Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Sagmeister Ádám

Extremális gráfelmélet–Gráfok Turán-száma

Alkamazott matematikus BSc szakdolgozat

Témavezető:

Nagy Zoltán Lóránt

Geometriai Tanszék

Budapest, 2018

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Nagy Zoltán Lórántnak, amiért felkeltette a lelkesedésemet a gráfelmélet iránt, amiért megismertette velem ezt a témakört és segítette a dolgozat létrejöttét. Hálával tartozom továbbá családomnak, amiért lehetővé tették, hogy matematikával foglalkozhassak, és mellettem álltak a nehéz pillanatokban is.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés, jelölések

Az extremális gráfelmélet születése 1941-re tehető, Turán Pál ekkor igazolta a róla elnevezett Turán-tételt. A matematika ezen ága gráfok szélsőérték-problémáival foglalkozik, például bizonyos feltételek mellett megadott csúcsszám esetén egy gráf éleinek maximalizálásával. Dolgozatomban mindvégig véges egyszerű gráfokról lesz szó, ezekre a továbbiakban gráfként fogok hivatkozni. Szakdolgozatom további fejezeteiben különböző gráfok Turán-számát határozom meg vagy becsülöm. Elsősorban lineáris erdők Turán-számát vizsgálom, az utolsó fejezetben kitekintésképp egyéb, erdőkre vonatkozó eredményeket is megemlítek. Az egyes állítások bizonyításánál megjelöltem, mely forrás gondolatmenetét követi a bizonyítás, amennyiben azok nem tőlem származnak. Sok forrás csak bizonyításvázlatokat közöl, ezeket rendre kiegészítettem a precízség és a könnyebb értelmezhetőség kedvéért.

Legyen $\mathcal{F}$ gráfok halmaza, ekkor $\mathrm{ex}\,(n;\mathcal{F})$ jelöli egy n pontú gráf éleinek számát, mely $\mathcal{F}$ egyetlen elemét sem tartalmazza részgráfként, ugyanakkor ha G egy n pontú, ennél több éllel rendelkező gráf, akkor G már mindenképp tartalmaz $\mathcal{F}$-beli részgráfot. Az így jelölt extremális számokat nevezzük Turán-számoknak, továbbá az n pontú $\mathrm{ex}\,(n;\mathcal{F})$ élű $\mathcal{F}$-beli részgráfot nem tartalmazó extremális gráf egy konstrukcióját $H_{\mathrm{ex}}\,(n;\mathcal{F})$-fel jelöljük. Amennyiben $\mathcal{F}=\{F\}$, úgy $\mathrm{ex}\,(n;\mathcal{F})$ helyett a $\mathrm{ex}\,(n;F)$ illetve $H_{\mathrm{ex}}\,(n;\mathcal{F})$ helyett a $H_{\mathrm{ex}}\,(n;F)$ jelöléseket használjuk.

Az n pontú teljes gráfra, körre illetve útra rendre a K_n, C_n illetve P_n jelölést használom, $K_{m;n}$ pedig azt a teljes páros gráfot jelöli, melynek egyik pontosztályában m, míg a másikban n pont van. M_n jelölje az n pontú, és így ekkor nyilván $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ élű maximális méretű párosítást, valamint E_n az n pontú üres gráfot. G gráf esetén $V(G)$ jelöli G csúcshalmazát, $E(G)$ pedig G élhalmazát, $v \in V(G)$ esetén $d_G(v)$ jelöli v fokszámát (amennyiben egyértelmű, hogy melyik gráfról van szó, a $d(v)$ jelölést is alkalmazhatjuk), a minimális fokszámot pedig $\delta(G)$. Tetszőleges $\mathcal{H}$ halmaz számosságát pedig jelölje $|\mathcal{H}|$. Legyenek G és H gráfok úgy, hogy $V(G) \cap V(H) = \emptyset$, ekkor jelölje $E(G; H)$ azon élek halmazát, melyek egyik csúcsa $V(G)$-beli, míg másik $V(H)$-beli. Legyen $H \subseteq G$ esetén $N(H) = \{v \in V(G) : \exists u \in V(H) \text{ amire } uv \in E(G)\}$. G és H gráfok esetén $G \cup H$ jelöli G és H diszjunkt unióját, $p \in \mathbb{N}^+$ esetén $p \cdot G$ jelöli G-nek p darab példányának diszjunkt unióját, ahol $\mathbb{N}^+$ jelöli a pozitív egészek halmazát (a nullát is természetes számnak tekintem). Jelölje továbbá $G + H$ azt a gráfot, mely $G \cup H$-ból úgy keletkezik, hogy G valamennyi csúcsát H valamennyi csúcsával összekötjük. $H \subseteq G$ jelöli, ha H részgráfja G-nek. $H \subseteq G$ esetén $G - H$ jelöli azt a gráfot, melyet G-ből H pontjainak, valamint mindazon éleinek elhagyásával kapunk, melyeknek legalább egyik végpontja $V(H)$-beli. Az egyetlen v pontból álló gráf esetén értelemszerűen rendre az $N(v)$; $G \cup v$; $G + v$; $G - v$ jelöléseket használom.

Jelölje $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $[n]$ az n-nél nem nagyobb pozitív egészek halmazát.

Természetesen $\mathrm{ex}(n; H)$ meghatározásának problémája onnantól érdekes, ha $n \geq |V(H)|$, ha ez az egyenlőtlenség fennáll, azt mondjuk, hogy n elég nagy.

2. fejezet

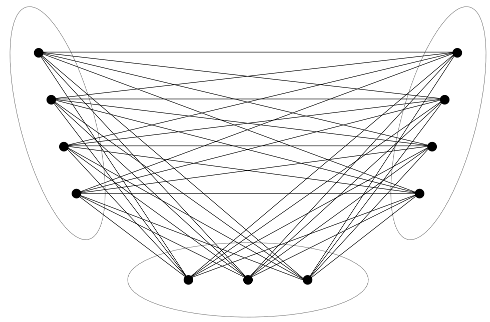
Korai extremális tételek

Ebben a fejezetben ismertetjük a Turán-tételt, valamint az Erdős–Gallai-tételt. Utóbbi eredményét a további fejezetek során számos alkalommal fogjuk használni, előbbinek pedig bizonyítási módszere köszön vissza rengeteg későbbi tétel bizonyítása során.

2.1. Turán tétele

2.1.1. Definíció. *Legyen G gráf, $|V(G)| = n$ és $k \leq n$. Legyen továbbá G olyan, hogy $V(G)$ felosztható mint $\bigcup_{i=1}^{k} V_i$, hogy $\forall i \in [k]$ esetén $\emptyset \neq V_i$ üres gráfot feszít és $i \neq j$ esetén $V_i \cap V_j = \emptyset$. Ekkor G-t **k-osztályú gráfnak** nevezzük. Ha G olyan k-osztályú gráf, melynek pontosztályai közt minden lehetséges élt behúzunk, G-t **k-osztályú teljes gráfnak** hívjuk.*

2.1.2. Definíció. *Legyen $n \geq k$, továbbá osszuk el n-et k-val maradékosan, ekkor valamely $q; r \in \mathbb{N}$-re $0 \leq r < k$ esetén $n = q \cdot k + r$ egyértelműen. Tekintsük azt az n pontú k-osztályú teljes gráfot, melynek r osztályában rendre $q+1$ pont van, a többi $k-r$ osztályában rendre q pont van. Az így definiált G gráfot **Turán-gráfnak** nevezzük és $T(n; k)$-val jelöljük.*



2.1. ábra. $T(11;3)$

2.1.3. Tétel. (Turán-tétel) *Elég nagy n és $k \geq 1$ esetén*

$$\mathrm{ex}\,(n; K_{k+1}) = \binom{n}{2} - r \cdot \binom{q+1}{2} - (k-r) \cdot \binom{q}{2},$$

az extremális gráf pedig pontosan $T(n;k)$.

Bizonyítás. [10] Legyen G olyan n pontú gráf, mely nem tartalmaz K_{k+1}-et. Először azt akarjuk belátni, hogy ekkor létezik olyan n pontú k-osztályú H gráf, melyre $|E(G)| \leq |E(H)|$. Ezt teljes indukcióval fogjuk igazolni.

Az állítás $k = 1$ esetén triviális. Tegyük fel, hogy valamely k-ra az állítás igaz. Legyen d a maximális fokszám G-ben és $v \in V(G)$ olyan, hogy $d_G(v) = d$. Tegyük fel, hogy G nem tartalmaz K_{k+1}-et. Ekkor ha G_1-gyel jelöljük G-nek az $N(v)$ által feszített részgráfját, akkor G_1 nem tartalmaz K_k-t, hiszen ellenkező esetben $G_1 + v \subseteq G$ ekkor tartalmazna K_{k+1}-et. Tehát G_1-re alkalmazhatjuk az indukciós feltevést. Legyen tehát H_1 olyan k-osztályú gráf G_1 pontjain, hogy az nem tartalmaz továbbra sem K_k-t, de $|E(G_1)| \leq |E(H_1)|$. Konstruáljuk meg H-t úgy, hogy a $V(G) \setminus N(v)$-beli összes csúcsot kössük össze H_1 minden pontjával, ugyanakkor hagyjunk el minden élt $V(G) \setminus N(v)$ pontjai között. Az így kapott H gráf továbbra sem tartalmaz K_{k+1}-et, hiszen H_1 nem tartalmaz K_k-t és H-ban a $V(H) \setminus V(H_1)$ pontjai által feszített részgráf nem tartalmaz élt. Ugyanakkor $v \in V(H) \setminus V(H_1)$, így $H \setminus H_1$ valamennyi csúcsának fokszáma d, ami a G-beli csúcsok maximális fokszáma, így $H \setminus H_1$ csúcsaiból legalább annyi él fut ki, mint $G \setminus G_1$ csúcsaiból, továbbá a feltevés szerint $|E(G_1)| \leq |E(H_1)|$, így szükségképp $|E(G)| \leq |E(H)|$ is teljesül.

Most azt fogjuk megmutatni, hogy az n pontú k-osztályú K_{k+1}-et nem tartalmazó gráfok közt szigorúan $T(n;k)$-nek van a legtöbb éle. Legyen $G \neq T(n;k)$ olyan k osztályú, K_{k+1}-et nem tartalmazó gráf, melynek élszáma legalább annyi mint $T(n;k)$ élszáma. $k \geq 2$ feltehető. Ekkor mivel $G \neq T(n;k)$, G-nek létezik olyan G_i és G_j osztálya, hogy $|V(G_i)| - |V(G_j)| \geq 2$. Ekkor viszont G_i-ből G_j-be áttéve egy pontot $|V(G_j)|$ él törlődik a gráfból, ugyanakkor $|V(G_i)| - 1$ új keletkezik, ekkor azonban az így módosított gráf élszáma szigorúan nagyobb G élszámánál, ez a gráf pedig nyilvánvalóan továbbra sem tartalmaz K_{k+1}-et, így ellentmondásra jutottunk. Tehát $T(n;k)$ valóban extremális gráf, ennek élszáma pedig könnyen láthatóan épp $\binom{n}{2} - r \cdot \binom{q+1}{2} - (k-r) \cdot \binom{q}{2}$.

Azt kell még megmutatnunk, hogy nem létezik $T(n;k)$-tól különböző extremális gráf. Ehhez az előbbiek miatt elegendő látni, hogy nem k-osztályú gráf nem lehet extremális. Ezt a korábbi jelöléseket megtartva, szintén teljes indukcióval fogjuk igazolni. $k = 1$ esetén minden $T(n;1)$-től különböző n pontú gráf tartalmaz élt, így ez az eset triviális. Legyen $k = 2$ és G olyan n pontú gráf, mely nem tartalmaz K_3-at és nem 2-osztályú. Ekkor viszont $d_G(v) = d \geq 2$, továbbá kell lennie $u_1; u_2 \in V(G) \setminus (N(v) \cup \{v\})$ csúcsoknak, melyek közt fut él. Ekkor u_1-nek és u_2-nek nem lehet közös $N(v)$-beli szomszédja, azaz u_1-nek és u_2-nek együtt legfeljebb d szomszédjuk lehet $N(v)$-ben. Viszont ekkor ha eltöröljük az u_1 és $u_2$közti élt, továbbá u_1-et és u_2-t is összekötjük v összes szomszédjával, akkor az így kapott gráf mindenképpen több élt tartalmaz, hiszen legalább d új élt húztunk be, de csak 1-et töröltünk. Ha tehát minden $G - (\{v\} \cup N(v))$-beli élt elhagyunk és behúzunk $\{v\} \cup N(v)$ és $G - (\{v\} \cup N(v))$ között minden élt, összességében nő az élszám, és egy 2-osztályú, K_3-mentes gráfot kapunk. Tehát $k = 2$-re az állítást beláttuk. Tegyük hát fel, hogy $k \geq 3$ és $k-1$-ig az állítás igaz, valamint legyen G olyan nem k-osztályú gráf, mely nem tartalmaz K_{k+1}-et. Ekkor ha az $N(v)$ által feszített részgráf nem $k-1$-osztályú, úgy az indukciós feltevés szerint azzá tehető az élszám megnövelésével úgy, hogy az így kapott gráf továbbra sem tartalmaz K_{k+1}-et részgráfként. Ha pedig az $N(v)$ által feszített részgráf $k-1$-osztályú, úgy a $V(G) \setminus N(v)$ által feszített részgráfnak kell tartalmaznia élt, ellenkező esetben G eleve k-osztályú lenne. Ekkor pedig a $k = 2$ esettel megegyező módon konstruálható k-osztályú gráf, mely továbbra sem tartalmaz K_{k+1} részgráfot, azonban több éle van.

Így tehát $T(n;k)$ valóban mindig az egyértelmű extremális gráf. $\square$

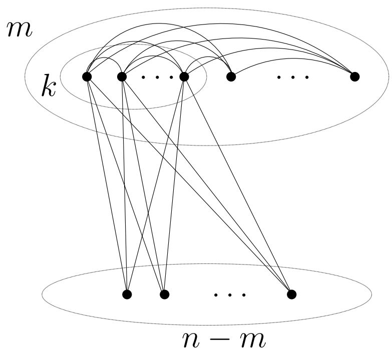
2.2. Az Erdős–Gallai-tétel

A tétel bizonyítása során Kopylov [11] gondolataira támaszkodunk. Kopylov egy más jellegű extremális kérdésre vezeti vissza az Erdős-Gallai-tételt, nevezetesen utak helyett hosszú körök létezését vizsgálja; és a bizonyításhoz szükséges a k-mag fogalmának bevezetése. Az alábbi tárgyalás nagyrészt követi és pontosítja Jacques Verstraëte jegyzetét [16].

2.2.1. Definíció. *Egy G gráf **k-magjának** nevezzük azt a $H \subseteq G$ gráfot, melyre $\delta(H) \geq k$, és amelyet úgy kapunk G-ből, hogy egyesével elhagyjuk a k-nál kisebb fokú csúcsokat. Ha egy gráf k-magja üres, **k-elfajulónak** nevezzük.*

2.2.2. Megjegyzés. Egy gráf k-magja egyértelmű, hiszen ha indirekt feltesszük, hogy $H_1 \subseteq G$ és $H_2 \subseteq G$ egyaránt G k-magjai, hogy $H_1 \neq H_2$, akkor ha $H \subseteq G$ az a részgráf, melyre $V(H) = V(H_1) \cup V(H_2)$ és $E(H) = E(H_1) \cup E(H_2)$, akkor H is k-magja G-nek, ekkor azonban ahhoz, hogy ebből H_1-et megkapjuk, szükséges lenne legalább k fokú csúcsok elhagyása is, ami ellentmondásra vezet.

Definiáljuk a következő gráfot: jelölje $k; m; n \in \mathbb{N}^+$ és $k \leq m \leq n$ esetén $H_{k;m;n}$ azt a K_m-et tartalmazó n pontú gráfot, melyre $T \subseteq K_m$, hogy $|V(T)| = k$, és $H_{k;m;n}$-t úgy kapjuk $K_m \cup E_{n-m}$-ből, hogy T minden pontját összekötjük E_{n-m} minden pontjával.



2.2. ábra. $H_{k;m;n}$

2.2.3. Állítás. *[16] Legyen $n \geq m \geq k \geq 1$ és legyen G olyan n-pontú gráf, melynek legalább $k \cdot (n-m) + \binom{m}{2}$ éle van. Ekkor $m > k$ esetén vagy $|E(G)| = |E(H_{k;m;n})|$ és G $(k+1)$-magja K_m, vagy G-nek legalább $m+1$ csúcsból áll a $(k+1)$-magja. Ha $m = k$, G $(k+1)$-elfajuló.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy G $(k+1)$-magja legfeljebb m pontból áll. Ez azt jelenti, hogy a $(k+1)$-mag előállítása során legalább $n-m$ csúcsot hagytunk el. Ezekre a csúcsokra továbbá teljesül, hogy az elhagyás pillanatában mindegyik elhagyott csúcs fokszáma legfeljebb k volt, tehát a $(k+1)$-mag előállítása során $n-m$ csúcsot elhagyva legfeljebb $k \cdot (n-m)$ élét töröltük G-nek. Ekkor viszont a G élszámára vonatkozó feltétel miatt a fennmaradó m csúcs által feszített részgráf legalább $\binom{m}{2}$ élt tartalmaz, ami csak úgy lehetséges, ha a fennmaradó m csúcsú gráf éppen K_m. Ha $m > k$, akkor K_m minden csúcsának legalább $k+1$ a fokszáma, tehát K_m a $(k+1)$-mag, $m = k$ esetén pedig ezek a csúcsok is elhagyhatók, így ekkor G $(k+1)$-elfajuló valóban, az állítást tehát igazoltuk. Ha $m > k$, akkor $H_{k;m;n}$ alkalmas konstrukció olyan gráfra, melynek $k \cdot (n-m) + \binom{m}{2}$ éle van és $(k+1)$-magja K_m, azonban készíthető ezzel nem izomorf konstrukció. □

2.2.4. Lemma. *Legyen $k > 4$ és $n \geq k$. Legyen továbbá G kétszeresen pontösszefüggő n pontú gráf, mely nem tartalmaz legalább k hosszú kört.*

Ekkor $|E(G)| \leq \max\left\{\left|E\left(H_{\lceil \frac{k}{2} \rceil - 1; k - \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1; n}\right)\right|; |E(H_{2;k-2;n})|\right\}$.

Bizonyítás. [16]

Tegyük fel indirekt, hogy teljesülnek a lemma feltételei, de

$$|E(G)| > \max\left\{\left|E\left(H_{\lceil \frac{k}{2} \rceil - 1; k - \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1; n}\right)\right|; |E(H_{2;k-2;n})|\right\}.$$

Feltehetjük, hogy G-hez tetszőleges további élt hozzávéve az így kapott gráf tartalmaz legalább k hosszú kört, vagyis G tetszőleges két nem szomszédos csúcsa egy legalább k pontból álló út két végpontja. $|E(G)| > \left|E\left(H_{\lceil \frac{k}{2} \rceil - 1; k - \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1; n}\right)\right|$ miatt 2.2.3 következtében $\exists H \subseteq G$ legalább $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2$ pontból álló $\lceil \frac{k}{2} \rceil$-magja G-nek. Alapvetően két esetet különböztetünk meg.

Tegyük fel először, hogy H nem teljes gráf. Ekkor létezik két nem szomszédos csúcs H-ban, ezek amint azt láttuk, egy olyan P út két végpontja, ahol P legalább k pontból áll. Tegyük fel, hogy P a leghosszabb ilyen út, legyenek u és v a végpontok. Ekkor u-nak és v-nek egyaránt minden H-beli szomszédja P-beli. Dirac tétele [4] kimondja, hogy ha egy G_0 gráf k_0-pontösszefüggő, ahol $k_0 \geq 2$, akkor $V(G_0)$ minden k_0 elemű részhalmazára illeszkedik kör. Ennek következtében tehát $\exists C \subseteq G$ kör, amire u és v is illeszkedik, de ekkor $|V(C)| \geq |V(P)| \geq k$, ami ellentmondás.

