

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

IDEÁLIS FOLYADÉK ÁRAMLÁSA ÉS BEMUTATÁSA
MATLAB PROGRAM SEGÍTSÉGÉVEL

Szakedolgozat

Horváth Fanni

Matematika BSc

Alkalmazott matematikus szakirány



Témavezető:

Sigray István

műszaki-gazdasági tanár

ELTE Analízis Tanszék

Budapest, 2020

Köszönetnyilvánítás

Elsősorban szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Sigray Istvánnak, aki rendszeres konzultációival és hasznos tanácsaival nagyban hozzájárult a szakdolgozat létrejöttéhez. Szeretném megköszönni a családomnak azt a sok szeretetet és erőt, mellyel mindvégig támogattak. Továbbá szeretném hálámat kifejezni mindazok iránt, akik segítettek az egyetemi évek során, legyen szó tanárokról, szaktársakról, barátokról.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	3
1. Ideális áramlások elmélete	5
1.1. Ideális áramlások	5
1.2. Példák	8
1.2.1. $f(z) = \text{const}$	9
1.2.2. $f(z) = z$	9
1.2.3. $f(z) = \frac{1}{z}$	10
1.2.4. $f(z) = \frac{i}{z}$	11
1.3. Fluxus és cirkuláció	12
1.4. Áramvonal	15
1.5. Nyomás	17
2. Áramvonalak bemutatása Matlab programmal	21
2.1. Közelítés	22
2.2. A Matlab program	25
2.3. Ábrázolás és tesztelés	26
A. Programkód	31
Irodalomjegyzék	33

Bevezetés

Szakdolgozatom témájának kiválasztásakor egy dolgot határozottan szerettem volna, ez pedig az volt, hogy analízissel kapcsolatban írjak. Több terület is eszembe jutott, de végül a komplex függvénytan mellett döntöttem, ahol a Tanár Úr javaslatának köszönhetően a hidrodinamikára esett a választásom. Azért is tetszett meg ez a téma, mert új volt a fizikai háttere, így sokat tanultam belőle, valamint számos érdekesség kiderült, hogy mit rejtenek emögött a matematikai képletek. Mindazonáltal lehetőség volt bemutatni programmal azt, amiről az elmélet szól.

A komplex függvénytanról néhány gondolat: ez a matematika azon ága, mely a komplex változós komplex értékű függvényekkel foglalkozik, ahol egy komplex függvény alatt olyan függvényeket értünk, melyeknek az értelmezési tartománya és az értékkészlete egyaránt a komplex sík részhalmaza. Alkalmazzák számelméletben és kétdimenziós fizikai problémák modellezésében is, így a hidrodinamikában is.

De mi is az a hidrodinamika?

Tömören a folyadékok mozgásával és áramlásával foglalkozó tudományág. Ez magába foglalja a számokkal levezetett, majd modellezett folyadékáramlásokat, illetve –mint, ahogy oly sok fizikai területen megismerhettük– a megmaradási törvények teljesülését, legyen szó tömeg-, impulzus- és energiamegmaradási törvényekről. Hogy egy kis természetbeli példát is említsünk ott az orvostudomány, ahol véráramlási modelleket terveznek nap mint nap. Ezenkívül a repüléssel kapcsolatos számítások leírása is ide tartozik, hiszen a hidrodinamika és az aerodinamika közös gyökerekkel bírnak.

Történetéről néhány gondolat: Az elméleti áramlástant, mint tudományágat Leonard Euler és Daniel Bernoulli alapította a 17. században. Euler elsőnek vezette le az ideális folyadék mozgásegyenletét, vezette be a hidrodinamikába a nyomás fogalmát. A folyadék csőben való áramlására azonban Galilei egyik tanítványa, Castelli már Euler előtt felfigyelt, mondta: *„Tévednek, akik lelkesedésüktől elragadtatva azt hiszik, hogy a testet a folyadékban úgy lehet mozgatni, hogy arra a folyadék semmilyen ellenállást nem gyakorol, mivel azt az erőt, amellyel a folyadék a test elülső részére hat, a test hátulso részére gyakorolt ugyanolyan erő kifejti; mert ilyen jelenség a valóságos folyadék áramlásnál nincs.”*

Nem lehet megfejtekzni Bernoulli-ról sem, aki 1738-ban mondta ki, hogy egy közeg áramlásakor (például víz vagy levegő) a nyomás csökken, ha a sebesség nő. Pontosabban ez azt jelenti, hogy áramló közegben egy áramvonal mentén a különböző energia-összetevők összege állandó. Ezt nevezzük Bernoulli törvénynek.

A szakdolgozat második felében kerül tárgyalásra az elmélet átültetése gyakorlatba. Matlab programmal rajzoljuk le különböző áramlások áramvonalait. Ezeket pontosan nem tudjuk kirajzolni, viszont analízisből tanult közelítésekkel csökkenthetjük a hibát. Először vesszük az elsőrendű közelítést, majd a jobb eredményre törekedés céljából elkészítjük a másodrendűt is. A szakdolgozat bemutatja, hogy ez, a másodrendű mennyivel kifejezőbb, az elsőrendűnél. Ez sem tökéletes, de konkrét alkalmazással megmutatjuk, hogy hatékonyabb.

1. fejezet

Ideális áramlások elmélete

Ebben a fejezetben az ideális áramlással kapcsolatban definiálunk tulajdonságokat, vezetünk le állításokat, egyenleteket. Kiszámoljuk a fizikai adatokat – mint például fluxus, cirkuláció, nyomás – matematikai szemmel.

1.1. Ideális áramlások

A D síkbeli tartományon egy adott $(x, y) \in D$ ponthoz tartozó $(u(x, y, t), v(x, y, t))$ függvény jelentése, hogy a t időpillanatban az (x, y) helyen mekkora a sebességvektor.

Mi most csak stacionárius áramlással foglalkozunk, mikor ez a sebesség állandó. Továbbá 2 fontos tulajdonság szükséges ahhoz, hogy ideális áramlásokkal tudjunk dolgozni, ezek pedig a folyadék összenyomhatatlansága és az áramlás örvénymentesége.

1.1.1. Definíció. Egy áramlás *ideális*, ha:

- stacionárius: ha minden $(x, y) \in D$ ponthoz tartozó $(u(x, y, t), v(x, y, t))$ függvény nem függ a t időtől,
- forrás-nyelő mentes: ha egy résztartományon az egységnyi idő alatt a ki- és beáramló folyadék egyenlege 0,

- örvénymentes: ha az áramlás a résztartományt nem akarja "megpörgetni".

A stacionáriusság miatt létezik $(u(x, y), v(x, y)) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ vektormező, amely minden ponthoz a sebességvektort rendeli hozzá. A másik két feltétel következményeit fogjuk a továbbiakban megnézni.

Legyen $(x_0, y_0) \in D$ és $h > 0$ olyan, hogy $[x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - h, y_0 + h] \subset D$, u és v két folytonosan differenciálható D -beli függvény.

