Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Iterációs módszerek stacionárius reakció-diffúziós egyenletre

Szakdolgozat

Göde Ábel

Matematika BSc
Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Dr. Karátson János
egyetemi tanár
ELTE Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2018

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **3**

2. Elliptikus peremérték-feladatok elméleti áttekintése **5**

2.1. Nemlineáris elliptikus peremérték-feladatok megoldhatósága . . . 5

2.2. Maximum-elv és nemnegativitás 11

3. Ritz-Galjorkin-módszer **16**

3.1. Ritz-Galjorkin-módszer szimmetrikus lineáris egyenletekre 16

3.2. Ritz-Galjorkin-módszer nemlineáris egyenletekre 18

3.3. Végeselem-módszer 20

4. Newton-módszer **24**

1. fejezet

Bevezetés

Dolgozatomban elliptikus parciális differenciálegyenletek megoldhatóságával illetve numerikus megoldásával foglalkozom.

Bevezetésként ismertetem a tárgyalt probléma fizikai hátterét a [3] illetve a [4] forrás alapján. Tegyük fel, hogy egy visszafordíthatatlan kémiai reakció játszódik le $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartományban, és az ennek során keletkező anyag diffúzió révén távozik úgy, hogy az adott tartományban a koncentrációja időben állandó. A koncentrációra a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$-\Delta u + \lambda f(u) = 0 \quad (x \in \Omega) \tag{1.1}$$

$$u = 1 \quad (x \in \partial\Omega) \tag{1.2}$$

ahol Δ a Laplace-operátor, λ egy pozitív konstans, f pedig olyan függvény, melynek értelmezési tartománya a nemnegatív számok halmaza, továbbá $f(0) = 0$ és $f(1) = 1$. Mostantól azzal a speciális esettel foglalkozunk, melyben $f(u) = u^\gamma$, ahol $\gamma > 1$. Ezt a q számot a reakció rendjének nevezzük.

A következő részben azt vizsgáljuk, milyen feltételek mellett garantálható a megoldás létezése és egyértelműsége. Tekintve, hogy az egyenlet $u \geq 0$ esetén értelmes (mind matematikailag, mind fizikailag), így azt is meg kell vizsgálni, mikor lesz az egyértelmű megoldás nemnegatív, amennyiben az eredeti egyenletben az u^γ tagot az $\mid u \mid^{\gamma-1} u$ kifejezésre cseréljük.

Az utolsó két fejezetben numerikus eljárásokat ismertetek a közelítő megoldás kereséséhez. Elsőként az úgynevezett Ritz-Galjorkin-módszert tárgyalom, amelynek lényege, hogy az operátoregyenletet véges dimenziós altereire vetítjük visszavezetve ezzel egy algebrai egyenletrendszerre. Ennek leggyakoribb alkalmazása a végeselem-módszer. A dolgozatban tárgyalt esetben az a módszer nemlineáris egyenletre vezet, aminek a numerikus megoldás gyakran nem egyszerű.

A másik numerikus módszer a klasszikus Newton-iteráció általánosítása, mely egy kezdeti értéktől másodrendben a konvergál a megoldáshoz. Az iterációs lépést a végeselem-módszer segítségével egy lineáris egyenletrendszerre vezethetjük vissza.

2. fejezet

Elliptikus peremérték-feladatok elméleti áttekintése

Kezdetben azt szeretnénk belátni, hogy a vizsgált problémának létezik megoldása, és ez a megoldás egyértelmű. Ezt követően megmutatjuk a megoldás nemnegativitását.

2.1. Nemlineáris elliptikus peremérték-feladatok megoldhatósága

Ebben az alfejezetben azt vizsgálom, milyen feltételek teljesülése mellett garantált egy nemlineáris operátoregyenlet megoldhatósága, majd ezt az eredményt alkalmazom a bevezetésben tárgyalt problémára. A továbbiakban a [2] forrásra hivatkozom.

[Definíció] Legyenek X,Y normált terek és $F : X \to Y$ operátor. Azt mondjuk, hogy az F Gateaux-deriválható az $u \in X$ pontban, amennyiben tetszőleges $v \in X$ esetén létezik a

$$\partial_v F(u) := \lim_{t\to 0} \frac{F(u+tv)-F(u)}{t} \tag{2.1}$$

határérték, és a $v \mapsto \partial_v F(u)$ leképezés folytonos lineáris operátor. Ekkor az $F'(u) \in B(X,Y)$, $F'(u)v := \partial_v F(u)$ leképezést az F operátor Gateaux-deriváltjának nevezzük.

[Definíció] Legyen X normált tér, u és v az X elemei, Φ pedig egy $X \to \mathbb{R}$ funkcionál. Ekkor $\phi_{u,v} : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\phi_{u,v}(t) := \Phi(u+t(v-u))$.

[Definíció] Legyenek X, Y és Z normált terek. Azt mondjuk, hogy egy $A : X \to B(Y,Z)$ leképezés hemifolytonos, ammennyiben tetszőleges $u,v \in X$ és $w \in Y$ elemek esetén a $t \mapsto A(u+tv)w$ egy folytonos leképezés $\mathbb{R}$-ből Z-be. Azt mondjuk, hogy A bihemifolytonos, amennyiben tetszőleges $u,v,w \in X$ és $z \in Y$ esetén az $(s,t) \mapsto A(u+tv+sw)z$ egy folytonos leképezés $\mathbb{R}^2$-ből Z-be.

[Definíció] Legyen $\Phi : X \to \mathbb{R}$ funkcionál. Azt mondjuk, hogy Φ konvex illetve szigorúan konvex, amennyiben tetszőleges $u,v \in X$ elemekre a $\phi_{u,v}$ konvex illetve szigorúan konvex.

[Állítás] Amennyiben a $\Phi : X \to \mathbb{R}$ funkcionál konvex és Gateaux-deriválható, tetszőleges $u,v \in X$ elemekre teljesül a $\Phi(v) - \Phi(u) \geq \langle \Phi'(u), v-u \rangle$ becslés.

Bizonyítás. $\phi_{u,v}$ konvexitása miatt $\phi_{u,v}(1) - \phi_{u,v}(0) \geq \phi'_{u,v}(0)(1-0) = \phi'_{u,v}(0)$, ebből pedig éppen a bizonyítandó állítás adódik. $\square$

[Definíció] Azt mondjuk, hogy egy $F : X \to X^*$ operátor monoton, amennyiben

$$\forall u,v \in X : \quad \langle F(v) - F(u), v-u \rangle \geq 0 \tag{2.2}$$

F szigorúan monoton, amennyiben

$$\forall u \neq v \in X : \quad \langle F(v) - F(u), v-u \rangle > 0 \tag{2.3}$$

F egyenletesen monoton, amennyiben

$$\exists m > 0 \quad \forall u,v \in X : \quad \langle F(v) - F(u), v-u \rangle \geq m\|u-v\|^2 \tag{2.4}$$

[Állítás] Legyen $\Phi : X \to \mathbb{R}$ kétszeresen Gateaux-deriválható funkcionál. Erre az alábbi állítások ekvivalensek:
(i) Φ konvex;
(ii) $\Phi' : X \to X^*$ monoton;
(iii) $\forall u \in X : \quad \Phi''(u) \geq 0$, vagyis $\quad \forall h \in X : \quad \langle \Phi''(u)h, h \rangle \geq 0$.

Bizonyítás.
(i) $\Rightarrow$ (ii). Φ konvexitása azt jelenti, hogy rögzített $u,v \in X$ esetén $\phi_{u,v}$ konvex, amiből következik, hogy $\phi'_{u,v}$ monoton növő. Ebből viszont $\phi'_{u,v}(1) - \phi'_{u,v}(0) \geq 0$ adódik, amit átfogalmazva éppen a monotonitás definícióját kapjuk.
(ii) $\Rightarrow$ (iii). Legyen $v := u + th$.
$\langle \Phi''(u)h, h \rangle = \langle \partial_h \Phi'(u), h \rangle = \langle \lim_{t \to 0} \frac{\Phi'(u+th) - \Phi'(u)}{t}, h \rangle =$
$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \langle \Phi'(u+th) - \Phi'(u), h \rangle = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2} \langle \Phi'(u+th) - \Phi'(u), (u+th) - u \rangle \geq 0$
(iii) $\Rightarrow$ (i). Legyen $u,v \in X$ rögzített, továbbá $h := v - u$. Ekkor létezik $\phi''_{u,v}$ és

$$\phi''_{u,v}(t) = \langle \Phi''(u+t(v-u))(v-u), v-u \rangle \geq 0. \tag{2.5}$$

Ebből következik, hogy $\phi_{u,v}$ konvex, tehát Φ is. $\square$

Megjegyezzük, hogy Φ szigorú konvexitása ekvivalens Φ' szigorú monotonitásával.

[Definíció] Legyen X Banach-tér és $A : X \to X^*$ operátor. Azt mondjuk, hogy A potenciáloperátor, amennyiben létezik olyan $J : X \to \mathbb{R}$ funkcionál, amely Gateaux-deriválható, és $J' = A$. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a J funkcionál az A potenciálja.

