\operatorname{diam}(H_{n-1}(x,y)) \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{diam}(H_{n-1}(\phi(x),\phi(y))).\end{aligned}$$

Tehát, $\phi(u) \in H_n(\phi(x),\phi(y))$. Hasonlóan, ha $W \in H_n(\phi(x),\phi(y))$, akkor létezik olyan u elem $H_n(x,y)$-nak, melynek ϕ-képe W. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$-re:

$$\phi(H_n(x,y)) = H_n(\phi(x),\phi(y)).$$

Így az előző lemma szerint, $\frac{1}{2}(x+y) \in H_n(\phi(x),\phi(y)$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, és a fenti állításból következik, hogy

$$\phi\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) \in H_n(\phi(x),\phi(y)).$$

Mivel $\phi(\frac{1}{2}(x+y)) \in H_n(\phi(x),\phi(y))$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, azonban $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} H_n(\phi(x),\phi(y))$ egyetlen eleme $\frac{1}{2}(\phi(x)+\phi(y))$

$$\Rightarrow \phi\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) = \frac{1}{2}(\phi(x)+\phi(y))$$

□

Így beláttuk az eredeti tételt. Az alábbi tétel azt állítja, szürjektív izometria esetén a linearitást lehet jellemezni azzal, hogy egységhosszú vektort egységhosszúba visz. Az ilyen típusú leképezésekkel még a későbbiekben fogunk foglalkozni.

2. TÉTEL. *Ha $(X,\|\cdot\|_X),(Y,\|\cdot\|_Y)$ valós normált terek, $\phi : X \to Y$ szürjektív izometria olyan, hogy $\forall x \in X : \|x\|_X = 1 \Rightarrow \|\phi(x)\|_Y = 1$, akkor $\phi(0) = 0$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $z \in X$ és $\phi(z) = 0$. Ekkor

$$\|\phi(0)\|_Y = \|\phi(z)-\phi(0)\|_Y = \|z-0\|_X = \|z\|_X.$$

Indirekt tegyük fel, hogy $z \neq 0$. A feltételek és az előző lemma (ii) része miatt

$$1 = \left\|\phi\left(\frac{z}{\|z\|_X}\right)\right\|_Y = \left|1-\frac{1}{\|z\|_X}\right| \|z\|_X,$$

amiből látszik, hogy $\|z\|_X = 2$. Viszont így annak is igaznak kellene lennie, hogy

$$1 = \left\| \phi \left(-\frac{z}{\|z\|_X} \right) \right\| = \left| 1 + \frac{1}{\|z\|_X} \right| \|z\|_X = 3$$

ami lehetetlen, így ellentmondásra jutottunk, tehát $z = 0$. □

Most mutatunk egy példát arra, hogy a szürjektivitást általában miért nem lehet elengedni [4].

1. Példa. *Az X normált tér legyen a számegyenes ellátva az abszolút értékkel az Y pedig a sík ellátva a maximum normával. Definiáljuk $\phi : X \to Y$ függvényt a következőképp*

$$\phi(t) := (t, |t|) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Világos, hogy ϕ nem szürjektív, és az is, hogy nem affin.

Mazur és Ulam tehát megmutatta, hogy egy izometrikus szürjekció két normált tér között szükségszerűen affin, illetve világos, hogy bármely affin leképezés izometrikusan linearizálható. Természetesen felvetődő kérdés, hogy a szürjektivitás relaxálható-e, vagy elhagyható-e bizonyos feltételek mellett. Olyan jellegű általánosításokkal, amelyek nem valós normált terek izometriáiról szólnak, nem foglalkozunk. Az $(X, \|\cdot\|_X) = (Y, \|\cdot\|_Y) = (\mathbb{C}, |\cdot|)$, $\phi(z) = \bar{z}$ példa jól mutatja, hogy a Mazur–Ulam tétel állítása komplex normált tér esetén nem igaz.

2.2. Väisälä bizonyítása

Ebben a szakaszban mutatunk egy másik bizonyítást [16], mely a tükrözés izometrikus tulajdonságát használja ki. Ha $(E, \|\cdot\|_E)$ normált tér, akkor rögzített $e \in E$ esetén egy η_e függvény az e-re való tükrözés, azaz

$$\eta_e \colon E \to E, \quad x \mapsto 2e - x$$

leképezés. Ekkor az $\eta_e \circ \eta_e = Id_E$, és η_e bijektív, $\eta_e^{-1} = \eta_e$. Sőt, η_e izometria, és e az egyetlen fixpontja ($\eta_e(e) = e$). Valóban,

$$\forall x, y \in E \colon \ \|\eta_e(x) - \eta_e(y)\|_E = \|2e - x - 2e + y\|_E = \|y - x\|_E$$

azaz η_e egy izometria, és $\eta_e(e) = e$, mivel

$$\eta_e(e) = 2e - e = e.$$

Továbbá az alábbi egyenlőségek fennállnak tetszőleges $x \in E$ elemre:

$$\begin{aligned} \|\eta_e(x) - e\|_E &= \|x - e\|_E \\ \|\eta_e(x) - x\|_E &= 2\,\|x - e\|_E \end{aligned}$$

3. TÉTEL (Mazur–Ulam)**.** *Legyenek* $(E, \|\cdot\|_E)$ $(F, \|\cdot\|_F)$ *normált terek,* $\phi : E \to F$ *bijektív izometria. Ekkor* ϕ *affin.*

Bizonyítás. Legyenek $x, y \in E$ és definiáljuk z-t a következő módon:

$$z := \frac{x+y}{2}.$$

Legyen W az összes E-ből E-ben menő bijektív izometria, amely az x, y pontokat fixen hagyja, és legyen

$$\lambda := \sup\{\|\omega(z) - z\|_E \mid \omega \in W\}$$

Ha $\omega \in W$, tehát x, y-t helybenhagyja, akkor azt kapjuk, hogy

$$\|\omega(z) - x\|_E = \|\omega(z) - \omega(x)\|_E = \|z - x\|_E\,.$$

Így a háromszög egyenlőtlenség miatt, tudjuk azt is, hogy

$$\|\omega(z) - z\|_E \le \|\omega(z) - x\|_E + \|x - z\|_E = 2\,\|x - z\|\,,$$

ebből következtetünk arra, hogy $\lambda < +\infty$.