Ekkor a téglalap függőleges oldalain beáramló folyadék mennyisége:

Bal oldalon:

$$\int_{-h}^h u(x_0 - h, y_0 + t) dt$$

Jobb oldalon:

$$\int_{-h}^h -u(x_0 + h, y_0 + t) dt$$

Ezen kettő összege a függőleges falon beáramló folyadék mennyisége:

$$\int_{-h}^h u(x_0 - h, y_0 + t) - u(x_0 + h, y_0 + t) dt$$

Felírva hasonlóan a vízszintes oldalra is:

$$\int_{-h}^h v(x_0 + t, y_0 - h) dt + \int_{-h}^h -v(x_0 + t, y_0 + h) dt = \int_{-h}^h v(x_0 + t, y_0 - h) - v(x_0 + t, y_0 + h) dt$$

Tudjuk, hogy az áramlás forrás-nyelő mentes (a ki- és be áramló folyadék egyenlege 0), ezért a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$0 = \int_{-h}^h u(x_0 - h, y_0 + t) - u(x_0 + h, y_0 + t) dt + \int_{-h}^h v(x_0 + t, y_0 - h) - v(x_0 + t, y_0 + h) dt =$$

$$2h[u(x_0 - h, y_0 + \tau_1) - u(x_0 + h, y_0 + \tau_1)] + 2h[v(x_0 + \tau_2, y_0 - h) - v(x_0 + \tau_2, y_0 + h)] =$$

$$2h(-2h) \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + \tau_3, y_0 + \tau_1) + 2h(-2h) \frac{\partial v}{\partial y}(x_0 + \tau_2, y_0 + \tau_4),$$

$$\text{ahol } \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \in (-h, h).$$

Leosztva $-4h^2$ -tel kapjuk, hogy:

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + \tau_3, y_0 + \tau_1) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0 + \tau_2, y_0 + \tau_4).$$

Tekintjük a $h \rightarrow 0^+$ határértéket. Mivel a parciális deriváltak folytonosak, ezért:

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Vagyis

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0). \quad (1.1)$$

Felhasznált tételek: Integrálszámítási középértéktétel, illetve Lagrange középértéktétel.

Továbbá, mivel az áramlás örvénymentes is, vagyis a görbék által határolt résztartományon az összcirkuláció 0. Felírható a következő egyenlet:

Függőleges oldalon a cirkuláció mértéke: Bal oldalon:

$$\int_{-h}^h -v(x_0 - h, y_0 + t) dt.$$

Jobb oldalon:

$$\int_{-h}^h v(x_0 + h, y_0 + t) dt.$$

Ezen kettő összege:

$$\int_{-h}^h v(x_0 + h, y_0 + t) - v(x_0 - h, y_0 + t) dt.$$

Ugyanígy a vízszintes oldalon a cirkuláció mértéke a következő:

$$\int_{-h}^h -u(x_0 + t, y_0 + h) + u(x_0 + t, y_0 - h) dt.$$

Mivel az összcirkuláció is 0, azért ezen kettő felírható eképpen:

$$0 = \int_{-h}^h v(x_0 + h, y_0 + t) - v(x_0 - h, y_0 + t) - u(x_0 + t, y_0 + h) + u(x_0 + t, y_0 - h) dt =$$

$$2h[v(x_0 + h, y_0 + \tau_1) - v(x_0 - h, y_0 + \tau_1)] + 2h[-u(x_0 + \tau_2, y_0 + h) + u(x_0 + \tau_2, y_0 - h)] =$$

$$= 2h(2h) \frac{\partial v}{\partial x}(x_0 + \tau_3, y_0 + \tau_1) + 2h(-2h) \frac{\partial u}{\partial y}(x_0 + \tau_2, y_0 + \tau_4),$$

ahol $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \in (-h, h)$.

Leosztva $4h^2$ -tel kapjuk, hogy:

$$0 = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0 + \tau_3, y_0 + \tau_1) - \frac{\partial u}{\partial y}(x_0 + \tau_2, y_0 + \tau_4).$$

Tekintjük a $h \rightarrow 0^+$ határértéket. Mivel a parciális deriváltak folytonosak, ezért:

$$0 = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Vagyis

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \quad (1.2)$$

Az (1.1) és (1.2) egyenletekből kapjuk hogy a

$$f(x + iy) = u(x, y) - iv(x, y) \quad (1.3)$$

függvény, valós része u és képzetes része $-v$ folytonosan differenciálható, továbbá kielégítik a Cauchy-Riemann egyenleteket. Emiatt kapjuk, hogy az ideális áramlás és a holomorf függvények között szoros kapcsolat van.

1.1.2. Állítás. *Legyen $D \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ tartomány. Legyen D egy ideális folyadékáramlás, amelyet az $(u(x, y), v(x, y))$ vektormező ír le. Ekkor $f(x + iy) = u(x, y) - iv(x, y)$ holomorf D -n. Megfordítva, minden D -n holomorf $f(x + iy) = u(x, y) - iv(x, y)$ -hoz tartozó $(u(x, y), v(x, y))$ vektormező ideális áramláshoz tartozik.*

1.2. Példák

Ebben a részben levezetünk néhány holomorf f függvényhez tartozó áramvonalat, ezt először definiáljuk, majd utána kiszámoljuk példákon keresztül.

1.2.1. Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, (u, v) ideális áramláshoz tartozó vektormező. A $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ görbe áramvonal, ha γ sima és

$$\gamma'(t) = (u(\gamma(t)), v(\gamma(t))).$$

Megjegyzés. Az így definiált áramvonal tényleg az, mert az a görbe, amelyet a kezdeti időpontban $\gamma(a)$ helyen tartózkodó részecske az $[a, b]$ időintervallumban fut be.

1.2.1. $f(z) = \text{const}$

Az áramvonalak párhuzamos egyenesek lesznek.

1.2.2. $f(z) = z$

Legyen $f(z) = z = x + iy$.

Mivel $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) - iv(x, y)$, így

$$u(x, y) = x, \quad v(x, y) = -y.$$

Az áramvonal egyenlete:

$$\gamma'(t) = (u(\gamma(t)), v(\gamma(t))).$$

Ebből ha $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, akkor a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$x'(t) = u(\gamma(t)) = u(x(t), y(t)) = x(t) \tag{1.4}$$

$$y'(t) = v(\gamma(t)) = v(x(t), y(t)) = -y(t) \tag{1.5}$$

Melyeket megoldva:

$$(\ln |x(t)|)' = \frac{x'(t)}{x(t)} \implies x(t) = c_1 e^t$$

$$(\ln |y(t)|)' = \frac{y'(t)}{y(t)} \implies y(t) = c_2 e^{-t}$$

Vegyük észre, hogy $x(t)y(t) = c_1 c_2$ állandó, vagyis az áramvonalak egy hiperbola sereget alkotnak.

1.2.3. $f(z) = \frac{1}{z}$

Legyen $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$.

Mivel $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) - iv(x,y)$, így

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Az áramvonal egyenlete:

$$\gamma'(t) = (u(\gamma(t)), v(\gamma(t))).$$

Ebből ha $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, akkor a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$x'(t) = u(\gamma(t)) = u(x(t), y(t)) = \frac{x(t)}{(x^2+y^2)(t)} \quad (1.6)$$

$$y'(t) = v(\gamma(t)) = v(x(t), y(t)) = \frac{y(t)}{(x^2+y^2)(t)} \quad (1.7)$$

Amelyből felírható, hogy

$$(\ln|x(t)|)' = \frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{1}{(x^2+y^2)(t)} = \frac{y'(t)}{y(t)} = (\ln|y(t)|)'$$

Vagyis $\ln|x(t)| = \ln|y(t)| + c$, tehát $y(t) = K \cdot x(t)$, ahol $K \neq 0$. Diskusszióval az $x(t) \equiv 0$ és $y(t) \equiv 0$ is ad megoldást. Eszerint az áramvonalak képei origóból induló félegyenesek lesznek.

Továbbá kiszámolható az $x(t)$, $y(t)$ időbeli folyamat is. Az (1.7)-es egyenletbe $y(t) = K \cdot x(t)$ -t helyettesítve:

$$K \cdot x'(t) = \frac{K \cdot x(t)}{(K^2+1) \cdot x^2(t)} \implies x'(t) = \frac{1}{K^2+1} \cdot \frac{1}{x(t)}.$$

Amiből

$$(x^2(t))' = 2x(t)x'(t) = \frac{2}{K^2+1}$$

$$x^2(t) = \frac{2t}{K^2+1} + c$$

$$x(t) = \pm \sqrt{\frac{2t}{K^2+1} + c}.$$

Visszahelyettesítve $y(t) = K \cdot x(t)$ egyenletbe:

$$y(t) = \pm K \sqrt{\frac{2t}{K^2+1} + c}.$$

1.2.4. $f(z) = \frac{i}{z}$

Legyen $f(z) = \frac{i}{z} = \frac{i \cdot \bar{z}}{|z|^2} = \frac{y + ix}{x^2 + y^2}$.