[1. tétel] Tegyük fel, hogy az $A : X \to X^*$ operátor Gateaux-deriválható és A' bihemifolytonos. A akkor és csak akkor potenciáloperátor, ha a deriváltja szimmetrikus, vagyis

$$\forall u,h,v : \quad \langle A'(u)h,v\rangle = \langle A'(u)v,h\rangle \tag{2.6}$$

Bizonyítás. (i). Tegyük fel, hogy A potenciáloperátor, J pedig A egyik potenciálja. Rögzített $u,h,v \in X$ vektorok mellett bevezetjük a

$$G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad G(s,t) := J(u+sh+tv) \tag{2.7}$$

függvényt. A feltételből tudjuk, hogy $A' = J''$ bihemifolytonos. Innen lehet tudni, hogy J kétszer Gateaux-deriválható, tehát léteznek G második parciális deriváltjai. Írjuk fel az s és t szerinti második parciális deriváltat. $\partial_t\partial_s G(s,t) = \langle J''(u+sh+tv)h,v\rangle = \langle A'(u+sh+tv)h,v\rangle$ Hasonlóan $\partial_s\partial_t G(s,t) = \langle A'(u+sh+tv)v,h\rangle$.
Ezek a második parciális deriváltak A' bihemifolytonossága miatt folytonosak is lesznek, így a Young-tétel alapján

$$\langle A'(u)h,v\rangle = \partial_t\partial_s G(0,0) = \partial_s\partial_t G(0,0) = \langle A'(u)v,h\rangle \tag{2.8}$$

(ii). Most tegyük fel azt, hogy A' szimmetrikus. Amennyiben létezik J potenciál, előáll az alábbi alakban:

$$J(u) = J(0) + \int_0^1 \langle J'(0+r(u-0)),u-0\rangle dr = J(0) + \int_0^1 \langle A(ru),u\rangle dr \quad u \in X \tag{2.9}$$

Általánosság rovása nélkül feltehető, hogy $J(0) = 0$, így mostantól legyen

$$J(u) := \int_0^1 \langle A(ru),u\rangle dr \quad u \in X \tag{2.10}$$

Most már csak azt kell belátni, hogy tetszőleges $u,v \in X$ esetén $\langle J'(u),v\rangle = \langle A(u),v\rangle$.
Rögzített $u,v \in X$ vektorok mellett bevezetjük a

$$K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad K(s,t) := J(su+tv) \tag{2.11}$$

függvényt. Amennyiben igaz a bizonyítandó $J' = A$, úgy
$K'(s,t) = (\partial_s K(s,t), \partial_t K(s,t)) = (\langle J'(su+tv),u\rangle, \langle J'(su+tv),v\rangle) = (\langle A(su+tv),u\rangle, \langle A(su+tv),v\rangle) =: k(s,t) \quad (s,t \in \mathbb{R})$.
Ha azonban azt tesszük fel, hogy $K' = k$, akkor

$$\partial_t K(1,0) = k_2(1,0), \text{ vagyis } \langle J'(u),v\rangle = \langle A(u),v\rangle \tag{2.12}$$

Tehát $J' = A$ azzal ekvivalens, hogy $K' = k$ tetszőleges u és v vektorokra. Ezt fogjuk most belátni. A feltevésünk alapján
$\forall s,t \in \mathbb{R}: \quad \partial_2 k_1(s,t) = \partial_t k_1(s,t) = \langle A'(su+tv)v, u\rangle = \langle A'(su+tv)u, v\rangle = \partial_s k_1(s,t) = \partial_1 k_1(s,t)$,
tehát k-nak létezik primitív függvénye. Ennek értéke tetszőleges (s,t) pontban előáll mint a $(0,0)$ pontból az (s,t) pontba vezető görbe mentén vett vonalintegrál. Ennek értéke
$\int_0^1 k(rs,rt)(s,t)dr = \int_0^1 (\langle A(r(su+tv)), u\rangle, \langle A(r(su+tv)), v\rangle)(s,t)dr = \int_0^1 \langle A(r(su+tv)), su+tv\rangle dr = J(su+tv) = K(s,t)$.
Azt kaptuk, hogy K valóban primitív függvénye k-nak, így a (3.2) szerinti J deriváltja valóban A. $\square$

[2. Tétel] Tegyük fel, hogy az X Banach-tér reflexív, a $\Phi : X \to \mathbb{R}$ funkcionál pedig Gateaux-deriválható, konvex, továbbá $\lim_{\|u\|\to\infty} \Phi(u) \to \infty$. Ekkor a Φ funkcionálnak létezik minimuma.

Bizonyítás. Legyen $\alpha = \inf_X \Phi \geq -\infty$. Létezik olyan $(u_n) \subset X$ sorozat, melyre $\Phi(u_n) \to \alpha$. Ekkor a $(\Phi(u_n))$ sorozat felülről korlátos, tehát az $(u_n) \subset X$ sorozat korlátos, ellenkező esetben az $\|u_n\|)$ sorozatnak, így a $\lim_{\|u\|\to\infty} \Phi(u) = \infty$ feltétel miatt a $(\Phi(u_n))$ sorozatnak is lenne végtelenbe tartó részsorozata. A reflexivitás miatt kiválasztható $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ részsorozat illetve $u^* \in X$ elem, hogy tetszőleges $\psi \in X^*$ esetén $\langle \psi, u_{n_k}\rangle \to \langle \psi, u^*\rangle$. $\psi := \Phi'(u^*)$ választással $\langle \Phi(u^*), u_{n_k}\rangle \to \langle \Phi(u^*), u^*\rangle$. Mivel feltettük, hogy Φ konvex, így ebből következik, hogy

$$\Phi(u_{n_k}) - \Phi(u^*) \geq \langle \Phi'(u^*), u_{n_k} - u^*\rangle \to 0 \tag{2.13}$$

Innen $\Phi(u^*) \leq \alpha = \inf \Phi$, azaz $\Phi(u^*) = \min \Phi$. $\square$

Megjegyezzük, hogy ha az előbbi tételben szereplő Φ funkcionál szigorúan konvex, akkor a mimimumhely egyértelmű.

A továbbiakban olyan $A(u) = b$ operátoregyenletek megoldhatóságát vizsgáljuk, amelyekben szereplő A operátor potenciáloperátor.

[Állítás] Tegyük fel, hogy $A : X \to X^*$ monoton potenciáloperátor, J egy potenciálja, Φ pedig az alábbi funkcionál:

$$\Phi : X \to \mathbb{R}, \quad \Phi(u) := J(u) - \langle b, u\rangle \tag{2.14}$$

Egy $u^* \in H$ vektor pontosan akkor megoldása az $A(u) = b$ egyenletnek, ha Φ minimumhelye.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy

$$\Phi'(u) = A(u) - b \quad (u \in X) \tag{2.15}$$

Így az egyenlet megoldásai azok a kritikus értékek, ahol a Φ deriváltja 0.
Tegyük fel, hogy $A(u^*) = b$, vagyis $\Phi'(u^*) = 0$. A monotonitásából következik,

hogy j konvex, így Φ is, hiszen az $u \to \langle b, u \rangle$ leképezés lineáris. Φ konvexitása miatt $\Phi(u) - \Phi(u^*) \geq \langle \Phi'(u^*), u - u^* \rangle = 0 \quad (u \in X)$, tehát u^* minimumhely.
Ha azt tesszük fel, hogy u^* minimumhely, akkor ott a derivált 0, tehát megoldása az egyenletnek. $\square$

[3. Tétel] Tegyük fel, hogy H valós Hilbert-tér, $A : H \to H$ pedig olyan operátor, amelyre:
(i) A Gateaux-deriválható, és a deriváltja bihemifolytonos,
(ii) tetszőleges $u \in H$ vektorra az $A'(u) \in B(H)$ önadjungált,
(iii) $\exists m > 0 \quad \forall u, h \in H : \quad \langle A'(u)h, h \rangle \geq m \|h\|^2$.
Ekkor tetszőleges $b \in H$ vektorra egyértelműen létezik az $A(u) = b$ egyenlet $u^* \in H$ megoldása.