Most tegyük fel, hogy $H = K_h$ valamely h-ra. Nyilván $k \leq h$ esetén $C_h \subseteq K_h \subseteq G$ lenne, azonban feltettük, hogy G nem tartalmaz legalább k hosszú kört. Így ekkor $0 < k - h < \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + 1 \leq h$. Ha $|E(G)| > |E(H_{k-h;h;n})|$ teljesül, 2.2.3 miatt $\exists J \subseteq G$, ahol J olyan $k - h + 1$-mag, hogy $|V(J)| \geq h + 1 > |V(H)|$. Ekkor $\exists x \in V(J); y \in V(H)$, hogy x és y nem szomszédosak, ellenkező esetben a $V(H) \cup \{x\}$ által feszített részgráf egy bővebb ponthalmazon vett $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$-mag lenne, ami 2.2.2 miatt lehetetlen. Tegyük fel tehát, hogy $x \in V(J); y \in V(H)$ nem szomszédosak. ekkor van olyan út, amelynek x és y a két végpontja. Tegyük fel, hogy P a leghosszabb ilyen út, viszont ekkor $|V(P)| \geq k$, ugyanis J is teljes gráf kell, hogy legyen a korábbi megfontolásokból következően. Innen már Dirac tétele [4] újfent ellentmondásra vezet.

Azt kell már csak igazolni, hogy $|E(G)| > |E(H_{k-h;h;n})|$ valóban igaz. Ehhez elég lenne látni, hogy $\max\left\{\left|E\left(H_{\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil-1;k-\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil+1;n}\right)\right|; |E(H_{2;k-2;n})|\right\} \geq |E(H_{k-h;h;n})|$. Először is adjunk egy pontosabb becslést h-ra! Ha $h = k-1$, akkor $n \geq k$ következtében kell lennie K_h-n kívüli pontnak G-ben. Ha $n = k$, akkor a K_h-n kívüli csúcsnak a 2-pontösszefüggőség miatt minimum 2 szomszédjának kell lenni, ekkor viszont $C_k \subseteq G$ ellentmondás. Ha $n > k$, a 2-pontösszefüggőség miatt legalább 2 pontdiszjunkt él fut K_h és $G - K_h$ között. Ekkor újfent alkalmazhatjuk Dirac tételét [4] ezen élek $G - K_h$-beli végpontjaira, ami ismételten ellentmondásra vezet, tehát szükségképpen $h \leq k - 2$. Ha $h = k - 2$, akkor $H_{k-h;h;n} = H_{2;k-2;n}$ miatt a becslés triviálisan igaz. A továbbiakban tegyük fel, hogy $h \leq k - 3$. Ekkor $k \geq 8$ és így $h \geq 5$ is igaz. Vizsgáljuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget k paritása szerint! Legyen $l = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$, ekkor tehát $l \geq 4$.

Ha k páros, akkor ekvivalens átalakításokkal megmutatható, hogy pontosan akkor teljesül $|E(H_{l-1;l+1;n})| \geq |E(H_{2;2\cdot l-2;n})|$, amikor $\frac{5 \cdot l}{2} + \frac{6}{l-3} \leq n$. Kiszámítható, hogy $\frac{5\cdot l}{2} - \frac{7}{2} \leq n$ esetén $|E(H_{l-1;l+1;n})| \geq |E(H_{2\cdot l-h;h;n})|$, ami magába foglal minden olyan esetet, amikor $|E(H_{l-1;l+1;n})| \geq |E(H_{2;2\cdot l-2;n})|$. $\frac{5\cdot l}{2} + \frac{6}{l-3} \geq n$ esetén meg lehet mutatni, hogy $|E(H_{2;2\cdot l-2;n})| \geq |E(H_{2\cdot l-h;h;n})|$ teljesül. Ez $h = l + 1$ és $h \geq l + 3$ esetén nyilvánvaló, a $h = l + 2$ esetben pedig némi számolás után azzal lesz ekvivalens, hogy $(l + 9) \cdot h \geq -2 \cdot l^2 - 8 \cdot l - 18$, ami természetesen minden $l \geq 4$ egészre igaz.

Páratlan k esetén hasonlóan járunk el. Itt $|E(H_{l;l+1;n})| \geq |E(H_{2;2\cdot l-1;n})|$ ekvivalens $\frac{5\cdot l}{2} - \frac{3}{2} \leq n$ egyenlőtlenséggel. Kiszámolható, hogy $|E(H_{l;l+1;n})| \geq |E(H_{2\cdot l+1-h;h;n})|$, hiszen ez pontosan $\frac{3\cdot h}{2} - \frac{l}{2} \leq n$ esetén igaz, ugyanakkor a h-ra vonatkozó becslések következtében ekkor $\frac{3\cdot h}{2} - \frac{l}{2} \leq \frac{5\cdot l}{2} - \frac{3}{2} \leq n$. Végül $|E(H_{2;2\cdot l-1;n})| \geq |E(H_{2\cdot l+1-h;h;n})|$ ekvivalens $l + \frac{3\cdot h}{2} - 1 \geq$

n teljesülésével, ami a h-ra vonatkozó becslés miatt $\frac{5\cdot l}{2} - \frac{3}{2} \geq n$ esetén teljesül. Ezzel az állítást igazoltuk. $\square$

2.2.5. Lemma. $\mathrm{ex}\left(n; P_3\right) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

Bizonyítás. Legyen G olyan n pontú gráf, melyre $P_3 \nsubseteq G$. Ekkor nyilván G-nek nem lehet legalább 2 fokú csúcsa, hiszen ez a csúcs 2 szomszédjával P_3-at feszítene. Így tehát G független élekből áll, amiből nyilván legfeljebb $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ lehet. Egy maximális párosítás megadja az extremális gráfot. $\square$

2.2.6. Tétel. (Erdős-Gallai-tétel) *Legyen* $n \geq 3$ *egész. Ekkor* $\mathrm{ex}\left(n; P_k\right) \leq \frac{n\cdot(k-2)}{2}$ *és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha* $k-1$ *osztja* n*-t, ekkor az extremális gráf egyértelműen* $\frac{n}{k-1} \cdot K_{k-1}$.

Bizonyítás. [16] Legyen G olyan n pontú gráf, melyre $P_k \nsubseteq G$ és $\left|E\left(G\right)\right| \geq \frac{n\cdot(k-2)}{2}$. A $k=3$ eset 2.2.5 triviális következménye, így feltehető a továbbiakban $k > 3$.

Vegyünk hozzá G-hez egy új, x-szel jelölt csúcsot és tekintsük $G+x$-et. Legyen $G = \bigcup_{i=1}^{r} H_i$, ahol H_i-k G rendre n_i pontú összefüggőségi komponensei. Ekkor valamennyi $i \in [r]$ esetén H_i+x kétszeresen pontösszefüggő. Nyilván ha valamely i-re H_i+x tartalmaz legalább $k+1$ hosszú kört, $H_i \subseteq G$ tartalmaz legalább k hosszú utat, ezáltal $P_k \subseteq G$ lenne, ami lehetetlen.

Viszont ekkor $k+1 > 4$ miatt alkalmazható 2.2.4. Ha $n_i \geq k$, akkor $\left|E\left(H_i+x\right)\right| = \left|E\left(H_i\right)\right| + n_i \leq \max\left\{\left|E\left(H_{\left\lceil \frac{k}{2}\right\rceil-1;k-\left\lceil \frac{k}{2}\right\rceil+1;n_i}\right)\right|; \left|E\left(H_{2;k-2;n_i}\right)\right|\right\} < \frac{(k-2)\cdot n_i}{2} + n_i$, azaz $\left|E\left(H_i\right)\right| < \frac{(k-2)\cdot n_i}{2}$. Ha pedig $n_i \leq k-1$, triviálisan $\left|E\left(H_i\right)\right| \leq \binom{n_i}{2} \leq \frac{(k-2)\cdot n_i}{2}$, ekkor nyilván pontosan akkor teljesül az egyenlőség, ha $H_i = K_{k-1}$. Mindezeket összevetve $\left|E\left(G\right)\right| = \left|E\left(\bigcup_{i=1}^{r} H_i\right)\right| = \sum_{i=1}^{r} \left|E\left(H_i\right)\right| \leq \sum_{i=1}^{r} \frac{(k-2)\cdot n_i}{2} = \frac{(k-2)\cdot n}{2}$ valóban, egyenlőség pedig pontosan akkor áll fenn, ha valamennyi összefüggőségi komponens K_{k-1}. $\square$

3. fejezet

Összefüggő G gráfok esetén $\mathrm{ex}\,(n; p \cdot G)$ kiszámítása

3.1. Általános becslések

Az alábbiakban Izolda Gorgol két olyan tételét mutajuk be, melyek általános alsó- illetve felső korlátot adnak $\mathrm{ex}\,(n; p \cdot G)$ értékére. A későbbiekben ezek hasznos eszközök lesznek konkrét G-k esetén $\mathrm{ex}\,(n; p \cdot G)$ meghatározásához.

3.1.1. Tétel. *Legyen G tetszőleges n pontú összefüggő gráf, p tetszőleges pozitív egész, valamint $m \geq p \cdot n$ egész szám. Ekkor teljesül* $\mathrm{ex}\,(m; p \cdot G) \geq$
$\max \left\{ \mathrm{ex}\,(m - p \cdot n + 1; G) + \binom{p \cdot n - 1}{2}; \mathrm{ex}\,(m - p + 1; G) + (p-1) \cdot m - \binom{p}{2} \right\}$

Bizonyítás. [9] $H_{\mathrm{ex}}\,(m - p \cdot n + 1; G)$ definícióból adódóan nem tartalmaz G-t, továbbá $K_{p \cdot n - 1}$ nem tartalmaz $p \cdot G$-t, hiszen $p \cdot n = |V\,(p \cdot G)| > |V\,(K_{p \cdot n - 1})| = p \cdot n - 1$, így ekkor $p \cdot G \nsubseteq H_{\mathrm{ex}}\,(m - p \cdot n + 1; G) \cup K_{p \cdot n - 1}$. Továbbá $|V\,(H_{\mathrm{ex}}\,(m - p \cdot n + 1; G) \cup K_{p \cdot n - 1})| = (m - p \cdot n + 1) + (p \cdot n - 1) = m$ és $|E\,(H_{\mathrm{ex}}\,(m - p \cdot n + 1; G) \cup K_{p \cdot n - 1})| = \mathrm{ex}\,(m - p \cdot n + 1; G) + \binom{p \cdot n - 1}{2}$, tehát ekkor $\mathrm{ex}\,(m; p \cdot G) \geq \mathrm{ex}\,(m - p \cdot n + 1; G) + \binom{p \cdot n - 1}{2}$.

Másrészt $H_{\mathrm{ex}}\,(m - p + 1; G)$ nem tartalmaz G-t, illetve K_{p-1} nem tartalmaz $p \cdot G$-t, hiszen $p \cdot n = |V\,(p \cdot G)| > |V\,(K_{p-1})| = p - 1$. $p \cdot G \nsubseteq H_{\mathrm{ex}}\,(m - p + 1; G) + K_{p-1}$, hiszen mivel $H_{\mathrm{ex}}\,(m - p + 1; G)$ nem tartalmaz G-t, ekkor G valamennyi diszjunkt példánya tartalmaz K_{p-1}-beli pontot, ebből viszont csak $p-1$ van. Továbbá $|V\,(H_{\mathrm{ex}}\,(m - p + 1; G) + K_{p-1})| =$

$(m-p+1)+(p-1)=m$ és $|E(H_{\mathrm{ex}}(m-p+1;G)+K_{p-1})|=\mathrm{ex}(m-p+1;G)+\binom{p-1}{2}+(m-p+1)\cdot(p-1)=\mathrm{ex}(m-p+1;G)+(p-1)\cdot m-\binom{p}{2}$, tehát ekkor $\mathrm{ex}(m;p\cdot G)\geq \mathrm{ex}(m-p+1;G)+(p-1)\cdot m-\binom{p}{2}$.

Összevetve a két észrevételt, adódik az állítás. □

3.1.2. Tétel. *Legyen G tetszőleges n pontú összefüggő gráf, p tetszőleges pozitív egész, valamint $m\geq p\cdot n$ egész szám. Ekkor a következő teljesül:*

$$\mathrm{ex}(m;p\cdot G)\leq \mathrm{ex}(m-(p-1)\cdot n;G)+\binom{(p-1)\cdot n}{2}+(p-1)\cdot n\cdot(m-(p-1)\cdot n)$$

Bizonyítás. [9] Az állítás azzal ekvivalens, hogy tetszőleges $\mathrm{ex}(m-(p-1)\cdot n;G)+\binom{(p-1)\cdot n}{2}+(p-1)\cdot n\cdot(m-(p-1)\cdot n)+1$ élű, m pontú gráfban van $p\cdot G$. Ezt p szerinti teljes indukcióval igazoljuk.

$p=1$ esetén az állítás $\mathrm{ex}(m;G)\leq \mathrm{ex}(m;G)$, ez tehát triviális. Most tegyük fel, hogy $p\geq 2$ és $p-1$-ig igaz az állítás, F pedig legyen olyan gráf, hogy $|V(F)|=m$ és $|E(F)|=\mathrm{ex}(m-(p-1)\cdot n;G)+\binom{(p-1)\cdot n}{2}+(p-1)\cdot n\cdot(m-(p-1)\cdot n)+1$, továbbá $H\subseteq F$, hogy $|V(H)|=(p-1)\cdot n$.

Ekkor $|E(F-H)|\geq |E(F)|-\binom{(p-1)\cdot n}{2}-(p-1)\cdot n\cdot(m-(p-1)\cdot n)=$
$\mathrm{ex}(m-(p-1)\cdot n;G)+1$ az F-re vonatkozó feltevés miatt, ekkor viszont $G\subseteq F-H\subseteq F$.

Most azt fogjuk megmutatni, hogy ekkor $(p-1)\cdot G\subseteq F-G$, hiszen abból $p\cdot G\subseteq F$ adódik.

$$\begin{aligned}&|E(F-G)|\geq |E(F)|-\binom{n}{2}-n\cdot(m-n)=\mathrm{ex}(m-(p-1)\cdot n;G)+\\&\binom{(p-1)\cdot n}{2}+(p-1)\cdot n\cdot(m-(p-1)\cdot n)+1-\binom{n}{2}-n\cdot(m-n)\end{aligned}\tag{3.1}$$

Ugyanakkor $m\geq p\cdot n\Leftrightarrow m-n\geq(p-1)\cdot n$, így az indukciós feltevésből adódóan $\mathrm{ex}(m-n;(p-1)\cdot G)<\mathrm{ex}((m-n)-(p-2)\cdot n;G)+\binom{(p-2)\cdot n}{2}+(p-2)\cdot n\cdot((m-n)-(p-2)\cdot n)+1=\mathrm{ex}(m-(p-1)\cdot n;G)+\binom{(p-2)\cdot n}{2}+(p-2)\cdot n\cdot(m-(p-1)\cdot n)+1$, átrendezve:

$$\begin{aligned}&\mathrm{ex}(m-(p-1)\cdot n;G)>\mathrm{ex}(m-n;(p-1)\cdot G)-\binom{(p-2)\cdot n}{2}-\\&(p-2)\cdot n\cdot(m-(p-1)\cdot n)-1\end{aligned}\tag{3.2}$$

Összevetve 3.1 és 3.2 egyenlőtlenségeket a következő adódik:

$$|E(F-G)| > \mathrm{ex}(m-n;(p-1)\cdot G) - \binom{(p-2)\cdot n}{2} - (p-2)\cdot n\cdot(m-(p-1)\cdot n) - 1 + \binom{(p-1)\cdot n}{2} + (p-1)\cdot n\cdot(m-(p-1)\cdot n) + 1 - \binom{n}{2} - n\cdot(m-n) \tag{3.3}$$

Vegyük észre, hogy a 3.3 egyenlőtlenség jobb oldala egyszerűsíthető:

$$\begin{aligned}
&-\binom{(p-2)\cdot n}{2} - (p-2)\cdot n\cdot(m-(p-1)\cdot n) - 1 + \binom{(p-1)\cdot n}{2} + (p-1)\cdot n\cdot \\
&(m-(p-1)\cdot n) + 1 - \binom{n}{2} - n\cdot(m-n) = n\cdot(m-(p-1)\cdot n)\cdot((p-1)-(p-2)) + \\
&\binom{(p-1)\cdot n}{2} - \binom{(p-2)\cdot n}{2} - \binom{n}{2} - n\cdot(m-n) = n\cdot((m-(p-1)\cdot n)-(m-n)) + \\
&\frac{((p-1)\cdot n)\cdot((p-1)\cdot n-1)-((p-2)\cdot n)\cdot((p-2)\cdot n-1)-n\cdot(n-1)}{2} = \\
&n^2\cdot(2-p) + \frac{n}{2}\cdot\left(\left(p^2-2\cdot p+1\right)\cdot n+(1-p)-\left(p^2-4\cdot p+4\right)\cdot n+(p-2)+(1-n)\right) \\
&= n^2\cdot(2-p) + \frac{n}{2}\cdot(2p-4)\cdot n = 0
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Tehát 3.4 egyenlőtlenségből 3.3-ba helyettesítve $|E(F-G)| > \mathrm{ex}(m-n;(p-1)\cdot G)$, azaz valóban $p\cdot G \subseteq F$, így az állítást igazoltuk. □

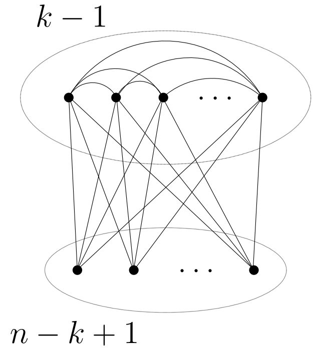
3.2. Egyforma hosszú utak diszjunkt uniójának Turán-száma

Az előző pont általános becsléseit is használva a továbbiakban utak diszjunkt unióit tekintjük tiltott részgráfnak. Az egyszerűbb esetekből építkezünk, így először egyforma hosszú utak Turán-számát tisztázzuk, kezdve azokkal, amik komponensei rövidek, illetve amik kevés komponensből állnak.

3.2.1. Állítás. *Elég nagy n és tetszőleges $k \in \mathbb{N}^+$ esetén* $\mathrm{ex}(n;k\cdot P_2) = (k-1)\cdot(n-k+1)+\binom{k-1}{2}$.

Bizonyítás. Azt állítjuk, hogy $H_{\mathrm{ex}}(n;k\cdot P_2) = K_{k-1}+E_{n-k+1}$ alkalmas extremális konstrukció. Először is valóban, $|V(K_{k-1}+E_{n-k+1})| = n$ és $|E(K_{k-1}+E_{n-k+1})| = (k-1)\cdot$

$(n-k+1)+\binom{k-1}{2}$. Másrészt nyilván minden élnek kell lenni K_{k-1}-beli végpontjának, ezért $K_{k-1}+E_{n-k+1}$ legfeljebb $k-1$ független élt tartalmazhat. Így beláttuk, hogy $\mathrm{ex}\,(n; k\cdot P_2)\geq (k-1)\cdot(n-k+1)+\binom{k-1}{2}$.



3.1. ábra. $K_{k-1}+E_{n-k+1}$

Azt kell még megmutatnunk, hogy $\mathrm{ex}\,(n; k\cdot P_2)\leq (k-1)\cdot(n-k+1)+\binom{k-1}{2}$ is teljesül. Ehhez elég, ha belátjuk, hogy egy $(k-1)\cdot(n-k+1)+\binom{k-1}{2}+1$ élszámú $n\geq 2\cdot k$ pontú G gráf már tartalmaz $k\cdot P_2$ részgráfot. Igazoljuk ezt k szerinti teljes indukcióval! Az állítás nyilvánvalóan igaz $k=1$-re. Tegyük fel, hogy $k\geq 2$ és az állítás $k-1$-ig teljesül, valamint indirekt tegyük fel, hogy G-ben nincs $k\cdot P_2$ részgráf. Ekkor mivel $|E\,(G)|=(k-1)\cdot(n-k+1)+\binom{k-1}{2}+1>(k-2)\cdot(n-k+2)+\binom{k-2}{2}+1$, az indukciós feltétel szerint ekkor $(k-1)\cdot P_2\subseteq G$ fennáll. Legyen $u; v\in V\,(G-(k-1)\cdot P_2)$ tetszőleges. Ekkor nyilván $uv\notin E\,(G)$, továbbá semelyik $(k-1)\cdot P_2$-t meghatározó P_2 esetén nem fordulhat elő, hogy u és v ugyanazon P_2 különböző végpontjaival szomszédos. Ugyanakkor $n-k+2\geq 2$, így egy ilyen P_2 és $G-(k-1)\cdot P_2$ között úgy fut maximális számú él, ha $G-(k-1)\cdot P_2$ minden csúcsa ugyanazon P_2-beli csúcs szomszédja, azaz ekkor G élszámára adódóan a következő felső becslés adódik:

$$|E\,(G)|=(k-1)\cdot(n-k+1)+\binom{k-1}{2}+1\leq\binom{2\cdot k-2}{2}+(n-2\cdot k+2)\cdot(k-1)$$

Azonban ez ekvivalens az $1\leq(k-1)\cdot\left(1-\frac{3\cdot k}{2}\right)$ feltétellel, ami természetesen lehetetlen. Ez viszont azt jelenti, hogy $k\cdot P_2\subseteq G$. $\square$

3.2.2. Megjegyzés. Az állítás azon iránya, miszerint $\mathrm{ex}\,(n; k\cdot P_2)\geq(k-1)\cdot(n-k+1)+\binom{k-1}{2}$ következik 3.1.1 állításából is, hiszen nyilvánvalóan $\mathrm{ex}\,(m; P_2)=0$ tetszőleges m-re. 3.1.1 bizonyításából pedig adódik, hogy ha az egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, úgy $K_{k-1}+E_{n-k+1}$ extremális gráf.