Mivel $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) - iv(x, y)$, így

$$u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad v(x, y) = \frac{-x}{x^2 + y^2}.$$

Az áramvonal egyenlete:

$$\gamma'(t) = (u(\gamma(t)), v(\gamma(t))).$$

Ebből ha $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, akkor a következő differenciálegyenletrendszert kapjuk:

$$x'(t) = u(\gamma(t)) = u(x(t), y(t)) = \frac{y(t)}{(x^2 + y^2)(t)} \quad (1.8)$$

$$y'(t) = v(\gamma(t)) = v(x(t), y(t)) = \frac{-x(t)}{(x^2 + y^2)(t)} \quad (1.9)$$

Adódik az ötlet, hogy szorozzuk be (1.8)-as egyenletet $2x(t)$ -vel, (1.9)-es egyenletet $2y(t)$ -vel, így:

$$(x^2(t))' = 2x(t)x'(t) = \frac{2x(t)y(t)}{(x^2 + y^2)(t)}$$

$$(y^2(t))' = 2y(t)y'(t) = \frac{-2x(t)y(t)}{(x^2 + y^2)(t)}$$

Melyeket összeadva kapjuk, hogy:

$$(x^2(t))' + (y^2(t))' = 0.$$

Vagyis

$$x^2(t) + y^2(t) = K, \quad (1.10)$$

ahol K konstans. Ez pedig azt jelenti, hogy az áramvonalak origó koncentrikus körvonalakat alkotnak.

Kiszámolható az $x(t), y(t)$ időbeli folyamat is.

Felhasználva az (1.8), (1.9)-es egyenleteket felírhatóak a következők:

$$\begin{aligned}x'(t) &= c_0 \cdot y(t) \\x''(t) &= c_0 \cdot y'(t) = c_0^2 \cdot (-x(t)),\end{aligned}$$

ahol $c_0 = \frac{1}{K}$. Vagyis:

$$x''(t) + c_0^2 \cdot x(t) = 0.$$

Megoldva a differenciálegyenletet, tudjuk, hogy $c_0 > 0$, így a gyök alatt negatív szám szerepel, ezért:

$$x(t) = a \cdot \cos(c_0 \cdot t) + b \cdot \sin(c_0 \cdot t), \quad (1.11)$$

ahol $a, b \in \mathbb{R}$. Visszahelyettesítve az $x'(t) = c_0 \cdot y(t)$ egyenletbe:

$$y(t) = -a \cdot \sin(c_0 \cdot t) + b \cdot \cos(c_0 \cdot t). \quad (1.12)$$

A a, b konstansokat azonban nem választhatjuk szabadon, ugyanis

$$\frac{1}{c_0} = x^2(t) + y^2(t) = a^2 + b^2.$$

1.3. Fluxus és cirkuláció

Ebben a részben szeretnénk kiszámolni egy adott görbén áthaladó fluxus mennyiségét, majd azt, hogy az áramlás az adott görbét milyen mennyiségben forgatja el. Ez előbbi a fluxus, utóbbi a cirkuláció.

1.3.1. Definíció. Legyen az $(u(x, y), v(x, y))$ vektormező által leírt ideális folyadékáramlás D és legyen $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ rektifikálható görbe. Azt a folyadékmennyiséget nevezzük egy áramlás fluxusának, mely a γ bal partjáról a jobb partjára áramlik egységnyi idő alatt.

Ahogy az ideális áramlás részben kiszámoltuk, hogy mennyi folyadék áramlik át a függőleges és a vízszintes oldalakon, hasonlóan most általános szakaszra is kiszámoljuk.

1.3.2. Állítás. *Legyen $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ olyan, hogy $\alpha = |\alpha| \cdot \varepsilon$. Legyen $z \in \mathbb{C}$. Ekkor ha z -t felbontjuk α irányú és α -ra merőleges irányú vektorok összegére, azaz ha $z = k \cdot \alpha - l \cdot i\alpha$, ahol $k, l \in \mathbb{R}$, akkor*

$$k = \operatorname{Re} \frac{z}{\alpha}$$

$$l = -\operatorname{Im} \frac{z}{\alpha} = \operatorname{Im} \frac{\bar{z}}{\bar{\alpha}} = \operatorname{Im} \frac{\bar{z}}{|\alpha| \cdot \bar{\varepsilon}} = \operatorname{Im} \left(\frac{\bar{z}}{|\alpha|} \cdot \varepsilon \right).$$

Számítsuk most ki a w_0 -t és w_1 -et összekötő $\gamma(t) = \frac{1}{h}((h-t) \cdot w_0 + t \cdot w_1)$ szakaszon az f holomorf függvényhez tartozó ideális áramlás fluxusát, ahol $t \in [0, 1]$ és $h = |w_1 - w_0|$. Ekkor a szakasz minden pontjában a vektormező adott vektorát fel kell bontanunk a szakasszal párhuzamos és arra merőleges vektorok összegére. Majd meg kell mondanunk, hogy a merőleges vektor hányszorosa a szakasz bal partjáról a jobb partra mutató egységvektornak. Ezt az előző állítás (1.3.2) jelöléseivel és az $\alpha = w_1 - w_0$, $z = u(\gamma(t) + i \cdot v(t)) = \overline{f(\gamma(t))}$ szereposztással az

$$l \cdot |\alpha| = \operatorname{Im}(\bar{z} \cdot \varepsilon) = \operatorname{Im}\left(f(\gamma(t)) \cdot \varepsilon\right)$$

értéket jelöli.

Emiatt a $[w_0, w_1]$ szakasz fluxusa kiszámítható a következőképp:

$$\begin{aligned} & \int_0^h \operatorname{Im}\left(f(\gamma(t)) \cdot \varepsilon\right) dt = \operatorname{Im} \int_0^h f(\gamma(t)) \cdot \varepsilon dt \\ & = \operatorname{Im} \int_0^h \varepsilon \cdot f\left(\frac{1}{h}((h-t) \cdot w_0 + t \cdot w_1)\right) dt \\ & = \operatorname{Im} \int_0^h \varepsilon \cdot f\left(\frac{1}{h}((h-t) \cdot w_0 + t \cdot w_1)\right) \cdot \frac{w_1 - w_0}{w_1 - w_0} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \operatorname{Im} \int_0^h f\left(\frac{1}{h}((h-t) \cdot w_0 + t \cdot w_1)\right) \cdot \frac{w_1 - w_0}{h} dt \\
 &= \operatorname{Im} \int_{[w_0, w_1]} f(z) dz,
 \end{aligned}$$

hiszen $\varepsilon = \frac{\alpha}{|\alpha|}$, ahol $|\alpha| = h$.

A fluxus additivitása miatt az $\operatorname{Im} \int_{\gamma} f(z) dz$ tetszőleges γ töröttvonalra is a fluxust számolja ki, míg folytonossági megfontolások miatt kapjuk, hogy tetszőleges rektifikálható γ görbe fluxusát is az $\operatorname{Im} \int_{\gamma} f(z) dz$ formula adja.