Bizonyítás. A korábbiak alapján az első két feltételből következik, hogy A potenciáloperátor. Legyen J az A egyik potenciálja, továbbá $\Phi : H \to \mathbb{R}, \quad \Phi(u) = J(u) - \langle b, u \rangle$ olyan funkcionál, melyre $\Phi'(u) = A(u) - b$. Az (i) feltétel miatt Φ kétszer Gateaux-deriválható, tehát a Taylor-formula alapján tetszőleges $u \in H$ vektorhoz létezik olyan $\theta \in [0, 1]$, amire

$$\Phi(u) = \Phi(0) + \langle \Phi'(0), u \rangle + \frac{1}{2} \langle \Phi''(\theta u) u, u \rangle \tag{2.16}$$

amiből a (iii) feltétel miatt következik, hogy
$\Phi(u) \geq \Phi(0) - \|\Phi'(0)\| \, \|u\| + \frac{m}{2} \|u\|^2 = \Phi(0) + \|u\| \big(- \|\Phi'(u)\| + \frac{m}{2} \|u\| \big) \to \infty$, ha $\|u\| \to \infty$.
Azt is tudjuk, hogy Φ szigorúan konvex, tehát a korábbi tétel alapján egyértelműen létezik u^* minimumhelye, és ez lesz az egyenlet egyetlen gyöke is egyben. $\square$

Mostantól kezdve az alábbi típusú problémákat vizsgáljuk:

$$-\Delta u + q(x, u) = f(x) \quad (x \in \Omega) \tag{2.17}$$

$$u = g(x) \quad (x \in \partial\Omega) \tag{2.18}$$

ahol $\Omega \in \mathbb{R}^d$ és az alábbi feltételek teljesülnek:
$\partial\Omega$ szakaszonként sima és Lipschitz folytonos.
$f \in L^2(\Omega)$ és $g = \hat{g}_{|\partial\Omega}$ ahol $g \in H^1(\Omega)$.
Létezik olyan $\alpha, \beta \geq 0$, amire

$$0 \leq \frac{\partial q(x, \xi)}{\partial x} \leq \alpha + \beta \mid \xi \mid^{p-2} \tag{2.19}$$

ahol $d = 2$ esetén $p \geq 2$, és $d \geq 2$ esetén $2 \leq p \leq \frac{2d}{d-2}$. Megjegyezzük, hogy ekkor

$$\mid q(x, \xi) \mid \leq \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} \mid \xi \mid^{p-1} \tag{2.20}$$

Elsősorban azzal a speciális esettel foglalkozunk, ahol $\beta = \tilde{\beta} = 0$.

[4. Tétel] Az iménti feltételek teljesülése mellett az (2.43) - (2.44) problémának egyértelműen létezik $u^* \in H^1(\Omega)$ gyenge megoldása, azaz, melyre:

$$u^* = g \quad (x \in \partial\Omega) \tag{2.21}$$

$$\int_\Omega (\nabla u^* \cdot \nabla v + q(x,u^*)v)dx = \int_\Omega fvdx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{2.22}$$

Bizonyítás. (a) Kezdetben tegyük fel, hogy $g = 0$. Legyen $Q : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre

$$\frac{\partial Q(x,\xi)}{\partial \xi} = q(x,\xi) \tag{2.23}$$

minden (x,ξ) párra. A

$$\phi(u) = \int_\Omega (\frac{1}{2} \mid \nabla u \mid^2 + Q(x,u) - fu)dx \tag{2.24}$$

$H_0^1(\Omega)$-beli funkcionál Gateaux-deriváltját szeretnénk kiszámolni. Rögzített h,v esetén

$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\phi(u+th) - \phi(u)) = \lim_{t\to\infty} \int_\Omega \frac{1}{t}(\frac{1}{2}(\mid \nabla(u+th) \mid^2 - \mid \nabla u \mid^2) + Q(x,u+th) - Q(x,u) - f(u+th) + fu)dx$

Tudjuk, hogy ez az integrandus konvergál. A limesze:

$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}(\frac{1}{2}(\mid \nabla(u+th) \mid^2 - \mid \nabla u \mid^2) + Q(x,u+th) - Q(x,u) - f(u+th) + fu) = \nabla u \nabla h + q(x,u)h - fh$

Tehát ha létezik a $\partial_h Q$ parciális derivált, akkor

$$\Phi'(u)h = \langle D(u),h \rangle := \int_\Omega (\nabla u \nabla h + q(x,u)h - fh) \quad (\forall h \in H_0^1(\Omega) \tag{2.25}$$

ahol $D(u) \in H_0^1(\Omega)$ létezését a Riesz-tétel garantálja adott u függvényhez, hiszen az iménti integrál folytonos funkcionálja v-nek. Most ellenőrizzük, hogy az így definiált függvény valóban iránymenti derivált:

$\lim_{t\to 0}(\frac{1}{t}(\phi(u+th) - \phi(u)) - \langle D(u),h \rangle = \lim_{t\to 0} \int_\Omega \Big(\frac{1}{t}(\frac{1}{2}(\mid \nabla(u+th) \mid^2 - \mid \nabla u \mid^2) + Q(x,u+th) - Q(x,u) - f(u+th) + fu) - (\nabla u \nabla h + q(x,u)h - fh) \Big) = \lim_{t\to 0} \int_\Omega \big(q(x,u+\theta t) - q(x,u) \big) = \leq \lim_{t\to 0} \|q(x,u+\theta t) - q(x,u)\|_{L^2} \|h\|_{L^2}$

ahol $\mid \theta \mid < 1$. Használjuk erre a

$$\mid q(x,\xi) \mid \leq \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} \mid \xi \mid^{p-1} \tag{2.26}$$

becslést, ahol legyen most $\tilde{\beta} = 0$. Ebből az következik, hogy az első integrandus majdnem minden $x \in \Omega$ helyen tart a 0-hoz, és létezik L^1-beli majoráns, így a limesz valóban 0, ezért $D(u)$ valóban iránymenti derivált lesz. A $h \to \partial_h \phi$ leképezés nyilvánvalóan lineáris, tehát már csak a korlátosságot kell ellenőrizni.

$$\mid \partial_h \phi(u) \mid = \int_\Omega (\nabla u \nabla h + q(x,u)h - fh)dx \leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla h\|_{L^2} + (\|q(x,u)\|_{L^2} + \|f\|_{L^2}) \|h\|_{L^2} \tag{2.27}$$

Innen a $\|h\|_{L^2} \leq c\|\nabla h\|_{L^2}$ becslés miatt következik $\partial_h \phi(u)$ korlátossága. Ezzel beláttuk, hogy ϕ Gateaux-deriválható, és

$$\phi'(u)v = \int_\Omega (\nabla u \nabla v + q(x,u)v - fv)dx \quad (v \in H_0^1(\Omega) \tag{2.28}$$

ahol a tétel feltételei biztosítják, hogy minden integrál véges. Tudjuk, hogy a $\int_\Omega \mid \nabla v \mid^2 dx$ integrál ekvivalens a $\|v\|_1^2 := \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$ normával, ezért

$$\phi(u) \to +\infty \quad ha \quad \|u\|_1 \to +\infty \tag{2.29}$$

(és ϕ legalább négyzetesen nő). A ϕ funkcionál szigorú konvexitása és (2.29) miatt ϕ-nek van egy $u^* \in H_0^1(\Omega)$ kritikus pontja, amire $\phi'(u^*)v = 0$ minden $v \in H_0^1(\Omega)$ függvényre. (2.28) miatt u^* lesz a gyenge megoldás.
(b) Legyen $g = \hat{g}_{|\partial\Omega}$ ahol $\hat{g} \in H^1(\Omega)$. Ezt visszavezetjük az előző esetre. Olyan $\hat{u}$ függvényt keresünk, melyre

$$\hat{u} = u + \hat{g} \tag{2.30}$$

így $u = 0$ a $\partial\Omega$ pontjain.Ezt a (2.22) képletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy u kielégíti a problémát

$$\hat{q}(x,\xi) = q(x, \xi + \hat{g}(x)) \tag{2.31}$$

együtthatóval. Mivel $\hat{g}(x)$ független a ξ változótól, az így kapott együttható továbbra is folytonosan differenciálható a második változójában, továbbá kielégíti a (2.45) feltételt. Ezért u létezik és egyértelmű, csakúgy, mint $\hat{u}$. $\square$

Az iménti tétel alapján a dolgozat által tárgyalt problémának egyértelműen létezik gyenge megoldása, azaz az alábbi alakban teljesül:

$$u^* \equiv 1 \quad (x \in \partial\Omega) \tag{2.32}$$

$$\int_\Omega (\nabla u^* \cdot \nabla v + \mid u^* \mid^{\gamma-1} u^* v)dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{2.33}$$

2.2. Maximum-elv és nemnegativitás

Ebben a fejezetben maximum-elvet bizonyítunk előbb lineáris, majd nemlineáris elliptikus egyenletekre, és ennek segítségével garantáljuk a megoldás nemnegativitását. A továbbiakban az [1] forrásra fogok hivatkozni. Tekintsük az alábbi L lineáris operátort az Ω korlátos tartomány sima függvényein:

$$Lu \equiv -div\big(a(x)\nabla u\big) + h(x)u \tag{2.34}$$

ahol $a \in C^1(\Omega)$ és $h \in C(\Omega)$ úgy, hogy valamilyen μ_0 és μ_1 pozitív konstansokra $0 < \mu_0 \leq a(x) \leq \mu_1$ és $0 \leq h(x) \leq \mu_1$. Feltesszük továbbá, hogy $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, melynek pereme szakaszonként sima és Lipschitz folytonos.

Az alábbi eredmény ismert.

[5. Tétel] Amennyiben $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ és $Lu \leq 0$ az Ω elemeire, akkor

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max\{0, \max_{\partial\Omega} u\} \tag{2.35}$$

Továbbá, ha $h \equiv 0$, akkor

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \tag{2.36}$$

Ennek alapján az alábbi következményekre jutunk.