Gorgol az előző alfejezetben ismertetett becsléseit $\mathrm{ex}(m; p \cdot P_3)$ értékének kiszámításához használta fel, kis komponensszámra sikerült pontos értéket is adnia.

3.2.3. Állítás. *Tegyük fel, hogy $p \geq 2$. Ekkor $3 \cdot p \leq m < 5 \cdot p - 1$ esetén $\mathrm{ex}(m; p \cdot P_3) \geq \left\lfloor \frac{m-p+1}{2} \right\rfloor + \binom{3 \cdot p-1}{2} - p$, továbbá $m \geq 5 \cdot p - 1$ esetén $\mathrm{ex}(m; p \cdot P_3) \geq \left\lfloor \frac{m-p+1}{2} \right\rfloor + (p-1) \cdot m - \binom{p}{2}$.*

Bizonyítás. [9] 3.1.1 miatt $\mathrm{ex}(m; p \cdot P_3) \geq \mathrm{ex}(m - 3 \cdot p + 1; P_3) + \binom{3 \cdot p-1}{2}$, ugyanakkor 2.2.5 miatt $\mathrm{ex}(m - 3 \cdot p + 1; P_3) + \binom{3 \cdot p-1}{2} = \left\lfloor \frac{m-3 \cdot p+1}{2} \right\rfloor + \binom{3 \cdot p-1}{2} = \left\lfloor \frac{m-p+1}{2} \right\rfloor + \binom{3 \cdot p-1}{2} - p$, azaz $\mathrm{ex}(m; p \cdot P_3) \geq \left\lfloor \frac{m-p+1}{2} \right\rfloor + \binom{3 \cdot p-1}{2} - p$.

Szintén 3.1.1 miatt $\mathrm{ex}(m; p \cdot P_3) \geq \mathrm{ex}(m - p + 1; P_3) + (p-1) \cdot m - \binom{p}{2}$, ugyanakkor 2.2.5 miatt $\mathrm{ex}(m - p + 1; P_3) + (p-1) \cdot m - \binom{p}{2} = \left\lfloor \frac{m-p+1}{2} \right\rfloor + (p-1) \cdot m - \binom{p}{2}$, azaz $\mathrm{ex}(m; p \cdot P_3) \geq \left\lfloor \frac{m-p+1}{2} \right\rfloor + (p-1) \cdot m - \binom{p}{2}$.

Mivel m-ről eleve feltettük, hogy elég nagy, így $m \geq 3 \cdot p$ fennáll. Azt akarjuk megmutatni, hogy a két alsó korlát közül pontosan akkor élesebb az előbbi, ha $5 \cdot p - 1 \geq m$. Ehhez végezzük a következő ekvivalens átalakításokat:

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{m-p+1}{2} \right\rfloor + \binom{3 \cdot p-1}{2} - p &\geq \left\lfloor \frac{m-p+1}{2} \right\rfloor + (p-1) \cdot m - \binom{p}{2} \\ \binom{3 \cdot p-1}{2} - p &\geq (p-1) \cdot m - \binom{p}{2} \\ \frac{(3 \cdot p - 1) \cdot (3 \cdot p - 2) + p \cdot (p-1) - 2 \cdot p}{2} &\geq (p-1) \cdot m \\ 5 \cdot p^2 - 6 \cdot p + 1 &\geq (p-1) \cdot m \\ (p-1) \cdot (5 \cdot p - 1) &\geq (p-1) \cdot m \\ 5 \cdot p - 1 &\geq m \end{aligned}$$

□

3.2.4. Állítás. *Tegyük fel, hogy $p \geq 2$. Ekkor elég nagy m-re $\mathrm{ex}(m; p \cdot P_3) \leq \left\lfloor \frac{m-3 \cdot (p-1)}{2} \right\rfloor + \binom{3 \cdot (p-1)}{2} + 3 \cdot (p-1) \cdot (m - 3 \cdot (p-1))$.*

Bizonyítás. Közvetlenül adódik 3.1.2 és 2.2.5 állításaiból. □

3.2.5. Tétel. *Legyen $m \geq 9$. Ekkor $\mathrm{ex}(m; 2 \cdot P_3) = \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor + m - 1$.*

Bizonyítás. [9] Az alsó korlát, azaz $\mathrm{ex}(m; 2 \cdot P_3) \geq \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor + m - 1$ közvetlenül következik 3.2.3 állításából. Azt kell csak igazolnunk, hogy $\mathrm{ex}(m; 2 \cdot P_3) \leq \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor + m - 1$ is teljesül.

Ehhez legyen H tetszőleges gráf, melyre teljesül $|V(H)| = m$ és $|E(H)| = \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor + m$. Ekkor $\exists k \geq 3$, hogy $C_k \subseteq H$, hiszen $|E(H)| = \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor + m \geq m$. Legyen $k \in [m]$ a legnagyobb szám, melyre $C_k \subseteq H$ teljesül. Ha $k \geq 6$, $2 \cdot P_3 \subseteq P_6 \subseteq C_k \subseteq H$.

A továbbiakban tegyük fel, hogy $k \in \{3; 4; 5\}$. Mivel $P_3 \subseteq C_k$, így $P_3 \subseteq H - C_k$ esetén $2 \cdot P_3 \subseteq H$, így tegyük fel, hogy $P_3 \nsubseteq H - C_k$, vagyis hogy $|E(H - C_k)| \leq \mathrm{ex}(m-k; P_3) = \left\lfloor \frac{m-k}{2} \right\rfloor$, tehát ekkor $H - C$ és C közt legalább $q = \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor + m - \left\lfloor \frac{m-k}{2} \right\rfloor - \binom{k}{2}$ él fut.

$k = 5$ esetén $q = m - 8 \geq 1$, azonban ekkor ez az él és egy hozzá kapcsolódó C_5-beli él P_3-at alkot, C_5 ettől diszjunkt 3 pontja pedig szintén egy P_3-at feszít, így ekkor $2 \cdot P_3 \subseteq H$.

$k = 4$ esetén $q \geq m - 5 \geq 4$. Ha $H - C_4$ és C_4 közt 4 él egy csúcsba megy, akkor a négy közül kettő egy P_3-at alkot, míg C_4-ből ezt a pontot elhagyva egy ettől diszjunkt P_3 adódik, így $2 \cdot P_3 \subseteq H$. Ellenkező esetben $H - C_4$-ből C_4 legalább két pontjába vezet él. Ekkor mindegyikhez egy-egy diszjunkt élt hozzávéve C_4-ből $2 \cdot P_3$ adódik, tehát ekkor szintén $2 \cdot P_3 \subseteq H$.

Végül ha $k = 3$, $q \geq m - 2$, azonban $|V(H - C_3)| = m - 3$, így $H - C_3$ valamely pontjának van legalább kettő C_3-beli szomszédja, ekkor viszont $C_4 \subseteq H$, ami ellentmond k maximalitásának. $\square$

3.2.6. Tétel. *Legyen* $m \geq 14$. *Ekkor* $\mathrm{ex}(m; 3 \cdot P_3) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2 \cdot m - 4$.

Bizonyítás. [9] 3.2.3 következményeképp $\mathrm{ex}(m; 3 \cdot P_3) \geq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2 \cdot m - 4$. Elég tehát megmutatni, hogy $\mathrm{ex}(m; 3 \cdot P_3) \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2 \cdot m - 4$ is teljesül.

Ehhez legyen H tetszőleges gráf, melyre $|V(H)| = m$ és $|E(H)| = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2 \cdot m - 3$, valamint tegyük fel indirekt, hogy $3 \cdot P_3 \nsubseteq H$. Legyen $P_k \subseteq H$ a leghosszabb k-beli út. Nyilván $3 \cdot P_3 \subseteq P_9$, ezért $k \leq 8$. Ugyanakkor 2.2.6 miatt $k \geq 6$. Ekkor $2 \cdot P_3 \subseteq P_k \subseteq H$. $P_3 \subseteq H - P_k$ esetén így nyilván $3 \cdot P_3 \subseteq H$, így feltehető $P_3 \nsubseteq H - P_k$, azaz $|E(H - P_k)| \leq \mathrm{ex}(m-k; P_3) = \left\lfloor \frac{m-k}{2} \right\rfloor$. Ebből adódóan P_k és $H - P_k$ közt legalább $q_1 = |E(H)| - |E(H - P_k)| - \binom{k}{2} = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2 \cdot m - 3 - \left\lfloor \frac{m-k}{2} \right\rfloor - \binom{k}{2}$ él van. Mivel $k \in \{6; 7; 8\}$, így $q_1 \geq 1$ minden esetben. Ekkor viszont P_k pontjai nem feszíthetnek Hamilton-kört, hiszen $q_1 \geq 1$ miatt lenne $P_{k+1} \subseteq H$, ami ellentmond P_k maximalitásának.

Így adhatunk egy újabb becslést a P_k és $H - P_k$ közt futó élek számára; legalább $q_2 \geq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2 \cdot m - 2 - \left\lfloor \frac{m-k}{2} \right\rfloor - \binom{k-1}{2}$ él van P_k és $H - P_k$ között. Ugyanis tegyük fel indirekt, hogy

P_k és $H-P_k$ közt legfeljebb $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2\cdot m - 2 - \left\lfloor \frac{m-k}{2} \right\rfloor - \binom{k-1}{2} - 1 = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2\cdot m - 3 - \left\lfloor \frac{m-k}{2} \right\rfloor - \binom{k-1}{2}$ él húzódik. Ekkor $P_3 \nsubseteq H - P_k$ miatt $|E(H-P_k)| \leq \mathrm{ex}(m-k; P_3) = \left\lfloor \frac{m-k}{2} \right\rfloor$, továbbá $|E(H)| = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2\cdot m - 3$, ezért a P_k csúcsai által feszített részgráf élszáma legalább $\left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2\cdot m - 3\right) - \left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2\cdot m - 3 - \left\lfloor \frac{m-k}{2} \right\rfloor - \binom{k-1}{2}\right) - \left(\left\lfloor \frac{m-k}{2} \right\rfloor\right) = \binom{k-1}{2}$. Ez azt jelenti, hogy a nemélek száma a P_k által feszített részgráfban legfeljebb $\binom{k}{2} - \binom{k-1}{2} = k-1$, ezért tetszőleges $x; y \in V(P_k)$-ra fennáll $d(x) + d(y) \geq k-1$. Tegyük fel, hogy valamely $x; y \in V(P_k)$ esetén $d(x) + d(y) = k-1$. Ekkor a P_k csúcsai által feszített részgráfból x-et és y-t elhagyva a fennmaradó részgráf egy K_{k-2}. Ha $d(x) \geq 2$ és $d(y) \geq 2$, szükségképpen van Hamilton-kör, de mivel feltettük, hogy ez nem fordulhat elő, feltehető $d(x) = k-2$; $d(y) = 1$, azaz $P_k - y$ csúcsai egy K_{k-1}-et feszítenek, ehhez y egyetlen éllel csatlakozik. Ebből a részgráfból azonban akárhogy fut él $H - P_k$-ba, az egy P_{k+1}-et eredményez, ami ellentmondásra vezet, így tetszőleges $x; y \in V(P_k)$-ra, melyre $(x; y) \notin E(H)$ fennáll $d(x) + d(y) \geq k$, viszont ekkor az Ore-feltétel [15] miatt lesz Hamilton-kör a feszített részgráfban, ami szintén ellentmondás, így mindent összevetve azt kaptuk, hogy valóban legalább $q_2 \geq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2\cdot m - 2 - \left\lfloor \frac{m-k}{2} \right\rfloor - \binom{k-1}{2}$ él fut P_k és $H - P_k$ között.

Megállapíthatjuk, hogy egy $V(H-P_k)$-beli csúcs nem lehet szomszédos P_k semelyik végpontjával, hiszen ez ellentmondana k maximalitásának, így P_k és $H - P_k$ között legfeljebb $q_3 = (m-k) \cdot \left\lceil \frac{k-2}{2} \right\rceil$ futhat.

Legyenek P_k csúcsai egy bejárási sorrend szerint $v_1; \ldots; v_k$.

Ha $k = 8$, továbbá tetszőleges $x \in V(H-P_8)$ csúcs szomszédos v_i-vel, ahol $i \in \{2; 4; 5; 7\}$, akkor $x; v_i; v_j$ csúcsok P_3-at alkotnak amint $j \in \{i-1; i+1\}$, továbbá P_8 tartalmaz ettől diszjunkt $2 \cdot P_3$-at, azaz ekkor $3 \cdot P_3 \subseteq H$, ami ellentmondás, így P_8 és $H - P_8$ közt minden él P_8-beli végpontja v_3 és v_6 közül kerül ki, így P_8 és $H - P_8$ között legfeljebb $2 \cdot (m-8) = 2 \cdot m - 16$ él fut.
Ugyanakkor jelen esetben $q_2 \geq 2 \cdot m - 19$ él fut minimum P_8 és $H - P_8$ közt, tehát van olyan $H - P_8$-beli csúcs, mely szomszédos mind v_3-mal mind v_6-tal, ugyanakkor v_3 és v_6 valamelyike szomszédos legalább két $H - P_8$-beli ponttal is, hiszen $2 \cdot m - 19 > m - 8$. Szimmetriai okokból feltehető, hogy v_3-nak van legalább két $H - P_8$-beli szomszédja. Vegyük észre, hogy a $\{v_1; v_2\}$ és $\{v_4; v_5; v_7; v_8\}$ ponthalmazok közt futó tetszőleges él egy v_3-mat elkerülő $2 \cdot P_3$-mat generál, így ekkor $3 \cdot P_3 \subseteq H$. Ugyanakkor ha $\{v_4; v_5; v_7; v_8\}$ csúcsai közt egy $E(P_8)$-tól diszjunkt élt $(v_5; v_7)$-től eltekintve tetszőlegesen behúzunk, P_8 pontjai olyan v_6-ot elkerülő $2 \cdot P_3$-mat határoznak meg, hogy az diszjunkt $\{y; v_5; v_6\}$

és $\{y; v_6; v_7\}$ valamelyikétől, amennyiben y v_6-nak egy $H - P_8$-beli szomszédja, így egy ilyen él létezése esetén $3 \cdot P_3 \subseteq H$ teljesülne. Továbbá ha v_5 és v_7 szomszédos, v_6-nak vagy v_1-gyel vagy v_2-vel fennálló szomszédsága esetén szintén v_3-mat elkerülő $2 \cdot P_3$-mat kapunk P_8 pontjaiból. Mindezeket összevetve a P_8 csúcsai által feszített részgráf élszámára $\frac{2 \cdot 7 + 6 \cdot 3}{2} = 16$ adódik, mint felső korlát, ennek következtében azonban P_8 és $H - P_8$ közt legalább $2 \cdot m - 15$ él kell, hogy legyen, ez pedig ellentmondás.

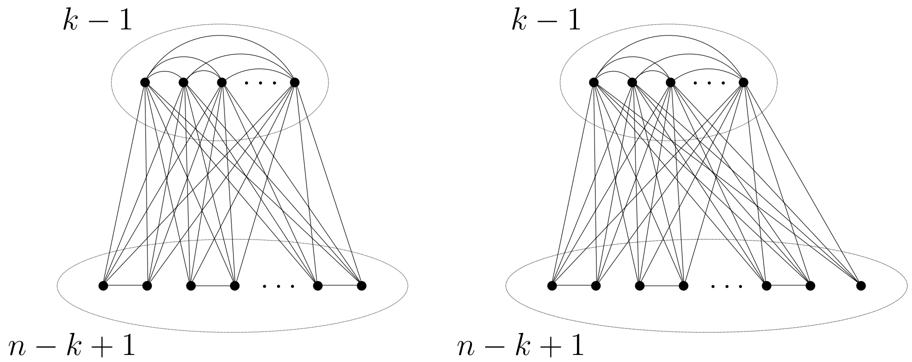
Ha $k = 7$, páratlan m-ekre $q_2 \geq 2 \cdot m - 14$ adódik, míg párosakra $q_2 \geq 2 \cdot m - 13$. Ha két szomszédos P_7-beli csúcsnak közös $H - P_7$-beli szomszédja lenne, $P_8 \subseteq H$ is teljesülne, ami lehetetlen, ha viszont két szomszédos P_7-beli csúcsnak van egy-egy különböző $H - P_7$-beli szomszédja, akkor feltéve, hogy ezek egyike sem v_4, könnyen találunk $3 \cdot P_3$-mat. Így megállapítható, hogy legfeljebb három P_7-beli csúcsnak lehet $H - P_7$-beli szomszédja, 3 pedig pontosan akkor lehet, ha ezek $v_2; v_4; v_6$. Könnyen látszik, hogy ha ezen csúcsok valamelyikének van legalább két $H - P_7$-beli szomszédja, úgy $3 \cdot P_3 \subseteq H$, továbbá ha v_2-nek és v_6-nak van $H - P_7$-ben különböző szomszédja, úgy szintén igaz $3 \cdot P_3 \subseteq H$, tehát ha feltesszük, hogy P_7-nek 3 csúcsából is indul ki él $H - P_7$-be, úgy v_3-nak és v_6-nak egyetlen, közös $H - P_7$-beli szomszédja van. Ekkor viszont $|E(H)| \leq 6 + 3 + \left\lfloor \frac{m-7}{2} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2 \cdot m - 3 = |E(H)|$, ami lehetetlen, tehát P_7-nek legfeljebb két csúcsa lehet szomszédos $H - P_7$-beli ponttal. Ebből következik, hogy P_7 és $H - P_7$ között legfeljebb $2 \cdot (m - 7)$ él húzódhat, ami páros m esetén ellentmondásra vezet, páratlan m esetén pedig pontosan akkor állhat fenn, ha ez éles. Megállapítottuk, hogy szomszédos P_7-beli csúcsok csak akkor lehetnek szomszédosak valamennyien $H - P_7$-beli pontokkal, ha ezek $v_3; v_4$ vagy $v_4; v_5$, ekkor azonban $H - P_7$-nek üres gráfnak kell lennie, ami ellentmond a H élszámára vonatkozó feltételnek. Ekkor tehát a P_7 és a $H - P_7$ pontjai közt futó élek végpontjai vagy v_3 és v_5, vagy a $\{v_2; v_4; v_6\}$ halmaz valamely kételemű részhalmaza. Azt azonban megállapítottuk, hogy sem v_4-nek nem lehet több szomszédja $H - P_7$-ben, sem v_2-nek és v_6-nak nem lehet különböző $H - P_7$-beli szomszédja, így ez utóbbi esetet már ellenőriztük. Így feltehető, hogy v_3 és v_5 szomszédos valamennyi $H - P_7$-beli csúccsal. Vegyük észre, hogy a P_7 csúcsai által feszített részgráf élszáma legalább $\left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2 \cdot m - 3\right) - (2 \cdot m - 14) - \left\lfloor \frac{m-7}{2} \right\rfloor = 14$, így vagy az kell, hogy vezessen él P_7 valamely két, v_3-tól és v_5-től különböző pontja között, ami mindenképp egy v_3-at és v_5-öt elkerülő P_3-at hoz létre, vagy pedig v_3 és v_5 rendre szomszédos valamennyi P_7-beli ponttal, ebben az esetben viszont P_7 egy másik bejárási sorrendjével egy korábban tárgyalt esetre vezethető vissza ez az eset. Így tehát $k = 7$ esetén $3 \cdot P_3 \subseteq H$ szükségszerű.