1.3.3. Definíció. Cirkuláció jelentése, hogy egy γ görbét az áramlás mennyire szeretne negatív irányba forgatni.

A cirkuláció kiszámítása a γ görbén:

Hasonlóan a fluxus számításához, a γ görbe infinitezimális ívének cirkulációja:

$$(f(z), dz) = (u - iv, dx + i dy) = u dx + v dy = \operatorname{Re} f(z) dz.$$

Így a teljes cirkuláció (γ mentén):

$$\int_{\gamma} u dx + v dy = \operatorname{Re} \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Ha ez az integrál független az úttól, akkor egy rögzített $z_0 \in D$ kezdőpontra:

$$\operatorname{Re} \int_{z_0}^z f(z) dz =: U(z),$$

ahol $U(z)$ úgynevezett sebességpotenciál. Melyre teljesülnek a következők:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = v.$$

A Cauchy-alaptétel egy egyszerű zárt görbére azt mondja ki, hogy ha $f : d \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf, $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ olyan rektifikálható, Jordan görbe, melyre $\operatorname{int}\gamma \subset D$, akkor

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

A Cauchy-alaptétel miatt ennek a valós, illetve képzetes része is fizikai háttérrel rendelkezik. Ezt az ideális áramlásokra megfogalmazva kapjuk, hogy

1. a fluxus megegyezik 0-val, hiszen a forrás-nyelő mentesség miatt $\text{int}\gamma$ -ban mindig ugyanannyi folyadék van.

$$\text{Im} \int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

2. a cirkuláció is megegyezik 0-val az örvénymentesség miatt.

$$\text{Re} \int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

1.4. Áramvonal

Ahogy már korábban láttuk *áramvonal*nak nevezünk egy γ görbét, ha az sima és igaz, hogy $\gamma(t) = (u(\gamma(t)), v(\gamma(t)))$, ahol (u, v) az ideális áramláshoz tartozó vektormező. Azt is tudjuk már, hogy az áramvonal olyan sima görbe, mely bármilyen kis részén 0 a fluxus. Vegyük γ egy kis darabját, legyen ez γ_0 . Ekkor a fluxus e mentén:

$$0 = \text{Im} \int_{\gamma_0} f(z) dz = \text{Im} (F(\gamma_0(b)) - F(\gamma_0(a))),$$

ahol F primitív függvénye f -nek a γ_0 egy kis környezetében és $\gamma_0 [a, b]$ -ből képez D -be.

A primitív függvény létezését a szokásos okfejtéssel bizonyítjuk. Ha γ_0 -hoz létezik $z_0 \in D$ pont és $\delta > 0$ környezet, hogy $B(z_0, \delta) \subset D$ és $\gamma_0(a, b) \subset B(z_0, \delta)$. Mivel $B(z_0, \delta)$ egyszeresen összefüggő, ezért f -nek van primitív függvénye $B(z_0, \delta)$ -n, így $\gamma_0(a, b)$ -n is.

A képlet szerint tehát az áramvonal egyenlete:

$$\text{Im} F(z) = \text{const.}$$

E formulából csak az áramvonal képét tudjuk leolvasni, az időbeli folyamatot nem. Ezáltal a fizikai folyamatról csak részinformációnk lesz, viszont az összes lehetséges áramvonal képét formulával tudtuk felírni.

Nézzük meg azokat a példákat, melyeknek az 1.2 részben kiszámoltuk az áramvonalait, most a képletet felhasználva.

- $f(z) = z$: Ekkor $F(z) = \frac{z^2}{2} = \frac{(x+iy)^2}{2} = \frac{x^2 - y^2 + 2ixy}{2}$. Amiből az áramvonal egyenlete miatt:

$$\operatorname{Im} F(z) = xy = \text{const.}$$

Vagyis azt kaptuk, hogy x, y szorzata állandó, így az áramvonal hiperbola lesz.

- $f(z) = \frac{1}{z}$: Ekkor $F(z) = \log z = \log |z| + i \cdot \arg z = \log |x+iy| + i \cdot \arg(x+iy)$. Amiből az áramvonal egyenlete miatt:

$$\operatorname{Im} F(z) = \arg(x+iy) = \text{const.}$$

Vagyis azt kaptuk, hogy az $x+iy$ által létrejött szög állandó, így az áramvonal origóból induló félegyenes lesz.

- $f(z) = \frac{i}{z}$: Ekkor $F(z) = i \cdot \log z = i \cdot (\log |z| + i \cdot \arg z) = -\arg(x+iy) + i \cdot \log |x+iy|$. Amiből az áramvonal egyenlete miatt:

$$\operatorname{Im} F(z) = \log |x+iy| = \text{const.}$$

Vagyis azt kaptuk, hogy az $x+iy$ hosszának logaritmusá állandó, így az áramvonal origó középpontú kör.

Ezt általánosan is fel lehet írni:

- $f(z) = \frac{\alpha + \beta i}{z}$: Ekkor $F(z) = (\alpha + i \cdot \beta) \cdot \log z = (\alpha + i \cdot \beta) \cdot (\log |z| + i \cdot \arg z) = \alpha \cdot \log |z| - \beta \cdot \arg(z) + i \cdot (\alpha \cdot \arg(z) + \beta \cdot \log |z|)$. Amiből az áramvonal egyenletére felírható egy összefüggés az argumentum és a logaritmus közt:

$$\operatorname{Im} F(z) = \alpha \cdot \arg(z) + \beta \cdot \log |z| = \text{const}$$

$$\log |z| = \frac{\text{const}}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} \cdot \arg(z),$$

amely egy logaritmikus spirál egyenlete.

Megjegyzés. A fizikában áramvonal létezését fizikai elvekkel lehet látni, míg a matematikai modellünkben abból, hogy bármely holomorf függvény értelmezési tartománya bármely pontjának a pont egy kis környezetében van primitív függvénye, így $ImF(z) = const$ -nak bármely $z_0 \in D$ egy kis környezetében van értelme.

1.5. Nyomás

Ebben a részben megnézzük, hogy az áramlás pontjaiban a nyomást, hogy lehet kiszámolni, ahol a nyomás jele: $p(z)$. Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, ekkor bármely $z_0 \in D$ pontot tartalmazó sima ív z_0 pontjában nyomás hat a folyadékrezecskére, melynek iránya merőleges az ívre.

Vegyünk egy kis négyzetet: $[x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - h, y_0 + h] \subset D$, ahol $h > 0$ és $z_0 = x_0 + i \cdot y_0 = (x_0, y_0)$ pontot. Ekkor a négyzetre ható erőt a fluxus-, cirkulációhoz hasonlóan a függőleges, majd vízszintes oldalakra bontjuk és úgy adjuk össze.

A bal függőleges oldalra ható erő:

$$\int_{-h}^h p(x_0 - h, y_0 + t) dt.$$

A jobb függőleges oldalra ható erő:

$$\int_{-h}^h -p(x_0 + h, y_0 + t) dt.$$

Ezen kettő összege:

$$\begin{aligned} & \int_{-h}^h p(x_0 - h, y_0 + t) - p(x_0 + h, y_0 + t) dt = \\ & = 2h \cdot (p(x_0 - h, y_0 + t_1) - p(x_0 + h, y_0 + t_1)) = 4h^2 \cdot \left(-\frac{\partial p}{\partial x}(x_0 + t_2, y_0 + t_1) \right), \end{aligned}$$

ahol $t_1, t_2 \in (-h, h)$.

A vízszintes oldalra is felírva:

$$\int_{-h}^h p(x_0 + t, y_0 - h) - p(x_0 + t, y_0 + h) dt =$$

$$= 2h \cdot (p(x_0 + t_3, y_0 - h) - p(x_0 + t_3, y_0 + h)) = 4h^2 \cdot \left(-\frac{\partial p}{\partial y}(x_0 + t_3, y_0 + t_4) \right),$$

ahol $t_3, t_4 \in (-h, h)$.