[1. Következmény] Legyen $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ az alábbi rendszer megoldása:

$$Lu = f \quad (x \in \Omega) \tag{2.37}$$

$$u = g \quad (x \in \partial\Omega) \tag{2.38}$$

ahol $g \in \partial\Omega$. Ha $f \leq 0$ az Ω elemeire, akkor

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max\{0, \max_{\partial\Omega} g\} \tag{2.39}$$

továbbá, ha $h \equiv 0$, akkor

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} g \tag{2.40}$$

Ebből $u = -u$ helyettesítéssel adódik, hogy

[Következmény 2] Legyen $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ (2.37) - (2.38) rendszer megoldása. Ha $f \geq 0$, akkor

$$\min_{\bar{\Omega}} u \geq \min\{0, \min_{\partial\Omega} g\} \tag{2.41}$$

továbbá, ha $h \equiv 0$, akkor

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} g \tag{2.42}$$

Ebből a két következményből kapjuk, hogy

[3. Következmény] Legyen $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ (2.37) - (2.38) rendszer megoldása. Ha $f \geq 0$ és $g \geq 0$, akkor $u \geq 0$.

A továbbiakban arról lesz szó, hogyan általánosíthatók a lineáris elliptikus rendszerre vonatkozó eredmények nemlineáris elliptikus problémákra Dirichlet peremfeltétel mellett.

Tekintsük az alábbi problémát:

$$-\Delta u + q(x,u) = f(x) \quad (x \in \Omega) \tag{2.43}$$

$$u = g(x) \quad (x \in \partial\Omega) \tag{2.44}$$

ahol $\Omega \in \mathbb{R}^d$ és az alábbi feltételek teljesülnek:
$\partial\Omega$ szakaszonként sima és Lipschitz folytonos.
$f \in L^2(\Omega)$ és $g = \hat{g}_{|\partial\Omega}$ ahol $g \in H^1(\Omega)$.
Létezik olyan $\alpha, \beta \geq 0$, amire

$$0 \leq \frac{\partial q(x,\xi)}{\partial x} \leq \alpha + \beta \mid \xi \mid^{p-2} \tag{2.45}$$

ahol $d = 2$ esetén $p \geq 2$, és $d \geq 2$ esetén $2 \leq p \leq \frac{2d}{d-2}$. Megjegyezzük, hogy ekkor

$$\mid q(x,\xi) \mid \leq \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} \mid \xi \mid^{p-1} \tag{2.46}$$

Az előző fejezetben szó volt arról, hogy ennek a megoldása létezik és egyértelmű. Most erre fogunk egy maximum-elvet bizonyítani.

[6. Tétel] Tegyük fel, hogy az előző tétel feltételei teljesülnek, és a (2.43) - (2.44) feladat megoldása $C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$-osztályú. Ha

$$f(x) - q(x,0) \leq 0 \quad \text{, majdnem minden } x \in \Omega, \tag{2.47}$$

akkor

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max\{0, \max_{\partial\Omega} g\} \tag{2.48}$$

Speciálisan, ha $g \geq 0$, akkor

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} g \tag{2.49}$$

és ha $g \leq 0$, akkor

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq 0 \tag{2.50}$$

Bizonyítás. Legyen

$$r(x,\xi) := \begin{cases} \frac{q(x,\xi)-q(x,0)}{\xi} & \text{ha } \xi \neq 0 \\ \frac{\partial q}{\partial \xi}(x,0) & \text{ha } \xi = 0 \end{cases} \tag{2.51}$$

Mivel $q \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$, így az r függvény folytonos. Továbbá, (2.45) miatt

$$r(x,\xi) \geq 0 \tag{2.52}$$

Legyen továbbá

$$\tilde{h}(x) := r(x,u(x)) \quad (x \in \bar{\Omega}) \tag{2.53}$$

Ekkor $\tilde{h} \in C(\bar{\Omega})$ korlátos függvény, továbbá $r \geq 0$ miatt $\tilde{h} \geq 0$. Így az

$$\tilde{L}u \equiv -\Delta u + \tilde{h}(x)u \tag{2.54}$$

operátor kielégíti a (2.34) feltételt. Vegyük észre, hogy a (2.43) egyenlet átírható az alábbi alakba:

$$\tilde{L}u = f(x) - q(x,0) \tag{2.55}$$

ahol $f(x) - q(x,0) \leq 0$. Így a (2.43) nemlineáris egyenlet visszavezethető a 2.2 tételre a (2.34) lineáris operátor segítségével. Az

$$\hat{f}(x) := f(x) - q(x,0) \tag{2.56}$$

jelöléssel a (2.43) - (2.44) feladat gyenge változata az alábbi lesz:

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + \tilde{h}uv)dx = \int_{\Omega} \hat{f}vdx \quad \forall v \in H^1_D(\Omega) \tag{2.57}$$

Az első tétel bizonyításának megfelelő módon legyen $M := \max\{0, \max_{\partial\Omega} g\}$ illetve bevezetjük a

$$v := \max\{u - M, 0\} \tag{2.58}$$

szakaszonként folytonosan differenciálható függvényt. Így tehát $v \geq 0$ és $v_{|\partial\Omega} = 0$, továbbá $u(x) = v(x) + M$ tetszőleges $x \in \bar{\Omega}$ esetén, kivéve ahol $v(x) = 0$. Tehát erre a v-re a (2.57) baloldala

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + \tilde{h}uv)dx = \int_{\Omega} (\mid \nabla v \mid^2 + \tilde{h}(v+M)vdx \geq 0 \tag{2.59}$$

mert a $\tilde{h}$, v függvények és az M konstans is nemnegatív. Azonban $\hat{f} \leq 0$ miatt erre a v-re (2.57) jobboldala

$$\int_{\Omega} \hat{f}vdx \leq 0 \tag{2.60}$$

amiből

$$\int_{\Omega} (\mid \nabla v \mid^2 + \tilde{h}(v+M)vdx = 0, \tag{2.61}$$

ebből $\mid \nabla v \mid = 0$, emiatt v konstans és nemnegatív, vagyis

$$v(x) \equiv c \geq 0 \quad \text{az} \quad \bar{\Omega} \quad \text{elemeire.} \tag{2.62}$$

Itt $c = 0$, ezért $u \leq M$ az Ω elemeire, amiből (2.48) következik, ugyanis $c > 0$ esetén azt kapnánk, hogy $v_{|\partial\Omega} = 0$, ami ellentmondás. Így $v \equiv 0$, amiből (2.48) következik. A (2.49) és a (2.50) pedig (2.48) triviális következménye. $\square$

Speciálisan, ha $q \equiv 0$, akkor a (2.49) egyenlőség igaz lesz a $g \geq 0$ kikötés nélkül is.

[7. Tétel] Tekintsük a (2.43) - (2.44) feladatot azzal a kikötéssel, hogy $q \equiv 0$, továbbá $u \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, illetve

$$f(x) \leq 0 \quad x \in \Omega \tag{2.63}$$

Ekkor

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} g \tag{2.64}$$

Bizonyítás. Amennyiben $\max_{\partial\Omega} g \geq 0$, a tétel állítása következik az előző tételből. Legyen $\max_{\partial\Omega} g < 0$, pontosabban $\max_{\partial\Omega} g = -K$, ahol $K > 0$. Ekkor a $w := u + K$ függvény kielégíti a vizsgált feladat azon változatát, ahol az egyenlőségek jobboldala rendre f illetve $g + K$, mivel az előző tételből w-re

$$\max_{\bar{\Omega}} w \leq \max\{0, \max_{\partial\Omega} g\} = 0 \tag{2.65}$$

Innen

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq -K = \max_{\partial\Omega} g \tag{2.66}$$

□

Az általunk vizsgált speciális problémában $f \equiv 0$, $g \equiv 1$, a $q(x,u)$ függvény pedig $u \mid u \mid^{\gamma-1}$ alakú, így a $H^1(\Omega)$ Szoboljev térbeli gyenge megoldás az alábbi alakban áll elő:

$$u^* \equiv 1 \quad (x \in \partial\Omega) \tag{2.67}$$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + u^* \mid u^* \mid^{\gamma-1} v dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{2.68}$$

Mivel $f(x) - q(x,0) \equiv 0 \leq 0$, így $\tilde{u} := -u^*$, $\quad \tilde{g} := -g$ helyettesítéssel $\tilde{g} \equiv -1 \leq 0$ miatt $\max_{\bar{\Omega}} \tilde{u} \leq 0$, vagyis $\min_{\bar{\Omega}} u \geq 0$, így biztosítottuk a megoldás nemnegativitását.

3. fejezet

Ritz-Galjorkin-módszer

Az első numerikus módszer a megoldás közelítésére, amelyet tárgyalunk, az úgynevezett Ritz-Galjorkin-módszer, melynek lényege, hogy az eredeti operátoregyenletet egy véges dimenziós alterére vetítjük, így egy olyan egyenletrendszert kapunk, amelyet már könnyen meg tudunk oldani, az így kapott közelítő megoldások pedig konvergálnak az eredetihez. A [2] forrás alapján ismertetem a módszert, bizonyítok néhány tételt a konvergenciára vonatkozóan, és demonstrálom a dolgozatban tárgyalt probléma kapcsán.

