Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

---

Kazai Bálint

# Homogén Struktúrák Automorfizmus-csoportjai

Szakdolgozat

Matematika BSc, alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető: Sági Gábor

MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

Belső konzulens: Csirmaz László

Számítógéptudományi Tanszék

Budapest, 2019

# Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Sági Gábornak a szakdolgozatom megírása közben nyújtott segítségéért, és a rendszeres konzultációkért.

# Tartalomjegyzék

# 1. fejezet

# Bevezetés

A dolgozatomban a homogén struktúrák automorfizmus-csoportjaival fogunk foglalkozni. Ezen belül az úgynevezett kiterjesztési probléma kerül az előtérbe, ami a következőt jelenti.

Legyen $\mathcal{A}$ egy véges struktúra és legyenek $p_1, ..., p_n$ az $A$-nak parciális izomorfizmusai, ekkor keressünk egy olyan véges $\mathcal{B}$ struktúrát, hogy $A$ részstruktúrája $B$-nek, és a $p_1, ..., p_n$ $A$-beli parciális izomorfizmusok keterjeszthetőek $B$ automorfizmusaivá.

A második fejezetben egy topológiai bevezető lesz található, melyben felidézünk néhány topológiai alapfogalmat melyeket fel fogunk használni a dolgozat további fejezeteiben.

A harmadik fejezet a permutációcsoportokkal foglalkozik, ahol felidézünk néhány csoportelméleti fogalmat, többek között az izomorfizmus és a permutációcsoport definicióját. Továbbá ezek hogyan hozhatók kapcsolatba diszkrét topologikus terek szorzatával. Szó lesz még a szabadon generált csoport fogalmáról is, és az ezen értelmezhető provéges topológiáról. Fel fogjuk még idézni a homogén struktúrák definicióját.

A negyedik fejezetben a kiterjesztési problémával kapcsolatos korábbi eredmények lesznek megtalálhatóak.

Az ötödik fejezetben két új eredményt fogunk bemutatni a kiterjesztési problémával kapcsolatban.

A 13. tétel ekvivalens feltételt ad arra vonatkozóan, hogy egy szabad csoporton értelmezett homomorfizmus folytonos legyen.

A 14. tétel megad egy szükséges és elégséges feltételt egy gyengén generikus elem létezésére $Aut(\mathcal{A})^n$-ben.

# 2. fejezet

# Topológiai Bevezető

Ebben a fejezetben felidézünk néhány alapvető topológiai fogalmat.

**1. Definíció.** *Legyen $X$ egy halmaz és legyen $\Omega$ $\subseteq P(X)$. Ekkor az $(X, \Omega)$ párt topologikus térnek és $\Omega$ -t $X$-en értelmezett topológiának nevezzük ha teljesülnek rá a következő tulajdonságok:*

- $\emptyset \in \Omega$;
- $X \in \Omega$;
- *ha $A$ indexhalmaz és minden $a \in A$ esetén $U_a \in \Omega$ akkor $\bigcup_{a \in A} U_a \in \Omega$;*
- *ha $U_1$ és $U_2 \in \Omega$ akkor $U_1 \cap U_2 \in \Omega$.*

Hasonlóan a metrikus terekhez itt, is beszélhetünk nyílt illetve zárt halmazokról.

**2. Definíció.** *Egy $U \subseteq X$ halmazt nyíltnak nevezünk ha $U \in \Omega$.*

*Egy $U \subseteq X$ halmazt zártnak nevezünk ha $X \setminus U$ nyílt.*

**3. Definíció.** *Egy $\Sigma \subseteq \Omega$ halmazrendszert az $(X, \Omega)$ topologikus tér bázisának hívunk ha minden $\Omega$-beli halmaz előáll $\Sigma$-beliek uniójaként.*

**4. Definíció.** *Legyen $(X, \Omega)$ topologikus tér. Ekkor $x \in X$ környezetein azokat az $U \subset X$ halmazokat értjük melyekre teljesül, hogy létezik olyan $V$ nyílt halmaz ($V \in \Omega$) melyre $x \in V \subset U$.*

A nyílt halmazok és a környezetek segítségével értelmezhetjük a topologikus terek között ható folytonos függvények fogalmát.

**5. Definíció.** *Legyenek $(X, \Omega)$ és $(Y, \tau)$ topologikus terek és legyen $f : X \to Y$ egy leképezés. Azt mondjuk hogy $f$ folytonos, ha minden $V \in \tau$-ra $f^{-1}(V) \in \Omega$, azaz nyílt halmaz ősképe nyílt.*

**6. Definíció.** *Egy $f : X \to Y$ az $x \in X$ pontban pontosan akkor folytonos, ha $f(x)$ minden $V$ környezetéhez található $x$-nek olyan $U$ környezete, hogy $f(U) \subset V$.*

Most a metrizálható topologikus terekről lesz szó. Mivel nem mindegyik topologikus tér metrizálható, ezért először felidézzük az $M_2$ és $T_4$ terek fogalmát, majd felidézzük a metrizálható topologikus terek definicióját, és végül kimondunk egy tételt arról, hogy mikor metrizálható egy topologikus tér.

**7. Definíció.** *Egy $(X, \Omega)$ topologikus teret $M_2$ térnek nevezünk, ha létezik megszámlálható bázisa.*

**8. Definíció.** *Az $(X, \Omega)$ topologikus tér normális, ha bármely két $A$ $B \subseteq X$ disztjunkt zárt halmazhoz léteznek olyan disztjunk, nyílt $U_A$ és $U_B$ halmazok, melyekre $A$ részhalmaza $U_A$-nak, és $B$ részhalmaza $U_B$-nek.*

**9. Definíció.** *Egy $(X, \Omega)$ topologikus teret $T_4$ térnek nevezünk ha normális, és minden $a, b \in X$-re létezik $a$-nak olyan környezete amely nem tartalmazza $b$-t. (Ez utóbbi feltétel a $T_1$ szétválasztási axióma.)*

**10. Definíció.** *Egy $(X, \Omega)$ topologikus teret metrizálhatónak hívunk, ha van olyan $\varrho$ metrika az $X$ alaphalmazon, melynek természetes topológiája $\Omega$. Azaz a $\varrho$ metrika szerinti nyílt halmazok halmaza éppen $\Omega$.*

**1. Tétel (Uriszon metrizációs tétele).** *Ha $(X, \Omega)$ topologikus tér $T_4$, és $M_2$ tér, akkor metrizálható.*

A tétel bizonyítása megtalálható például [11]-ben.