Legyen most ρ_z az E tükrözése a z-re. Ha $\omega \in W$, legyen

$$\omega^* := \rho_z \circ \omega \circ \rho_z \circ \omega^{-1},$$

ez szintén izometria, melynek fixpontja x és y, tehát $\omega^* \in W$. Ekkor tudjuk azt is, hogy $\|\omega^*(z) - z\|_E \le \lambda$. Mivel ω^{-1} is izometria, ez, illetve egy korábbi észrevétel a tükrözésről maga után vonja a következtetést, hogy

$$\begin{aligned} 2\,\|\omega(z) - z\|_E &= \|\rho_z(\omega(z)) - \omega(z)\|_E \\ &= \left\|\omega^{-1}(\rho_z(\omega(z))) - z\right\|_E \\ &= \left\|\rho_z(\omega^{-1}(\rho_z(\omega(z)))) - z\right\|_E \\ &= \|\omega^*(z) - z\|_E\,. \end{aligned}$$

Tehát $2\,\|\omega(z) - z\|_E \le \lambda$ minden W-beli ω-ra, így $2\lambda \le \lambda$, ebből következik, hogy $\lambda = 0$, ami azt jelenti, hogy $\omega(z) = z$ minden $\omega \in W$-ra.

Legyen $\phi: E \to F$ tetszőleges bijektív izometria, továbbá $\tilde{z}$ az x, y ϕ-képeinek a felezőpontja, azaz

$$\tilde{z} := \frac{\phi(x) + \phi(y)}{2}.$$

Azt kellene megmutatni, hogy $\phi(z) = \tilde{z}$. Jelölje $\psi_{\tilde{z}}$ az F tükrözését $\tilde{z}$-re. Legyen az $\eta: E \to E$ leképezés a következő:

$$\eta := \rho_z \circ \phi^{-1} \circ \psi_{\tilde{z}} \circ \phi$$

Ez W-beli, így $\eta(z) = z$, amiből következik, hogy $\psi_{\tilde{z}}(\phi(z)) = \phi(z)$. Mivel $\tilde{z}$ az egyetlen fixpontja $\psi_{\tilde{z}}$-nek, azt kapjuk, hogy $\phi(z) = \tilde{z}$, azaz

$$\phi\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\phi(x) + \phi(y)}{2}.$$

Erről pedig korábban láttuk, hogy ekvivalens azzal, hogy ϕ affin. □

2.3. Nica bizonyítása

Ez a bizonyítás ihlette meg Bogdan Nica következő, még egyszerűbb bizonyítást, mely méginkább a tükrözés izometrikus tulajdonságán alapul.[10]

4. Tétel (Mazur–Ulam)**.** *Legyenek* $(X, \|\cdot\|_X)$ $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *normált terek,* $\phi: X \to Y$ *bijektív izometria. Ekkor* ϕ *affin.*

Bizonyítás. Rögzítsük az $x, y \in X$ pontokat. Azt fogjuk megmutatni, mint korábban is, hogy $\phi\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\phi(x)+\phi(y)}{2}$. Jelölje Φ_X az X-en értelmezett szürjektív izometriákat. Tetszőleges $\phi \in \Phi_X$-re definiáljuk a lehetséges „affin hibát” az alábbi módon:

$$\operatorname{def}(\phi) := \left\| \phi\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{\phi(x) + \phi(y)}{2} \right\|$$

és vegyük észre, hogy erre könnyen adható felső korlát:

$$\operatorname{def}(\phi) \leq \frac{1}{2}\left\| \phi\left(\frac{x+y}{2}\right) - \phi(x) \right\| + \frac{1}{2}\left\| \phi\left(\frac{x+y}{2}\right) - \phi(y) \right\|.$$

Ekkor pedig tudjuk ϕ izometrikus tulajdonsága miatt, hogy

$$\left\| \phi\left(\frac{x+y}{2}\right) - \phi(x) \right\| = \left\| \frac{x-y}{2} \right\|,$$

így megállapítható, hogy az affin hiba legfeljebb $\frac{\|x-y\|}{2}$.

A bizonyítás leglényegesebb lépése most következik: minden $\phi \in \Phi_X$ leképezéshez definiáljunk egy másik szürjektív izometriát, jelölje ezt ϕ^*, melynek affin hibája kétszerese ϕ-nek:

$$\phi^* = \phi^{-1}\rho\phi,$$

ahol ρ tükrözés $\frac{\phi(x)+\phi(y)}{2}$-re. Ekkor ρ a $z \mapsto \phi(x)+\phi(y)-z$ hozzárendeléssel adott leképezés, és

$$\phi^*(x) = \phi^{-1}\left(\phi(x)+\phi(y)-\phi(x)\right) = \phi^{-1}(\phi(y)) = y,$$

és hasonlóan $\phi^*(y) = x$. Mivel ϕ^{-1} is izometria, azt kapjuk, hogy $\mathrm{def}(\phi^*)$ valóban $\mathrm{def}(\phi)$ kétszerese:

$$\begin{aligned}\mathrm{def}(\phi^*) &= \left\|\phi^{-1}\left(\phi(x)+\phi(y)-\phi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)-\frac{x+y}{2}\right\| \\ &= \left\|\phi(x)+\phi(y)-\phi\left(\frac{x+y}{2}\right)-\phi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right\| = 2\mathrm{def}(\phi).\end{aligned}$$

Ekkor ha egy $\phi \in \Phi_X$-nek pozitív affin hibája lenne, akkor $\phi \mapsto \phi^*$ hozzárendelést iterálva tetszőlegesen nagy hibájú bijektív izometriát tudnánk definiálni, ami ellentmondana az egyenletes korlátosságnak, amit korábban megállapítottunk. Ebből adódóan $def(\phi)$ csak 0 lehet bármely $\phi \in \Phi_X$-re. Így beláttuk, hogy $\forall \phi \in \Phi_X$-re igaz, hogy $\phi\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\phi(x)+\phi(y)}{2}$ bármely x, y pontpárra X-ben. $\square$

3. fejezet

Baker általánosítása

Ebben a fejezetben a szigorúan konvex terek fogalmával fogunk megismerkedni. Néhány segédállítás után pedig John A. Baker ezen terekre, és izometrikus leképezéseikre vonatkozó tételét fogjuk ismertetni [1].