3.1. Ritz-Galjorkin-módszer szimmetrikus lineáris egyenletekre

Első lépésben szimmetrikus lineáris egyenletekre konstruáljuk meg a módszert. Tegyük fel, hogy H valós Hilbert-tér, $f \in H$, és $A : H \rightarrowtail H$ egyenletesen pozitív, vagyis alkalmas $p > 0$ konstanssal $A - pI$ pozitív definit. Korábbi eredményeink alapján tudjuk, hogy az

$$Au = f \tag{3.1}$$

operátoregyenletnek egyértelműen létezik $u^* \in H_A$ gyenge megoldása, vagyis

$$\forall v \in H : \quad \langle u^*, v \rangle_A = \langle f, v \rangle \tag{3.2}$$

Azt is tudjuk, hogy a

$$\Phi(u) := \|u\|_A^2 - 2\langle f, u \rangle \tag{3.3}$$

funkcionál egyetlen minimumhelye H-n a gyenge megoldás.

Válasszuk $\phi_1, \phi_2, ...$ lineárisan független vektorokat úgy, hogy azok H_A-ban totális rendszert alkotnak, és legyen mostantól rögzített n indexre

$$H_n := span\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n\} \tag{3.4}$$

Mostantól a Φ funkcionál minimumhelyét az így definiált véges dimenziós altereken keressük. Ehhez bevezetjük az alábbi jelöléseket:

$$\Phi(u_n) := \min_{H_n} \Phi \tag{3.5}$$

illetve

$$u_n := \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i \tag{3.6}$$

Megjegyezzük, hogy az így kapott problémának továbbra is egyértelműen létezik megoldása. Most előállítjuk az u_n közelítő megoldást. Legyen

$$\hat{\Phi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \hat{\Phi}(c) := \phi(\sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i) \tag{3.7}$$

A feladat mostantól $\hat{\Phi}$ c-ben való minimalizálása. $\hat{\Phi}$ konvexitása miatt a derivált zérushelye minimumhely.

$$\hat{\Phi}(c) = \langle \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i, \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j \rangle_A - 2\langle f, \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j \langle \phi_i, \phi_j \rangle_A - 2\sum_{i=1}^{n} c_i \langle f, \phi_i \rangle \tag{3.8}$$

amiből

$$\partial_k \hat{\Phi}(c) = 2\sum_{i=1}^{n} c_i \langle \phi_i, \phi_k \rangle_A - 2\langle f, \phi_k \rangle \tag{3.9}$$

tehát

$$\hat{\Phi}'(c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall k = 1, ..., n : \quad \sum_{i=1}^{n} \langle \phi_i, \phi_k \rangle_A c_i = \langle f, \phi_k \rangle \tag{3.10}$$

Most bevezetjük az alábbi jelöléseket:

$$G_{ik} = G_{ki} := \langle \phi_i, \phi_k \rangle_A \quad \text{és} \quad b_k := \langle f, \phi_k \rangle \quad (i,k = 1, ..., n) \tag{3.11}$$

Ezzel a jelöléssel az u_n együtthatóit a

$$Gc = u \tag{3.12}$$

lineáris egyenletrendszer megoldásaként kapjuk.

Meg kell vizsgálnunk, hogy az u_n közelítő megoldások valóban konvergálnak-e az eredeti feladat megoldásához.

[Állítás] Az iménti u_n vektorokra teljesül, hogy $\lim_{n\to\infty} u_n = u^*$ az $\|\cdot\|_A$ normában.

Bizonyítás. Mivel feltettük, hogy $\cup_H H_n$ sűrű a H_A térben, illetve hogy Φ folytonos leképezése H_A-nak, $\min_{H_n} \Phi \to \min_{H_A} \Phi$, vagyis $\Phi(u_n) \to \Phi(u^*)$, amiből

$$\|u_n - u^*\|_A^2 = \Phi(u_n) - \Phi(u^*) \to 0 \tag{3.13}$$

□

[8. Tétel] Az alábbi kettő tulajdonság teljesül a Ritz-Galjorkin-módszerrel kapott u_n vektorokra:
(1) $\forall v \in H_n : \quad \langle u_n, v\rangle_A = \langle f, v\rangle$
(2) $\forall v \in H_n : \quad \langle u_n - u^*, v\rangle_A = 0$

Bizonyítás.
(1) Elég belátni az egyenlőtlenséget bázisvektorokra. Ez a következőképpen néz ki:

$$\langle u_n, \phi_k\rangle_A = \langle \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i, \phi_k\rangle_A = \sum_{i=1}^{n} c_i \langle \phi_i, \phi_k\rangle_A = \langle f, \phi_k\rangle \tag{3.14}$$

(2) Az előző tulajdonság alapján tetszőleges $v \in H_n$ vektor esetén

$$\langle u_n, v\rangle_A - \langle u^*, v\rangle_A = \langle f, v\rangle - \langle f, v\rangle = 0 \tag{3.15}$$

□

Az iménti tétel eredményeképp azt kaptuk, hogy a Ritz-Galjorkin-módszert úgy is bevezethetjük, hogy az operátoregyenletet a H_n altérre vetítjük, illetve hogy tetszőleges n-re az $u_n - u^*$ hibavektor merőleges a H_n altérre. Az utóbbi tulajdonságot nevezzük Galjorkin-ortogonalitásnak.

Az iménti tétel akkor is érvényben marad, ha a módszert úgy általánosítjuk, hogy a H_n alterek nincsenek egymásba ágyazva, hanem minden n-re különböző bázisfüggvényeket választunk, vagyis $H_n = span\{\phi_1^{(n)}, \phi_2^{(n)}, ..., \phi_n^{(n)}\} \subset H_A$. Az u_n közelítéseket most is az előbbiekhez hasonlóan állítjuk elő, azonban erősebb feltétel szükséges a konvergenciához.

[Állítás] Tegyük fel, hogy tetszőleges $u \in H_A$ esetén

$$dist_A(u, H_n) := \min\{\|u - v_n\|_A : v_n \in H_n\} \to 0 \quad \text{ha} \quad n \to \infty \tag{3.16}$$

Ekkor $\lim_{n\to\infty} u_n - u^* = 0$ az $\|\cdot\|_A$ normában.

Bizonyítás. Az előbb láttuk, hogy u_n éppen az u^* vetülete a H_n altérre, azaz a hozzá legközelebbi H_n-beli elem, vagyis

$$\|u^* - u_n\|_A = \min\{\|u^* - v_n\|_A : v_n \in H_n\} \to 0 \tag{3.17}$$

□

3.2. Ritz-Galjorkin-módszer nemlineáris egyenletekre

Mostantól nemlineáris, folytonos operátorokra alkalmazzuk a Ritz-Galjorkin-módszert. Tegyük fel, hogy H valós Hilbert-tér, $A : H \to H$ egyenletesen monoton és Lipschitz-folytonos nemlineáris operátor, azaz léteznek olyan $M > m \geq 0$ konstansok, hogy tetszőleges $u, v \in H$ esetén

$$\langle A(u) - A(v), u - v\rangle \geq m\|u - v\|^2, \quad \|A(u) - A(v)\| \leq M\|u - v\|. \tag{3.18}$$

Tudjuk, hogy $b \in H$ esetén az

$$A(u) = b \tag{3.19}$$

operátoregyenletnek egyértelműen létezik $u^* \in H$ megoldása. Írjuk ezt fel az alábbi alakban:

$$\forall v \in H : \quad \langle A(u^*), v\rangle = \langle b, v\rangle \tag{3.20}$$

Legyen rögzített n-re $H_n := span\{\phi_1^{(n)}, \phi_2^{(n)}, ..., \phi_3^{(n)}\} \subset H$ n-dimenziós altér, ahol tetszőleges $u \in H$ esetén

$$dist(u, H_n) := \min\{\|u - v_n : v_n \in H_n\} \to 0 \quad \text{ha} \quad n \to \infty \tag{3.21}$$

A vetületi egyenletet a lineáris esethez hasonlóan értelmezzük, így az

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i \in H_n \tag{3.22}$$

közelítő megoldást továbbra is az alábbi egyenlőség definiálja:

$$\forall v \in H_n : \quad \langle A(u_n), v\rangle = \langle b, v\rangle \tag{3.23}$$

A megoldás létezik és egyértelmű. Az u_n együtthatóinak meghatározásához helyettesítsük a (3.22) alakot illetve $v := \phi_k$ bázisfüggvényeket a (3.23) egyenletbe:

$$\langle A(\sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i, \phi_k\rangle = \langle b, \phi_k\rangle \quad (k = 1, ..., n) \tag{3.24}$$

Legyen

$$\mathscr{A}_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \mathscr{A}_k(c) = \mathscr{A}_k(c_1, ..., c_n) := \langle A(\sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i), \phi_k\rangle \tag{3.25}$$

illetve $\beta_k := \langle b, \phi_k\rangle \quad (k = 1, ..., n)$. Ezek meghatároznak egy $\mathscr{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvényt és egy $\beta \in \mathbb{R}^n$ vektort, így u_n együtthatóit meghatározhatjuk az

$$\mathscr{A}(c) = \beta \tag{3.26}$$

nemlineáris egyenletrendszer megoldásával.