Newton második törvénye szerint $F = m \cdot a$ ha feltesszük, hogy a tömeg állandó (F jelöli az erőt, m a tömeget, a a gyorsulást). Mivel a négyzet homogén anyagnak tekinthető, ezért annak tömege kifejezhető sűrűségével és térfogatával, ami nem más, mint a négyzet területe:

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot 4h^2.$$

Átrendezve kapjuk a következő egyenletet a gyorsulásra:

$$a(x, y) = \frac{F}{m} = \frac{1}{\rho} \cdot \left(-\frac{\partial p}{\partial x}(x_0 + t_2, y_0 + t_1), -\frac{\partial p}{\partial y}(x_0 + t_3, y_0 + t_4) \right).$$

Ha $h \rightarrow 0$, akkor $t_1, t_2, t_3, t_4 \rightarrow 0$ is igaz, vagyis:

$$a(x_0, y_0) = \frac{1}{\rho} \left(-\frac{\partial p}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial p}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Vegyük $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ az áramvonalat, melyre $\gamma(0) = (x_0, y_0)$. Ekkor

$$\gamma'(t) = (u(\gamma(t)), v(\gamma(t)))$$

miatt teljesül, hogy

$$x'(t) = u(x(t), y(t)) \quad y'(t) = v(x(t), y(t)),$$

vagyis

$$\gamma'(t) = (u(x(t), y(t)), v(x(t), y(t))).$$

Továbbá a második deriváltat felírva, és abba behelyettesítve:

$$\begin{aligned}\gamma''(t) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t), \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial v}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial v}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \right) = \\ &= \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), y(t)) + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x(t), y(t)), u \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x(t), y(t)) + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(x(t), y(t)) \right).\end{aligned}$$

Amit a Cauchy-Riemann egyenlettel ($\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$) átalakítva:

$$\begin{aligned}\gamma''(t) &= \left(\left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right)(x(t), y(t)), \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right)(x(t), y(t)) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial x} \right)(x(t), y(t)), \left(\frac{\partial u^2}{\partial y} + \frac{\partial v^2}{\partial y} \right)(x(t), y(t)) \right)\end{aligned}$$

Ami pedig $(u^2 + v^2)(x(t), y(t)) = |f|^2(x(t), y(t))$ miatt megegyezik ezzel:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial |f|^2}{\partial x}(x(t), y(t)), \frac{\partial |f|^2}{\partial y}(x(t), y(t)) \right).$$

Mivel a gyorsulás kifejezhető az út idő szerinti második deriváltjával, ezért

$a(x_0, y_0) = \gamma''(t)$ teljesül. Vagyis az (x_0, y_0) pontbeli gyorsulás:

$$a(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial |f|^2}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial |f|^2}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Ezt pedig összevetve az előzetesen kiszámolt gyorsulás egyenlettel:

$$\frac{1}{\rho} \left(-\frac{\partial p}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial p}{\partial y}(x_0, y_0) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial |f|^2}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial |f|^2}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Melyet átrendezve következik, hogy:

$$-\frac{\rho}{2} \cdot \frac{\partial |f|^2}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$-\frac{\rho}{2} \cdot \frac{\partial |f|^2}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Ezt integrálva megkapjuk a nyomás képletét:

$$p(z) = -\frac{\rho}{2} \cdot |f|^2(z) + c.$$

2. fejezet

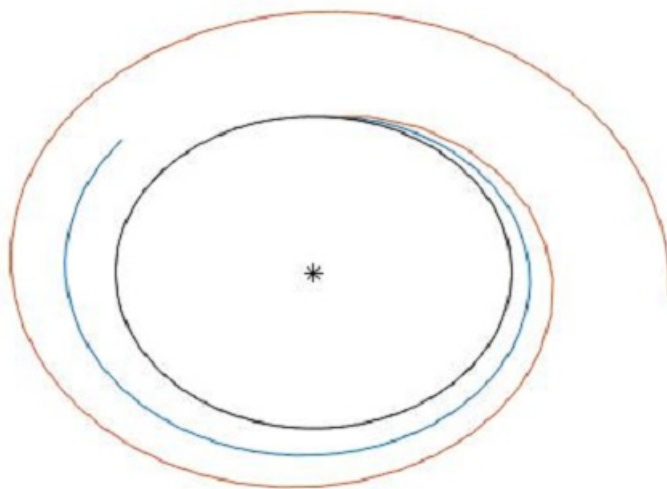
Áramvonalak bemutatása Matlab programmal

Ebben a fejezetben az eddig elméletben tárgyalt dolgokat ültetjük át a gyakorlatba, rajzokon keresztül megvizsgáljuk, hogyan működik.

Ahhoz, hogy képet kapjunk egy áramlásról az f által meghatározott vektormezőben a legegyszerűbb dolog az, hogy inputként adjuk be az f függvény paramétereit, hiszen ekkor az output a komplex síknak megfeleltethető, 2 dimenziós ábrát ad, mely jól szemlélteti amire mi kíváncsiak vagyunk.

Az áramvonalat úgy kaphatjuk meg, hogy egy adott ponthoz hozzáadunk egy vektort és ezt ismétljük sokszor. Természetesen, mint minden programnál, itt is több problémába ütközhetünk egy-egy áramvonal kirajzolásakor. Ilyen például az, hogy nem lehet akárhányszor ismételni a lépéseket, mert könnyen oda juthatunk, hogy nagyon sokáig tart a program futtatása, vagy akár nem is tud lefutni a nagy lépésszám miatt. De az is lehet, ha aránytalanul nagy vektort veszünk hozzá a függvényhez, akkor az azonnal elszáll, így nem nyertünk semmit a kirajzolásával. Egy másik nagyon fontos hiba, hogy a program nem pontos. Ez a hatalmas hátránya a numerikus matematikai programoknak a szimbolikusokkal szemben, hogy sokszor kerekítésekkel tudnak csak dolgozni, ami hibával jár.

Vegyünk például az $f(z) = \frac{i}{z}$ függvényt. Ahogy az 1.2.4-es részben láttuk ennek az áramvonalai origó koncentrikus körök. Valójában az összeadódó hibtagok miatt ez egy kifelé kanyarodó csigavonal lesz. Ha a hozzáadandó vektor sebességét elég kicsinek választjuk, akkor az rásimul az egységkörre, és ezt növelve pedig eltávolodunk tőle. A következő ábra pont ezt mutatja:



2.1. ábra

2.1. Közelítés

Először minden függvénynek megnézzük az elsőrendű közelítését. Ez azt jelenti, hogy a kiindulási ponthoz hozzáadjuk az ottani sebességvektor egy Δ számszorosát. $x(t + \Delta t)$ elsőrendű közelítése:

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + \Delta t \cdot x'(t) = x(t) + \Delta t \cdot u(x(t), y(t)),$$

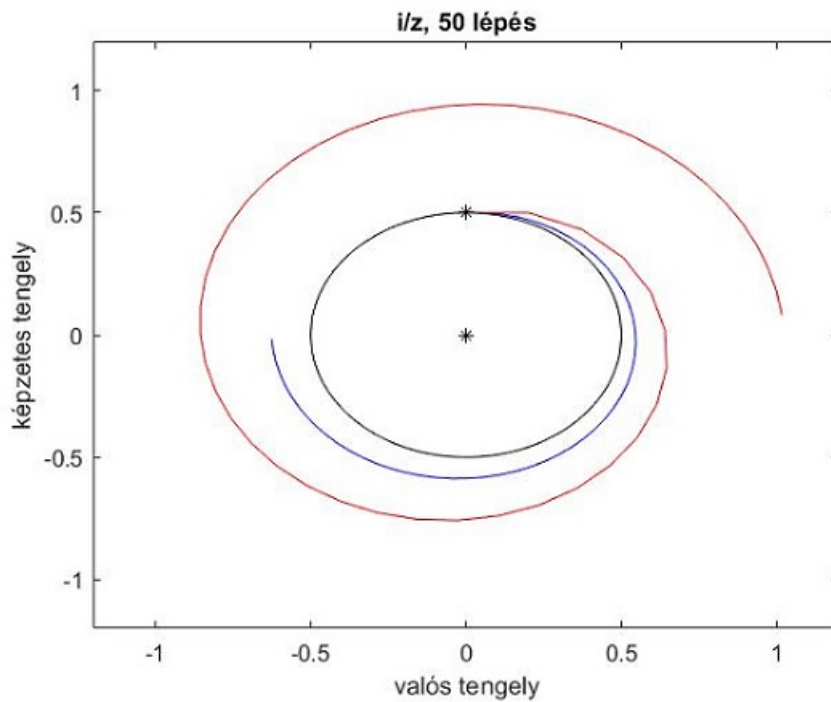
$y(t + \Delta t)$ elsőrendű közelítése:

$$y(t + \Delta t) \approx y(t) + \Delta t \cdot y'(t) = y(t) + \Delta t \cdot v(x(t), y(t)).$$