$k = 6$ esetén $q_2 \geq 2 \cdot m - 9$, míg $q_3 = 2 \cdot m - 12$, azaz $q_2 > q_3$, ez pedig lehetetlen.

Minden esetben ellentmondásra jutottunk, így $\mathrm{ex}\,(m; 3 \cdot P_3) \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2 \cdot m - 4$. $\square$

3.2.7. Tétel. $n \geq 7 \cdot k$ *esetén* $\mathrm{ex}\,(n; k \cdot P_3) = \binom{k-1}{2} + (n-k+1) \cdot (k-1) + \left\lfloor \frac{n-k+1}{2} \right\rfloor$.

Bizonyítás. [3] Tekintsük $K_{k-1} + M_{n-k+1}$-et. Ebben minden P_3-nak van K_{k-1}-beli csúcsa, így legfeljebb $k-1$ diszjunkt példányát tartalmazhatja P_3-nak. Továbbá nyilván $|V\,(K_{k-1} + M_{n-k+1})| = (k-1) + (n-k+1) = n$ és $|E\,(K_{k-1} + M_{n-k+1})| = \binom{k-1}{2} + \left\lfloor \frac{n-k+1}{2} \right\rfloor + (k-1) \cdot (n-k+1)$, így $\mathrm{ex}\,(n; k \cdot P_3) \geq \binom{k-1}{2} + (n-k+1) \cdot (k-1) + \left\lfloor \frac{n-k+1}{2} \right\rfloor$.



3.2. ábra. $K_{k-1} + M_{n-k+1}$ rendre páros illetve páratlan $n-k+1$ esetén

A másik irány bizonyítása k szerinti teljes indukcióval fog történni. $k = 1$-re az állítás 2.2.5 miatt igaz. Tegyük fel, hogy $k \geq 2$ és az állítás $k-1$-ig igaz.

Tegyük fel, hogy G olyan gráf, hogy $|V\,(G)| = n$ és $|E\,(G)| = m > \binom{k-1}{2} + (n-k+1) \cdot (k-1) + \left\lfloor \frac{n-k+1}{2} \right\rfloor$, ugyanakkor $k \cdot P_3 \nsubseteq G$. Ekkor bármely $P_3 \subseteq G$ esetén ezen P_3 csúcsaira illeszkedő élek száma legalább $m - \mathrm{ex}\,(n-3; (k-1) \cdot P_3)$ kell hogy legyen, ellenkező esetben $(k-1) \cdot P_3 \subseteq G - P_3$, ami ellentmond a $k \cdot P_3 \nsubseteq G$ feltételnek. Az m-re vonatkozó feltevés illetve az indukciós feltevés miatt (ugyanis $n \geq 7 \cdot k \Rightarrow n - 3 \geq 7 \cdot (k-1)$) $m - \mathrm{ex}\,(n-3; (k-1) \cdot P_3) \geq \binom{k-1}{2} + (n-k+1) \cdot (k-1) + \left\lfloor \frac{n-k+1}{2} \right\rfloor - \binom{k-2}{2} + 1 - (n-k-1) \cdot (k-2) - \left\lfloor \frac{n-k-1}{2} \right\rfloor = n + 2 \cdot k - 3$, tehát a P_3 csúcsaira illeszkedő élek száma legalább $n + 2 \cdot k - 3$.

Az indukciós feltevés miatt ugyanakkor $(k-1) \cdot P_3 \subseteq G$ és az iménti megállapítás miatt valamennyi P_3-ban van legalább $\frac{n+2 \cdot k-3}{3}$ fokú csúcs. Legyen U olyan $k-1$ elemű ponthalmaz, mely mindegyik P_3-ból tartalmaz egy legalább $\frac{n+2 \cdot k-3}{3}$ fokú csúcsot. Ekkor $n \geq 7 \cdot k$

és $k \geq 2$ miatt $\frac{n+2\cdot k-3}{3} \geq 4$, így az U-beli csúcsokkal mint a P_3-ak középső csúcsával létrehozhatunk $k-1$ új, diszjunkt P_3-at, ahol az élek U és $G-U$ közt futnak. Ekkor azonban ahhoz, hogy $k \cdot P_3 \nsubseteq G$ fennálljon, a $G-(U \cup N(U))$ pontjai közt legfeljebb csak független élek lehetnek, ekkor azonban $|E(G)| \geq \binom{k-1}{2} + (n-k+1)\cdot(k-1) + \left\lfloor \frac{n-k+1}{2} \right\rfloor$, ami ellentmondás. Tehát $k \cdot P_3 \subseteq G$, vagyis $\text{ex}(n; k \cdot P_3) \leq \binom{k-1}{2} + (n-k+1)\cdot(k-1) + \left\lfloor \frac{n-k+1}{2} \right\rfloor$ is teljesül. $\square$

Neal Bushaw és Nathan Kettle 2011-ben a fenti bizonyítással megadták $\text{ex}(n; k \cdot P_3)$ értékét $n \geq 7 \cdot k$ esetén, kisebb n-ekre csak 2015-ben született egzakt eredmény Long-Tu Yuan és Xiao-Dong Zhang jóvoltából. Ez az állítás magába foglalja 2.2.5, 3.2.5, 3.2.6 és 3.2.7 eredményeit, ezeket a bizonyítás technikája miatt tárgyaltam részletesen. Az általános eredmény belátásához szükségünk van az alábbi lemmákra.

3.2.8. Lemma. *Legyen G olyan $n \geq 3 \cdot k$ pontú gráf, melyre $(k-1) \cdot P_3 \subseteq G$, de $k \cdot P_3 \nsubseteq G$, illetve Legyen $G' = G - H$ a maximális élszámú gráf, melyre $H = (k-1) \cdot P_3$. Ha $G' = E_{n-3\cdot(k-1)}$, akkor legfeljebb p él megy tetszőleges $\{w_i : i \in [p]\} \subseteq V(G')$ és $P_3 \subseteq H$ között tetszőleges $3 \leq p \leq n-3\cdot(k-1)$ esetén, továbbá ha G'-ből legalább két él kiindul egyazon H-beli P_3-ba, azok végpontja a 2-fokú csúcs kell, hogy legyen.*

Bizonyítás. [14] Tegyük fel indirekt, hogy valamely $3 \leq p \leq n-3\cdot(k-1)$ esetén $\{w_i : i \in [p]\} \subseteq V(G')$ és $P_3 \subseteq H$ olyan, hogy $\{w_i : i \in [p]\}$ és P_3 közt legalább $p+1$ él fut. Legyen F a $\{w_i : i \in [p]\}$ és ezen P_3 csúcsai által feszített részgráf G-ben és tegyük fel, hogy $\{w_i : i \in [p]\}$ csúcsok F-beli fokszáma monoton csökken. Ekkor nyilván $d_F(w_1) \geq 2$ és $d_F(w_2) \geq 1$, így mivel w_1-nek legalább két P_3-beli szomszédja van, ezek elhelyezkedése szerint két esetet különböztetünk meg.

Tekintsük azt az esetet, amikor w_1 szomszédos P_3 egy végpontjával és a 2-fokú csúcsával is. Ha w_2 szomszédos ugyanezzel a végponttal, akkor ezt a P_3-at tudnánk úgy módosítani, hogy létezzen $H_1 = (k-1)\cdot P_3 \subseteq G$, hogy $|E(G-H_1)| > |E(G')|$, így ez nem állhat fenn. Ha w_2 valamely más pontjával szomszédos P_3-nak, akkor viszont tudunk olyan $H_2 = (k-1)\cdot P_3$-at konstruálni, melyre $G - H_2$-ben van él (w_1-et a másik P_3-beli végponttal összekötő él H_2-től független), ami szintén ellentmond a G' élszámára vonatkozó maximumfeltételnek.

Most tegyük fel, hogy w_1 szomszédos P_3 két végpontjával. Itt szintén hasonlóan könnyű végigellenőrizni, hogy w_2 bármely pontjával is szomszédos P_3-nak, adható egy új $H' =$

$(k-1)\cdot P_3$ konstrukció, melyre $G-H'$-ben van él.

Így tehát ellentmondásra jutottunk, az állítás első felét igazoltuk. Még azt kell megmutatni, hogy ha G' két pontjából valamely P_3-ba megy él, azoknak egyaránt a középső élben kell találkozni. Ez viszont abból következik, hogy az ezen 5 pont által feszített részgráfban nem lehet $P_2 \cup P_3$ mint részgráf, hiszen az újfent ellentmondana G' élszáma maximalitásának. $\square$

3.2.9. Lemma. *Legyen G olyan $n \geq 3{\cdot}k$ pontú gráf, melyre $(k-1){\cdot}P_3 \subseteq G$, de $k{\cdot}P_3 \nsubseteq G$, illetve Legyen $G' = G - H$ a maximális élszámú gráf, melyre $H = (k-1)\cdot P_3$. Tegyük fel, hogy $G' = E_{n-3\cdot(k-1)-2} \cup P_2$. Ekkor ha $P_2 \subseteq G'$ és tetszőleges $P_3 \subseteq H$ közt legfeljebb 4 él fut, akkor tetszőleges $E_2 \subseteq G' - P_2$ és tetszőleges $P_3 \subseteq H$ esetén is legfeljebb 4 él fut $E_2 \cup P_2$ és P_3 között. Továbbá ha $P_2 \subseteq G'$ és tetszőleges $P_3 \subseteq H$ közt legalább 5 él fut, akkor semelyik $P_3 \subseteq H$-ból nem indulhat 6-nál több él $P_2 \subseteq G'$-be, valamint $P_3 \subseteq H$ és $G' - P_2$ közt nem lehet él.*

Bizonyítás. [14] Jelöljük $P_2 \subseteq G$ csúcsait u_1-gyel és v_1-gyel. Tegyük fel, hogy $\{u_1; v_1\}$ és tetszőleges $P_3 \subseteq H$ közt legfeljebb 4 él fut. Ekkor 4 esetet különböztetünk meg a köztük lévő élek száma szerint.

Tegyük fel, hogy $\{u_1; v_1\}$ és tetszőleges $P_3 \subseteq H$ közt legalább 3 él fut. Mivel $k \cdot P_3 \nsubseteq G$, a $P_3 \cup u_1 \cup v_1 \cup E_2$ csúcsai által feszített részgráf nem tartalmazhat $2 \cdot P_3$-at, ezért ekkor legfeljebb 4 él fut $E_2 \cup u_1 \cup v_1$ és P_3 között, hiszen E_2 és $\{u_1; v_1\}$ között nem mehet él.

Most tegyük fel, hogy $\{u_1; v_1\}$ és tetszőleges $P_3 \subseteq H$ között pontosan 2 él fut. Ha u_1 vagy v_1 szomszédos P_3 mindkét végpontjával, vagy ha u_1 és v_1 egyike P_3 egyik végpontjával, másikuk pedig a 2-fokú csúccsal szomszédos, akkor tetszőleges $E_2 \subseteq G' - P_2$-re E_2 és P_3 között nem fut él, hiszen különben lenne $2 \cdot P_3$ a $P_3 \cup P_2 \cup E_2$ pontjai által feszített részgráfban, ami ellentmond $k \cdot P_3 \nsubseteq G$-nek. Továbbá ha u_1 és v_1 szomszédos P_3 egyik végpontjával vagy u_1 szomszédos P_3 egyik végpontjával és középső pontjával, akkor P_3 másik végpontja és középső pontja nem lehet szomszédos E_2 pontjaival, amiből az következik, hogy E_2 és P_3 közt legfeljebb 2 él mehet, ami összesen valóban legfeljebb 4 élt jelent $E_2 \cup P_2 \subseteq G'$ és $P_3 \subseteq H$ között. Ha u_1 és v_1 egyaránt szomszédos $P_3 \subseteq H$ középső csúcsával, $E_2 \subseteq G' - P_2$ és P_3 közt legfeljebb 1 él mehet, hiszen az érintett pontok által feszített részgráf se $2 \cdot P_3$-at, se $P_3 \cup 2 \cdot P_2$-t nem tartalmazhat, mivel $k \cdot P_3 \nsubseteq G$ és G' az adott feltételek mellett maximális élszámmal rendelkezik. Így ezt az esetet beláttuk.

Tegyük fel, hogy $\{u_1; v_1\}$ és tetszőleges $P_3 \subseteq H$ között pontosan 1 él fut. Ha ennek az élnek a P_3-beli szomszédja P_3 valamelyik végpontja, akkor $E_2 \subseteq G' - P_2$ nem lehet szomszédos P_3 többi pontjától, így ekkor valóban legfeljebb 4 él futhat a két pontosztály között. Ha pedig P_2 és P_3 középső csúcsa közt fut él, E_2-ből már legfeljebb csak 1 él mehet P_3-ba, hiszen a feszített részgráf nem tartalmazhat $2 \cdot P_3$-at és $P_3 \cup 2 \cdot P_2$-t.

Végül tegyük fel, hogy $\{u_1; v_1\}$ és tetszőleges $P_3 \subseteq H$ között nincs él. Ekkor E_2 és P_3 közt legfeljebb 4 él futhat, ellenkező esetben találnánk a feszített részgráfban $P_3 \cup P_2$-t.

Ha azt tesszük fel, hogy legalább 5 él húzódik $P_2 \subseteq G'$ és $P_3 \subseteq H$ között, $E_2 \subseteq G' - P_2$ egyik pontjának nem lehet P_3-beli szomszédja, ellenkező esetben a feszített részgráf tartalmazna $2 \cdot P_3$-at. $\square$

3.2.10. Lemma. *Legyen G olyan $n \geq 3 \cdot k$ pontú gráf, melyre $(k-1) \cdot P_3 \subseteq G$, de $k \cdot P_3 \nsubseteq G$, illetve Legyen $G' = G - H$ a maximális élszámú gráf, melyre $H = (k-1) \cdot P_3$. Legyen $G' = s \cdot P_2 \cup E_{n-3\cdot(k-1)-2\cdot s}$, ahol $s \geq 2$, és tegyük fel, hogy u_1 és v_1 egy G'-beli él két végpontja valamint $x_1; y_1; z_1$ egy $P_3 \subseteq H$ csúcsai úgy, hogy az $\{u_1; v_1\}$ és $\{x_1; y_1; z_1\}$ közt menő élek maximálisak a $P_2 \subseteq G'$ és $P_3 \subseteq H$ közt menő élek száma között. Ekkor ha ez az élszám legfeljebb 4, akkor tetszőleges $P_3 \subseteq H$ és $P_2 \subseteq G' - (u_1 \cup v_1)$ esetén P_3 és $P_2 \cup u_1 \cup v_1$ közt is legfeljebb 4 él futhat. Továbbá ha $\{u_1; v_1\}$ és $\{x_1; y_1; z_1\}$ közt legalább 5 él fut, akkor tetszőleges $P_3 \subseteq H$ és $P_2 \subseteq G' - (u_1 \cup v_1)$ esetén P_3 és $P_2 \cup u_1 \cup v_1$ közt legfeljebb 6 él futhat, ugyanakkor $G' - (u_1 \cup v_1)$ és $x_1 \cup y_1 \cup z_1$ közt nem fut él.*

Bizonyítás. [14] Jelöljük valamennyi $P_2 \subseteq G'$ végpontjait rendre u_i-vel és v_i-vel, amint $i \in [s]$, és tegyük fel, hogy az $\{u_1; v_1\}$ és $\{x_1; y_1; z_1\}$ közt menő élek száma legfeljebb 4. Ha u_1-ből kiindul legalább 2 él $\{x_1; y_1; z_1\}$-be, tegyük fel hogy x_1-be és y_1-be, akkor $i \in [s] \backslash \{1\}$ és $P_3 \subseteq H - (x_1 \cup y_1 \cup z_1)$ esetén $\{u_i; v_i\}$ és P_3 közt nem futhat él, hiszen egy ilyen P_3, valamint $\{u_1; v_1; u_i; v_i\}$ pontjai által feszített részgráf nem tartalmazhat $2 \cdot P_3$-at $k \cdot P_3 \nsubseteq G$ miatt. Ugyanakkor u_1 nem lehet szomszédos $\{x_1; y_1; z_1\}$ mindkét végpontjával, hiszen ekkor tudnánk $H' = (k-1) \cdot P_3$-at konstruálni, hogy $|E(G - H')| > |E(G')|$. Nyilván az iménti fejtegetés $\{u_1; v_1\}$-re valamint $\{x_1; z_1\}$-re szimmetrikus, így ekkor $\{u_1; v_1; u_i; v_i\}$ és $P_3 \subseteq H$ közt valóban legfeljebb 4 él mehet.

Ha legalább 5 él van $\{u_1; v_1\}$ és $\{x_1; y_1; z_1\}$ között, $\{x_1; y_1; z_1\}$ és $G' - (u_1 \cup v_1)$ között már nem mehet él, hiszen $x \in G' - s \cdot P_2$ és $i \in [s] \backslash \{1\}$ esetén az $\{x_1; y_1; z_1; u_1; v_1; u_i; v_i\}$ valamint az $\{x_1; y_1; z_1; u_1; v_1; x\}$ által feszített részgráfok nem tartalmazhatnak $2 \cdot P_3$ részgráfot. Így könnyű látni, hogy tényleg legfeljebb 6 él mehet $\{u_1; v_1; u_i; v_i\}$ és $P_3 \subseteq H$ között. Továbbá ha pontosan 6 él fut $\{u_1; v_1; u_i; v_i\}$ és $P_3 \subseteq H$ közt, szükségképpen vagy mind a 6 él $\{u_1; v_1\}$ és P_3 között megy, vagy mind $\{u_i; v_i\}$ és P_3 között, ugyanis ellenkező esetben lenne $2 \cdot P_3$ részgráf a P_3 és $\{u_1; v_1; u_i; v_i\}$ pontjai által feszített részgráfban. $\square$

3.2.11. Tétel.

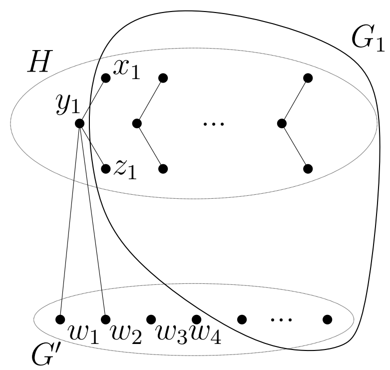
$$\mathrm{ex}\left(n; k \cdot P_3\right) = \begin{cases} \binom{3\cdot k-1}{2} + \left\lfloor \frac{n-3\cdot k+1}{2} \right\rfloor & \textit{ha } 3 \cdot k \leq n \leq 5 \cdot k - 1 \\ \binom{k-1}{2} + (n-k+1)\cdot(k-1) + \left\lfloor \frac{n-k+1}{2} \right\rfloor & \textit{ha } n > 5 \cdot k - 1 \end{cases}$$

Bizonyítás. [14] Elegendő annak belátása, hogy ha G olyan n pontú $k \cdot P_3$-mentes gráf, melynek $\binom{3\cdot k-1}{2} + \left\lfloor \frac{n-3\cdot k+1}{2} \right\rfloor$ illetve $\binom{k-1}{2} + (n-k+1)\cdot(k-1) + \left\lfloor \frac{n-k+1}{2} \right\rfloor$ éle van rendre $3 \cdot k \leq n < 5 \cdot k - 1$ illetve $n > 5 \cdot k - 1$ esetén, akkor szükségképpen $G = K_{3\cdot k-1} \cup M_{n-3\cdot k+1}$ illetve $G = K_{k-1} + M_{n-k+1}$ rendre, ha pedig $n = 5 \cdot k - 1$ és így ekkor $|E(G)| = \binom{k-1}{2} + (n-k+1)\cdot(k-1) + \left\lfloor \frac{n-k+1}{2} \right\rfloor = \binom{3\cdot k-1}{2} + \left\lfloor \frac{n-3\cdot k+1}{2} \right\rfloor = \binom{3\cdot k-1}{2} + k$, akkor szükségképpen $G = K_{3\cdot k-1} \cup M_{2\cdot k}$ vagy $G = K_{k-1} + M_{n-k+1}$. Ez azért elegendő, mert ha feltesszük, hogy valahogyan eggyel több élt hozzávéve a gráfhoz továbbra sincs $k \cdot P_3$ részgráf, tetszőleges élt elhagyva sincs, azonban tudunk úgy elhagyni élt, hogy ezektől eltérő konstrukciót kapunk, ami ellentmondásra vezet. A bizonyítást n-re és k-ra vonatkozó kettős indukcióval végezzük. A $k = 1$ esetet láttuk a 2.2.5 lemmánál, így feltehető $k \geq 2$. A továbbiakban $n \geq 3 \cdot k$ miatt feltételezhető $n \geq 6$. A bizonyítás további menete n és k kapcsolatától függően 3 esetre tagolódik.