A (3.20) és a (3.23) együttesen azt adja, hogy

$$\forall v \in H_n : \quad \langle A(u^*) - A(u_n), v\rangle = 0 \tag{3.27}$$

vagyis $r_n := A(u_n) - b$ jelöléssel tetszőleges $v \in H_n$ esetén $\langle r_n, v\rangle = 0$.

[Nemlineáris Céa-lemma] Tetszőleges n pozitív egészre

$$\|u*-u_n\| \leq \frac{M}{m}\min\{\|u^*-v_n\| : v_n \in H_n\} \tag{3.28}$$

Bizonyítás. Rögzített $v_n \in H_n$ esetén a (3.18) és a (3.27) miatt
$m\|u^*-u_n\|^2 \leq \langle A(u^*)-A(u_n), u^*-u_n\rangle \leq \langle A(u^*)-A(u_n), u^*-v_n\rangle \leq \|A(u^*)-A(u_n)\|\|u^*-u_n\| \leq M\|u^*-u_n\|\|u^*-v_n\|$
Innen $\|u^*-u_n\| \leq \frac{M}{n}\|u^*-v_n\|$ $\square$

Ebből következik, hogy amennyiben teljesül a 3.21 feltétel, $\|u^*-u_n\| \to 0$.

3.3. Végeselem-módszer

A Ritz-Galjorkin-módszer egyik alkalmazása a végeselem-módszer, melynek során az Ω tartományt, amelyen a parciális differenciálegyenletet értelmezzük, felosztjuk véges sok egyszerűbb résztartományra. Ezek két dimenzióban lehetnek például háromszögek vagy téglalapok. A véges dimenziós alterek olyan függvényekből állnak, amelyek megszorításai egy-egy ilyen kisebb tartományra adott fokú polinom, a résztartományok határain pedig folytonosság vagy valahányszoros folytonos differenciálhatóság jellemzi. Az altereket most a $h > 0$ rácsparaméterrel indexeljük, amely a résztartományok átmérőjével arányos. Az altereket így V_h-val, a közelítő megoldásokat pedig u_h-val jelöljük, vagyis

$$V_h := \{u \in C^k(\bar{\Omega}) : u_{|T_i} \in P_m \ \forall i = 1, ..., n\} \tag{3.29}$$

ahol $k, m \in \mathbb{N}$ és $n \in \mathbb{N}^+$ adott, P_m a legfeljebb m-edfokú polinomok halmaza és $T_1, ..., T_n$ az Ω résztartományai. A továbbiakban legyen $k = 0$ és $m = 1$, vagyis a V_h elemei folytonos, szakaszonként lineáris függvények.

Alkalmazzuk ezt a módszert az eddig tárgyalt problémára:

$$-\Delta u + |\, u\,|^{\gamma-1} u = 0 \quad (x \in \Omega) \tag{3.30}$$

$$u = 1 \quad (x \in \partial\Omega) \tag{3.31}$$

a szokásos feltételek mellett. Azt már beláttuk, hogy a gyenge megoldás

$$\int_\Omega (\nabla u^* \cdot \nabla v + |\, u^*\,|^{\gamma-1} u^* v) = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.32}$$

alakban áll elő.

Most homogenizáljuk az egyenletet. $z = u - 1$ helyettesítéssel mostantól a

$$-\Delta z + q(z) = 0 \tag{3.33}$$

$$z_{|\partial\Omega} = 0 \tag{3.34}$$

egyenletet vizsgáljuk, ahol

$$q(z) := \mid z+1 \mid^{\gamma-1} (z+1) \tag{3.35}$$

Ennek

$$z_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i \tag{3.36}$$

közelítő megoldásában a c_i együtthatókat a

$$Gc + H(c) = 0 \tag{3.37}$$

egyenletrendszer adja, ahol

$$(Gc)_k = \sum_{i=1}^{n} (\int_\Omega \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_k) c_i \quad \text{és} \quad (H(c))_k = \int_\Omega \mid \sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i + 1 \mid^{\gamma-1} (\sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i + 1)\phi_k \tag{3.38}$$

$(k = 1, ..., n)$. Így olyan z_h közelítést kapunk, mely kielégíti az

$$\int_\Omega \nabla z_h \cdot \nabla v + \int_\Omega q(z_h) v = 0 \quad (\forall v \in V_h) \tag{3.39}$$

vetületi egyenletet.

Már csak a módszer konvergenciáját kell ellenőrizni. A

$$-\Delta z + q(z). \tag{3.40}$$

operátorhoz tartozó gyenge alak:

$$\langle A(z), v\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega (\nabla z \nabla v + q(z) v) \tag{3.41}$$

ahol feltehetjük, hogy q Lipschitz-folytonos és monoton.

Mostantól több alkalommal is használjuk az úgynevezett Poincaré-Friedrichs-egyenlőtlenséget, amely azt mondja ki, hogy

$$\forall u \in H_0^1(\Omega): \quad \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \lambda_1 \|u\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{3.42}$$

ahol λ_1 a $-\Delta$ operátor legkisebb sajátértéke Ω-n Dirichlet-peremfeltétel mellett.

Ellenőrizzük a Céa-lemma teljesülésének feltételeit. Legyen $z, \tilde{z} \in H_0^1(\Omega)$. Ekkor

$$\langle A(z) - A(\tilde{z}), z - \tilde{z}\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \mid \nabla(z-\tilde{z}) \mid^2 + (q(z) - q(\tilde{z})(z-\tilde{z}) \geq \int_\Omega \mid \nabla(z-\tilde{z}) \mid^2 \tag{3.43}$$

q monotonitása miatt, tehát az A funkcionál egyenletesen monoton.

$$\|A(z)-A(\tilde{z})\|_{H_0^1} = \sup_{\|v\|_{H_0^1}=1} \langle A(z)-A(\tilde{z}), v\rangle_{H_0^1} = \sup_{\|v\|_{H_0^1}=1} \int_\Omega (\nabla(z-\tilde{z})\nabla v + (q(z)-q(\tilde{z}))v) \tag{3.44}$$

q Lipschitz-folytonossága miatt ez az alábbi módon becsülhető:
$\sup_{\|v\|_{H_0^1}=1} \int_\Omega (\nabla(z-\tilde{z})\nabla v + (q(z)-q(\tilde{z}))v) \leq \sup_{\|v\|_{H_0^1}=1} \int_\Omega (\mid \nabla(z-\tilde{z}) \mid \cdot \mid \nabla v \mid + L \mid z-\tilde{z} \mid v) = \|z-\tilde{z}\|_{H_0^1} + \frac{L}{\lambda_1}\|z-\tilde{z}\|_{H_0^1}$
a (3.42) egyenlőtlenség miatt. Ezzel beláttuk A Lipschitz-folytonosságát. Alkalmazhatjuk a Céa-lemmát, ami garantálja az iteráció konvergenciáját.

A továbbiakban szemléltetem a módszert egy dimenzióban a $[-1,1]$ intervallumon. Tekintsük a

$$-z'' + \mid z+1 \mid^{\gamma-1} (z+1) = 0 \tag{3.45}$$

$$z(-1) = z(1) = 0 \tag{3.46}$$

feladatot. Az intervallumot most 4 egyenlő részre osztjuk, a ϕ_i bázisfüggvények pedig az úgynevezett kalapfüggvények lesznek, vagyis olyan szakaszonként lineáris függvények lesznek, amelyek az egyik belső osztópontban 1-et, a többiben pedig 0-t vesznek fel. Ekkor

$$G_{ik} = G_{ki} = \int_{-1}^{1} \phi_i' \phi_k' \tag{3.47}$$

azaz

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.48}$$

(3.38) alapján

$$(H(c))_k = \int_{-1}^{1} \mid \sum_{i=1}^{3} c_i\phi_i + 1 \mid^{\gamma-1} (\sum_{i=1}^{3} c_i\phi_i + 1)\phi_k \quad (k = 1,2,3) \tag{3.49}$$

Ez a nemlineáris függvény adja meg adott c-re Gc értékét. Az egyenletek tehát az alábbiak:

$$2c_1 - c_2 + \int_{-1}^{1} \mid \sum_{i=1}^{3} c_i\phi_i + 1 \mid^{\gamma-1} (\sum_{i=1}^{3} c_i\phi_i + 1)\phi_1 = 0 \tag{3.50}$$

$$-c_1 + 2c_2 - c_3 + \int_{-1}^{1} \mid \sum_{i=1}^{3} c_i\phi_i + 1 \mid^{\gamma-1} (\sum_{i=1}^{3} c_i\phi_i + 1)\phi_2 = 0 \tag{3.51}$$

$$-c_2 + 2c_3 + \int_{-1}^{1} \mid \sum_{i=1}^{3} c_i\phi_i + 1 \mid^{\gamma-1} (\sum_{i=1}^{3} c_i\phi_i + 1)\phi_3 = 0 \tag{3.52}$$

$\gamma = 3$ esetben az alábbit kapjuk:

$$2c_1 - c_2 + \frac{(c_1+1)^4}{8c_1} - \frac{(c_1+1)^5 - 1}{40c_1} - \frac{(c_1+1)^4}{8(c_2-c_1)} + \frac{(c_2+1)^5 - (c_1+1)^5}{40(c_2-c_1)^2} = 0 \tag{3.53}$$

$$-c_1+2c_2-c_3+\frac{(c_2+1)^4}{8(c_2-c_1)}+\frac{(c_1+1)^5-(c_2+1)^5}{40(c_1-c_2)}-\frac{(c_2+1)^4}{8(c_3-c_2)}+\frac{(c_3+1)^5-(c_2+1)^5}{40(c_3-c_2)^2}=0 \tag{3.54}$$

$$-c_2+2c_3+\frac{(c_3+1)^4}{8(c_3-c-2)}+\frac{(c_2+1)^5-(c_3+1)^5}{40(c_3-c_2)^2}+\frac{(c_3+1)^4}{8c_3}+\frac{(c_3+1)^5-1}{40c_3}=0 \tag{3.55}$$

Ez a módszer sok egyenlet esetében már nem hatékony.