**11. Definíció.** *Legyen $A$ indexhalmaz és minden $a \in A$ esetén $(X_a, \tau_a)$ topologikus tér. Ekkor a $\prod_{a \in A} X_a$ halmazon adott topológiát szorzattopológiának nevezzük ha az alábbi halmazrendszer egy bázisa:*

$$\{\Pi_{a \in A} U_a \mid \textit{ahol véges sok } a \in A\textit{-ra } U_a \in \tau_a \textit{ és a többi } U_a = X_a\}.$$

Ismert, hogy megszámlálható sok mertizálható tér szorzata metrizálható marad. (Részletekkel kapcsolatban [11]-re utalunk.)

# 3. fejezet

# Permutációcsoportok

Ebben a fejezetben a Bevezető szakaszban felidézünk néhány csoportelméleti fogalmat, többek között a szimmetrikus csoport definicióját és azt, hogy miként értelmezzük rajta a szorzattopológiát. Majd a Homogén struktúrák nevezetű szakaszban feidézzük a homogén struktúra definicióját és, hogy mit értünk azon, hogy egy struktúra beágyazható egy másik struktúrába. A következő Parciális automorfizmusok kiterjesztése nevezetű szakaszban felidézzük a kiterjesztési probléma fogalmát. Végül, a Provéges topológia nevezetű részben felidézünk egy a szabadon generált csoportokon értelmezett topológiát.

## 3.1. Bevezető

Ebben a részben néhány olyan csoportelméleti fogalom definicióit idézzük fel, amelyekre a későbbiekben hivatkozni fogunk.

Elsőnek szükségünk lesz a homomorfizmus, illetve izomorfizmus definiciójára, mivel a későbbiekben ezek kiterjesztésével fogunk foglalkozni. Ezután beszélünk permutációcsoportokról,és pályákról, végül megvizsgálunk két definiciót is a szabadon generált csoportokra.

**12. Definíció.** *Legyenek $G$ és $H$ csoportok $*$ illetve $\bullet$ műveletre nézve. Ekkor*

*$\psi : G \to H$ csoporthomomorfizmus ha műveletttartó, azaz tetszőleges $a, b \in G$ esetén*

$$\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b), \text{ és } \psi(e^G) = e^H,$$

*ahol $e^G$ és $e^H$ a $G$ és $H$ csoportok egységelemei.*

*$\psi$ izomorfizmus ha kölcsönösen egyértelű homomorfizmus.*
*$G$ és $H$ csoportokat izomorfnak nevezzük ha van $G$-ből $H$-ba menő izomorfizmus.*
*Jelölés: $G \cong H$.*

**1. Megjegyzés.** *A csoporthomomorfizmus definiciójában megkövetelt két tulajdonságból következik, hogy $\psi(a^{-1}) = \psi^{-1}(a)$.*

*Ugyanis, $e^H = \psi(e^G) = \psi(a^{-1} * a) = \psi(a^{-1}) \bullet \psi(a)$, innen következik, hogy $\psi(a^{-1}) = \psi^{-1}(a)$.*

Most idézzük fel a baloldali, illetve jobboldali mellékosztályok fogalmát melyekre szükségünk lesz, hogy megadhassuk egy csoport idexének definicióját.

**13. Definíció.** *Legyen $H$ részcsoportja $G$-nek, ekkor a*

$$gH = \{gh | h \in H\}$$

*halmazt baloldali mellékosztálynak nevezzük.*
*Hasonlóan, a*

$$Hg = \{hg | h \in H\}$$

*halmazt pedig jobboldali mellékosztálynak nevezzük.*

**14. Definíció.** *Legyen $H$ részcsoportja $G$-nek, ekkor $H$ $G$ szerinti indexe a $H$ szerinti különböző mellékosztályok száma.*

Pontosabb lenne jobboldali, illetve baloldali indexről beszélni, erre azonban nincs szükség, ugyanis a jobboldali és a baloldali mellékosztályok száma megegyezik a következők miatt. Figyeljük meg, hogy

$$(gH)^{-1} = H^{-1}g^{-1} = Hg^{-1}$$

tehát ha a $gH$ baloldali mellékosztályhoz a $hg^{-1}$ jobboldali mellékosztályt rendeljük hozzá, akkor kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést kapunk, ezért ezek száma megegyezik. Ennek megfelelően a továbbiakban csak indexről fogunk beszélni.

Most felelevenítünk egy számunkra fontos csoportfajtát: a permutációcsoportkokat, ez azért is fonos, mert mint ahogy a következő tételből kiderül, minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal. Majd a permutációcsoportok segítségével beszélhetünk elemek pályáiról.

**15. Definíció.** *Legyen $X$ tetszőleges halmaz, és jelöljük $S_X$-el az $X$ permutációinak halmazát. Ekkor $S_X$ csoportot alkot a kompozició műveletére nézve.*

*Ezt az $S_X$ csoportot hívjuk $X$ szimmetrikus csoportjának.*

*$S_X$ részcsoportjait pedig $X$ permutációcsoportjainak.*

**2. Megjegyzés.** *Az $S_X$ halmazon a következőképpen értelmezünk egy szortattopológiát. $S_X$-re tekinthetünk úgy, mint az $X^X$ részhalmazára, így van értelme $X^X$-nek az $S_X$-re vonatkozó altér-topológiáját vizsgálni. A továbbiakban ez az altér-topológia lesz $S_X$ topológiája.*

**2. Tétel (Cayley).** *Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.*

A tétel bizonyítása megtalálható például az [5] könyvben.

**16. Definíció.** *Legyen $G$ az $X$ egy permutációcsoportja. Ekkor az $x \in X$ pont pályáján azon $y \in X$ pontok halmazát értjük, melyekre létezik egy $g \in G$ permutáció melyre $g(x) = y$. $x$ pályáját $\bigcirc_G(x)$-el jelöljük.*

A pályák segítségével tudunk definiálni egy ekvivalencia relációt, két pontot ekvivalensnek tekintünk ha egy pályán vannak. Vagyis $x \sim y$, ha van egy $g \in G$ permutáció, hogy $g(x) = y$.