Vagyis az elsőrendű közelítés:

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) := (x_n, y_n) + \delta(u(x_n, y_n), v(x_n, y_n)).$$

Nézzünk meg néhány esetet, ezt a 2.2-es ábra mutatja. Az $\frac{i}{z}$ függvényt véve induljunk ki a $(0, 0.5)$ pontból és 50 lépést tegyünk meg, vagyis 50-szer adjuk hozzá az adott vektor δ -szorosát. Látjuk, hogy bizonyos δ -kra mennyirek közelíti meg a fekete körvonalat a piros és kék vonalak. Ahhoz, hogy teljes kört kapjunk δ -t egy ezrednél is kisebbnek kell válasszunk és természetesen a lépésszámot is növelni kell legalább ezres nagyságrendig.



2.2. ábra. A piros vonalnál $\delta = 0.1$, a kék vonalnál $\delta = 0.03$, a fekete pedig a körvonal

Látjuk, hogy ez már kis Δ -ra is ez egészen távol van az egységkörtől, ezért szeretnénk javítani.

Ezt egyszerűen meg tudjuk tenni azzal, hogy elsőrendű közelítés helyett a másodrendű közelítést vesszük a függvénynek. $x(t + \Delta t)$ másodrendű közelítése:

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + \Delta t \cdot x'(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \cdot x''(t) =$$

$$= x(t) + \Delta t \cdot u(x(t), y(t)) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial |f|^2}{\partial x},$$

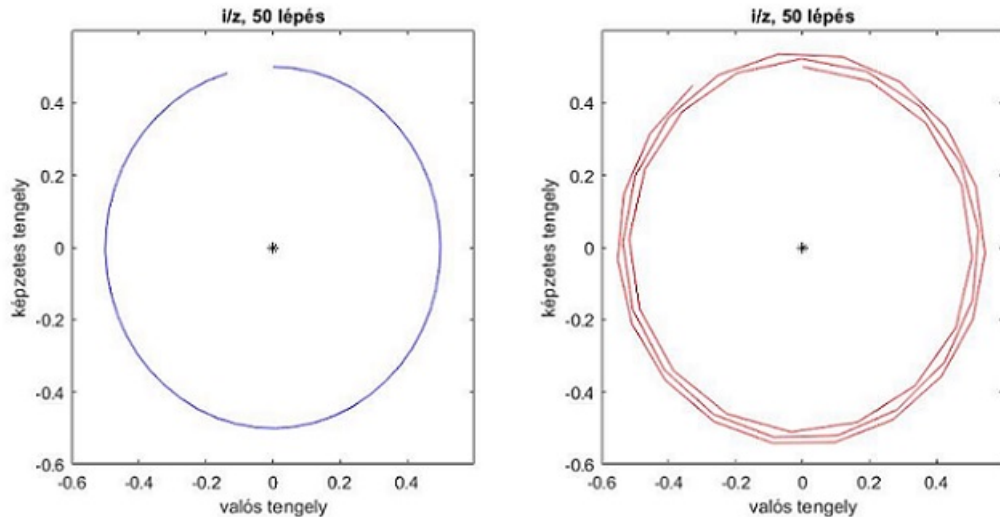
$y(t + \Delta t)$ másodrendű közelítése:

$$\begin{aligned} y(t + \Delta t) &\approx y(t) + \Delta t \cdot y'(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \cdot y''(t) = \\ &= y(t) + \Delta t \cdot v(x(t), y(t)) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial |f|^2}{\partial y}. \end{aligned}$$

Vagyis a másodrendű közelítés:

$$\begin{aligned} (x_{n+1}, y_{n+1}) &:= (x_n, y_n) + \delta(u(x_n, y_n), v(x_n, y_n)) + \\ &+ \frac{\delta^2}{4} \left(\frac{\partial |f|^2(x_n + iy_n)}{\partial x}, \frac{\partial |f|^2(x_n + iy_n)}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Nézzünk erre is egy példát, ezt a 2.3-as ábra mutatja. Az előzőhöz képest annyit változtattunk, hogy elsőrend helyett másodrendű közelítést vettünk. Látszik, hogy már a $\delta = 0.1$ választás is mennyivel jobb közelítést ad, a kék vonal pedig már teljesen a körvonalon van (ezért most a fekete kört nem is ábrázoltuk). A $\delta = 0.03$ olyan jó választás, hogy kicsit növelve a lépésszámon az már megadja a teljes körvonalat, míg a $\delta = 0.04$ még nem érne el.



2.3. ábra. Másodrendű közelítés: a piros vonalnál $\delta = 0.1$, a kék vonalnál $\delta = 0.03$

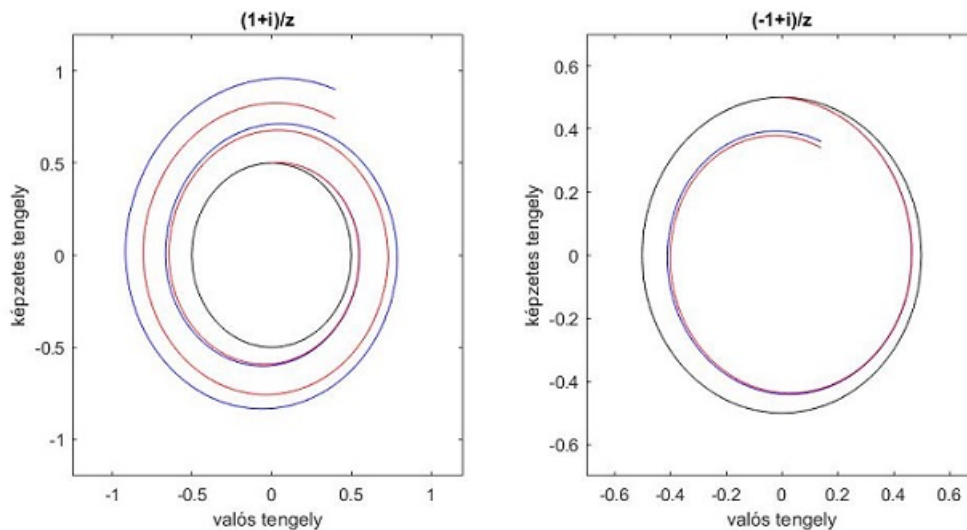
Ha összehasonlítjuk a két ábrát merőben jobb a másodrendű közelítés, az elsőrendűnél. Az ember azt gondolná ez a program futásidejénél meglátszik, hiszen

hosszabb kód, több számolás. Ehhez képest a tesztek azt mutatják, hogy megközelítőleg ugyanolyan gyors a két program. 2000 lépést megtéve észlelünk csak 0.1 szekundum különbséget.

2.2. A Matlab program

Megjegyzés. A program megalkotását a The MathWorks Matlab R2019b numerikus matematikai programcsomagja tette lehetővé, mely az A Függelék alatt megtalálható. Technikailag ez egy program, hiszen a parciális deriváltak ugyanazok, így csak a paramétereket kell átírni benne, ha más függvény áramvonalára akarunk áttérni.