4. fejezet

Newton-módszer

A most következő szakaszban általánosítjuk a klasszikus egyváltozós Newton-módszert operátoregyenletekre a [2] forrás alapján. Az eredeti módszer az alábbi iterációt használja:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{4.1}$$

ahol $x_0 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Most egy $F : X \to Y$ operátor nullhelyét keressük. Kezdetben tegyük fel, hogy F Fréchet-deriválható és deriváltja Lipschitz-folytonos, azaz

$$\exists L > 0 \forall u, v \in X : \quad \|F'(u) - F'(v)\| \leq L\|u - v\| \tag{4.2}$$

Ismert, hogy a klasszikus egyváltozós Newton-módszer konvergenciája másodrendű megfelelő kikötések mellett. Ebben az esetben szintén másodrendű konvergenciához jutunk a Lipschitz-folytonosság miatt, ha az F operátort az elsőfokú Taylor-polinom segítségével linearizáljuk az iteráció során.

Tegyük fel továbbá, hogy tetszőleges $u, h \in X$ esetén megfelelő, u-tól és h-tól független m pozitív konstanst választva

$$F' : X \to Y \quad \text{bijekció és} \quad \|F'(u)h\| \geq m\|h\|. \tag{4.3}$$

[9. Tétel] Tegyük fel, hogy X, Y Banach-tér, $u_0 \in X$ tetszőleges, $F : X \to Y$ Fréchet-deriválható, továbbá F' Lipschitz-folytonos L konstanssal. Ekkor az

$$u_{n+1} = u_n - F'(u_n)^{-1}F(u_n) \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{4.4}$$

iterációról az alábbiakat mondhatjuk:
(i) $\|F(u_{n+1}\| \leq \frac{L}{2m^2}\|F(u_n)\|^2 \quad (n \in \mathbb{N})$

(ii) Amennyiben u_0 olyan, hogy

$$q := \frac{L}{2m^2}\|F(u_0)\|^2 < 1, \tag{4.5}$$

akkor

$$m\|u_n - u^*\| \leq \|F(u_n)\| \leq \frac{2m^2}{L}q^{2^n} \to 0. \tag{4.6}$$

Bizonyítás.
(i) A Newton-Leibniz-formula értelmében
F(u$_{n+1} = F(u_n) + \int_0^1 F'(u_n + t(u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} - u_n)dt = -F'(u_n) + \int_0^1 F'(u_n + tp_n)p_n dt = \int_0^1 (F'(u_n + tp_n) - F'(u_n))p_n dt$
$ahol$p$_n := -F'(u_n)^{-1}F(u_n) = u_{n+1} - u_n$. Mivel F Lipschitz-folytonos, továbbá 4.3 miatt tetszőleges $u \in H$ esetén $F'(u)^{-1} \leq \frac{1}{m}$, azt a becslést kapjuk, hogy
$\|F(u_{n+1}\| \leq \int_0^1 \|F'(u_n + tp_n) - F'(u_n)\|\|p_n\| dt \leq \int_0^1 Lt\|p_n\|^2 dt = \frac{L}{2}\|p_n\|^2 = \frac{L}{2}\|F'(u_n)^{-1}F(u_n)\|^2 \leq \frac{L}{2m^2}\|F(u_n)\|^2$
(ii) Alkalmazzuk az iménti becslést n-szer:
$\|F(u_n)\| \leq \frac{L}{2m^2}\|F(u_{n-1}\|^2 \leq \frac{L}{2m^2}(\frac{L}{2m^2})^2\|F(u_{n-2}\|^4 = (\frac{L}{2m^2})^{1+2}\|F(u_{n-2}\|^{2^2} \leq (\frac{L}{2m^2})^{1+2+2^2}\|F(u_{n-3}\|^{2^3} \leq \ldots \leq (\frac{L}{2m^2})^{1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}}\|F(u_0\|^{2^n} = (\frac{L}{2m^2})^{2^n-1}\|F(u_0\|^{2^n}$
vagyis
$\|F(u_n)\| \leq \frac{2m^2}{L}(\frac{L}{2m^2}\|F(u_0)\|)^{2^n} = \frac{2m^2}{L}q^{2^n}$
Tehát ha $q < 1$, akkor $\|F(u_n)\| \to 0$. $\square$

Ennél általánosabb tétel is igaz.

[10. Tétel] Tegyük fel, hogy X, Y Banach-terek, $D \subset X$ konvex halmaz, $u_0 \in D$, $F : X \to Y$ pedig Fréchet-deriválható D-n és deriváltja Lipschitz-folytonos L konstanssal, továbbá

$$\|F'(u_0)^{-1}\| \leq \frac{1}{m}, \quad \|F'(u_0)^{-1}F(u_0) \leq \mu \tag{4.7}$$

és

$$\theta := \frac{L\mu}{m} < \frac{1}{2} \tag{4.8}$$

Legyen $t^* := \frac{L}{m}(1 - (1 - 2\theta)^{\frac{1}{2}})$ és $S := \{u \in X : \|u - u_0\| \leq t^*\} \subset D$. Ekkor az

$$u_{n+1} = u_n - F'(u_n)^{-1}F(u_n) \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{4.9}$$

iteráció jóldefiniált és konvergál egy $u^* \in S$ vektorhoz, ami az egyenlet egyetlen megoldása az S gömbben, és érvényes a (4.15) konvergenciabecslés, ahol $q = 2\theta$.

Mostantól az alábbi iterációs lépést alkalmazzuk:

$$F'(u_n)p_n = -F(u_n) \tag{4.10}$$

$$u_{n+1} = u_n + p_n \tag{4.11}$$

Ez egy lineáris operátoregyenlet p_n-re, így az könnyen meghatározható anélkül, hogy kiszámolnánk $F'(u_n)$ inverzét. Megjegyezzük, hogy a 4.3 teljesül, amennyiben

$$\forall u, h \in H: \quad \langle F'(u)h, h\rangle \geq m\|h\|^2 \tag{4.12}$$

Az előző tétel bizonyításában Fréchet-deriválhatóság helyett elég a Gateaux-deriválhatóság is.

Elég továbbá feltenni F' lokális Lipschitz-folytonosságát, vagyis hogy alkalmas monoton növő $\tilde{L} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ függvény választásával

$$\|F'(u) - F'(v)\| \leq \tilde{L}\|u - v\| \quad (u, v \in X, \|u\|, \|v\| \leq r). \tag{4.13}$$

Tekintsük ugyanis a $B(0,R_0)$ gömböt ahol $R_0 := \frac{2}{m}\|F(u_0)\| + \|u_0\|$. Ezen a gömbön F' Lipschitz-folytonos az $L = \tilde{L}(R_0)$ Lipschitz-konstanssal. Mivel a sorozat az u^* körüli $\frac{1}{m}\|F(u_0)\|$ sugarú gömbben fut, ami részhalmaza a $B(0,R_0)$ gömbnek, így az alábbi becslést alkalmazhatjuk:

$$\|u\| \leq \|u - u^*\| + \|u^* - u_0\| + \|u_0\| \leq \frac{2}{m}\|F(u_0)\| + \|u_0\| = R_0 \tag{4.14}$$

Mostantól ismét a konkrét esetet tárgyaljuk.