Definíció. Legyen $(X, \|\cdot\|_X)$ normált tér, azt mondjuk, hogy szigorúan konvex, ha minden $x, y \in X$ elemre $\|x+y\|_X = \|x\|_X + \|y\|_X$ egyenlőség fennálltából következik, hogy x és y lineárisan összefügg.

Szemléletesen, a szigorú konvexitás azt jelenti, hogy az egységgömb határa nem tartalmaz szakaszt. Világos továbbá, hogy a fenti definícióval ekvivalens, hogy egy $(X, \|\cdot\|_X)$ normált tér pontosan akkor szigorúan konvex, ha bármely $x, y \in X$ nem nulla elemekre ha fennáll a

$$\|x+y\|_X = \|x\|_X + \|y\|_X$$

egyenlőség, akkor létezik egy $\lambda \in \mathbb{R}^+$ skalár, hogy $x = \lambda y$.

2. Lemma. *Legyen $(X, \|\cdot\|_X)$ normált tér, $x, y \in X$. Ha $\|x+y\|_X = \|x\|_X + \|y\|_X$, akkor*

$$\|\alpha x + \beta y\|_X = \alpha \|x\|_X + \beta \|y\|_X \qquad (\forall \alpha, \beta \geq 0).$$

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $0 \leq \alpha \leq \beta$, az x és y szimmetrikus szerepéből adódóan. Ekkor:

$$\|\alpha x + \beta y\|_X \leq \alpha \|x\|_X + \beta \|y\|_X ,$$

a háromszög-egyenlőtlenség miatt. Másfelől viszont,

$$\begin{aligned}
\|\alpha x+\beta y\|_X &= \|\beta(x+y)-(\beta-\alpha)x\|_X \\
&\geq \left|\beta\,\|x+y\|_X-(\beta-\alpha)\,\|x\|_X\,\right| \\
&= \left|\beta(\|x\|_X+\|y\|_X)-(\beta-\alpha)\,\|x\|_X\,\right| \\
&= \alpha\,\|x\|_X+\beta\,\|y\|_X\,.
\end{aligned}$$

□

3. Lemma (Baker)**.** *Legyen $(Y,\|\cdot\|_Y)$ szigorúan konvex normált tér, $x,y\in Y$, ekkor* $H_1(x,y)=\left\{z\in Y\mid \|x-z\|_Y=\|y-z\|_Y=\frac{1}{2}\|x-y\|_Y\right\}=\left\{\frac{1}{2}(x+y)\right\}$.

Bizonyítás. Azt már korábban láttuk, hogy $H_1(x,y)$ definíciójából adódóan $\frac{1}{2}(x+y)$ benne van. Tegyük fel, hogy u,v is eleme $H_1(x,y)$-nak, azt kell belátni, hogy $u=v$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\left\|x-\frac{1}{2}(u+v)\right\|_Y &= \left\|\frac{1}{2}(x-u)+\frac{1}{2}(x-v)\right\|_Y \\
&\leq \frac{1}{2}\,\|x-u\|_Y+\frac{1}{2}\,\|x-v\|_Y \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\,\|x-y\|_Y+\frac{1}{2}\,\|x-y\|_Y\right) \\
&= \frac{1}{2}\,\|x-y\|_Y\,,
\end{aligned}$$

ugyanezzel a gondolatmenettel az is kijön, hogy

$$\left\|y-\frac{1}{2}(u+v)\right\|_Y \leq \frac{1}{2}\,\|x-y\|_Y\,.$$

Ha bármelyik egyenlőtlenség szigorúan teljesülne, akkor arra az ellentmondásra jutnánk, hogy

$$\|x-y\|_Y \leq \left\|x-\frac{1}{2}(u+v)\right\|_Y+\left\|y-\frac{1}{2}(u+v)\right\|_Y < \|x-y\|_Y\,,$$

tehát végig egyenlőségnek kell teljesülnie, és így

$$\left\|\frac{1}{2}(x-u)+\frac{1}{2}(x-v)\right\|_Y=\frac{1}{2}\,\|x-y\|_Y=\left\|\frac{1}{2}(x-u)\right\|_Y+\left\|\frac{1}{2}(x-v)\right\|_Y.$$

A szigorú konvexitás miatt, van olyan nem-negatív t, hogy $(x-u)=t(x-v)$, és mivel $\|x-u\|_Y=\|x-v\|_Y$, a t csak 1 lehet. Beláttuk, hogy $u=v$. □

5. TÉTEL (Baker)**.** *Legyen* $(X, \|\cdot\|_X)$ *normált tér,* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *szigorúan konvex normált tér, és* $\phi : X \to Y$ *izometria, olyan, hogy* $\phi(0) = 0$*. Ekkor* ϕ *lineáris.*