Tegyük fel, hogy $n = 3 \cdot k$, legyen ekkor G olyan n pontú $\binom{3\cdot k-1}{2}$ élű gráf, melyre $k \cdot P_3 \nsubseteq G$. A $k = 2$ esetben könnyű látni, hogy csak $G = K_5 \cup M_1$ jöhet szóba. Tegyük fel most, hogy $k \geq 3$, valamint hogy az állítás $k-1$-ig igaz. Ekkor $|E(G)| = \binom{3\cdot k-1}{2} > \binom{3\cdot(k-1)-1}{2} + 2$ és $n = 3 \cdot k < 5 \cdot (k-1) - 1$, továbbá a $k-1; n$-re vonatkozó indukciós feltevés miatt $(k-1) \cdot P_3 \subseteq G$, legyen ekkor $H = (k-1) \cdot P_3 \subseteq G$, hogy $|E(G-H)|$ maximális, továbbá legyen $G' = G - H$. Ekkor $|V(G')| = 3$, legyen $V(G') = \{u; v; w\}$. Nyilván $|E(G')| \leq 1$, különben $P_3 \subseteq G'$ lenne, amiből $k \cdot P_3 \subseteq G$ következne. Ekkor két esetet különböztetünk meg G' élszáma szerint. Ha $|E(G')| = 1$, az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy u és v közt fut ez az él. Ekkor 3.2.9 miatt $\{u; v; w\}$ és tetszőleges $P_3 \subseteq H$ között legfeljebb 6 él futhat, az egyenlőség pedig pontosan akkor áll fenn, ha w nem szomszédos semelyik pontjával $P_3 \subseteq H$-nak, így ekkor $|E(G'; H)| \leq 6 \cdot (k-1)$, az egyenlőség pedig pontosan akkor áll fenn, ha w izolált csúcs, valamint $G' - w$ minden pontjából H minden pontjába megy él. Így ekkor $\binom{3\cdot k-1}{2} = |E(G)| \leq |E(G - (u \cup v \cup w))| + 6 \cdot (k-1) + 1 \leq$

$\binom{3\cdot(k-1)}{2}+6\cdot(k-1)+1=\binom{3\cdot k-1}{2}$, így szükségképpen $|E(G-(u\cup v\cup w))|=\binom{3\cdot(k-1)}{2}$ és $|E(G';H)|=6\cdot(k-1)$, valamint w izolált, így tehát ekkor $G=K_{3\cdot k-1}\cup M_1$. Ha pedig $|E(G')|=0$, 3.2.8 következtében G' és tetszőleges $P_3\subseteq H$ között legfeljebb 3 él lehet, tehát ekkor $|E(G';H)|\leq 3\cdot(k-1)$, így $\binom{3\cdot k-1}{2}=|E(G)|\leq\binom{3\cdot(k-1)}{2}+3\cdot(k-1)<\binom{3\cdot k-1}{2}$, ez viszont lehetetlen.

Most tegyük fel, hogy $3\cdot k<n\leq 5\cdot k-1$, ekkor mivel $|E(G)|\geq\binom{3\cdot k-1}{2}+\left\lfloor\frac{n-3\cdot k+1}{2}\right\rfloor$,
$$|E(G)|>\begin{cases}\binom{3\cdot(k-1)-1}{2}+\left\lfloor\frac{n-3\cdot(k-1)+1}{2}\right\rfloor & \text{ha } 3\cdot k<n\leq 5\cdot(k-1)-1\\ \binom{k-2}{2}+(n-k+2)\cdot(k-2)+\left\lfloor\frac{n-k+2}{2}\right\rfloor & \text{ha } 5\cdot(k-1)-1<n\leq 5\cdot k-1\end{cases}.$$
Az indukciós feltevésből $(k-1)\cdot P_3\subseteq G$, legyen ekkor $H=(k-1)\cdot P_3\subseteq G$, hogy $|E(G-H)|$ maximális, továbbá legyen $G'=G-H$. Mivel $P_3\nsubseteq G'$, így G' valamennyi komponense izolált pont vagy független él, így legyen $G'=s\cdot P_2\cup E_{n-3\cdot(k-1)-2\cdot s}$, ahol $0\leq s\leq\left\lfloor\frac{n-3\cdot(k-1)}{2}\right\rfloor$. Ha $s=0$, bármely $H_1=(k-1)\cdot P_3\subseteq G$ esetén $|E(G-H_1)|=0$, továbbá ekkor $n-3\cdot(k-1)\geq 4$. Mivel H pontjai közt nyilván legfeljebb $\binom{3\cdot(k-1)}{2}$ él lehet, G' és H között így legalább $\binom{3\cdot k-1}{2}+\left\lfloor\frac{n-3\cdot k+1}{2}\right\rfloor-\binom{3\cdot(k-1)}{2}=\left\lfloor\frac{n-3\cdot k+1}{2}\right\rfloor+6\cdot k-5>6\cdot k-5$ él megy, így kell lennie H-beli P_3-nak, melyből legalább 7 él megy G'-be. Legyen ezen P_3 három csúcsa $x_1;y_1;z_1$, hogy y_1 szomszédos x_1-gyel és z_1-gyel egyaránt. Ekkor létezik $w_1;w_2\in V(G')$, hogy w_1 és w_2 ezen P_3 valamely csúcsával egyaránt szomszédosak, ez a csúcs azonban 3.2.8 következtében csak y_1 lehet, továbbá $w_3;w_4\in V(G'-(w_1\cup w_2))$ esetén $\{w_1;w_2;w_3;w_4\}$ és tetszőleges $P_3\subseteq H$ közt legfeljebb 4 él futhat, szintén 3.2.8 miatt. Legyen $G_1=G-(y_1\cup w_1\cup w_2\cup w_3\cup w_4)$, ekkor $|E(G_1)|\geq\binom{3\cdot k-1}{2}+\left\lfloor\frac{n-3\cdot k+1}{2}\right\rfloor-(n-1)-4\cdot(k-2)>\binom{3\cdot(k-1)-1}{2}+\left\lfloor\frac{n-3\cdot k-1}{2}\right\rfloor$, így $|E(G_1)|>\binom{3\cdot k-4}{2}$. Ugyanakkor $|V(G_1)|=n-5$ miatt $\binom{n-5}{2}\geq|E(G_1)|$, ezért $n-5>3\cdot k-4$. Az indukciós feltevést $k-1$-re alkalmazva ekkor $(k-1)\cdot P_3\subseteq G_1$ adódik, viszont ekkor $k\cdot P_3\subseteq G$ ellentmondás.



3.3. ábra.

Tehát $s \geq 1$, azaz G'-ben van él. Tegyük fel, hogy $\exists u_1v_1 \in E(G')$, hogy $\{u_1; v_1\}$-ből nem megy él H-ba. $n = 3 \cdot k + 1$ esetén legyen $G_2 = G - u_1$, ekkor $k \cdot P_3 \nsubseteq G_2 \subseteq G$ olyan, hogy $|V(G_2)| = 3 \cdot k$ és $|E(G_2)| \geq \binom{3 \cdot k - 1}{2}$. A k-ra illetve $n-1$-re vonatkozó indukciós feltevés szerint ekkor $G_2 = K_{3 \cdot k-1} \cup M_1$, valamint v_1 az izolált pont G_2-ben, így tehát $G = K_{3 \cdot k-1} \cup M_2$. Amennyiben $n > 3 \cdot k + 1$, legyen $G_3 = G - (u_1 \cup v_1)$, ekkor tehát $k \cdot P_3 \nsubseteq G_3 \subseteq G$, hogy $|V(G_3)| = n - 2 \geq 3 \cdot k$ és $|E(G_3)| \geq \binom{3 \cdot k - 1}{2} + \left\lfloor \frac{n - 3 \cdot k - 1}{2} \right\rfloor$. Itt a k-ra illetve $n-2$-re alkalmazott indukciós feltevés szerint $|E(G_3)| = \binom{3 \cdot k - 1}{2} + \left\lfloor \frac{n-3 \cdot k - 1}{2} \right\rfloor$, valamint $G_3 = K_{3 \cdot k - 1} \cup M_{n - 3 \cdot k - 1}$, azaz ekkor $G = K_{3 \cdot k - 1} \cup M_{n - 3 \cdot k + 1}$. A továbbiakban feltesszük, hogy valamennyi G'-beli csúcsból megy H-ba él. Legyen $u_1v_1 \in E(G')$ és $x_1; y_1; z_1 \in V(H)$ olyan, hogy $\{x_1; y_1; z_1\}$ 3 hosszú út H-ban és a G'-beli élek valamint a H-beli P_3-ak közt futó élek száma $\{u_1; v_1\}$ és $\{x_1; y_1; z_1\}$ közt maximális, továbbá legyen y_1 szomszédos x_1-gyel és z_1-gyel és u_1 szomszédos $\{x_1; y_1; z_1\}$ valamely pontjával. Ha $s = 1$, akkor a G'-beli izolált csúcsok száma $n - 3 \cdot k + 3 - 2 \cdot s \geq 2$. Amennyiben $\{u_1; v_1\}$ és $\{x_1; y_1; z_1\}$ között legfeljebb 4 él fut, úgy 3.2.9 szerint tetszőleges $P_3 \subseteq H$ és $\{u_1; v_1; w_1; w_2\}$ között legfeljebb 4 él fut, amennyiben $w_1; w_2$ izolált G'-ben. Legyen $\alpha \in N(u_1) \cap \{x_1; y_1; z_1\}$, továbbá legyen $G_4 = G - (u_1 \cup v_1 \cup \alpha \cup w_1 \cup w_2)$, ekkor $n \leq 5 \cdot k - 1$ miatt $|E(G_4)| \geq \binom{3 \cdot k - 1}{2} + \left\lfloor \frac{n - 3 \cdot k + 1}{2} \right\rfloor - 4 \cdot (k-2) - (n-1) - 1 > \binom{3 \cdot k - 4}{2} + \left\lfloor \frac{n - 3 \cdot k + 1}{2} \right\rfloor$, másrészt $|V(G_4)| = n - 5$ miatt $n - 5 > 3 \cdot k - 4$, így a $k-1$-re illetve $n-5$-re vonatkozó indukciós feltevés szerint $(k-1) \cdot P_3 \subseteq G_4$, amiből $k \cdot P_3 \subseteq G$ ellentmondás. Így tehát $s = 1$ esetén legalább 5 élnek kell futnia $\{x_1; y_1; z_1\}$ és $\{u_1; v_1\}$ között. Ekkor 3.2.9 szerint $\{x_1; y_1; z_1\}$ és a G'-ben izolált pontok között nem futhat él, továbbá bármely másik, H-beli P_3 és $\{u_1; v_1; w_1; w_2\}$ között legfeljebb 6 él futhat, ahol w_1 és w_2 izolált pontok G'-ben. Az előző esethez hasonlóan jelölje u_1-nek $\{x_1; y_1; z_1\}$-beli szomszédját α, ekkor legyen $G_5 = G - (u_1 \cup v_1 \cup \alpha \cup w_1 \cup w_2)$. Ezúttal G_5 élszámára a $|E(G_5)| \geq \binom{3 \cdot k - 1}{2} + \left\lfloor \frac{n - 3 \cdot k + 1}{2} \right\rfloor - 6 \cdot (k-1) - (3 \cdot k - 4) - 1 > \binom{3 \cdot k - 4}{2} + \left\lfloor \frac{n - 3 \cdot k - 1}{2} \right\rfloor$ becslés adódik, ebből pedig $n - 5 > 3 \cdot k - 4$ ismét. A $k-1$-re illetve $n-5$-re vonatkozó indukciós feltevés ismételten ellentmondásra vezet, ezért $s \geq 2$ kell, hogy legyen. Az $s \geq 2$ esetet szintén az $\{u_1; v_1\}$ és $\{x_1; y_1; z_1\}$ közti élek számától függően két esetben vizsgáljuk. Ekkor létezik $u_2v_2 \in E(G')$, ami diszjunkt u_1v_1-től. Legyen $G_6 = G - (u_1 \cup v_1 \cup \alpha \cup u_2 \cup v_2)$. Ha $\{u_1; v_1\}$ és $\{x_1; y_1; z_1\}$ között legfeljebb 4 él fut, akkor $n \leq 5 \cdot k - 1$ miatt $|E(G_6)| \geq \binom{3 \cdot k - 1}{2} + \left\lfloor \frac{n - 3 \cdot k + 1}{2} \right\rfloor - (n-5) - 4 \cdot (k-1) - 2 \geq \binom{3 \cdot k - 4}{2} + \left\lfloor \frac{n - 3 \cdot k - 1}{2} \right\rfloor$. Másfelől $k \cdot P_3 \nsubseteq G$ miatt $(k-1) \cdot P_3 \nsubseteq G_6$, ezért $|E(G_6)| \leq \binom{3 \cdot k - 4}{2} + \left\lfloor \frac{n - 3 \cdot k - 1}{2} \right\rfloor$. Így tehát mindenhol fennáll az egyenlőség, ezért $n = 5 \cdot k - 1$ és $|E(G_6)| = \binom{3 \cdot k - 4}{2} + \left\lfloor \frac{n - 3 \cdot k - 1}{2} \right\rfloor$, valamint $d_G(\alpha) = n - 1$. Ekkor a $k-1$-re illetve $n-5$-re vonatkozó indukciós feltevés szerint $G_6 \in \{K_{3 \cdot k - 4} \cup M_{n - 3 \cdot k - 1}; K_{k-2} + M_{n-k-3}\}$. Ha $G = K_{3 \cdot k - 4} \cup M_{n - 3 \cdot k - 1}$, akkor $k \geq 3$

esetén $k \cdot P_3 \subseteq G$ adódna, így $k = 2$, ekkor pedig $G = K_1 + M_8$. $G_6 = K_{k-2} + M_{n-k-3}$ esetén pedig $G = K_{k-1} + M_{n-k+1}$ adódik. Amennyiben $\{u_1; v_1\}$ és $\{x_1; y_1; z_1\}$ közt legalább 5 él megy, úgy G_6 élszámára a $\binom{3 \cdot k-4}{2} + \left\lfloor \frac{n-3 \cdot k-1}{2} \right\rfloor \geq |E(G_6)| \geq \binom{3 \cdot k-1}{2} + \left\lfloor \frac{n-3 \cdot k+1}{2} \right\rfloor - 6 \cdot (k-1) - (3 \cdot k - 4) - 2 = \binom{3 \cdot k-4}{2} + \left\lfloor \frac{n-3 \cdot k-1}{2} \right\rfloor$ felírható, mivel $(k-1) \cdot P_3 \nsubseteq G_6$, ekkor tehát $|E(G_6)| = \binom{3 \cdot k-4}{2} + \left\lfloor \frac{n-3 \cdot k-1}{2} \right\rfloor$, és ekkor szükségképpen $\{u_1; v_1; u_2; v_2\}$ és tetszőleges H-beli P_3 közt pontosan 6 él fut. Feltettük, hogy valamely $P_3 \subseteq H$ és $\{u_2; v_2\}$ közt fut él, legyenek ezen P_3 pontjai $x_2; y_2; z_2$. Ekkor 3.2.10 miatt $\{u_2; v_2\}$ és $\{x_2; y_2; z_2\}$ közt 6 él fut, másrészt viszont a $k-1$-re illetve $n-5$-re vonatkozó indukciós feltevés szerint $G_6 = K_{3 \cdot k-4} \cup M_{n-3 \cdot k-1}$, illetve $n = 5 \cdot k - 1$ esetén $G_6 = K_{k-2} + M_{n-k-3}$ is lehetséges.