A következő két definició a szabadon generált csoportokról fog szólni, elsőként felidézünk egy konstrukciót, majd felidézünk egy absztaktabb definiciót is. Ezek után emlékeztetünk arra az állításra, hogy a szabadon generált csoport izomorfia erejéig egyértelmű.

**17. Definíció.** *Legyen $P$ egy halmaz, és $P^{-1}$ tartalmazza a $P$ halmaz elemeinek (formális) inverzeit. Legyen $\Lambda = P \cup P^{-1}$. Nevezzük a $\Lambda$ elemeiből képzett véges sorozatokat szavaknak. Ha egy szóban egymás mellé kerül egy betű és annak "inverze", akkor azokat töröljük a szóból. Legyen $F(P)$ az a csoport, aminek az alaphalmaza a $\Lambda$ elemeibő képzett szavak, és tekintsük a szavak egymásután írásának a műveletét, ekkor $F(P)$-t a $P$ által szabadon generált csoportnak nevezzük.*

A következő definició egy absztaktabb definiciója lesz a szabad csoportoknak.

**18. Definíció.** *Legyen $P$ egy halmaz, és $H$ tetszőleges csoport. Ekkor $G$-t a $P \subseteq G$ szabadon generálja, ha tetszőleges $\psi : P \to H$ függvény kiterjeszthető egy $\psi' : G \to H$ csoporthomomorfizmussá.*

**1. Állítás.** *$F(P)$ izomorfia erejéig az egyetlen csoport, amit $P$ szabadon generál.*

Az állítás bizonyítása megtalálható például az [5] könyvben.

## 3.2. Homogén struktúrák

Ebben részben néhány, a struktúrákhoz tartozó fogalmat fogunk feleleveníteni, többek között a beágyazás és a homogén struktúra fogalmát.

**19. Definíció.** *$\mathcal{L}$-struktúráknak nevezzük azokat a struktúrákat, amelyek az $\mathcal{L}$ nyelvvel rendelkeznek ,azaz az $\mathcal{L}$ nyelvbe tartozó függvény, reláció, és konstansszimbólumokat tartalmazzák, alaprelációként, alapfüggvényként és konstansokként.*

**20. Definíció.** *Legyen $\mathcal{A}$, és $\mathcal{B}$ két $\mathcal{L}$-struktúra. Ekkor a $\Gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ leképezést homomorfizmusnak nevezzük, ha kompatibilis az $\mathcal{L}$ nyelv függvényszimbólumaival, relációszimbólumaival, és konstansszimbólumaival. Azaz minden k-változós függvényszimbólumra és minden $x_1, x_2, ..., x_k \in A$-ra teljesül, hogy $f^{\mathcal{B}}(\Gamma(x_1), \Gamma(x_2), ..., \Gamma(x_k)) = \Gamma(f^{\mathcal{A}}(x_1, x_2, ..., x_k))$.*
*Minden k-változós r relációszimbólumra és $x_1, x_2, ..., x_k \in A$-ra teljesül, hogy $r^{\mathcal{A}}(x_1, x_2, ..., x_k) \Leftrightarrow r^{\mathcal{B}}(\Gamma(x_1), \Gamma(x_2), ..., \Gamma(x_k))$.*
*Továbbá minden c konstansszimbólumra $\Gamma(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$.*

Egy $\Gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfizmust beágyazásnak hívunk, ha injektív.

Egy $\Gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ bijektív homomorfizmust automorfizmusnak nevezünk.

**21. Definíció.** *Egy $\mathcal{A}$ megszámlálható struktúrát homogénnek nevezünk, ha minden olyan izomorfizmus mely $A$ végesen generált részstruktúrái között hat, kiterjeszthető $\mathcal{A}$ automorfizmusává.*

## 3.3. Parciális automorfizmusok kiterjesztése

Ebben a részben bevezetjük a parciális izomorfizmus fogalmát, és felidézzük a kiterjesztési problémát, ami később figyelmünk középpontjában lesz.

**22. Definíció.** *Legyen $\mathcal{L}$ egy véges relációs nyelv és legyenenek $M$ és $M'$ $\mathcal{L}$-nyelvű struktúrák . Egy parciális izomorfizmus $M$-ből $M'$-be egy izomorfizmus $M$ részstruktúrájából $M'$ részstuktúrájába. Jelölje $Part(M, M')$ az $M$-ből $M'$-be menő parciális izomorfizmusok halmazát.*

Legyen $\mathcal{C}$ az $\mathcal{L}$-struktúrák osztálya (tartalmaz véges és végtelen struktúrákat is). Legyen $M_0$ $\mathcal{C}$-beli struktúra és $P$ az $M_0$ parciális izomorfizmusainak egy halmaza. A következő problémára keressük a megoldást (melyre mint az $(M_0, \mathcal{C}, \mathcal{P})$ kiterjesztési problémára fogunk utalni): Találjunk egy $M_1 \in \mathcal{C}$ struktúrát, aminek $M_0$ részstuktúrája, és minden $p \in \mathcal{P}$ parciális izomorfizmushoz található $\alpha_p$ $M_1$-beli automorfizmus, hogy $\alpha_p$ kiterjeszti $p$-t. Azt modjuk hogy $(M_1, \alpha_p)_{p \in \mathcal{P}}$ megoldása a kiterjesztési problémának, és a megoldás véges, ha $M_1$ véges.

Azt modjuk, hogy $\mathcal{C}$ rendelkezik a parciális izomorfizmusok kiterjeszthetőségi tulajdonságával (későbbiekben a [3] Herwig-Lascar cikk terminológiáját követve az EPPA rövidítést használjuk), ha minden véges $\mathcal{C}$-beli $M_0$-ra és minden $\mathcal{P} \subseteq Part(M_0, M_0)$-ra, ha van megoldása az $(M_0, \mathcal{C}, \mathcal{P})$ kiterjesztési problémának, akkor van véges megoldás is.

## 3.4. Provéges topológia

Ebben a részben bevezetjük a provéges topológia fogalmát, amit jól lehet alkalmazni a szabadon generált csoportokon.