Bizonyítás. Írjuk fel a távolságtartás definícióját:

$$\|\phi(x) - \phi(y)\|_Y = \|x - y\|_X \qquad (\forall x, y \in X).$$

Az $y = 0$ esetben ugyanezt x-re és $-x$-re felírva azt kapjuk, hogy

$$\|\phi(x)\|_Y = \|x\|_X \text{ és } \|\phi(-x)\|_Y = \|x\|_X$$

Ha most y helyére $-x$-et helyettesítünk, az adódik, hogy

$$\|\phi(x) + (-\phi(-x))\|_Y = 2\|x\|_X = \|\phi(x)\|_Y + \|-\phi(-x)\|_Y.$$

Mivel az Y szigorúan konvex, tudjuk, hogy $\phi(x) = -\vartheta\phi(-x)$ valamely pozitív ϑ számra. Viszont azt is tudjuk, hogy $\|\phi(x)\|_Y = \|\phi(-x)\|_Y$, így ϑ nem lehet más, csak 1. Így tehát $\phi(-x) = -\phi(x)$ minden $x \in X$-re. Továbbá, minden X-beli x, y-ra

$$\begin{aligned}\|\phi(x+y)\|_Y &= \|\phi(x+y) - \phi(0)\|_Y = \|x+y\|_X \\ &= \|x - (-y)\|_X = \|\phi(x) - \phi(-y)\|_Y \\ &= \|\phi(x) + \phi(y)\|_Y.\end{aligned}$$

Ebből, és az ezt megelőző megállapításból következik, hogy

$$\begin{aligned}\left\|\phi\left(\frac{x+y}{2}\right) - \phi(x)\right\|_Y &= \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_X = \frac{1}{2}\|x-y\|_X \\ &= \frac{1}{2}\|\phi(x) - \phi(y)\|_Y,\end{aligned}$$

ugyanezzel a gondolatmenettel, az is igaz, hogy

$$\left\|\phi\left(\frac{x+y}{2}\right) - \phi(y)\right\|_Y = \frac{1}{2}\|\phi(x) - \phi(y)\|_Y$$

minden $x, y \in X$ pontpárra, így az előző lemmából következik, hogy

$$\phi\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\phi(x) + \phi(y)}{2}.$$

□

4. fejezet

A Figiel-Šemrl-Väisälä tétel

Ez a fejezet Tadeusz Figiel, Peter Šemrl és Jussi Väisälä 2000-ben írt cikkét dolgozza fel [3], melyben az eredeti tételben szereplő szürjektivitást egy gyengébb feltételre cserélik a szerzők.

Az A halmaz ϕ függvény szerinti képét $\phi\,[A]$-val jelöljük, azaz

$$\phi\,[A] := \{\phi(a) \mid a \in A\}\,.$$

A tétel bizonyítása használja az operátornorma fogalmát is ($\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$), formális definíciója $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált terek, és $A\colon X \to Y$ operátor esetén:

$$\|A\|_{\mathrm{op}} := \inf\{\lambda > 0 \mid \forall x \in X\colon\ \|Ax\|_Y \leq \lambda\,\|x\|_X\}\,.$$

Ezzel ekvivalens, a gyakorlatban jól használható meghatározás a következő:

$$\|A\|_{\mathrm{op}} = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X=1}} \|Ax\|_Y\,.$$

A bizonyításban használni fogjuk a következő eredményt [2],[6, 3. oldal], melyet bizonyítás nélkül közlünk.

4. Lemma (Figiel)**.** *Legyen $(X, \|\cdot\|_X)$ szeparábilis Banach–tér, és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált tér. Legyen $\phi: X \to Y$ izomtria olyan, hogy $\phi(0) = 0$. Tegyük fel, hogy a $\phi\,[X]$ által feszített altér lezártja az Y. Ekkor egyértelműen létezik egy folytonos lineáris leképezés, $\psi\colon Y \to X$, melyre teljesül, hogy $\psi \circ \phi = Id_X$, és $\|\psi\|_{op} = 1$.*

6. Tétel. *Legyen $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ normált terek és $\phi: X \to Y$ izometria. Tegyük fel, hogy minden egységhosszú, Y-beli y vektorhoz léteznek x_1, x_2 vektorok X-ben és létezik egy $c \in \mathbb{R}$, hogy teljesül az alábbi egyenlőtlenség:*

$$\|y - c(\phi(x_1) - \phi(x_2))\|_Y < \frac{1}{2}\,.$$

Ekkor ϕ affin és $\phi[X]$ sűrű Y-ban. Ha X Banach-tér volt, akkor $\phi[X] = Y$.

Bizonyítás. Feltehető, mint korábban, hogy $\phi(0) = 0$. Jelölje továbbá a $\phi[X]$ által feszített alteret Y'. [2] és [6] alapján ekkor létezik $\psi\colon Y' \to X$ lineáris leképezés, melyre $\|\psi\|_{\mathrm{op}} \leq 1$ (sőt, $\|\psi\|_{\mathrm{op}} = 1$), és minden X-beli x-re $\psi(\phi(x)) = x$.

Indirekt tegyük fel, hogy ψ nem injektív, ezzel ekvivalens, hogy a magtere nem triviális, azaz

$$\ker\psi = \left\{y \in Y' \mid \psi(y) = 0\right\} \neq \{0\}.$$

Ekkor léteznie kell egy $e_y \in Y'$ egységhosszú vektornak, melynek ψ-képe 0, mivel ha létezik $y' \in Y'$, mely nem egységhosszú, de $\psi(y') = 0$, akkor legyen $e_{y'} := \frac{y'}{\|y'\|_Y}$. Ennek már 1 a normája, és ψ a 0-ba képezi. A tétel feltétele alapján ehhez az e_y-hoz létezik $x_1, x_2 \in X$, $c \in \mathbb{R}$, melyek kielégítik az

$$\left\|e_y - c(\phi(x_1) - \phi(x_2))\right\|_Y < \frac{1}{2}$$

felső becslést. Ekkor könnyű észrevenni, hogy a fordított háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned}\left\|e_y - c(\phi(x_1) - \phi(x_2))\right\|_Y &\geq \left\|e_y\right\|_Y - \|c(\phi(x_1) - \phi(x_2))\|_Y \\ &= 1 - \|c(\phi(x_1) - \phi(x_2))\|_Y.\end{aligned}$$

A két egyenlőtlenség alapján könnyen meggondolható, hogy

$$\|c(\phi(x_1) - \phi(x_2))\|_Y > \frac{1}{2},$$

és mivel ϕ izometria volt,

$$\|c(x_1 - x_2)\|_X > \frac{1}{2}.$$

Másfelől, mivel $\|\psi\|_{\mathrm{op}} \leq 1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} > \left\|e_y - c(\phi(x_1) - \phi(x_2))\right\|_Y &\geq \left\|\psi(e_y) - c(\psi(\phi(x_1)) - \psi(\phi(x_2)))\right\|_X \\ &= \|c(x_1 - x_2)\|_X,\end{aligned}$$

ez ellentmond annak, hogy $\|c(x_1 - x_2)\|_X < \frac{1}{2}$, tehát ψ bijekció. Ekkor az inverze, ϕ is lineáris.