Végül tegyük fel, hogy $n > 5 \cdot k - 1$. Alkalmazva az élszámra, valamint a $k-1$-re és n-re vonatkozó indukciós feltevést, $|E(G)| \geq \binom{k-1}{2} + (n-k+1) \cdot (k-1) + \left\lfloor \frac{n-k+1}{2} \right\rfloor > \binom{k-2}{2} + (n-k+2) \cdot (k-2) + \left\lfloor \frac{n-k+2}{2} \right\rfloor$ adódik, ezért $(k-1) \cdot P_3 \subseteq G$. Legyen $H \subseteq G$ olyan, hogy H-t valamely $(k-1) \cdot P_3$ feszíti és $G' = G - H$ maximális élszámú. Ekkor G' nyilván s diszjunkt élből és $n - 3 \cdot (k-1) - 2 \cdot s$ izolált pontból áll, ahol $0 \leq s \leq \left\lfloor \frac{n-3 \cdot k+3}{2} \right\rfloor$. Tegyük fel, hogy $s = 0$. Ekkor mivel H-ban legfeljebb $\binom{3 \cdot k-3}{2}$ él van, a G élszámára vonatkozó becslés következtében G' és H közt legalább $\binom{k-1}{2} + (n-k+1) \cdot (k-1) + \left\lfloor \frac{n-k+1}{2} \right\rfloor - \binom{3 \cdot k-3}{2} > 6 \cdot k - 5$ él fut, ezért valamely H-beli P_3-ból legalább 7 él indul ki G'-be. Legyen ennek a P_3-nak a 3 csúcsa $x_1; y_1; z_1$ úgy, hogy y_1 szomszédos x_1-gyel és z_1-gyel. Ekkor $w_1; w_2 \in V(G')$, hogy azok egyaránt szomszédosak y_1-gyel, de x_1 és z_1 közül egyikkel sem, hiszen ha végponttal szomszédosak, könnyen megadható olyan $H' = (k-1) \cdot P_3 \subseteq G$, hogy $G - H'$-ben van él, ez viszont ellentmond a G' élszámára vonatkozó maximumfeltételnek. Ekkor viszont 3.2.8 következményeként a H-t definiáló P_3-ak és $\{w_1; w_2; w_3; w_4\} \subseteq V(G')$ közt legfeljebb 4 él haladhat, így amennyiben $G_7 = G - (w_1 \cup w_2 \cup w_3 \cup w_4)$, $|E(G_7)| \geq \binom{k-1}{2} + (n-k+1) \cdot (k-1) + \left\lfloor \frac{n-k+1}{2} \right\rfloor - (n-1) - 4 \cdot (k-2) > \binom{k-2}{2} + (n-k-3) \cdot (k-2) + \left\lfloor \frac{n-k-3}{2} \right\rfloor$, ezért az indukciós feltevést $k-1$-re illetve $n-5$-re alkalmazva $(k-1) \cdot P_3$ adódik, ami $k \cdot P_3 \subseteq G$-t implikálja, ez viszont ellentmondás. Így tehát $s \geq 1$. Legyen uv tetszőleges él G'-ben, tegyük fel, hogy sem u-nak, sem v-nek nincs H-beli szomszédja. Legyen ekkor $G_8 = G - (u \cup v)$, ekkor $|E(G_8)| \geq \binom{k-1}{2} + (n-k+1) \cdot (k-1) + \left\lfloor \frac{n-k+1}{2} \right\rfloor - 1 > \binom{k-1}{2} + (n-k-1) \cdot (k-1) + \left\lfloor \frac{n-k-1}{2} \right\rfloor$, amennyiben $n > 5 \cdot k$ vagyis alkalmazható a k-ra illetve $n-2$-re vonatkozó indukciós feltevés, ekkor viszont $k \cdot P_3 \subseteq G_8 \subseteq G$ ellentmondás. $n = 5 \cdot k$ esetén pedig legyen $G_9 = G - u$, ekkor ha $k = 2$, $G_9 \in \{K_1 + M_8; K_5 \cup M_4\}$, amiből $2 \cdot P_3 \subseteq G$, $k \geq 3$ esetén pedig $|E(G_9)| \geq \binom{k-1}{2} + (n-k+1) \cdot (k-1) + \left\lfloor \frac{n-k+1}{2} \right\rfloor - 1 > \binom{k-1}{2} + (n-k) \cdot (k-1) + \left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor$ és a k-ra valamint $n-1$-re vonatkozó indukciós feltevés szerint $k \cdot P_3 \subseteq G_9$, ami ismételt ellentmondás, ezért tetszőleges G'-beli uv él legalább egyik végpontja szükségképpen szomszédos valamely H-beli csúccsal. Legyen $u_1v_1 \in E(G')$ és $x_1; y_1; z_1 \in V(H)$ olyan, hogy $x_1; y_1; z_1$ 3 hosszú út H-ban és a G'-beli élek valamint a H-beli P_3-ak közt futó élek száma $\{u_1; v_1\}$ és $\{x_1; y_1; z_1\}$ közt maximális, továbbá legyen y_1 szomszédos x_1-gyel és z_1-gyel és u_1 szomszédos $\{x_1; y_1; z_1\}$ valamely α pontjával. Tegyük fel, hogy $s = 1$. Feltéve, hogy az $\{u_1; v_1\}$ és $\{x_1; y_1; z_1\}$ közötti élszám legfeljebb 4, úgy 3.2.9 következményeképp legfeljebb 4 él fut bármely H-beli P_3 és $\{u_1; v_1; w_1; w_2\}$ csúcsai között, ahol w_1 és w_2 izolált pontok G'-ben. Legyen $G_{10} = G - (u_1 \cup v_1 \cup \alpha \cup w_1 \cup w_2)$, ekkor $|E(G_{10})| \geq \binom{k-1}{2} + (n-k+1) \cdot (k-1) + \left\lfloor \frac{n-k+1}{2} \right\rfloor - 4 \cdot (k-2) - (n-1) - 1 > \binom{k-2}{2} + (n-k-3) \cdot (k-2) + \left\lfloor \frac{n-k-3}{2} \right\rfloor$, így a $k-1$-re és $n-5$-re vonatkozó indukciós feltevés szerint $(k-1) \cdot P_3 \subseteq G_{10}$, viszont ekkor $k \cdot P_3 \subseteq G$ ellentmondás. Ha pedig feltesszük, hogy $\{u_1; v_1\}$ és $\{x_1; y_1; z_1\}$ között legalább 5 él megy, akkor 3.2.9 miatt valamely H-beli P_3 és $\{u_1; v_1; w_1; w_2\}$ csúcsai közt legfeljebb 6 él futhat, továbbá G' izolált pontjai és $\{x_1; y_1; z_1\}$ pontjai közt nincs él. Így amennyiben $G_{11} = G - (u_1 \cup v_1 \cup \alpha \cup w_1 \cup w_2)$, úgy $|E(G_{11})| \geq \binom{k-1}{2} + (n-k+1) \cdot (k-1) + \left\lfloor \frac{n-k+1}{2} \right\rfloor - 6 \cdot (k-1) - (3 \cdot k - 4) - 1 > \binom{k-2}{2} + (n-k-3) \cdot (k-2) + \left\lfloor \frac{n-k-3}{2} \right\rfloor$, ekkor pedig a $k-1$-re és $n-5$-re vonatkozó indukciós feltevés miatt $(k-1) \cdot P_3 \subseteq G_{11}$, de ekkor $k \cdot P_3 \subseteq G$ ellentmondás. Ezért szükségképpen $s \geq 2$, legyen u_2v_2 tehát egy u_1v_1-től diszjunkt él G'-ben. Most ismételten két esetet vizsgálunk az $\{u_1; v_1\}$ és $\{x_1; y_1; z_1\}$ közötti élek számától függően. Ha $\{u_1; v_1\}$ és $\{x_1; y_1; z_1\}$ közt legfeljebb 4 él fut, 3.2.10 következtében $\{u_1; v_1; u_2; v_2\}$ és tetszőleges H-t definiáló P_3 között is legfeljebb 4 él mehet. Legyen $G_{12} = G - (u_1 \cup v_1 \cup \alpha \cup u_2 \cup v_2)$, ekkor $|E(G_{12})| \geq \binom{k-1}{2} + (n-k+1) \cdot (k-1) + \left\lfloor \frac{n-k+1}{2} \right\rfloor - (n-5) - 4 \cdot (k-1) - 2 > \binom{k-2}{2} + (n-5-(k-1)+1) \cdot (k-2) + \left\lfloor \frac{n-5-3 \cdot (k-1)+1}{2} \right\rfloor$, ekkor viszont a $k-1$-re és $n-5$-re vonatkozó indukciós feltevés szerint $(k-1) \cdot P_3 \nsubseteq G_{12}$, így $G_{12} = K_{k-2} + M_{n-k-3}$. Ekkor α szomszédos G_{12} minden csúcsával, és $G_{12} + \alpha$ és $\{u_1; v_1; u_2; v_2\}$ közt pontosan $4 \cdot (k-1)$ él megy, így ekkor $G = K_{k-1} + M_{n-k+1}$ valóban. Végül, ha legalább 5 él megy $\{u_1; v_1\}$ és $\{x_1; y_1; z_1\}$ között, 3.2.10 következtében egy H-beli P_3 és $\{u_1; v_1; u_2; v_2\}$ közt legfeljebb 6 él mehet, továbbá $\{x_1; y_1; z_1\}$ és $G' - (u_1 \cup v_1 \cup u_2 \cup v_2)$ csúcsai közt nem fut él. Legyen $G_{13} = G - (u_1 \cup v_1 \cup \alpha \cup u_2 \cup v_2)$, ahol $\alpha \in \{x_1; y_1; z_1\}$ szomszédos u_1v_1 valamely végpontjával. Az előbb láttuk, hogy α nem szomszédos semelyik $G' - (u_1 \cup v_1 \cup u_2 \cup v_2)$-beli ponttal, továbbá $N_H(\alpha) \geq 3 \cdot k - 4$, ezért $|E(G_{13})| \geq \binom{k-1}{2} + (n-k+1) \cdot (k-1) + \left\lfloor \frac{n-k+1}{2} \right\rfloor - 6 \cdot (k-1) - (3 \cdot k - 4) - 2 > \binom{k-2}{2} + (n-5-(k-1)+1) \cdot (k-2) + \left\lfloor \frac{n-5-(k-1)+1}{2} \right\rfloor$, így alkalmazva a $k-1$-re és $n-5$-re vonatkozó indukciós feltevést $(k-1) \cdot P_3 \subseteq G_{13}$ adódik, ebből pedig $k \cdot P_3 \subseteq G$ következik, ami ellentmondásra vezet.

Minden esetet megvizsgálva láthatjuk, hogy az állítás valóban minden, a feltételeknek megfelelő n-re és k-ra teljesül. $\square$

Következő lépésként hosszabb utak diszjunkt uniójára vizsgáljuk a problémát. A 3 hosszú utak uniójának keresésekor a fő ötlet magas fokszámú csúcsok keresése volt. Ennek mintájára hosszabb utak esetén nagy méretű közös szomszédsággal rendelkező ponthalmazt keresünk. Itt kis csúcsszámra nincs egzakt eredmény publikálva. A jelenlegi ismert eredmény ismertetéséhez szükség lesz pár fogalom bevezetésére, illetve az alábbi lemmára.

3.2.12. Definíció. *Egy $\Gamma = (V(\Gamma); E(\Gamma))$ rendezett párt **hipergráfnak** nevezünk, ha $V(\Gamma)$ halmaz, $E(\Gamma) \subseteq \mathcal{P}(V(\Gamma))$. $V(\Gamma)$ elemei Γ **csúcsai/pontjai**, $E(\Gamma)$ elemei Γ **(hiper)élei**.*

3.2.13. Definíció. *Egy Γ hipergráf **k-uniform**, ha minden éle pontosan k csúcsot tartalmaz. Speciálisan az egyszerű gráfok 2-uniform hipergráfok.*

3.2.14. Definíció. *Egy hipergráf **k-metsző**, ha bármely 2 élének legalább k közös pontja van. Az 1-metsző hipergráfokat az egyszerűség kedvéért metsző hipergráfnak nevezzük.*

3.2.15. Lemma. *Legyen G tetszőleges gráf, melyre $|V(G)| = n$ és $|E(G)| = m$, valamint F_1 és F_2 tetszőleges gráfok, továbbá legyen $t \in \mathbb{N}^+$. Ekkor ha $F_1 \cup F_2 \nsubseteq G$, valamint $F_1 \subseteq G$, akkor F_1-nek lesz t csúcsa, melyeknek legalább $n' \geq \frac{m'-(n-r)\cdot(t-1)}{(r-t+1)\cdot\binom{r}{t}}$ közös szomszédjuk van, ahol $m' = m - \mathrm{ex}(n-r; F_2) - \binom{r}{2}$ és $r = |V(F_1)|$*

Bizonyítás. [3] A kiindulási feltételből $F_2 \nsubseteq G - F_1$ következik, így $|E(G - F_1)| \leq \mathrm{ex}(n-r; F_2)$, így $|E(F_1; G - F_1)| \geq m - \mathrm{ex}(n-r; F_2) - \binom{r}{2} = m'$.

Jelölje n_0 azon $G - F_1$-beli csúcsok számát, melynek legalább t darab F_1-beli szomszédja van. Ekkor $m' \leq |E(F_1; G - F_1)| \leq n_0 \cdot r + (n - r - n_0) \cdot (t-1)$ adódik, amiből $n_0 \geq \frac{m'-(n-r)\cdot(t-1)}{r-t+1}$. Mivel $V(F_1)$-nek $\binom{r}{t}$ darab t-elemű részhalmaza van, így ezek közül létezik legalább egy, amelynek $n' \geq \frac{m'-(n-r)\cdot(t-1)}{(r-t+1)\cdot\binom{r}{t}}$ közös szomszédja lesz. $\square$

3.2.16. Tétel. *Ha $n \geq 2 \cdot l + 2 \cdot k \cdot l \cdot \left(\left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil + 1\right) \cdot \binom{l}{\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor}$ és $k \geq 2$ valamint $l \geq 4$, akkor*

$$\mathrm{ex}(n; k \cdot P_l) = \binom{k \cdot \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor - 1}{2} + \left(n - k \cdot \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor + 1\right) \cdot \left(k \cdot \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor - 1\right) + \frac{(-1)^{l-1} + 1}{2}.$$

Bizonyítás. [3] Tekintsük páratlan l esetén $G(n;k;l)=K_{k\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor-1}+\left(P_2\cup E_{n-k\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor-1}\right)$-et, páros l esetén pedig $G(n;k;l)=K_{k\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor-1}+E_{n-k\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor+1}$-et. Ezek nyilván nem tartalmazhatnak $k\cdot P_l$-t, hiszen minden P_l-nek legalább $\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor$ csúcsot kell tartalmaznia $K_{k\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor-1}$ csúcsai közül, illetve páratlan l esetén az egyik P_l-nek elegendő $\left\lfloor\frac{l-1}{2}\right\rfloor$-et, de páratlan l esetén ez a két érték megegyezik, így megkaptuk, hogy ekkor $\mathrm{ex}(n;k\cdot P_l)\geq\binom{k\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor-1}{2}+\left(n-k\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor+1\right)\cdot\left(k\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor-1\right)+\frac{(-1)^{l-1}+1}{2}$.

A másik irány bizonyítása k szerinti teljes indukcióval történik.

Legyen először $k=2$, valamint legyen G olyan gráf, hogy $|V(G)|=n$ és $|E(G)|\geq\binom{2\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor-1}{2}+\left(n-2\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor+1\right)\cdot\left(2\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor-1\right)+\frac{(-1)^{l-1}+1}{2}$ úgy, hogy $2\cdot P_l\nsubseteq G$. Ekkor az n-re vonatkozó kezdeti feltétel szerint $n\geq 2\cdot l+2\cdot 2\cdot l\cdot\left(\left\lceil\frac{l}{2}\right\rceil+1\right)\cdot\binom{l}{\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor}\geq l^2$, így 2.2.6 következtében $P_l\subseteq G$. Alkalmazzuk 3.2.15-t, legyen a lemma-beli jelöléseknek megfelelően $F_1=P_l; F_2=P_l$ és $m=\binom{2\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor-1}{2}+\left(n-2\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor+1\right)\cdot\left(2\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor-1\right)+\frac{(-1)^{l-1}+1}{2}$, ekkor 3.2.15 értelmében $P_l\subseteq G$ csúcsai egy $\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor$ elemű részhalmazának $G-P_l$-ben legalább n' közös szomszédja kell, hogy legyen, ahol n'-re a következő becslést adhatjuk:

$$n'\geq\frac{\binom{2\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor-1}{2}+\left(n-2\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor+1\right)\cdot\left(2\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor-1\right)}{\left(\left\lceil\frac{l}{2}\right\rceil+1\right)\cdot\binom{l}{\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor}}+$$

$$\frac{\frac{(-1)^{l-1}+1}{2}-\mathrm{ex}(n-l;P_l)-\binom{l}{2}-(n-l)\cdot\left(\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor-1\right)}{\left(\left\lceil\frac{l}{2}\right\rceil+1\right)\cdot\binom{l}{\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor}}\geq$$

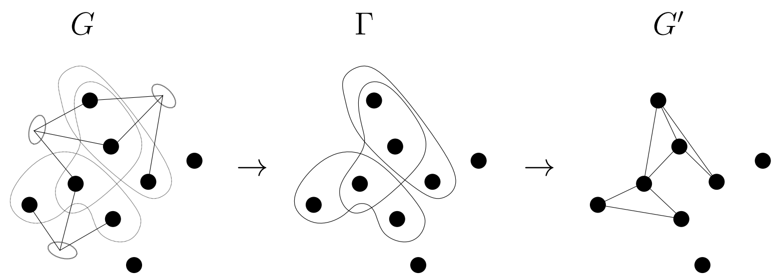
$$\frac{\binom{2\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor-1}{2}+\left(n-2\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor+1\right)\cdot\left(2\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor-1\right)}{\left(\left\lceil\frac{l}{2}\right\rceil+1\right)\cdot\binom{l}{\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor}}+$$

$$\frac{\frac{(-1)^{l-1}+1}{2}-(n-l)\cdot\left(\frac{l}{2}-1\right)-\binom{l}{2}-(n-l)\cdot\left(\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor-1\right)}{\left(\left\lceil\frac{l}{2}\right\rceil+1\right)\cdot\binom{l}{\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor}}\geq$$

$$\frac{\left(1-\frac{(-1)^{l-1}+1}{4}\right)\cdot n-l}{\left(\left\lceil\frac{l}{2}\right\rceil+1\right)\cdot\binom{l}{\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor}}$$

Itt az első becslés 2.2.6-ból adódik, míg a második elemi egyszerűsítések következménye, páros l esetén ekvivalens $(n-l)\cdot\left(\frac{l}{2}-1\right)\geq n-l$-lel, páratlan l esetén pedig $(2\cdot l-3)\cdot\left(\frac{l}{2}-2\right)+\frac{n}{2}\geq\frac{n}{2}-l$-lel, ezek pedig $l\geq 4$ miatt triviálisan teljesülnek.

Most konstruálunk egy Γ-val jelölt $\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor$-uniform hipergráfot, melyre legyen $V(\Gamma)=V(G)$ és Γ-ban legyen él $\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor$ pont pontosan akkor, ha azok G-ben rendelkeznek legalább n' közös szomszéddal. Az így létrehozott Γ hipergráfból most létrehozzuk G' egyszerű gráfot úgy, hogy $V(G')=V(\Gamma)=V(G)$ és két pont közt G'-ben pontosan akkor fut él, ha Γ-ban létezik olyan hiperél, melyen a két pont egyaránt rajta van.



3.4. ábra.

Ekkor ha $n'\geq 2\cdot l$ és $2\cdot P_{\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor}\subseteq G'$, következik $2\cdot P_l\subseteq G$, így vagy $n'<2\cdot l$, vagy $2\cdot P_{\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor}\nsubseteq G'$ szükségképp. Ugyanakkor beláttuk, hogy $n'\geq\frac{\left(1-\frac{(-1)^{l-1}+1}{4}\right)\cdot n-l}{\left(\left\lceil\frac{l}{2}\right\rceil+1\right)\cdot\binom{l}{\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor}}$. Vegyük észre, hogy $\frac{\left(1-\frac{(-1)^{l-1}+1}{4}\right)\cdot n-l}{\left(\left\lceil\frac{l}{2}\right\rceil+1\right)\cdot\binom{l}{\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor}}\geq 2\cdot l$ ekvivalens átalakításokkal átrendezhető, mint $n\geq\frac{\left(2\cdot\left(\left\lceil\frac{l}{2}\right\rceil+1\right)\cdot\binom{l}{\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor}+1\right)\cdot l}{1-\frac{(-1)^{l-1}+1}{4}}\geq 2\cdot l+4\cdot l\cdot\left(\left\lceil\frac{l}{2}\right\rceil+1\right)\cdot\binom{l}{\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor}$, ami a kezdeti feltétel n nagyságára $k=2$ esetén, így tehát $n'\geq 2\cdot l$ is igaz szükségképpen, így viszont $2\cdot P_{\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor}\nsubseteq G'$ kell, hogy teljesüljön. Ez viszont azt is jelenti, hogy Γ metsző hipergráf.

Most azt fogjuk belátni, hogy ha $\exists X\subseteq V(\Gamma)$, hogy $|X|=t<\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor$ és X tartalmaz Γ

minden éléből legalább egy csúcsot, akkor $|E(G)| < |E(G(n;2;l))|$. Tegyük fel, hogy X ilyen halmaz. Ekkor a Γ-beli élek definíciója szerint, ha Γ-ból elhagyjuk az X-beli pontokat, az így kapott részgráfban nem lehet él. Ez azt jelenti, hogy ha G-ből elhagyjuk az X-beli pontokat, az így kapott részgráf nem tartalmazhat P_l-t, tehát ekkor 2.2.6 miatt $|E(G)| \leq \binom{t}{2} + t\cdot(n-t) + \frac{(l-2)\cdot(n-t)}{2} \leq \left(2\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor - \frac{3}{2}\right)\cdot n$, ugyanakkor $|E(G(n;2;l))| = \binom{2\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor - 1}{2} + \left(2\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor - 1\right)\cdot\left(n - 2\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor + 1\right) + \frac{(-1)^{l-1}+1}{2} \geq \left(2\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor - 1\right)\cdot n - l^2$, viszont tudjuk, hogy $n > l^2$, így ekkor $|E(G)| < |E(G(n;2;l))|$ valóban.

Tegyük fel, hogy Γ élei legalább $2\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor$ csúcsot lefednek, de $2\cdot P_{\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor} \nsubseteq G'$. Azt állítjuk, hogy ekkor nem létezhet két $E(\Gamma)$-beli hiperél, amely pontosan egy pontban metszi egymást. Tegyük fel ugyanis indirekten, hogy $E_1; E_2 \in E(\Gamma)$ ilyen élek, legyen ekkor $E_1 \cap E_2 = \{x\}$. Ekkor nyilván $|E_1 \cup E_2| = 2\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor - 1$, így kell lennie E_1-en és E_2-n kívül legalább még egy Γ-beli élnek, legyen E_3 ilyen. Tegyük fel, hogy E_3 metszi $(E_1 \cup E_2)\setminus\{x\}$-et, ellenkező esetben ugyanis az imént látottakat $X = \{x\}$-re alkalmazva jutunk ellentmondásra. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy E_3 metszi E_1-et x-től különböző pontban. Alapvetően két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy E_2-t metszi-e x-től különböző pontban. Ha igen, G'-ben van $E_1 \cup E_2$ minden csúcsát tartalmazó, így legalább $2\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor - 1$ hosszú kör, mely ha legalább $2\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor$ hosszú, tartalmaz $P_{2\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor}$-t és így $2\cdot P_{\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor}$-t, ha pedig pontosan $2\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor - 1$ hosszú, mivel $|E(G')| \geq 2\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor$ és G'-ből az esetleges izolált pontokat elhagyva a fennmaradó részgráf összefüggő Γ metsző tulajdonsága miatt, ekkor legalább egy él csatlakozik $C_{2\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor-1}$-hez, ami ekkor szintén $P_{2\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor}$-t eredményez G'-ben. Ha pedig E_3-nak nincs x-től különböző metszéspontja E_2-vel, kell hogy létezzen $y \in E_3 \setminus (E_1 \cup E_2)$, amit $E_1 \setminus \{x\}$-hez hozzávéve a megfelelő csúcsok G'-ben egy E_2 csúcsaitól diszjunkt $P_{\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor}$-t alkotnak, így ekkor szintén $2\cdot P_{\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor} \subseteq G'$. Minden esetben tehát ellentmondásra jutottunk, így Γ-nak 2-metszőnek kell lennie. Ekkor viszont tetszőleges $E_0 \in E(\Gamma)$ és $x \in E_0$ esetén Γ valamennyi éle metszi $E_0 \setminus \{x\}$-et, azonban $|E_0 \setminus \{x\}| = 2\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor - 1$, ebből viszont megmutattuk, hogy $|E(G)| < |E(G(n;2;l))|$ következik, ami ismételten ellentmondás.