**23. Definíció.** *Legyen $G$ egy csoport. Ekkor azt a topológiát, aminek egy bázisa a :*

$$\{gH : g \in G \text{ és } H \text{ } g\text{-nek véges indexű részcsoportja } \}$$

*halmazrendszer, $G$ provéges topológiájának nevezzük.*

A következő két tétel, melyekből az egyik Hall nevéhez köthető, a másik pedig Ribes és Zalesskiĭ nevéhez, a provéges topológia és a szabadon generált csoportok kapcsolatát vizsgálja.

**3. Tétel (Hall).** *Legyen $P$ véges halmaz és $F(P)$ a $P$ által szabadon generált csoport. Ekkor minden végesen generált részcsoportja az $F(P)$-nek zárt halmaz a provéges topológiában. Ez az állítás megfogalmazható a következőképpen is. Legyen $H$ végesen generált részcsoportja az $F(P)$-nek; ekkor:*

$$H = \bigcap\{K \text{ ahol } K \text{ véges indexű részcsoportja az } F(P)\text{-nek és } H \subseteq K\}.$$

A tétel bizonyítása megtalálható például [1]-ben, de rekonstruálható a [3]-ban található eredményekből is.

**4. Tétel (Ribes, Zalesskiĭ).** *Legyenek $H_1, H_2, ..., H_n$ végesen generált részcsoportjai $F(P)$-nek. Ekkor*

$$H_1H_2 \cdots H_n = \{h_1h_2 \cdots h_n : h_i \in H_i, i = 1...n\}.$$

*zárt halmaz a provéges topológiában.*

A tétel bizonyítása megtalálható például [7]-ben.

# 4. fejezet

# Kiterjesztési problémával kapcsolatos korábbi eredmények

Ebben a részben többek között Hrushovski, Herwig, Lascar, és Solecki nevéhez kapcsolódó eredményeket mutatunk be a [3] és [6] források alapján, a kiterjesztési problémához kapcsolódóan.

## 4.1. Hrushovski tétele

**5. Tétel (1.4. tétel a [3]-ban).** *Legyen $\Gamma_0$ véges gráf (irányítatlan és hurokmentes). Ekkor létezik egy $\Gamma_1$ véges gráf (irányítatlan és hurokmentes), hogy $\Gamma_1$ $\Gamma_0$-nak a kiterjesztése és minden $\Gamma_0$-beli parciális izomorfizmus kiterjeszthető $\Gamma_0$ automorfizmusaivá.*

A fenti tétel rámutat arra, hogy az összes véges gráfból álló osztály rendelkezik az EPPA tulajdonsággal.

Legyen $\mathcal{C}$ gráfoknak az az osztálya amely az összes véges gráfot tartalmazza, ekkor minden kiterjesztési problémának van megoldása, mivel bármely véges gráf beágyazható a Rado-gráfba (megszámlálható véletlen gráfba). Ismert, hogy a Rado-gráf homogén, ezért véges parciális izomorfizmusai kiterjeszthetők automorfizmusokká.

## 4.2. UJEP

Ebben a részben egy speciális beágyazási tulajdonságú struktúráka osztályról lesz szó. Ezt a fogalmat a [6] cikkben vezették be, az ottani jelöléseket használva a későbbiekben az UJEP, azaz "uniform joint embedding property" elnevezést használjuk. Majd a [6]-ból felidézünk egy tételt az UJEP és az EP kapcsolatáról.

**24. Definíció.** *Legyen $K$ $\mathcal{L}$-struktúrák egy osztálya, azt mondjuk, hogy $K$ rendelkezik a kiterjeszthetőségi, röviden csak EP tulajdonsággal, ha minden $\mathcal{A} \in K$ és minden $\langle f_0, f_1, ..., f_{n-1} \rangle$ $\mathcal{A}$-beli parciális izomorfizmus esetén létezik egy $\mathcal{B} \in K$ amire a következő tulajdonságok teljesülnek. $\mathcal{A}$ beágyazható $\mathcal{B}$-be és minden $f_i$ kiterjeszthető $\mathcal{B}$-beli automorfizmussá.*

Most kimondjuk a Fraïssé-osztály definicióját, majd ehhez kapcsolódóan felidézzük, hogy mit jelent egy struktúra kora. Ennek a két fogalomnak a segítségével pedig kimondjuk, hogy mit értünk egy Fraïssé-osztály Fraïssé-limesze alatt.

**25. Definíció.** *Legyen $\mathcal{K}$ struktúrák egy osztálya, ekkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{K}$ Fraïssé-osztály ha teljesülnek rá a következő tulajdonságok.*

- *Izomorfizmus erejéig $\mathcal{K}$-ban megszámlálható sok struktúra van.*
- *$\mathcal{K}$ lefele zárt, vagyis ha $B \in \mathcal{K}$ és $A$ beágyazható $B$-be, akkor $A \in \mathcal{K}$.*
- *Közös kiterjeszthetőség tulajdonság: minden $B_1$ és $B_2 \in \mathcal{K}$ esetén létezik egy $C \in \mathcal{K}$, hogy $B_1$ és $B_2$ is beágyazható $C$-be.*
- *Amalgációs tulajdonság: Ha $A, B_1, B_2 \in \mathcal{K}$ és $\varphi_1 : A \to B_1$, $\varphi_2 : A \to B_2$ beágyazások, akkor létezik egy $C \in \mathcal{K}$, és léteznek $\psi_1 : B_1 \to C$ és $\psi_2 : B_2 \to C$ beágyazások, hogy $\varphi_1 \circ \psi_1 = \varphi_2 \circ \psi_2$.*

Egy megszámlálható $A$ struktúra kora azokból a végesen generált struktúrákból áll, melyek beágyazhatóak az $A$ struktúrába. Fraïssé igazolta, hogy a fenti definicióban felsorolt tulajdonságok teljesülése szükséges és elégséges feltétel ahhoz, hogy a $\mathcal{K}$ osztály kora legyen egy homogén struktúrának.

Egy $\mathcal{K}$ Fraïssé-osztály Fraïssé-limeszének hívjuk azt a struktúrát amelynek $\mathcal{K}$ a kora.

Ebben a fejezetben $K$ mostantól egy Fraïssé-osztályt fog jelölni, és $\mathcal{M}_K$ jelölje a $K$ Fraïssé-limeszét.