Ezek után már csak azt kell belátnunk, hogy Y' sűrű Y-ban. Mivel ϕ lineáris volt, Y' lineáris altér. Indirekt tegyük fel, hogy van olyan $x \in Y \setminus Y'$, melynek távolsága Y'-től pozitív, azaz

$$d := \mathrm{dist}(x, Y') > 0.$$

Ekkor tetszőleges $d > \delta > 0$ számhoz van olyan $\tilde{y} \in Y'$, amelyre

$$d \leq \|x - \tilde{y}\|_Y < d + \delta,$$

és legyen

$$z := \frac{x - \tilde{y}}{\|x - \tilde{y}\|_Y}.$$

Ekkor megfigyelhetjük, hogy tetszőleges $y' \in Y'$ esetén

$$\begin{aligned}
\left\|z - y'\right\|_Y &= \left\| \frac{x - \tilde{y}}{\|x - \tilde{y}\|_Y} \right\|_Y \\
&= \frac{1}{\|x - \tilde{y}\|_Y} \left\|(x - \tilde{y}) - y' \|x - \tilde{y}\|_Y \right\|_Y \\
&= \frac{1}{\|x - \tilde{y}\|_Y} \left\|x - (\tilde{y} + y' \|x - \tilde{y}\|_Y)\right\|_Y \\
&> \frac{d}{d + \delta} \geq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

tehát ekkor

$$\inf_{y' \in Y'} \left\|z - y'\right\|_Y \geq \frac{1}{2},$$

ami ellentmondás. □

5. fejezet

Egységtávolság tartó leképezések

A szakdolgozatot egy olyan fejezettel zárjuk, amelyben az izometria tulajdonságot gyengítjük [13], méghozzá abban az értelemben, hogy egy ϕ normált terek közti leképezés ne tartson meg minden távolságot, hanem csak az egység-távolságot, de azt mindkét irányban. Ez formálisan úgy írható le egy $\phi : X \to Y$ leképezésre, hogy

$$\|\phi(x) - \phi(y)\|_Y = 1 \iff \|x - y\|_X = 1 \qquad (\forall x, y \in X).$$

A továbbiakban ezt fogom erős egységtávolság-tartásnak nevezni. Aleksandrov nevére utalva magát a ϕ függvényt $\mathbf{A}_2$ tulajdonságúnak nevezzük. Ha csak az teljesül, hogy

$$\|x - y\|_X = 1 \implies \|\phi(x) - \phi(y)\|_Y = 1 \qquad (x, y \in X),$$

akkor ϕ-t egységtávolság tartónak (angolul distance one preservernek), vagy $\mathbf{A}_1$ tulajdonságúnak nevezzük.

Az Aleksandrov–probléma, melyet 1970-ben fogalmazott meg a Lobacsevszkij-díjas Aleksandr Danilovich Aleksandrov, szoros kapcsolatban áll az egységtávolság tartó leképezésekkel. Az erre vonatkozó jelöléseket Aleksandrovra utalva választottuk $\mathbf{A}_1$-nek és $\mathbf{A}_2$-nek. A probléma:

Probléma (Aleksandrov)**.** *Legyen $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ normált terek, ha egy $\phi : X \to Y$ leképezés megtartja az egységtávolságot, akkor szükségszerűen izometria is?*

5.1. A_2 leképezések injektivitása

Bemutatjuk, hogy az $\mathbf{A}_2$ leképezések valójában nem állnak távol attól, hogy izometrikusak legyenek [13]. A bizonyításban az alábbi jelöléseket fogom használni:

$$\overline{B_r(x)} = \{y \mid \|x-y\|_X \leq r\}$$

az x körüli, r-sugarú zárt gömb. Ennek nyílt változata:

$$B_r(x) = \{y \mid \|x-y\|_X < r\},$$

ez megegyezik azzal, hogy $\overline{B_r(x)} \setminus S_r(x)$, ahol

$$S_r(x) = \{y \mid \|x-y\|_X = r\}$$

az x körüli, r-sugarú gömb felülete. Jelölje továbbá az x körüli $r+1$ sugarú zárt gömb és r sugarú zárt gömb különbség-halmazát az alábbi:

$$A_{r,r+1}(x) = \{y \mid r < \|x-y\|_X \leq r+1\}.$$

Látható, hogy $A_{r,r+1} = B_{r+1}(x) \setminus B_r(x)$.

7. TÉTEL. *Legyenek $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ valós normált terek, és az egyik legyen legalább 2 dimenziós. Tegyük fel, hogy $\phi : X \to Y$ szürjektív és teljesül rá $\mathbf{A}_2$ tulajdonság. Ekkor ϕ injektív, és*

$$|\,\|\phi(x)-\phi(y)\|_Y - \|x-y\|_X\,| < 1 \qquad (\forall x, y \in X).$$

Sőt, ϕ ekkor nem csak az egységtávolságot tartja mindkét irányban, hanem minden $n \in \mathbb{N}$ távolságot tart.