A korábbiak szerint létezik $A \subseteq V(G)$ mely bármely G-beli P_l-ből legalább $\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor$ csúcsot tartalmaz és $|A| \leq 2\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor - 1$. Definiáljuk $V(G)\setminus A$ három további részhalmazát. Legyen B azon $V(G)\setminus A$-beli pontok halmaza, melyek A pontjai közül legalább $\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor$-vel szomszédosak. Legyen C azon $V(G)\setminus A$-beli pontok halmaza, melyek A pontjai közül legalább 1 de kevesebb mint $\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor$ ponttal szomszédosak, valamint legyen D azon $V(G)\setminus A$-beli pontok halmaza, melyeknek nincs A-beli szomszédjuk. Ekkor mivel A-t minden $P_l \subseteq G$

metsz, nyilván $P_l \nsubseteq D$, tehát 2.2.6 miatt D legfeljebb $\frac{l-2}{2} \cdot |D|$ élt feszít.

Azt állítjuk, hogy tetszőleges $x \in B \cup C$ egy olyan G-beli P_l kezdőpontja melynek csúcsai felváltva A és $V(G) \setminus A$ elemei közül kerülnek ki, valamely adott $y_1; y_2 \in B \cup C$ pontokat elkerülve. Legyen $y \in N(x) \cap A$, ilyen y definíció szerint kell, hogy létezzen. Sőt, $\exists E \in E(\Gamma)$, hogy $y \in E$. Megállapíthatjuk, hogy $n' \geq 2 \cdot l > 3 \cdot \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor + 1 \geq |A| + \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor + 2$, ezért csakugyan találunk $B \cup C$-ben $\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor$ pontot, mely rajta van egy ilyen alternáló P_l-en.

Vegyük észre, hogy tetszőleges D-beli pontból legfeljebb 1 él mehet $B \cup C$-be, ugyanis ha feltesszük, hogy valamely $z \in D$-nek $y_1; y_2 \in B \cup C$ egyaránt szomszédja, az előzőek szerint egy y_2 kezdőpontú, A-ban alternáló, y_1-et elkerülő P_l utolsó két élét elhagyva, valamint z-t és y_1-et hozzávéve olyan P_l adódik, melynek már csak $\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor - 1$ csúcsa van A-ban, de ez ellentmond A definíciójának. Hasonló megfontolásból adódik, hogy a $B \cup C$ által feszített részgráfban nem lehet legalább 2 fokú csúcs, ugyanis ha feltesszük, hogy $x \in B \cup C$ ilyen, és $y_1; y_2 \in B \cup C$ szomszédai, egy y_2 kezdőpontú, x-et és y_1-et elkerülő alternáló P_l-ből ugyanígy tudnánk konstruálni olyan P_l-t, melynek csak $\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor - 1$ csúcsa A-beli, ez pedig ismét ellentmondásra vezet. Sőt, páros l esetén egyetlen $B \cup C$-beli él létezéséből tudnánk ilyen utat konstruálni, páratlan l esetén pedig megállapíthatjuk, hogy nem lehet B-ben 1-nél több él hasonlóképp. Így mindezeket összevetve a következő becslés adódik G élszámára:

$$|E(G)| \leq \binom{2 \cdot \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor - 1}{2} + \left(2 \cdot \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor - 1\right) \cdot \left(n - \left(2 \cdot \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor - 1\right) - |C| - |D|\right) + \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor \cdot |C| + \left(1 + \frac{l-2}{2}\right) \cdot |D| + \frac{(-1)^{l-1} + 1}{2} =$$
$$\binom{2 \cdot \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor - 1}{2} + \left(2 \cdot \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor - 1\right) \cdot \left(n - \left(2 \cdot \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor - 1\right)\right) + \left(1 - \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor\right) \cdot |C| + \left(\frac{l-2}{2} - 2 \cdot \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor + 2\right) \cdot |D| + \frac{(-1)^{l-1} + 1}{2}$$

Vegyük észre, hogy $|C|$ és $|D|$ együtthatója negatív, így akkor lesz maximális az élszám, ha $|C| = 0 = |D|$. Ekkor látszik, hogy a maximum és a konstrukció egyaránt megfelel az állításban leírtnak. Tehát a $k = 2$ esetet beláttuk.

Most tegyük fel, hogy $k \geq 3$ és az állítás $k-1$-ig igaz. Legyen tehát G olyan gráf, melyre $|V(G)| = n$ és $|E(G)| = m \geq \binom{k \cdot \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor - 1}{2} + \left(n - k \cdot \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor + 1\right) \cdot \left(k \cdot \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor - 1\right) + \frac{(-1)^{l-1} + 1}{2}$, valamint $k \cdot P_l \nsubseteq G$. Ekkor $P_l \subseteq G$ 2.2.6 miatt fennáll, továbbá 3.2.15

miatt van $\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor$ csúcs, melynek legalább n' közös csúcsa van, ahol n'-re a következő becslést adhatjuk.

$$n' \geq \frac{\binom{k\cdot\lfloor\frac{l}{2}\rfloor-1}{2}+\left(n-k\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor+1\right)\cdot\left(k\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor-1\right)}{\left(\lceil\frac{l}{2}\rceil+1\right)\cdot\binom{l}{\lfloor\frac{l}{2}\rfloor}}+$$

$$\frac{\frac{(-1)^{l-1}+1}{2}-\mathrm{ex}\left(n-l;(k-1)\cdot P_l\right)-\binom{l}{2}-(n-l)\cdot\left(\lfloor\frac{l}{2}\rfloor-1\right)}{\left(\lceil\frac{l}{2}\rceil+1\right)\cdot\binom{l}{\lfloor\frac{l}{2}\rfloor}}=$$

$$\frac{\binom{k\cdot\lfloor\frac{l}{2}\rfloor-1}{2}+\left(n-k\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor+1\right)\cdot\left(k\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor-1\right)}{\left(\lceil\frac{l}{2}\rceil+1\right)\cdot\binom{l}{\lfloor\frac{l}{2}\rfloor}}+$$

$$\frac{\frac{(-1)^{l-1}+1}{2}-\binom{(k-1)\cdot\lfloor\frac{l}{2}\rfloor-1}{2}-\left((k-1)\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor-1\right)\cdot\left(n-l-(k-1)\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor+1\right)}{\left(\lceil\frac{l}{2}\rceil+1\right)\cdot\binom{l}{\lfloor\frac{l}{2}\rfloor}}+$$

$$\frac{-\frac{(-1)^{l-1}+1}{2}-\binom{l}{2}-(n-l)\cdot\left(\lfloor\frac{l}{2}\rfloor-1\right)}{\left(\lceil\frac{l}{2}\rceil+1\right)\cdot\binom{l}{\lfloor\frac{l}{2}\rfloor}}=$$

$$\frac{n-\frac{3}{2}\cdot l+\left(k\cdot l+\frac{3}{2}\right)\cdot\lfloor\frac{l}{2}\rfloor+\left(\frac{1}{2}-k\right)\cdot\left(\lfloor\frac{l}{2}\rfloor\right)^2-\frac{1}{2}\cdot l^2}{\left(\lceil\frac{l}{2}\rceil+1\right)\cdot\binom{l}{\lfloor\frac{l}{2}\rfloor}}\geq\frac{n-l}{\left(\lceil\frac{l}{2}\rceil+1\right)\cdot\binom{l}{\lfloor\frac{l}{2}\rfloor}}$$

Itt az első egyenlőség azért lesz igaz, mert $n-l \geq 2\cdot l+2\cdot(k-1)\cdot l\cdot\left(\lceil\frac{l}{2}\rceil+1\right)\cdot\binom{l}{\lfloor\frac{l}{2}\rfloor}$, így az indukciós feltevés szerint $\mathrm{ex}\left(n-l;(k-1)\cdot P_l\right)=\binom{(k-1)\cdot\lfloor\frac{l}{2}\rfloor-1}{2}+\left((k-1)\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor-1\right)\cdot\left(n-l-(k-1)\cdot\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor+1\right)+\frac{(-1)^{l-1}+1}{2}$, az utolsó egyenlőtlenség pedig páros l esetén ekvivalens $4\cdot k\cdot l\geq 3\cdot l+2$ egyenlőtlenséggel, páratlan l esetén pedig $(l^2-1)\cdot(2\cdot k-3)\geq 8$ egyenlőtlenséggel, ezek viszont triviálisan teljesülnek az l-re és k-ra vonatkozó feltételek miatt, így valóban igaz $n'\geq\frac{n-l}{\left(\lceil\frac{l}{2}\rceil+1\right)\cdot\binom{l}{\lfloor\frac{l}{2}\rfloor}}$.

A 3.2.15 lemma beli jelöléseket használva legyen U egy ilyen, $\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor$ nagyságú, n' közös szomszéddal rendelkező ponthalmaz. Ekkor az U komplementere által feszített részgráf csúcsainak száma $n-\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor$, éleinek száma legalább $\mathrm{ex}\left(n-\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor;(k-1)\cdot P_l\right)$. Ugyanakkor a pontok számára vonatkozó feltétel szerint tovább becsülve n'-t, $n' \geq \frac{n-l}{\left(\left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil+1\right)\cdot \binom{l}{\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor}} \geq \frac{2\cdot l+2\cdot(k-1)\cdot l\cdot\left(\left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil+1\right)\cdot \binom{l}{\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor}}{\left(\left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil+1\right)\cdot \binom{l}{\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor}} \geq (2\cdot k-1)\cdot l \geq k\cdot l$, így tudunk $(k-1)\cdot P_l$-től diszjunkt P_l-t találni. Ez nem lehet, így az U komplementere által feszített részgráf nem tartalmazhat $(k-1)\cdot P_l$ részgráfot, így az indukciós feltevés szerint ez a gráf éppen $G\left(n-\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor; k-1; l\right)$, így szükségképpen $G = G\,(n; k; l)$. $\square$

4. fejezet

Lineáris erdők Turán-száma

4.0.1. Definíció. *Egy erdőt **lineáris erdőnek** nevezünk, ha minden komponense út.*

A korábbiakban meghatároztuk azon lineáris erdők Turán-számát, melyek komponensei azonos méretűek. Az alábbiakban ezt az eredményt felhasználva általános képletet adunk tetszőleges lineáris erdők Turán-számára. A fejezet tételei Bernard Lidický, Hong Liu és Cory Palmer munkái.

Legyen $F = \bigcup_{i=1}^{k} P_{l_i}$ lineáris erdő úgy, hogy valamely $i \in [k]$-ra $l_i \neq 3$. Ekkor jelölje a továbbiakban $G_F(n)$ azt az n pontú gráfot, mely $G_F(n) = K_{\left(\sum_{i=1}^{k} \lfloor \frac{l_i}{2} \rfloor\right)-1} + \left(E_{n-\left(\sum_{i=1}^{k} \lfloor \frac{l_i}{2} \rfloor\right)-1} \cup P_2\right)$ ha $\forall i \in [k]$-ra l_i páratlan, különben legyen $G_F(n) = K_{\left(\sum_{i=1}^{k} \lfloor \frac{l_i}{2} \rfloor\right)-1} + E_{n-\left(\sum_{i=1}^{k} \lfloor \frac{l_i}{2} \rfloor\right)+1}$.

4.0.2. Megjegyzés. $F \nsubseteq G_F(n)$, hiszen ha $P_{l_i} \subseteq G_F(n)$, akkor P_{l_i}-nek legalább $\lfloor \frac{l_i}{2} \rfloor$ csúcsát tartalmazza $K_{\left(\sum_{i=1}^{k} \lfloor \frac{l_i}{2} \rfloor\right)-1}$.

Az általános eset előtt először tekintsük azt az esetet, amikor F mindössze két komponensből áll.

4.0.3. Lemma. *Legyen $F = P_a \cup P_b$, ahol $a > b \geq 2$, legyen $n \geq \binom{a}{\frac{a}{2}} \cdot a^2 \cdot b^2$ és legyen G olyan gráf, melyre $F \nsubseteq G$; $|V(G)| = n$; $\delta(G) \geq \lfloor \frac{a}{2} \rfloor + \lfloor \frac{b}{2} \rfloor - 1$. Ekkor $|E(G)| \leq |E(G_F(n))|$, az egyenlőség pedig pontosan $G = G_F(n)$ esetén teljesül.*

Bizonyítás. [13] Legyen G extremális gráfja F-nek úgy, hogy $\delta(G) \geq \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor - 1$. 2.2.6 miatt $P_b \subseteq P_a \subseteq G$. Először azt mutatjuk meg, hogy $\exists U_a \subseteq V(G)$, hogy $|U_a| = \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$ és U_a csúcsainak van legalább $a + b + 1$ közös szomszédja. 3.2.15 lemmát alkalmazva adódik, hogy bármely $P_x \subseteq G$ esetén P_x pontjai tartalmaznak $\frac{n}{x \cdot \binom{x}{\lfloor \frac{x}{2} \rfloor}}$-nél nagyobb közös szomszédhalmazt, ahol $x \in \{a; b\}$ ugyanis ha mondjuk $x = a$, alkalmazva a 3.2.15-beli jelöléseket $F_1 = P_a; F_2 = P_b$ és $t = \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$ választással a közös szomszédok száma legalább $n' \geq \frac{|E(G)| - \mathrm{ex}(n-a; P_b) - \binom{a}{2} - (n-a) \cdot \left(\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor - 1 \right)}{\left(a - \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + 1\right) \cdot \binom{a}{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor}}$, ugyanakkor 2.2.6 és $|E(G)| \geq a$ miatt ekkor az egyenlőtlenség jobb oldala legalább $\frac{a - \frac{(n-a)\cdot(b-2)}{2} - \binom{a}{2} - (n-a) \cdot \left(\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor - 1 \right)}{\left(a - \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + 1\right) \cdot \binom{a}{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor}}$. Azt állítjuk, hogy ez továbbra is nagyobb lesz mint $\frac{n}{a \cdot \binom{a}{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor}}$. Ugyanis ekvivalens átalakításokkal ezt

$$n > a^2 \cdot \frac{\frac{a+1}{2} - \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor - \frac{b}{2}}{\frac{a \cdot b}{2} + a \cdot \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + 1 - 2 \cdot a}$$

alakra hozhatjuk, ami triviálisan igaz. Vegyük észre, hogy $a > b$-t nem használtuk ki, így analóg $x = b$-re is igaz az állítás. Viszont $n > a^2 \cdot b^2 \cdot \binom{a}{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor}$ miatt ekkor $n' > a + b$ valóban.

Ekkor U_a és az U_a-beli csúcsok szomszédai által feszített részgráf tartalmaz P_a-t. Tekintsük G-nek a $V(G) \setminus U_a$ ponthalmaz által feszített G_b részgráfját. $F \nsubseteq G$ miatt $P_b \nsubseteq G_b$, hiszen ellenkező esetben az imént látottak szerint tudnánk U_a és annak $a + b$-nél nagyobb közös szomszédságában P_b-től diszjunkt P_a-t is találni, ami lehetetlen $F \nsubseteq G$ miatt. A továbbiakban b nagysága szerint 3 esetet különböztetünk meg.

Ha $b = 2$, $|E(G)| = 0$, így ekkor $G \subseteq G_F(n)$.

Most tegyük fel, hogy $b = 3$. Ekkor G_b csak izolált pontokból és független élekből áll. Tegyük fel, hogy $uv \in E(G)$. Ekkor u-nak és v-nek egyaránt van U_a-beli szomszédja $\delta(G) \geq 2$ miatt. Ekkor ha sem u sem v nem lenne minden U_a-beli csúccsal szomszédos, uv élt elhagyva és $\{u; v\}$ valamint U_a közt minden élt behúzva egy G-nél nagyobb F-mentes gráfot tudnánk konstruálni, ami a G-re vonatkozó extremalitási feltétel miatt lehetetlen. Legyen $z \in U_a$. Ekkor ha a páros, $(U_a \setminus \{z\}) \cup \{u; v\}$ pontjai z-t elkerülő P_a-t feszítenek, azonban $d(z) \geq 2$, így ekkor $P_3 \subseteq G - P_a$, ez viszont lehetetlen, így páros a esetén G_b

nem tartalmazhat élt, ekkor pedig $G \subseteq G_F(n)$. Páratlan a esetén az előbbi okoskodáshoz hasonlóan ha $u_1v_1; u_2v_2 \in E(G_b)$, akkor $z \in U_a$ esetén $(U_a \setminus \{z\}) \cup \{u_1; v_1; u_2; v_2\}$ pontjai z-t elkerülő P_a-t feszítenek, azonban $d(z) \geq 2$ miatt ekkor ismét $F \subseteq G$ állna fenn, így G_b-ben legfeljebb egy él lehet, ezért ekkor szintén $G \subseteq G_F(n)$ adódik.

A továbbiakban tegyük fel, hogy $b \geq 4$. Legyen G' az a gráf, amelyet $G_F(n)$-ből $\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$ minden más csúccsal szomszédos csúcsát elhagyva kapunk. Ekkor nyilván $|V(G')| = |V(G_b)| = n - \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$. Ha $P_{b-2} \nsubseteq G_b$, 2.2.6 következtében $|E(G_b)| \geq \frac{(b-4)\cdot\left(n-\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor\right)}{2} < \left(\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor - 1\right) \cdot \left(n - \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor\right) - \binom{\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor}{2} = |E(G')|$, amiből viszont $|E(G)| < |E(G_F(n))|$ következik, de ez lehetetlen, így szükségképpen $P_{b-2} \subseteq G_b$. Legyen $P_s \subseteq G$ maximális hosszúságú. Ekkor $b-2 \leq s \leq b-1$ kell, hogy legyen. Legyen P_s egyik végpontja u. Ekkor $d(u) - s + 1 \geq \delta(G) - b + 2 \geq \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor + 1 - b = \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor - \left\lceil \frac{b}{2} \right\rceil + 1 \geq 1$, ebből kifolyólag u-nak kell lennie P_s csúcsaitól különböző szomszédjának, legyen w ilyen. Nyilván s maximalitása miatt ekkor $w \in U_a$, így w-nek van $G_b - P_s$-beli szomszédja, így w ezzel a szomszédjával és P_s-sel P_{s+2}-t feszít, viszont $b-2 \leq s$, így $P_b \subseteq P_{s+2}$. Ekkor a korábban látottak szerint ezen P_b pontjai egy $\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor$ elemű részhalmazának van több mint $a+b$ közös szomszédja. Vegyük észre, hogy P_b konstrukciója miatt w-től eltekintve minden P_b-beli csúcs G_b-ből kerül ki, így G_b pontjai egy $\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor - 1$ elemű U_b részhalmazának van legalább $a+b$ közös szomszédja. $b \geq 4$ miatt $U_b \neq \emptyset$.

A következőkben azt fogjuk megmutatni, hogy amennyiben a és b közül legalább az egyik páros, $V(G_b) - U_b$ pontjai közt nem fut él, ha pedig a és b egyaránt páratlanok, $V(G_b) - U_b$ pontjai legfeljebb 1 élt feszíthetnek. Ebből már következik az állítás, hiszen ekkor $G \subseteq G_F(n)$.

Tegyük fel, hogy G nem összefüggő. Ekkor van olyan C összefüggőségi komponense G-nek, mely G_b-beli. A fokszámra vonatkozó kitétel szerint $\delta(G) \geq \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor - 1 \geq b - 1$, ekkor viszont C-ben mohó algoritmussal találunk P_b-t, ami ellentmondásra vezet. Tehát szükségképpen G összefüggő.

Legyen H gráf és $U \subseteq V(H)$ úgy, hogy U pontjainak legalább $|U|+3$ közös szomszédja van, továbbá $1 \leq c \leq |U| + 1$. Legyen $v \in N(U)$ egy $V(H) \setminus U$-beli P_t végpontja, ahol ekkor $1 \leq t \leq 3$. Azt fogjuk megmutatni, hogy ekkor H tartalmaz olyan $P_{2\cdot c-2+t}$ részgráfot, hogy ezen $P_{2\cdot c-2+t}$ pontjai közül pontosan $c-1$ lesz U-beli. Legyen $u \in U \cap N(v)$. Tekintsünk H-ban egy P_t csúcsait elkerülő, u kezdőpontú $P_{2\cdot c-2}$-t, melynek legfeljebb

$c-1$ csúcsa U-beli. Ilyen létezik, például U és $N(U) \setminus V(P_t)$ ponthalmazok között mohó algoritmussal konstruálhatunk alternáló $P_{2\cdot c-2}$-t. Ehhez P_t-t hozzáfűzve épp egy U-ba $c-1$-szer belemetsző $P_{2\cdot c-2+t}$ adódik.