Most kimondjuk az UJEP tulajdonság definicióját, majd kimondunk egy tételt ami arról szól, hogy az UJEP tulajdonsággal rendelkező struktúraosztály mikor rendelkezik a kiterjesztési tulajdonsággal. A tétel kimondása előtt még be fogjuk vezetni a $K_p^n$ struktúraosztályokat ami szükséges a tétel megértéséhez.

**26. Definíció.** *Legyen $K$ relációstruktúrák egy osztálya, ekkor $K$ akkor és csak akkor rendelkezik az UJEP tulajdonsággal, ha minden $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in K$ disztjunk struktúrákhoz létezik egy $\mathcal{C} \in K$ struktúra, és $f : A \to C$, $g : B \to C$ beágyazások a következő tulajdonságokkal. Ha $R$ egy $k$ változós relációszimbólum és $\bar{a}$, $\bar{a}$' $A \cup B$-beli $k$-asok, úgy hogy van elemük $A$-ból és $B$-ből is. Ekkor minden $i < k$-ra $a_i \in A$ pontosan akkor ha $a_i' \in A$, ekkor $\mathcal{C} \models R((f \cup g)(\bar{a}))$ akkor és csak akkor ha $\mathcal{C} \models R((f \cup g)(\bar{a}'))$, ahol $(f \cup g)(x) = f(x)$ ha $x \in A$ és $(f \cup g)(x) = g(x)$, ha $x \in B$.(Figyeljük meg, hogy $f$-re és $g$-re tekinthetünk úgy mint párok halmazára, ugyanígy tekinthetünk $f \cup g$-re is és mivel $A$ és $B$ disztjunktak, $f \cup g$ pont az a függvény amit az előzőekben leírtunk.)*

**27. Definíció.** *Ha $K$ relációstruktúrák egy osztálya és $n \in \omega$, akkor*

$K_p^n = \{\langle \mathcal{A}, f_0, f_1, ..., f_{n-1} \rangle : \mathcal{A} \in K$ *és* $f_0, f_1, ..., f_{n-1}$ $\mathcal{A}$*-beli parciális izomorfizmusok*$\}$.

*Továbbá* $K_p = \bigcup_{n\in\omega} K_p^n$.

**28. Definíció.** *Legyen* $\mathcal{A}$ *megszámlálható struktúra, ekkor* $(g_1, g_2, ..., g_n) \in Aut(\mathcal{A})^n$ *gyengén generikus elem, ha*

- *minden* $a \in A$*-ra* $\bigcirc_{\langle g_1, g_2, ..., g_n\rangle}(a)$ *véges;*
- $\langle g_1, g_2, ..., g_n\rangle$ *konjugáltosztálya, vagyis* $\{\langle f^{-1}g_1 f, f^{-1}g_2 f, ..., f^{-1}g_n f\rangle : f \in Aut(\mathcal{A})^n\}$ *sűrű* $Aut(\mathcal{A})^n$*-ben.*

**6. Tétel (2.10 Tétel [6]-ban).** *Tegyük fel, hogy* $K$ *rendelkezik az UJEP tulajdonsággal ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

1. *Minden* $\langle \mathcal{A}, f_0, f_1, ..., f_{n-1}\rangle \in K_p^n$ *és minden* $a \in A$*-hoz létezik* $\langle \mathcal{B}, k_0, k_1, ..., k_{n-1}\rangle \in K_p^n$*, hogy* $\mathcal{A}$ *részstruktúrája* $\mathcal{B}$*-nek,*
   $f_0 \subseteq k_0, f_1 \subseteq k_1, ..., f_{n-1} \subseteq k_{n-1}$,
   $a \in \bigcap_{j=0}^{n-1} dom(k_j)$ *és* $\bigcirc_{\langle k_0, k_1, ..., k_{n-1}\rangle}(a) \subseteq \bigcap_{j=0}^{n-1} dom(k_j)$.
2. $K$ *rendelkezik az EP tulajdonsággal*
3. *Minden* $n$ *természetes szám esetén* $Aut(\mathcal{M}_K)^n$*-ben létezik egy* $\langle g_0, g_1, ..., g_{n-1}\rangle$ *gyengén generikus elem.*
4. *Minden* $n$ *természetes szám esetén* $Aut(\mathcal{A}) - \bigcup_{a\in A} M(\emptyset, ..., \emptyset, a)$ *(ahol* $\emptyset$*-ből* $n$ *darab van) komplementere lefedhető* $Aut(\mathcal{A})$*-nak véges sok sehol sem sűrű részhalmazaival.*

A bizonyítás megtalálható [6]-ban.

## 4.3. Turnamentek kiterjesztése

Turnamentnek hívjuk az olyan irányított gráfokat melyeknek minden csúcspárja között pontosan egy irányított él van.

**7. Tétel (3.13. tétel [6]-ban).** *A véges turnamentek osztálya rendelkezik az EP tulajdonsággal, vagyis minden véges $G$ turnament beágyazható egy másik véges $H$ turnamentbe úgy, hogy $G$ minden parciális izomorfizmusa kiterjeszthető $H$ automorfizmusaivá.*

**29. Definíció.** $G = \langle V, E \rangle$ *irányított gráfot gyenge turnamentnek hívunk ha bármely két csúcs között legfeljebb egy irányított él van.*

**8. Tétel (3.4. tétel [6]-ban).** *Minden $\mathcal{A}$ véges gyenge turnament beágyazható egy másik $\mathcal{B}$ véges gyenge turnamentbe úgy, hogy $\mathcal{A}$ minden parciális izomorfizmusa kiterjeszthető $\mathcal{B}$ automorfizmusává.*

## 4.4. Parciális izometriák kiterjesztése

**30. Definíció.** *Legyen* $(X, \rho)$ *és* $(Y, \sigma)$ *metrikus terek. Ekkor azt mondjuk, hogy* $f : X \to Y$ *bijekció izometria, ha minden* $x, y \in X$ *esetén teljesül, hogy*

$$\rho(x, y) = \sigma(f(x), f(y)).$$

**31. Definíció.** *Legyen $A$ metrikus tér, ekkor parciális izometriának hívjuk azt az izometriát amely $A$ két metrikus értelemben vett altere között hat.*