Bizonyítás. Először meg kell mutatni, hogy mindkét tér legalább 2 dimenziós. Ehhez először tegyük fel, hogy $\dim Y \geq 2$. Ekkor létezik olyan u, v, w vektorok Y-ban, hogy

$$\|u-v\|_Y = \|u-w\|_Y = \|v-w\|_Y = 1.$$

Mivel ϕ szürjektív és $\mathbf{A}_2$, így létezik olyan $u', v', w' \in X$, hogy

$$\left\|u'-v'\right\|_X = \left\|u'-w'\right\|_X = \left\|v'-w'\right\|_X = 1,$$

így X is szükségszerűen legalább 2 dimenziós. Mivel ϕ $\mathbf{A}_2$, X és Y szerepe szimmetrikus, így azt kapjuk, hogy mindkettő legalább 2 dimenziós.

Ezután megmutatjuk indirekt bizonyítással, hogy ϕ injektív is. Tegyük fel tehát, hogy nem az, azaz létezik olyan $x, y \in X$, melyeken ϕ értéke megegyezik. Ekkor találhatunk egy olyan z vektort, amely távolsága x-től 1, de y-tól nem 1. Ekkor viszont

$$1 = \|\phi(x) - \phi(z)\|_Y = \|\phi(y) - \phi(z)\|_Y = \|y - z\|_X \neq 1,$$

így tehát ellentmondásra jutottunk, azaz ϕ bijekció, és ϕ^{-1} is $\mathbf{A}_2$.

Már csak az van hátra, hogy belássuk, ϕ minden egész távolságot megőriz. Legyen x tetszőleges X-beli vektor, $1 < n \in \mathbb{N}$, és tegyük fel, hogy $y \in \overline{B_n(x)}$. Mivel $\dim X > 1$, tudunk egy olyan $(x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ sorozatot definiálni, hogy $x = x_0$, $x_n = y$ és

$$\|x_{i+1} - x_i\|_X = 1 \qquad (\forall i \in [\![0, n-1]\!]).$$

Így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\|\phi(y) - \phi(x)\|_Y &= \|\phi(x_n) - \phi(x_0)\|_Y \\
&= \|\phi(y) - \phi(x)\|_Y \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \|x_{i+1} - x_i\|_X \\
&= n,
\end{aligned}$$

ebből következik, hogy egy n sugarú gömb ϕ-képe része a középpont ϕ-képe körüli n sugarú gömbnek, azaz

$$\phi\left[\overline{B_n(x)}\right] \subset \overline{B_n(\phi(x))}.$$

Ugyanez igaz ϕ^{-1}-re is, így tehát azt kapjuk, hogy

$$\phi\left[\overline{B_n(x)}\right] = \overline{B_n(\phi(x))} \qquad (\forall x \in X, 1 < n \in \mathbb{N}).$$

Mivel ϕ bijektív, azt is tudjuk, hogy

$$\phi\left[A_{n,n+1}(x)\right] = A_{n,n+1}(\phi(x)) \qquad (\forall x \in X, 1 < n \in \mathbb{N}).$$

Ezek után rögzítsünk egy $x \in X$ vektort, és válasszuk meg z-t úgy, hogy benne legyen $A_{1,2}(x)$-ben. Tudjuk, hogy $\phi(z)$ ekkor benne van $\overline{B_2(x)}$-ben, a bizonyítás előző lépése miatt. Definiáljuk az u vektort az alábbi módon:

$$u := z + \frac{z - x}{\|z - x\|_X},$$

ekkor $u \in A_{2,3}(x)$, és $\phi(u) \in A_{2,3}(\phi(x))$, így megkapjuk, hogy $\phi(x)$ és $\phi(u)$ távolsága nagyobb, mint 2. Tegyük fel, hogy $\|\phi(z)-\phi(x)\|_Y \leq 1$, ekkor azt kapjuk, hogy

$$\|\phi(x)-\phi(u)\|_Y \leq \|\phi(x)-\phi(z)\|_Y + \|\phi(z)-\phi(u)\|_Y = \|\phi(x)-\phi(z)\| + 1 \leq 2,$$

amely ellentmond annak, hogy $\|\phi(x)-\phi(u)\| > 2$. Tehát bebizonyítottuk, hogy

$$\phi\,[A_{1,2}(x)] \subset A_{1,2}(\phi(x)).$$

Ez a tartalmazás az injektivitás miatt fennáll a másik irányba is, tehát

$$\phi\,[A_{1,2}(x)] = A_{1,2}(\phi(x)), \quad \text{és} \quad \phi\,[B_1(x)] = B_1(\phi(x)) \qquad (\forall x \in X).$$

Ebből, és hogy $\phi\,[A_{n,n+1}(x)] = A_{n,n+1}(\phi(x))$ $(\forall x \in X, 1 < n \in \mathbb{N})$, következik a tétel állításában szereplő egyenlőtlenség, vagyis hogy tetszőleges x, y pontok ϕ-képének távolsága kevesebb, mint 1-gyel tér el x és y távolságától, azaz

$$|\,\|\phi(x)-\phi(y)\|_Y - \|x-y\|_X\,| < 1.$$

A bizonyítás utolsó lépésében n szerinti teljes indukcióval megmutatjuk, hogy ϕ mindkét irányba megőrzi az n távolságot. Tegyük fel, hogy ϕ megőrzi az n távolságot mindkét irányba. Legyenek $x, z \in X$ egymástól $n+1$ távolságra lévő vektorok. Ekkor tudjuk, hogy $\|\phi(x)-\phi(z)\|_Y \leq n+1$, és azt szeretnénk belátni, hogy egyenlőséggel teljesül. Jelölje u az alábbit:

$$u := \phi(x) + \frac{\phi(z)-\phi(x)}{\|\phi(z)-\phi(x)\|_Y}.$$

Mivel ϕ szürjekció, Y minden eleme előáll mint egy X-beli elem ϕ-képe, létezik tehát olyan $v \in X$, hogy $u = \phi(v)$. Mivel

$$\|u-\phi(x)\|_Y = \left\|\phi(x) + \frac{\phi(z)-\phi(x)}{\|\phi(z)-\phi(x)\|_Y} - \phi(x)\right\|_Y = \left\|\frac{\phi(z)-\phi(x)}{\|\phi(z)-\phi(x)\|_Y}\right\|_Y = 1,$$