Az elsődleges cél az volt, hogy az $\frac{i}{z}$, $\frac{1+i}{z}$, $\frac{1-i}{z}$, $\frac{-1+i}{z}$, $\frac{-1-i}{z}$ függvényeket jól ábrázoljuk. A program megírása közben nagy hangsúlyt fektettem a tesztelésre. Így el is készült az első program, mely lényegében kiszámolta az egyes pontokat, (amiket a hozzáadott sebességvektor segítségével megkapunk) és azokra illesztett egy folytonos görbét, ezzel megkapva a csigavonalakat, mind első-, mind másodrendben:



2.4. ábra. Az első esetben az $\frac{1+i}{z}$ függvényeként 800 lépést tettünk, a második esetben $\frac{-1+i}{z}$ függvényeként 400 lépést

Az ábrán láthatjuk, hogy a kék vonal az elsőrendű, a piros pedig a másodrendű közelítés, mely jobban közelebb is marad a fekete körvonalhoz az $\frac{1+i}{z}$ esetben, és távolabb megy a $\frac{-1+i}{z}$ esetben.

Készült egy második program is, mely nem a pontokat köti össze folytonosan, hanem egyesével a szakaszokat végig hosszán, így jön létre egy töredezett csigavonal. Ez is addig lett finomítva, míg mindegyik függvényre kirajzolja a csigavonalakat ugyanúgy első- és másodrendben. Ezeket láthatjuk majd a következő részben.

2.3. Ábrázolás és tesztelés

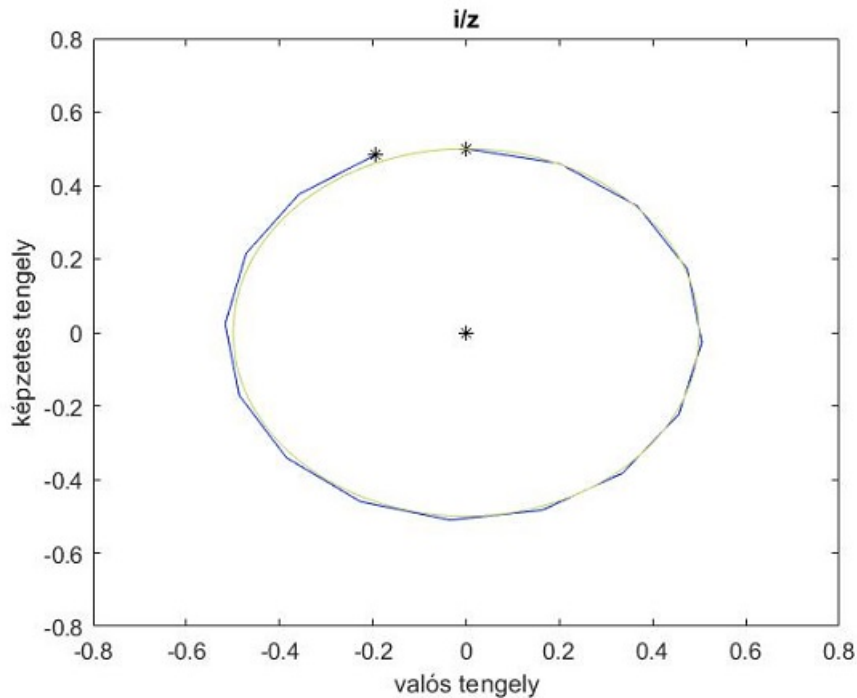
Az $\frac{i}{z}$ függvény áramvonaláról már sokat beszéltünk, egy dolgot azonban még így is megemlíthetünk, ez pedig az, hogy a programban lehetőség van az utolsó pont koordinátáinak kiíratására. Miért jó ez nekünk? Azért, mert ezzel az időbeli folyamatot is ki tudjuk számolni, hiszen δ -szor a lépésszám megegyezik t idővel. Nézzünk erre egy példát, az $\frac{i}{z}$ másodrendű közelítését, ha $\delta = 0.1$:

0.1 hosszúságú δ -val tettünk 15 lépést, vagyis $t = 1.5$ időpillanat érdekes számunkra. Kiindulási pont a $(0, 0.5)$ volt és a program outputjaként megkaptuk az utolsó pontot, ez a $z = -0.1950 + 0.4830i$ vagyis a $(-0.1950, 0.4830)$ (x, y) koordinátánként kifejezve.

Ha visszaemlékszünk az 1.2-es példák részben kiszámoltuk az $\frac{i}{z}$ -ből kapott differenciálegyenlet megoldásait t helyen ((1.11)-(1.12)-es egyenletek). Ezt most $t = 0$ -ra beírva:

$$\begin{aligned}0 &= x(0) = a \cdot \cos(0) + b \cdot \sin(0), \\0.5 &= y(0) = -a \cdot \sin(0) + b \cdot \cos(0),\end{aligned}$$

ahol $K^2 = a^2 + b^2 = 0.25$, így $a = 0, b = 0.5$ adódik.



2.5. ábra. $\delta = 0.1$, a kék töröttvonal mutatja az áramlást

Az ábra alapján $t = 1.5$ -re beírva:

$$x(1.5) = a \cdot \cos(c_0 \cdot 1.5) + b \cdot \sin(c_0 \cdot 1.5),$$

$$y(1.5) = -a \cdot \sin(c_0 \cdot 1.5) + b \cdot \cos(c_0 \cdot 1.5),$$

ahol $c_0 = \frac{1}{K} = \frac{1}{x^2(t) + y^2(t)} = \frac{1}{0.25} = 4$, hiszen a kör sugara 0.5.

Vagyis a koordináták, a szöget radiánban megadva:

$$x(1.5) = 0.5 \cdot \sin 6 = -0.14$$

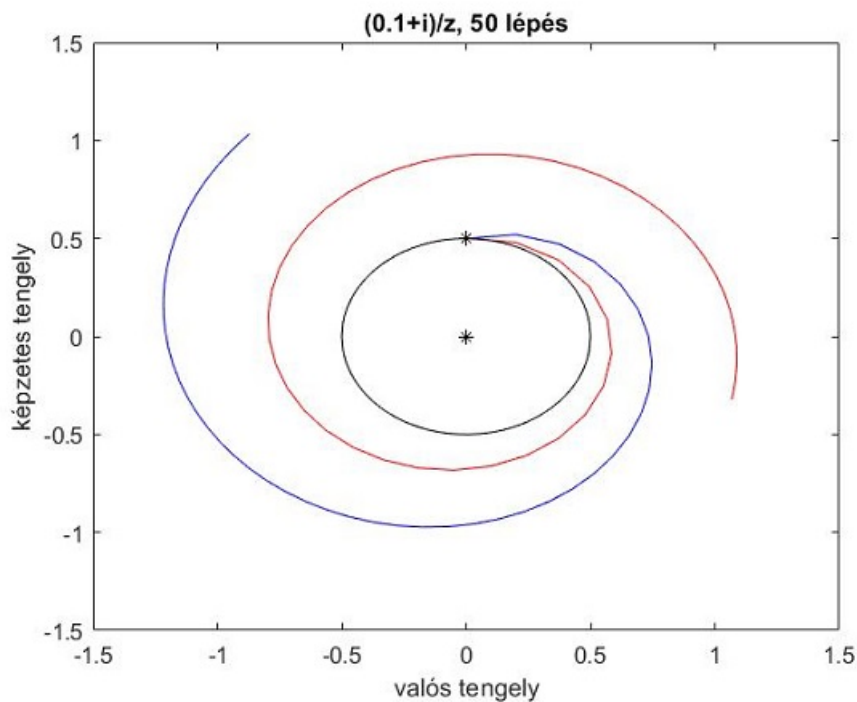
$$y(1.5) = 0.5 \cdot \cos 6 = 0.48.$$

Ezt a program által megadott értékkel összevetve egy kis eltérést tapasztalunk az x koordinátában, de ezt a közelítésnek betudhatjuk. Tesztelve $\delta = 0.1$ -re 15 lépés alatt kapjuk a legpontosabb közelítéseket, míg $\delta = 0.05$ esetben még 50 lépést végrehajtva is nagyon pontos eredményeket kapunk, viszont ennek az ábrája nem olyan mutatós.