**9. Tétel (2.1. tétel [9]-ben).** *Legyen $A$ véges metrikus tér. Ekkor létezik egy $B$ véges metrikus tér, hogy $B$ metrikus értelemben vett altere $A$-nak és $A$ minden parciális izometriája kiterjeszthető $B$ izomertiájává.*

## 4.5. EPPA

**10. Tétel (3.1. tétel [3]-ban).** *Legyen $\mathcal{C}$ az $n$-particionálható körmentes gráfok osztálya. Ekkor $\mathcal{C}$ rendelkezik az EPPA tulajdonsággal.*

**11. Tétel (3.2. tétel [3]-ban).** *Legyen $\mathcal{L}$ véges relációs nyelv, és legyen $\mathcal{T}$ véges része az $\mathcal{L}$-struktúrák osztályának. Ekkor a $\mathcal{T}$ mentes $\mathcal{L}$-struktúrák osztálya rendelkezik az EPPA tulajdonsággal.*

**12. Tétel (4.5. tétel [3]-ban).** *Legyen $r > 1$. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{L}$ nyelv egy darab $r$ változós relációszimbólumot tartalmaz; ez legyen $R$. Legyen $A$ egy $c$ számosságú $\mathcal{L}$-struktúra. Ekkor létezik egy $B$ $\mathcal{L}$-struktúra, amire teljesül, hogy $A$ részstruktúrája $B$-nek és $B$ számossága kisebb vagy egyenlő mint $2^{r!rc^r}$ és $A$ minden parciális izomorfizmusa kiterjeszthető $B$ automorfizmusává.*

# 5. fejezet

# Kiterjesztési problémával kapcsolatos új eredmények

Ebben a fejezetben két új eredményt fogunk részletezni a parciális izomorfizmusok kitejsztésével kapcsolatban. A 14. tételben szükséges és elégséges feltételt biztosítunk gyengén generikus automorfizmusok létezésére. Ennek igazolásához szükségünk lesz a 13. tételre, mely ekvivalens feltételt ad arra vonatkozóan, hogy egy szabad csoporton értelmezett homomorfizmus folytonos legyen. A 13. tétel igazolásához további két lemmára is szükségünk lesz.

**13. Tétel.** *Legyen $\mathcal{A}$ struktúra. Minden véges $B$-re, ahol $B$ részstruktúrája $A$-nak, az alábbi két állítás ekvivalens:*

1. *Van $\mathcal{A}$-nak véges $\mathcal{A}_0$ része, hogy $B$ részstruktúrája $\mathcal{A}_0$-nak, és az összes $B$-beli $p_0, p_1, ..., p_{n-1}$ parciális izomorfizmus kiterjed $\mathcal{A}_0$ automorfizmusaivá.*

2. *A $B$-beli $p_0, p_1, ...p_{n-1}$ parciális izomorfizmusok kiterjeszthetők $\mathcal{A}$-nak $p_0^*, p_1^*, ..., p_{n-1}^*$ automorfizmusaivá úgy, hogy $\varphi : p_i \mapsto p_i^*$ kiterjed egy $\varphi' : \mathcal{F}(P) \to Aut(\mathcal{A})$ folytonos csoporthomomorfizmussá, ahol $P = \{p_0, p_1, ...p_{n-1}\}$.*

Az állítás bizonyításához szükségünk lesz a következő lemmákra.

**1. Lemma.** *Legyen $A$ halmaz, legyen $G$ részcsoportja $A$ szimmetrikus csoportjának, és legyen $G_a$ az $a$-t fixen hagyó $G$ beli permutációk halmaza. Ekkor minden $a \in A$-ra a $G$ szerinti pályájának mérete megegyezik $G_a$-nak a $G$ beli indexével.*

**1. Bizonyítás.** *Legyen $b \in \bigcirc_G(a)$, ekkor van egy olyan $f_b \in G$, hogy $f_b(a) = b$. Figyeljük meg, hogy*

$$\{f \in G : f(a) = b\} = f_b G_a.$$

*Ekkor van egy olyan $\Phi$ függvény, amely az $a$ elem pályájához $G$-nek $G_a$ szerinti mellékosztályát rendeli hozzá, azaz $\Phi(b) = f_b G_a$.*
*Ekkor a lemma igazolásához elég belátni, hogy $\Phi$ bijekció.*

*Tegyük fel, hogy $b, c \in \bigcirc_G(a)$, és $\Phi(b) = \Phi(c)$, azaz $f_b G_a = f_c G_a$, azaz $\{f \in G : f(a) = b\} = \{f \in G : f(a) = c\}$. Ez pedig csak akkor teljesülhet, ha $b = c$. Tehát $\Phi$ injektív.*

*Legyen $fG_a$ $G$-nek $G_a$ szerinti mellékosztálya, $\Phi$ szürjektivitásához azt kell megmutatnunk, hogy van egy olyan $b \in \bigcirc_G(a)$, melyre $\Phi(b) = fG_a$, akkor $\Phi$ szürjektív. Válasszuk $b$-t $f(a)$-nak, ez kielégíti az előző egyenlőséget, tehát $\Phi$ szürjektív.*

*Tehát ez a $\Phi$ függvény bijekció, tehát $| \bigcirc_G (a)| = G_a$-nak $G$-beli indexe.*

**2. Lemma.** *Legyen $A$ véges halmaz, $S_A$ ellátva a szorzattopológiából örökölt altér-topológiával,és legyen $F(P)$ a $P$ álltal szabadon generált csoport, ellátva a provéges topológiával. Ekkor minden $\varrho : F(P) \to S_A$ homomorfizmus folytonos.*

**2. Bizonyítás.** *Mivel $A$ véges halmaz, ezért $Ker(\varrho)$ véges indexű, emiatt $Ker(\varrho)$ mellékosztályai nyíltak a provéges topológiában.*

*Tegyük fel, hogy $a \in F(P)$, ekkor elég megmutatni, hogy $\varrho$ folytonos $a$-ban.*

*Ekkor* $b \in aKer(\varrho)$ *pontosan abban az esetben, ha* $a^{-1}b \in Ker(\varrho)$.