teljesül, ezért arra következtethetünk, hogy $\|v-x\|_X = 1$. Ha $\|u-\phi(z)\|_Y < n$, akkor $\|v-z\|_X < n$. Ebből, és az előző megállapításból, a háromszög egyenlőtlenséget felhasználva azt kapjuk, hogy $\|x-z\|_X < n+1$, amivel ellentmondásra jutottunk, tehát $\|u-\phi(z)\|_Y \geq n$, tehát

$$\begin{aligned} n \leq \|u-\phi(z)\|_Y &= \left\|\phi(x)\left(1 - \frac{1}{\|\phi(x)-\phi(z)\|_Y}\right) - \phi(z)\left(1 - \frac{1}{\|\phi(x)-\phi(z)\|_Y}\right)\right\|_Y \\ &= |\,\|\phi(x)-\phi(z)\|_Y - 1|. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $\|\phi(x)-\phi(z)\|_Y = n+1$, hasonlóan ϕ^{-1}-ről is megmutatható, hogy tartja az $n+1$ távolságot. $\square$

Látható, hogy az $\mathbf{A}_2$ tulajdonság nem cserélhető le a $\mathbf{A}_1$ tulajdonságra, Vegyünk például egy $\psi\colon\ [0,1) \to [0,1) \times \mathbb{R}$ bijekciót, és a $\phi:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ leképezést, ahol

$$\phi(x) = \psi(x - [x]) + ([x], 0),$$

ϕ ekkor bijekció, mely tart minden $n \in \mathbb{N}$ távolságot, mégsem teljesül az, hogy

$$|\, \|\phi(x) - \phi(y)\|_Y - \|x - y\|_X \,| < 1 \qquad (\forall x, y \in X)\,.$$

5.2. Nemexpanzív $\mathbf{A}_2$ leképezések

Az alábbiakban a Mazur–Ulam tétel egy kiterjesztését tárgyaljuk nemexpanzív $\mathbf{A}_2$ függvényekre [13].

8. TÉTEL. *Legyen $(X, \|\cdot\|_X)\,, (Y, \|\cdot\|_Y)$ normált terek, és legalább az egyik 1-nél több dimenziós. Tegyük fel, hogy $\phi: X \to Y$ nemexpanzív:*

$$\|\phi(x) - \phi(y)\|_Y \leq \|x - y\|_X \qquad (\forall x, y \in X)\,,$$

ezen felül szürjektív és $\mathbf{A}_2$ tulajdonságú. Ekkor ϕ izometria, és így affin.

Bizonyítás. Mivel ϕ szürjektív és $\mathbf{A}_2$, az előző tétel alapján minden $n \in \mathbb{N}$ távolságot megtart, méghozzá oda-vissza. Rögzítsünk tetszőleges x-et és y-t, erről akarjuk megmutatni, hogy

$$\|x - y\|_X = \|\phi(x) - \phi(y)\|_Y\,.$$

Válasszunk x-hez és y-hoz egy $n_0 \in \mathbb{N}$ számot, amelyre teljesül, hogy

$$\|x - y\|_X < n_0$$

Indirekt tegyük fel, hogy

$$\|\phi(x) - \phi(y)\|_Y < \|x - y\|_X\,,$$

és definiáljuk z-t az alábbi módon:

$$z := x + \frac{n_0}{\|x - y\|_X}(y - x).$$

Ekkor $\|z - x\|_X = n_0$, ugyanis

$$\|z - x\|_X = \left\| x + \frac{n_0}{\|x - y\|_X}(y - x) - x \right\|_X = n_0 \left\| \frac{y - x}{\|y - x\|_X} \right\|_X = n_0,$$

és $\|z-y\|_X = n_0 - \|x-y\|_X$, mivel hasonlóan az előzőhöz

$$\begin{aligned}
\|z-y\|_X &= \left\| x + \frac{n_0}{\|x-y\|_X}(y-x) - y \right\|_X \\
&= \left\| \left(\frac{n_0}{\|x-y\|_X} - 1 \right)(y-x) \right\|_X \\
&= \left(\frac{n_0}{\|x-y\|_X} - 1 \right) \|(y-x)\|_X \\
&= \frac{n_0}{\|x-y\|_X} \|x-y\|_X - \|x-y\|_X \\
&= n_0 - \|x-y\|_X \,,
\end{aligned}$$

és ebből következik, hogy

$$\|\phi(z) - \phi(x)\|_Y = n_0 \qquad \text{és} \qquad \|\phi(z) - \phi(y)\|_Y \leq n_0 - \|x-y\|_X \,.$$

Másfelől viszont tudjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\|\phi(z) - \phi(x)\|_Y &= \|\phi(z) - \phi(y) + \phi(y) - \phi(x)\|_Y \\
&\leq \|\phi(z) - \phi(y)\|_Y + \|\phi(y) - \phi(x)\|_Y \\
&< n_0 - \|y-x\|_X + \|x-y\|_X \\
&= n_0,
\end{aligned}$$

tehát ellentmondásra jutottunk, így nem létezhet olyan x, y pár X-ben, amiket „közelebb visz” egymáshoz ϕ, viszont ϕ nemexpanzív

$$\|\phi(x) - \phi(y)\|_Y = \|x-y\|_X \qquad (\forall x, y \in X) \,.$$

Tehát ϕ izometria, és ekkor a Mazur–Ulam tétel garantálja, hogy eltolás erejéig lineáris, tehát affin. □

A tételnek az alábbi következménye is tekinthető a Mazur–Ulam tétel általánosításának, méghozzá úgy, hogy az 5. tételbeli izometrikusságot gyengíti $\mathbf{A}_2$ tulajdonságra, és kicsivel többet követel meg a szóban forgó terekről [13].