Most igazoljuk, hogy amennyiben $\exists u; v \in N(U)$, hogy $uv \notin E(H)$, de u és v egyaránt szomszédos $V(H) \setminus U$-beli ponttal, akkor H tartalmaz olyan $P_{2\cdot c+1}$ részgráfot, melynek pontosan $c-1$ pontja U-beli. Ha u-nak és v-nek van közös pontja, az állítás az előző állításból adódik. Ellenkező esetben legyen $u' \in N(u) \setminus U$, valamint $v' \in N(v) \setminus U$, ekkor tehát $u' \neq v'$. Ekkor a már ismert algoritmussal konstruálhatunk egy u illetve v végpontokkal rendelkező U és $N(U) \setminus \{u'; v'\}$ pontosztályok között alternáló $P_{2\cdot c-1}$-et, ami ekkor pontosan $c-1$-szer metsz bele U-ba, ehhez u'-t és v'-t hozzáfűzve valóban az állításnak megfelelő $P_{2\cdot c+1}$-et kapunk.

Vegyük észre, hogy amennyiben egy G-beli csúcs nem szomszédos valamennyi $U_a \cup U_b$-beli csúccsal, a fokszámra vonatkozó feltétel miatt szomszédos kell, hogy legyen egy $V(G) \setminus (U_a \cup U_b)$-beli csúcs, amellyel szomszédos. Így ha létezik három ilyen $N(U_b) \setminus U_a$-beli csúcs, az előző két állítást $H = G_b$-re illetve az $U = U_b$-re, valamint $c = \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor$-re alkalmazva $P_{2\cdot\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor+1} \subseteq G_b$ adódik, ami ellentmondás, így tehát legfeljebb két $N(U_b) \setminus U_a$-beli csúcs létezik, mely nem szomszédos minden U_a-beli ponttal.

Ebből az észrevételből, valamint az U_b közös szomszédságának méretére adott becslésből adódik, hogy $U = U_a \cup U_b$ legalább $\dfrac{n}{b \cdot \binom{b}{\frac{b}{2}}} - 2$ közös szomszéddal rendelkezik. Mindezek alapján már könnyen látszik, hogy amennyiben G-ben van P_a, amely legfeljebb $\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor - 1$-szer metsz bele U-ba, úgy tudunk találni P_b-t $G - P_a$-ban. Hasonlóan látható, hogy ha G-ben van P_b, mely legfeljebb $\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor - 1$-szer metsz bele U-ba, akkor tudunk találni P_a-t $G - P_b$-ben.

Amennyiben létezik olyan $V(G) \setminus U$-beli pont, mely nem szomszédos U minden pontjával, a fokszámokra vonatkozó feltétel és G összefüggősége miatt találunk $N(U)$-beli végponttal rendelkező $V(G) \setminus U$-beli pontokból álló P_3-at, mely a korábban látottak szerint elégséges feltétele egy U-ba $\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor - 1$-szer belemetsző P_b létezésének G-ben, ami viszont lehetetlen. Következésképp U valamennyi pontját él köti össze $V(G) \setminus U$ minden pontjával, azaz $N(U) = V(G) \setminus U$. A fentiek szerint ekkor a $V(G) \setminus U$ által feszített részgráf legfeljebb 1 élt tartalmazhat, azt is csak páratlan a és b esetén, így $G \subseteq G_F(n)$. $\square$

4.0.4. Tétel. *Legyen* $F = P_a \cup P_b$*, ahol* $a > b \geq 2$*, legyen* $n \geq \binom{a}{\frac{a}{2}}^2 \cdot a^4 \cdot b^4$ *és legyen* G *olyan gráf, melyre* $F \nsubseteq G$*;* $|V(G)| = n$*. Ekkor* $|E(G)| \leq |E(G_F(n))|$*, az egyenlőség pedig pontosan* $G = G_F(n)$ *esetén teljesül.*

Bizonyítás. [13] Először tegyük fel, hogy $n > \binom{a}{\frac{a}{2}}^2 \cdot a^4 \cdot b^4$ és G egy n csúcsú extremális gráfja F-nek, hogy $|E(G)| \geq |E(G_F(n))|$.

A továbbiakban gráfok sorozatát adjuk meg rekurzívan, alacsony fokú csúcsok elhagyásával a következő módon. Tegyük fel, hogy $\exists v_n \in V(G)$, hogy $d(v_n) < \delta(G_F(n)) = \lfloor \frac{a}{2} \rfloor + \lfloor \frac{b}{2} \rfloor - 1$. Legyen $G_n = G$, továbbá legyen $G_{n-1} = G_n - v_n$. A továbbiakban valamennyi lehetséges $i \in [n]$-re legyen $G_{n-i-1} = G_{n-i} - v_{n-i}$, ahol $d(v_{n-i}) < \delta(G_F(n-i))$, ezt a rekurziót addig folytassuk, amíg lehetséges. Tegyük fel, hogy G_s az utolsó, ezzel a rekurzióval kapott gráf. Vegyük észre, hogy valamennyi $s \leq j \leq n$-re $|E(G_{j-1})| - |E(G_F(j-1))| \geq |E(G_j)| - |E(G_F(j-1))| + 1$, így ezeket az egyenlőtlenségeket valamennyi j-re összeadva $\binom{s}{2} \geq |E(G_s)| \geq |E(G_F(s))| + n - s = \left(\lfloor \frac{a}{2} \rfloor + \lfloor \frac{b}{2} \rfloor - 1\right) \cdot \left(n - \lfloor \frac{a}{2} \rfloor - \lfloor \frac{b}{2} \rfloor + 1\right) + \binom{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor + \lfloor \frac{b}{2} \rfloor - 1}{2} + \frac{(-1)^{a \cdot b - 1} + 1}{2} + n - s$ adódik, amiből $\frac{(s+1)^2}{2} > \binom{s+1}{2} \geq \left(\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor\right) \cdot n - \binom{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor + \lfloor \frac{b}{2} \rfloor}{2} + \frac{(-1)^{a \cdot b - 1} + 1}{2}$. Alakítsuk ezt tovább, majd alkalmazzunk néhány triviális becslést!

$$s \geq \sqrt{2 \cdot \left(\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor\right) \cdot n - \left(\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor\right) \cdot \left(\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor - 1\right) + \left((-1)^{a \cdot b - 1} + 1\right)}$$
$$\geq \sqrt{2 \cdot n} > \binom{a}{\frac{a}{2}} \cdot a^2 \cdot b^2$$

Ez viszont 4.0.3 miatt $F \subseteq G_s \subseteq G$ ellentmondásra vezet. □

4.0.5. Tétel. *Legyen* $F = \bigcup_{i=1}^{k} P_{l_i}$*, hogy* $\exists j \in [k]$*, melyre* $l_j \neq 3$*, illetve legyen* $n \geq a_k$*. Ekkor* $\mathrm{ex}(n; F) = \left(\sum_{i=1}^{k} \lfloor \frac{l_i}{2} \rfloor - 1\right) \cdot \left(n - \sum_{i=1}^{k} \lfloor \frac{l_i}{2} \rfloor + 1\right) + \binom{\sum_{i=1}^{k} \lfloor \frac{l_i}{2} \rfloor - 1}{2} + \frac{(-1)^{\prod_{i=1}^{k} l_i - 1} + 1}{2}$*, továbbá* $H_{\mathrm{ex}}(n; F)$ *egyértelmű alkalmas* $a_k \in \mathbb{N}^+$ *esetén.*

Bizonyítás. Láttuk, hogy $F \nsubseteq G_F(n)$, valamint nyilván $|V(G_F(n))| = n$ és
$|E(G_F(n))| = \left(\sum_{i=1}^{k} \lfloor \frac{l_i}{2} \rfloor - 1\right) \cdot \left(n - \sum_{i=1}^{k} \lfloor \frac{l_i}{2} \rfloor + 1\right) + \binom{\sum_{i=1}^{k} \lfloor \frac{l_i}{2} \rfloor - 1}{2} + \frac{(-1)^{\prod_{i=1}^{k} l_i - 1} + 1}{2}$,

így $\mathrm{ex}\left(n;F\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{k}\left\lfloor\frac{l_i}{2}\right\rfloor - 1\right)\cdot\left(n - \sum_{i=1}^{k}\left\lfloor\frac{l_i}{2}\right\rfloor + 1\right) + \binom{\sum_{i=1}^{k}\left\lfloor\frac{l_i}{2}\right\rfloor - 1}{2} + \frac{(-1)^{\prod_{i=1}^{k} l_i - 1} + 1}{2}$ adódik.

A másik irányt F komponensszáma szerinti teljes indukcióval igazoljuk. $k = 2$-re az állítás 4.0.4 illetve 3.2.16 szerint igaz. A továbbiakban tegyük fel, hogy $k \geq 3$, valamint az állítás $k-1$-ig igaz. Legyen $j \in [k]$ olyan, hogy $F^* = F - P_{l_j} \neq (k-1)\cdot P_3$, továbbá G legyen extremális gráfja F-nek. Tekintsünk egy G-beli P_{l_j}-t, ekkor 3.2.15 miatt létezik $V(G)$-nek olyan U_j részhalmaza, melyre $|U_j| = \left\lfloor\frac{l_j}{2}\right\rfloor$ és mely elemeinek legalább n' közös szomszédja van. Ekkor a $V(G)\setminus U_j$ által feszített részgráf nem tartalmaz F^*-ot mint részgráfot, így az indukciós feltevés szerint ekkor a $V(G)\setminus U_j$ által feszített részgráf extremalitásából adódóan szükségképpen $G_{F^*}\left(n - \left\lfloor\frac{l_j}{2}\right\rfloor\right)$ kell, hogy legyen, amiből $G \subseteq G_F(n)$ adódik. $\square$

4.0.6. Megjegyzés. A bizonyítás során nem törekedtünk alkalmas a_k megadására, a korábban látottak szerint egy megfelelő választás $a_2 = \binom{\max_{i\in[2]}\{l_i\}}{\frac{\max_{i\in[2]}\{l_i\}}{2}}^2 \cdot l_1^4 \cdot l_2^4$, ez alapján alkalmas a_k sorozat rekurzívan számítható az indukciós lépés alapján $k \geq 3$ esetén. A bizonyítás során csupán annyit használunk ki, hogy $n - l_j \geq a_{k-1}$, valamint hogy $n - \left\lfloor\frac{l_j}{2}\right\rfloor \geq a_{k-1}$, így $a_k = \binom{\max_{i\in[2]}\{l_i\}}{\frac{\max_{i\in[2]}\{l_i\}}{2}}^2 \cdot l_1^4 \cdot l_2^4 + (k-2)\cdot\max_{i\in[k]}\{l_j\}$ alkalmas sorozat.

5. fejezet

Kitekintések

Ebben a fejezetben bizonyítás nélkül közlünk néhány nem feltétlenül lineáris erdőre vonatkozó extremális tételt, illetve megoldatlan problémát.

5.1. Nemlineáris erdők Turán-száma

Ebben a szakaszban továbbra is kitüntetett erdők extremális számát vizsgáljuk, melyek azonban némiképp kapcsolódnak az előzőekben részletezett lineáris erdőkhöz. A bizonyítások terjedelmük miatt nem kapnak helyet a dolgozatban, azonban az előző fejezetekben bemutatott eredmények és módszerek ismeretében bizonyítható a szakasz minden állítása, így annak meggondolását az olvasóra bíznám, azonban a bizonyítások az idézett forrásban fellelhetők.

5.1.1. Csillagok diszjunkt uniója

5.1.1. Definíció. *Legyen $k \in \mathbb{N}$. Ekkor* $\boldsymbol{k+1}$ ***pontú csillagnak*** *nevezzük és S_{k+1}-gyel jelöljük azt a $k+1$ pontú fát, melynek k darab 1-fokú csúcsa van.*

5.1.2. Tétel. *[13] Legyen $F = \bigcup_{i=1}^{k} S_{m_i+1}$ csillagok erdője, valamint $n \geq a_k$. Ekkor* $\mathrm{ex}\,(n; F) = \max_{i\in[k]}\left\{(i-1)\cdot(n-i+1) + \binom{i-1}{2} + \left\lfloor \frac{(m_i-1)\cdot(n-i+1)}{2} \right\rfloor\right\}$ *alkalmas $a_k \in \mathbb{N}^+$ esetén.*

5.1.2. 4-rendű komponensű erdők

Vegyük észre, hogy 4 pontú fa csak S_4 és P_4, így ha F 4-rendű komponensekből álló erdő, $F = a \cdot P_4 \cup b \cdot S_4$ valamely $a; b \in \mathbb{N}$ számokra.

Tegyük fel, hogy $F = a \cdot P_4 \cup b \cdot S_4$ valamely $a; b \in \mathbb{N}^+$ esetén, továbbá $n - b$-t maradékosan elosztva 3-mal legyen $n - b = 3 \cdot d + r$. Ekkor bevezetjük a következő jelöléseket: legyen $G_F^1(n) = K_b + (K_r \cup d \cdot K_3)$, valamint legyen $G_F^2(n) = K_{2 \cdot a + b - 1} + E_{n - 2 \cdot a - b + 1}$.

5.1.3. Tétel. *[13] Legyen adott $a; b \in \mathbb{N}^+$ esetén $F = a \cdot P_4 \cup b \cdot S_4$, $n; d; r \in \mathbb{N}$ hogy $r \geq 2$ és $n = 3 \cdot d + r \geq a_k$ alkalmas $a_k \in \mathbb{N}^+$-ra. Ekkor ha $a = 1$ és $r = 0$, $G_F^1(n)$ az egyedüli extremális gráf. $a = 1$ és $r \neq 0$ esetén csak $G_F^1(n)$ és $G_F^2(n)$ extremális gráfok, míg $a > 1$ esetén $G_F^2(n)$ az egyetlen extremális gráf.*

5.2. Néhány megoldatlan probléma

Zárásképp az alábbiakban bemutatjuk a Turán-tételkör néhány eddig megoldatlan problémáját, többet maga Erdős Pál tűzött ki közülük. Nem páros gráfokra az extremális szám nagyságrendje ismert, és adódik az Erdős–Simonovits-tételből [6], így talán a legtöbb ilyen nyitott kérdés páros gráfok Turán-számára vagy annak nagyságrendjére vonatkozik. Itt sokszor nagyságrendi eltérés van a legjobb felső- illetve alsó becslés között. Ennek a területnek a kutatásában a véges geometria igen hasznos eszköznek bizonyult. Páros gráfok Turán-számával foglalkozik Füredi és Simonovits [8] cikke, amely rengeteg már elért eredményt illetve sejtést foglal magába. Ebből is adódóan ez jóval túlmutat dolgozatom eszköztárán, azonban az alábbi kérdések felkeltették az érdeklődésemet, így nem szerettem volna szó nélkül elmenni melletük.

5.2.1. Probléma. *[7] Legyen Q_k a k-dimenziós kocka gráfja. Mennyi $\mathrm{ex}(n; Q_k)$ értéke?*

5.2.2. Megjegyzés. A problémát Erdős és Simonovits vetették fel 1969-ben, és belátták, hogy $\mathrm{ex}(n; Q_3) = O\left(n^{\frac{8}{5}}\right)$.

5.2.3. Probléma. *[17] Mennyi $\mathrm{ex}(n; K_{r;r})$ értéke?*

5.2.4. Megjegyzés. A kérdést Zarankiewicz tette fel 1951-ben. Kővári, Sós és Turán 1954-es eredménye [12] felső korlátot ad, ők belátták, hogy $2 \leq r \leq s$ esetén teljesül

$\mathrm{ex}\,(n; K_{r;s}) < c \cdot s^{\frac{1}{r}} \cdot n^{2-\frac{1}{r}} + O\,(n)$ alkalmas c konstanssal. Ugyanakkor azt sejtik, hogy valamely c' pozitív konstansra $\mathrm{ex}\,(n; K_{r;r}) > c' \cdot n^{2-\frac{1}{r}}$ alsó korlátot szolgáltat a problémára. Ezt eddig csak $r = 2$ és $r = 3$ esetén sikerült bizonyítani [5, 2].

5.2.5. Probléma. *Mennyi* $\mathrm{ex}\,(n; C_k)$ *értéke, ha* $k \geq 4$*?*

5.2.6. Megjegyzés. Valójában az $\mathrm{ex}\,(n; C_4)$ meghatározására vonatkozó problémát nem ezen a ponton vetettük fel először, hiszen $C_4 = Q_2 = K_{2;2}$. Triviális alsó korlát adódik $\mathrm{ex}\,(n; C_k)$ értékére az Erdős–Gallai-tételből. A probléma páros k esetén meglehetősen nehéznek tűnik, itt még rengeteg a megválaszolatlan kérdés. Habár a Bondy–Simonovits-tétel [1] alapján azt sejtik, hogy $\mathrm{ex}(C_{2 \cdot k}; n)$ nagyságrendje $n^{1+\frac{1}{k}}$, ezt ezidáig csak $k \in \{2; 3; 5\}$ esetén sikerült igazolni véges geometriai konstrukciókra építve.

Irodalomjegyzék

[1] JOHN A. BONDY, MIKLÓS SIMONOVITS, *Cycles of even length in graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1974, 16.2: 97–105.

[2] W. G. BROWN, *On graphs that do not contain a Thomsen graph*, Canad. Math. Bull. 9 (1966), 281–285.

[3] NEAL BUSHAW, NATHAN KETTLE, *Turán numbers of multiple paths and equibipartite forests*, Combinatorics, Probability and Computing, 2011, 20.6: 837–853.

[4] GABRIEL ANDREW DIRAC, *Some theorems on abstract graphs*, Proceedings of the London Mathematical Society, 3rd Ser. 2, 1952, 69–81.

[5] PÁL ERDŐS, ALFRÉD RÉNYI, VERA T. SÓS, *On a problem of graph theory*, Studia Sci. Math. Hungar. 1 (1966), 215–235.

[6] PÁL ERDŐS, MIKLÓS SIMONOVITS, *A limit theorem in graph theory*, Studia Sci. Math. Hung., 1965

[7] PÁL ERDŐS, MIKLÓS SIMONOVITS, *Some extremal problems in graph theory*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 4. combinatorial theory and its applications, Balatonfüred, 1969 (`http://www.renyi.hu/~p_erdos/1970-22.pdf`)

[8] ZOLTÁN FÜREDI, MIKLÓS SIMONOVITS, *The history of degenerate (bipartite) extremal graph problems*, Erdős Centennial. Springer Berlin Heidelberg, 2013. p. 169–264.

[9] IZOLDA GORGOL, *Turán numbers for disjoint copies of graphs*, Graphs and Combinatorics, 2011, 27.5: 661–667.

[10] GYULA Y. KATONA, ANDRÁS RECSKI, CSABA SZABÓ, *A számítástudomány alapjai*, Typotex, 2006

[11] G. N. KOPYLOV, Maximal paths and cycles in a graph, Dokl. Akad. Nauk SSSR234(1977), 19–21. (English translation: Soviet Math. Dokl. 18(1977), no. 3, 593–596.)

[12] TAMÁS KŐVÁRI, VERA T. SÓS, PÁL TURÁN, *On a problem of K. Zarankiewicz*, Colloq. Math. 3 (1954), 50–57.

[13] BERNARD LIDICKÝ, HONG LIU, CORY PALMER, *On the Turán number of forests*, The Electronic Journal of Combinatorics, 2013, 20.2: P62.

[14] YUAN LONG-TU, ZHANG XIAO-DONG, *The Turán Number of Disjoint Copies of Paths*, Discrete Mathematics, 2017, 340.2: 132–139.

[15] OYSTEIN ORE, *Arc coverings of graphs*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, 1961, 55.1: 315–321.

[16] JACQUES VERSTRAËTE, *3-Paths and Cycles*, Lecture Note (`https://www.math.ucsd.edu/~jverstra/262A-Notes3.pdf`)

[17] KAZIMIERZ ZARANKIEWICZ, Problem P 101, Colloq. Math. 2 (1951), 116–131.