*Figyeljük meg, hogy (*$a^{-1}b \in Ker(\varrho)$*-t is felhasználva)*

$$id = \varrho(a^{-1}b) = \varrho(a^{-1})\varrho(b) = \varrho(a)^{-1}\varrho(b) \qquad ,$$

*ezt balról beszorozva* $\varrho(a)$*-val látszik, hogy* $\varrho(a) = \varrho(b)$. *Vagyis* $\varrho$ *folytonos* $a$*-ban, mert tetszőleges nemüres nyílt* $\varepsilon$ *halmazhoz, melyre* $a \in \varepsilon$, $\delta = aKer(\varrho)$ *olyan nyílt halmaz lesz, melyet* $\varrho$ *beleképez* $\varepsilon$*-ba (sőt, a fentiek szerint a teljes* $\delta$*-t* $\varrho$ *ráképezi* $\varrho(a)$*-ra).*
*Ez elmondható minden* $a$*-ról tehát* $\varrho$ *folytonos homomorfizmus.*

Most következik a fejezet elején megfogalmazott tétel bizonyítása.

**3. Bizonyítás (A 13. tétel bizonyítása).**
*Uriszon tétele (1. tétel) következtében* $F(P)$*-n a provéges topológia metrizálható, és* $A$ *szimmetrikus csoportján rögzített topológia is metrizálható. Ezért metrikus terekre vonatkozó terminológiát használhatunk majd.*

(2) $\Rightarrow$ (1)
*Legyen* $\mathcal{A}$ *megszámlálható stuktúra, és legyen* $\varphi : F(P) \to Aut(\mathcal{A})$ *folytonos homomorfizmus. Definiáljuk* $G$*-t úgy, hogy* $G := \{\varphi(f) : f \in F(P)\}$, *ekkor* $G$ *is csoport lesz, mivel* $G = Ran(\varphi)$.

*Állítás: Minden* $a \in \mathcal{A}$ *esetén* $\bigcirc_G(a)$ *véges.*

*Bizonyítás:*

*Legyen* $a \in A$ *tetszőleges és* $\varepsilon := \{\langle a, a\rangle\}$. *Mivel* $\varphi$ *folytonos az* $F(P)$ *identitás elemében, ezért létezik* $\delta$, *hogy ha* $h \in F(P)$ $\delta$*-nál közelebb van az identitáshoz, akkor* $\varphi(h)$ $\varepsilon$*-nál közelebb van a* $G$ *identitás eleméhez.*

*Tehát* $\delta \leq F(P)$*,véges indexű, és ha* $h \in \delta$, *akkor* $\varphi(h)$ *kiterjeszti* $\varepsilon$*-t.*

*Ezért* $\delta \leq H^* = \{f : \varphi(f)(a) = a\}$. *Ekkor* $H^*$ *indexe is véges, ezért az 1. lemma miatt* $\bigcirc_G(a)$ *véges.*

*Legyen* $A_0'$ *az a halmaz, amiben minden* $i$*-re a* $p_i$*-k értékkészleteinek és értelmezési tartományainak uniója szerepel.*
*Legyen* $A_0 := \bigcup_{a \in A_0'} \bigcirc_G(a)$.

*Ekkor az* $A_0$ *alaphalmazú* $\mathcal{A}_0$ *struktúra kielégíti a tétel feltételeit.*

*(1)* $\Rightarrow$ *(2)*

*Legyen* $p \in P$, $\varepsilon$ *véges parciális izomorfizmusa* $A$*-nak, és* $B := Dom(\varepsilon) \cup Ran(\varepsilon)$.
*Alkalmazzuk (1)-et* $B$*-re, ekkor létezik egy véges* $\mathcal{A}_0$*, melyre (1) teljesül.*

*Legyen* $\phi$ *olyan, hogy* $\phi : F(P) \to \mathcal{A}$*, a* $p_i \mapsto p_i^*$ *függvény homomorf kiterjesztése, és legyen* $\phi' : x \to \phi(x)|_{\mathcal{A}_0}$.

*Ekkor* $\phi'$ *folytonos a 2. lemma miatt, és* $\phi$ *is folytonos mert létezik* $\delta$*, hogy ha* $x, y \in F(P)$ *úgy. hogy* $d(x, y) < \delta$*, akkor* $\phi'(x) = \phi'(y)$*, ezért* $d(\phi(x), \phi(y)) < \varepsilon$.

**14. Tétel.** *Legyen* $\mathcal{A}$ *megszámlálható struktúra.*
*Ekkor az alábbi 1. állításból következik az alábbi 2. és 3. állítás, illetve a megfordítás is igaz, azaz ha teljesül az alábbi 2. és 3. állítás, akkor ezekből következik az alábbi 1. állítás.*

1. *Minden* $n$ *természetes szám esetén* $Aut(\mathcal{A})^n$*-ben van gyengén generikus elem.*

2. *Minden* $n$ *természetes szám esetén a*

*$\{(f_1, f_2, ..., f_n) \in Aut(\mathcal{A}) : (x_i \to f_i)_{i=n}^n$ folytonos $F(x_1, x_2, ..., x_n) \to Aut(\mathcal{A})^n$ homomorfizmussá terjed ki$\}$*

*halmaz sűrű $Aut(\mathcal{A})^n$-ben.*

3. *Ha $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ és $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ ahol $p$ és $q$ $A^n$-beli parciális izomorfizmus, akkor van olyan $f \in Aut(\mathcal{A}^n)$, hogy $p \cup f^{-1}qf$ parciális izomorfizmusa $A^n$-nek.*

**4. Bizonyítás (14. tétel (1) $\Rightarrow$ (2)).** *Rögzítsük a $g = (g_1, g_2, ..., g_n)$ gyengén generikus sorozatot, és rögzítsünk egy $H$ nyílt halmazt a szorzattopológiában.*
*Mivel $g$ gyengén generikus elem, ezért $g$ konjugálzosztálya sűrű a szorzattopológiában, emiatt $g$-nek van $h = (h_1, h_2, ..., h_n)$ konjugáltja a $H$-ban.*
*Tekintsük az $x_i \mapsto h_i$ $(1 \leq i \leq n)$ kiterjesztését egy homomorfizmussá.*
*Ez folytonos lesz, mert minden elem $(h_1, h_2, ..., h_n)$ szerinti pályája véges.*