Következmény. *Legyen* $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ *normált terek, és vagy* $\dim X$*, vagy* $\dim Y$ *legyen legalább* 2*. Tegyük fel továbbá, hogy az egyik szigorúan konvex, és legyen* $\phi : X \to Y$ $\mathbf{A}_2$ *tulajdonságú szürjekció. Ekkor* ϕ *affin izometria.*

Bizonyítás. A 7. tétel alapján, ϕ bijektív, és megőriz minden $n \in \mathbb{N}$ távolságot mindkét irányba, sőt, a 7. tétel bizonyítása során az is kiderült, hogy X és Y is legalább 2 dimenziós. Ezek után az általánosságot nem sértve feltehetjük, hogy Y szigorúan konvex.

Először azt fogjuk megmutatni, hogy ϕ az $\frac{1}{n}$ távolságot is megtartja minden $n \in \mathbb{N}$ számra. Legyen x és y olyan X-beli vektorok, melyek távolsága $\frac{1}{n}$, és $z \in X$ olyan, hogy x-től és y-tól való távolsága is 1. Legyen továbbá

$$u := z + n(y - z) \qquad \text{és} \qquad v := z + n(x - z).$$

Ekkor látható, hogy

$$\begin{aligned} \|x - v\|_X &= \|x - z - n(x - z)\|_X \\ &= \|(1 - n)(x - z)\|_X \\ &= (n - 1)\, \|x - z\|_X \\ &= n - 1, \end{aligned}$$

és azt is hasonló számolással megkapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \|v - z\|_X &= \|z + n(x - z) - z\|_X \\ &= \|n(x - z)\|_X \\ &= n\, \|x - z\|_X \\ &= n. \end{aligned}$$

Ezekből következik, hogy

$$\|\phi(x) - \phi(z)\|_Y = 1, \qquad \|\phi(x) - \phi(v)\|_Y = n - 1 \quad \text{és} \quad \|\phi(v) - \phi(z)\|_Y = n.$$

Tehát azt kapjuk, hogy

$$\|\phi(v) - \phi(z)\|_Y = \|\phi(z) - \phi(x)\|_Y + \|\phi(x) - \phi(v)\|_Y\,,$$

így Y szigorú konvexitása miatt tudjuk, hogy

$$\phi(x) = \frac{1}{n}\phi(v) + \frac{n-1}{n}\phi(z),$$

valamint

$$\phi(y) = \frac{1}{n}\phi(u) + \frac{n-1}{n}\phi(z).$$

Felhasználva, hogy

$$\begin{aligned}\|u-v\|_X &= \|z+n(y-z)-z-n(x-z)\|_X\\ &= \|n(y-x)\|_X\\ &= n\|y-x\|_X\\ &= 1,\end{aligned}$$

(ugyanis x-et és y-t úgy választottuk, hogy a távolságuk $\frac{1}{n}$ legyen), azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\|\phi(x)-\phi(y)\|_Y &= \left\|\frac{1}{n}\phi(v)+\frac{n-1}{n}\phi(z)-\frac{1}{n}\phi(u)-\frac{n-1}{n}\phi(z)\right\|_Y\\ &= \left\|\frac{1}{n}(\phi(v)-\phi(u)\right\|_Y\\ &= \frac{1}{n}\|\phi(v)-\phi(u)\|_Y\\ &= \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Ezek után tegyük fel, hogy $\|x-y\|_X \leq \frac{m}{n}$, ahol $2 \leq m \in \mathbb{N}$. Mivel $\dim X \geq 2$, tudunk mutatni egy olyan $(z_i)_{i\in[\![0,m]\!]}$ véges sorozatot, ahol $x=z_0$, $y=z_m$, és bármely két egymást követő tag távolsága $\frac{1}{n}$. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$\|\phi(x)-\phi(y)\|_Y \leq \sum_{i=0}^{m-1}\|\phi(z_{i+1})-\phi(z_i)\|_Y = \frac{m}{n} = \|x-y\|_X,$$

tehát ϕ nemexpanzív, így a 8. tétel alapján affin izometria. $\square$

Irodalomjegyzék

[1] J. A. Baker, Isometries in normed spaces, *Am. Math. Monthly*, **78**, (1971), 655–658.

[2] T. Figiel, On non linear isometric embeddings of normed linear spaces, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **16** (1968), 185–188.

[3] T. Figiel, Peter Šemrl, Jussi Väisälä, Isometries of normed spaces, *Colloquium Mathematicum*, **92**, (2002), 153–154.

[4] R. J. Fleming, J. E. Jamison, Isometries on Banach Spaces: function spaces, *Chapman and Hall/CRC*, (2002)

[5] M. Fréchet, Sur quelques points du Calcul fonctionnel (thése de doctorat, Paris, 1906), *Rendiconti Cire. Mat. Palermo*, **22** (1906).

[6] G. Godefroy, Linearization of isometric embeddings between Banach-spaces: an elementary approach, *Operators and Matrices*, **6**, (2012), 339–345.

[7] R. D. Mauldin (ed.), The Scottish Book – Mathematics from the Scottish Café with selected problems from the new Scottish Book, *Birkhäuser/Springer*, (2015).

[8] S. Mazur, S. Ulam, Sur les transformationes isométriques d'espaces vectoriels normés, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **194** (1932), 946–948.

[9] H. Minkowski, Geometrie der Zahlen, *Teubner, Leipzig*, (1896).

[10] B. Nica, The Mazur–Ulam theorem, *Expositiones Mathematicae* **30**, (2012), 397–398.

[11] A. Pietsch, History of Banach Spaces and Linear Operators, *Birkhäuser Basel*, (2007), 1–28.

[12] F. Riesz, Über lineare Funktionalgleichungen, *Acta Math.*, **41**, (1918), 71–98.

[13] P. Šemrl, T. M. Rassias, On the Mazur–Ulam theorem and the Aleksandrov–problem for unit distance preserving mappings, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **118**, (1993), 919–925.

[14] Zs. Tarcsay, Funkcionálanalízis, ELTE Egyetemi jegyzet, 2018.

[15] S. Ulam, Adventures of a mathematician, *University of California Press*, (1991).

[16] J. Väisälä, A proof of the Mazur–Ulam theorem, *Am. Math. Monthly*, **110**, (2003), 633–635.