Vezessük be az alábbi operátort:

$$\langle A(z), v\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega (\nabla z \nabla v + q(z)v) \quad (\forall z, v \in H_0^1(\Omega)) \tag{4.15}$$

ahol kezdetben feltesszük, hogy $q \in C^1(\mathbb{R})$, és $q'(z)$ monoton növő korlátos és Lipschitz-folytonos L_s Lipschitz-konstanssal. Megjegyezzük, hogy ezek a feltételek enyhíthetők. Az $z^* \in H_0^1(\Omega)$ gyenge megoldásra

$$\langle A(z^*), v\rangle_{H_0^1} = 0 \quad (\forall v \in H_0^1(\Omega)) \tag{4.16}$$

Legyen $z_0 \in H_0^1(\Omega)$ adott. Vetítsük le a V_h altérre. A Newton-iteráció az alábbi:

$$z_{n+1} := z_n + p_n \tag{4.17}$$

ahol

$$\langle A_h'(z_n)p_n, v\rangle_{H_0^1} = -\langle A_h(z_n) - b_h, v\rangle_{H_0^1} \quad (\forall v \in V_h) \tag{4.18}$$

Tudjuk, hogy A Gateaux-deriválható, és

$$\langle A'(z)v, u\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega (\nabla v \nabla u + q(z)vu) \quad (\forall u, v, z \in H_0^1) \tag{4.19}$$

Ezt kell levetítenünk a V_h altérre és behelyettesíteni a (4.18) linearizált egyenletbe.

$$\int_\Omega (\nabla p_n \nabla v + q'(z_n)p_n v) = -\int_\Omega (\nabla z_n \nabla v + q(z_n)v) \quad (\forall v \in V_h) \tag{4.20}$$

Így a

$$-\Delta p_n + q'(z_n)p_n = \Delta z_n - q(z_n) \tag{4.21}$$

$$p_{n|\partial\Omega} = 0 \tag{4.22}$$

lineáris elliptikus feladat végeselemes megoldására vezettük vissza.

[11. Tétel] Tegyük fel, hogy teljesülnek a megadott feltételek, és

$$L := \frac{L_q}{2}\left(\frac{diam(\Omega)}{\pi}\right)^2 \tag{4.23}$$

Ekkor
(1) $\|A_h(z_{n+1}) - b_h\|_{H_0^1} \le \frac{L}{2}\|A_h(z_n) - b_h\|^2_{H_0^1} \quad (n \in \mathbb{N})$
(2) Amennyiben az z_0 vektorra teljesül

$$q := \frac{L}{2}(\|A(0) - b\|_{H_0^1} + M\|z_0\|_{H_0^1}) < 1, \tag{4.24}$$

úgy

$$\|z_n - z^*\|_{H_0^1} \le \|A_h(z_n) - b_h\|_{H_0^1} \le \frac{2}{L}q^{2^n} \to 0 \tag{4.25}$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy A' bihemifolytonos és $A'(z)$ önadjungált. Mivel

$$\langle A'(z)h, h\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega (\mid \nabla h \mid^2 + \partial_\xi q(x,z)h^2) \quad (\forall z, h \in H_0^1(\Omega)), \tag{4.26}$$

így
$\|h\|^2_{H_0^1} = \int_\Omega \mid \nabla h \mid^2 \le \langle A'(z)h, h\rangle_{H_0^1} \le \int_\Omega (\mid \nabla h \mid^2 + \tilde{\beta} h^2) = \|h\|^2_{H_0^1} + \tilde{\beta}\|h\|^2_{L^2} \le (1 + \frac{\tilde{\beta}}{\lambda_1})\|h\|^2_{H_0^1} =: M\|h\|_{H_0^1}$
a (3.42) egyenlőtlenség miatt. Most A' Lipschitz-folytonosságát ellenőrizzük:
$\mid \langle (A'(z) - A'(v))h, h\rangle \mid = \mid \int_\Omega (\partial_\xi q(x,z) - \partial_\xi q(x,v))h^2 \mid \le L_q \int_\Omega \mid z - v \mid h^2 \le L_q \|z - v\|^2_{L^2(\Omega)}\|h\|^2_{L^4(\Omega)}$
az általános Hölder-egyenlőtlenség miatt. Tudjuk, hogy a h függvény valóban $L^4(\Omega)$-beli, és a Szoboljev-féle beágyazási tétel miatt

$$H_0^1(\Omega) \subset L^4(\Omega), \quad \|v\|_{L^4} \le K_4\|v\|_{H_0^1} \quad (v \in H_0^1(\Omega)), \tag{4.27}$$

tehát

$$\mid \langle (A'(z) - A'(v))h, h\rangle \mid \le \frac{L_q K_4^2}{\sqrt{\lambda_1}}\|z - v\|_{H_0^1}\|h\|^2_{H_0^1}, \tag{4.28}$$

így

$$\|A'(z) - A'(v)\| = \sup_{\|h\|_{H_0^1} = 1} \mid \langle (A'(z) - A'(v))h, h\rangle \mid \le \frac{L_q K_4^2}{\sqrt{\lambda_1}}\|z - v\|_{H_0^1}. \tag{4.29}$$

Ennek alapján A' Lipschitz-folytonos $L := \frac{L_q K_4^2}{\sqrt{\lambda_1}}$ Lipschitz-konstanssal. Mivel

$$K_4^2 \leq \sqrt{\frac{2}{\lambda_1}}, \tag{4.30}$$

így

$$L \leq \frac{L_q\sqrt{2}}{\lambda_1} \leq \frac{L_q}{\sqrt{2}}(\frac{diam(\Omega)}{\pi})^2, \tag{4.31}$$

így ez a Lipschitz-konstans vehető az iterációban, és ebből következnek a kívánt becslések. $\square$

A mi esetünkben az iterációs lépés az alábbi alakot ölti:

$$-\Delta p_n + (\gamma \mid z_n + 1 \mid^{\gamma-1}) p_n = \Delta z_n - \mid z_n + 1 \mid^{\gamma-1} (z_n + 1) \tag{4.32}$$

$$p_{n|\partial\Omega} = 0 \tag{4.33}$$

Ennek keressük a végeselemes megoldását a V_h altérben, amit a $\phi_1, ..., \phi_m$ bázisfüggvények generálnak. Legyen

$$p_n = \sum_{i=1}^{m} c_i \phi_i \tag{4.34}$$

A c_i együtthatókat a

$$Gc = b \tag{4.35}$$

lineáris egyenletrendszer adja, ahol

$$G_{ik} = G_{ki} = \int_\Omega (\nabla\phi_i \nabla\phi_k + q'(z)\phi_i\phi_k \tag{4.36}$$

és

$$b_k = -\int_\Omega ({}_n\nabla\phi_k + q(z_n)\phi_k) \tag{4.37}$$

Illusztráljuk ezt a problémát egy dimenzióban a szokásos bázisfüggvényekkel, ahol a $[-1, 1]$ intervallumot 4 részre osztjuk:

$$-p_n'' + q'(z_n)p_n = z_n'' - q(z_n) \tag{4.38}$$

$$p_n(-1) = p_n(1) = 0 \tag{4.39}$$

Legyen

$$z_0 := \frac{x^2 - 1}{2}. \tag{4.40}$$

Ekkor

$$q(z_0) = \Big(\frac{x^2 + 1}{2}\Big)^\gamma, \tag{4.41}$$

és
$$q'(z_0) = \gamma\Big(\frac{x^2+1}{2}\Big)^{\gamma-1}. \tag{4.42}$$
Mivel
$$z_0'' \equiv 1, \tag{4.43}$$
így az iteráció első lépése a következő alakot ölti:
$$-p_1'' + \gamma\Big(\frac{x^2+1}{2}\Big)^{\gamma-1} p_1 = 1 - \Big(\frac{x^2+1}{2}\Big)^{\gamma} \tag{4.44}$$
$\gamma := 2$ helyettesítéssel
$$-p_1'' + (x^2+1)p_1 = 1 - \Big(\frac{x^2+1}{2}\Big)^{2}. \tag{4.45}$$
$\gamma = 2$ esetben az alábbit kapjuk:
$$G = \begin{pmatrix} 2.36458 & -0.91042 & 0 \\ -0.91042 & 2.52083 & -0.91042 \\ 0 & -0.91042 & 2.36458 \end{pmatrix} \tag{4.46}$$
és
$$b = \begin{pmatrix} 0.28593 \\ 0.36406 \\ 0.28593 \end{pmatrix}, \tag{4.47}$$
amiből
$$c = \begin{pmatrix} 0.24453 \\ 0.32105 \\ 0.24453 \end{pmatrix} \tag{4.48}$$
adódik. Vizsgáljuk meg, hogy milyen értékeket vesz fel z_1 az osztópontokban:
$$z_1(-0.5) = z_1(0.5) = -0.03047, \quad z_1(0) = -0.17895. \tag{4.49}$$

Ez a módszer általában jól használható akár több dimenzióban illetve nagy vektorok esetén is. Mivel tudjuk, hogy a módszer konvergál leggyakrabban addig iteráljuk, amíg nem lesz mondjuk $\|z_n - z_{n-1}\|_{max} < \varepsilon$ kellően kicsinek választott ε számra.

Irodalomjegyzék

[1] Karátson János, Korotov Sergey Discrete maximum principles for finite element solutions of nonlinear elliptic problems with mixed boundary conditions NUMERISCHE MATHEMATIK 99 : 4 pp. 669-698. , 30 p. (2005)

[2] Karátson János Numerikus funkcionálanalízis Typotex, (2014)

[3] Díaz Nonlinear partial differential equations and free boundaries Pitman Publishing Limited (1985)

[4] Aris The Mathematical Theory of Diffusion and Reaction in Permeable Catalysts Clarendon Press, Oxford (1975)