**5. Bizonyítás (14. tétel (1) $\Rightarrow$ (3)).**
*Jelöljük $f[q]$-val $f^{-1}qf$-et, $f[q]$-ra tekinthetünk úgy, mint egy halmazra, melynek elemei az $\langle a, f[q](a)\rangle$ párok ahol $a \in dom(p)$. Ekkor könnyen látható, hogy $f[q] = \{\langle f^{-1}(a), f^{-1}(b)\rangle : \langle a, b\rangle \in dom(q)\}$.*
*Figyeljük meg, hogy*
*$f[q] = \{\langle a, f^{-1}qf(a)\rangle : a \in dom(q)\} = \{\langle f^{-1}(a), f^{-1}q(a)\rangle : a \in dom(q)\}$,*
*jelöljük $q(a)$-t $b$-vel, ekkor azonnal adódik, hogy*
*$f[q] = \{\langle f^{-1}(a), f^{-1}(b)\rangle : \langle a, b\rangle \in dom(q)\}$.*

*Legyenek $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ és $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ tetszőleges $A^n$-beli parciális izomorfizmusok, és legyen $g = (g_1, g_2, ..., g_n)$ a gyengén generikus elem. Mivel $g$ gyengén generikus, tehát a konjugáltosztálya sűrű $Aut(\mathcal{A})^n$-ben, ezért van olyan $k \in Aut(\mathcal{A})$, hogy minden $i = 1, 2, ..n$ esetén $p_i \subseteq kg_ik^{-1}$, azaz $p \subseteq kgk^{-1}$. Ebből következik, hogy $k^{-1}pk \subseteq g$, azaz $f[p] \subseteq g$.*

*Hasonlóan, van olyan $h \in Aut(\mathcal{A})^n$, hogy $h[q] \subseteq g$.*
*Ekkor megmutatjuk, hogy $f = k^{-1}h$ teljesíti a (3)-ban megköveteltekét.*
*Világos, hogy $f$ automorfizmus, mert $k$ és $h$ is automorfizmusok.*
*Nézzük a $k^{-1}gk$ automorfizmust. Láttuk, hogy $p$ és $k^{-1}h$ is része $k^{-1}gk$ automorfizmusnak. Ezért ha $k^{-1}gk$-t megszorítjuk $dom(p) \cup dom(f[q])$-ra akkor megkapjuk az $Aut(\mathcal{A})^n$ kivánt parciális izomorfizmusát.*

**6. Bizonyítás (14. tétel (2) és (3) $\Rightarrow$ (1)).** *Tegyük fel, hogy (2) és (3) teljesülnek.*
*Rögzítsük $n$-t. Most meg szeretnénk konstruálni egy $Aut(\mathcal{A})^n$-beli gyengén generikus elemet. Ehhez soroljuk föl $Aut(\mathcal{A})^n$ egy bázisának elemeit, ez legyen $\{p_i : i \in \omega\}$.*
*Rekurzióval fogunk megadni egy véges parciális izomorfizmus $n$-esekből álló $\{g_j : j \in \omega\}$ növő halmazt, ahol minden $j$-re $A$ összes elemének $g_j$ szerinti pályája véges, és ha $j > i$ akkor $g_j$ belekonjugálható $p_i$-be. Ha találtunk ilyen $g_j$-ket akkor ezeket összeúniózva megkapjuk a $g$ gyengén generikus elemet.*
*Most adjuk meg ezeket a $g_j$-ket rekurzióval. Legyen $g_1$ az a parciális izomorfizmus aminek értelmezési tartománya az üres halmaz. Tegyük fel, hogy $g_j$ már adott, ekkor (2) szerint sűrűn vannak $p_j$-ben az olyan $(f_1, f_2, ..., f_n)$ automorfizmusok, hogy a szabad csoport generátorait ezekre az $f_i$-kre képezve, a homomorf kiterjesztés folytonos lesz. A kiterjesztés folytonossága miatt $dom(p_j) \cup ran(p_j)$ minden elemének $(f_1, f_2, ..., f_n)$ szerinti pályája véges lesz. Ezen elemek pályájára szorítsuk meg $(f_1, f_2, ..., f_n)$-t és (3) szerint konjugáljuk ezt a megszorítást $g_j$ mellé. Ez legyen $g_{j+1}$. Majd legyen $g = \bigcup_{j\in\omega} g_j$.*
*Ekkor $g$ gyengén generikus elem lesz, mert minden elem $g_j$ szerinti pályája véges a konstrukció szerint, ezért $g = \bigcup_{j\in\omega} g_j$ szerinti pályája is véges lesz. A véges pályákon kívül kell még, hogy $g$ konjugáltosztálya sűrű legyen $Aut(\mathcal{A}^n)$-ben, ez pedig azért teljesül, mert minden $j > i$-re $g_j$ belekonjugálható $p_i$-be.*

# Irodalomjegyzék

[1] Hall, Marshall, Jr. A topology for free groups and related groups. Ann. of Math. (2) 52, (1950). 127-139.

[2] Bernard Herwig, Extending partial isomorphism, Combinatorica, 15,365-371 (1995).

[3] Bernard Herwig and Daniel Lascar, Extending partial automorphisms and the profinite topology on free groups, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 352, No. 5, 1985-2021 (2000).

[4] E. Hrushovski, Extending partial isomorphism of graphs, Combinatorica, 12(4), 411-416 (1992).

[5] Kiss Emil, Bevezetés az algebrába Typotex kiadó, Budapest, 2007.

[6] Claude Laflamme, Gábor Sági, Norbert Sauer, Robert Woodrow: Extending Partial Isomorphisms - a topological approach, Manuscript (2018).

[7] Luis Ribes and Pavel A. Zalesskiĭ , On the profinite topology on a free group, Bull. London Math. Soc. 25 (1993), 37-43. MR 93j:200062.

[8] Horst Schubert, Topológia. Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1986.

[9] S. Solecki, Extending Partial Isometries, Israel Journal of Mathematics, 150, 315-331 (2005).

[10] Szabó Szilárd, Differenciálgeometria előadás jegyzetek BME 3. félév.

[11] Szűcs András, Bevezetés a Topológiába és Algebrai Topológia kurzusok jegyzete (2018).

[12] J. Truss Generic automorphism of homogeneous structures, Proocedings of the London Math, Soc. 65, 121-141 (1992).