A $\frac{1+i}{z}$ és $\frac{1-i}{z}$ áramvonalainak folytonos kirajzolását láthattuk a 2.4 ábrán, de most megcsináljuk a töröttvonalas programra is. Ezt ugyanúgy készítettem, mint

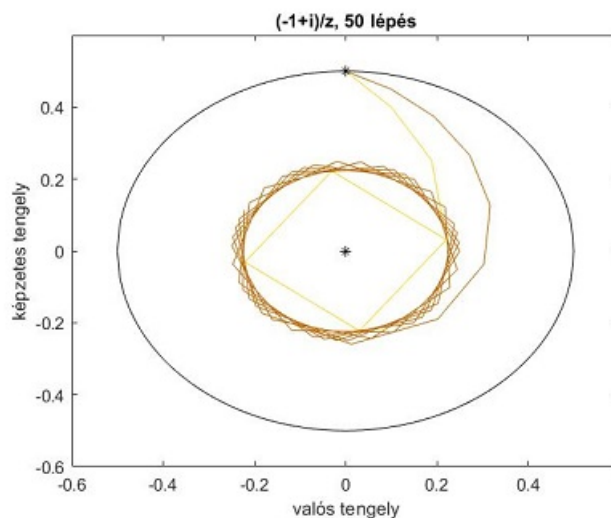
a többiét, viszont itt nem várt hibába estem. A tesztelés során azt vettem észre, hogy nagyon hamar elszáll az áramvonal. Ennek valamennyire így is kell lennie, viszont nem ilyen gyorsan. Épp ezért módosítottam a függvényen és az $\frac{1 \pm i}{z}$ helyett $\frac{0.1 \pm i}{z}$ -re írtam fel, ami már mutatós volt. Ezt láthatjuk a 2.6-os ábrán.

Megjegyzés. A különbség $\frac{1+i}{z}$ és $\frac{1-i}{z}$ közt csupán annyi, hogy az előbbinél negatív irányba, míg az utóbbinál pozitív irányba indul az áramvonal.



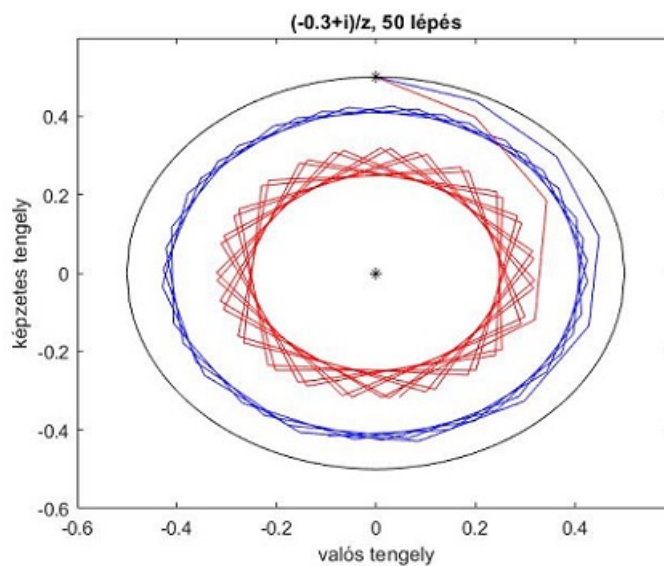
2.6. ábra. $\delta = 0.1$ -et véve, kék az elsőrendű, piros a másodrendű közelítés

A $\frac{-1+i}{z}$ és $\frac{-1-i}{z}$ függvényénél szintén az előző probléma adódott, azzal a különbséggel, hogy mivel ez befelé tekeredő csigavonal, nem hamar szállt el, hanem nagyon szögletessé vált az áramvonal. Ezt mutatja a 2.7-es ábra, ahol elsőrendben ábrázoltuk a $\frac{-1+i}{z}$ áramvonalát és a különböző színek mutatják, hogy mit ad, ha -1 -gyel vagy -0.5 -tel írjuk fel. Látható, hogy a $\frac{-1+i}{z}$ nem lényeges az ábrázolás szempontjából, de a $\frac{-0.5+i}{z}$ már igen. További teszteléseket végezve a -0.3 lesz az, ami első- és másodrendben is egy hasznos ábrát fog adni.



2.7. ábra. A sárga vonalnál $\frac{-1+i}{z}$, a barnánál $\frac{-0.5+i}{z}$ -t ábrázoltuk

$\frac{-1+i}{z}$ helyett $\frac{-0.3+i}{z}$ -re alkalmazva a programot:



2.8. ábra. $\delta = 0.1$

Itt a már megszokott módon a kék vonal az elsőrendű, a piros a másodrendű közelítés. A rajz tökéletesen szemlélteti, hogy ha a $\frac{-1 \pm i}{z}$ függvények áramvonalait akarjuk ábrázolni, azok befelé indulnak el és ráállnak egy belső kör közelítésére.

Ez a Taylor-formula Lagrange-maradéktagjával magyarázható. A formulát felírva:

$$f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

ahol ε x és a között van, $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ jelöli a Taylor-közelítést és $\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$ a Lagrange-maradéktagot. Jelen esetben mindkét koordinátát közelítjük, viszont az $f(z) = \frac{-1+i}{z}$ függvénynek a $(0,0)$ pontban szingularitása van, ezért a deriváltak a végtelenhez fognak tartani, mégpedig minél nagyobb rendű a derivált, annál nagyobb rendben. Ez azt jelenti, hogy egy darabig pontos képet kapunk, de akármi-lyen rendű közelítést alkalmazunk, ha kellően közel kerülünk a szingularitáshoz, a hibtag abszolútértéke (maradéktag) nagyobb, mint az adott Taylor-formulás tagé és emiatt a rajzolt görbe a valódi áramvonalatól igen durván tér el. Ezért a példáink közül csak egy körvonal vagy a kifelé csavarodó spirális esetén kaptuk meg jó közelítéssel az áramvonalat, mivel ezekben az esetekben "elhanyagolható" nagyságú a hibtag.

Láttuk továbbá azt is, hogy a másodrendű közelítés sokkal hatékonyabban működik, mint az elsőrendű, összhangban azzal, amit az analízisben tanult maradéktagos Taylor formula alapján vártunk.

A. függelék

Programkód

Az $\frac{i}{z}$ áramvonalainak kirajzolását adja ez a kód (a többi függvényhez tartozót hasonlóan megkaphatjuk). Egy programon belül fut az elsőrendű és a másodrendű közelítés is, mindkettőre 2 változóval, így könnyen tudjuk változtatni mit szeretnénk ábrázolni. Ha például 2 elsőrendű közelítést, akkor az első két "ujpont1" és "ujpont2"-t használjuk, ha mást akkor annak megfelelően választjuk ki a sorokat. Továbbá az áramvonalak kirajzolása mellett lehetőség van a kezdőpont, illetve végpont lekérdezésére, mind az ábrán, mind koordinátákkal leírva.

```
1
2 kezdopont = 0 + i*0.5;
3 pontok1 = [kezdopont];
4 pontok2 = [kezdopont];
5
6 %A kulonbozo delta ertekek:
7 M1=0.03;
8 M2=0.1;
9
10 for k = 1:50
11     x1 = real(pontok1(length(pontok1)));
12     y1 = imag(pontok1(length(pontok1)));
13     x2 = real(pontok2(length(pontok2)));
14     y2 = imag(pontok2(length(pontok2)));
```



```

15
16 %az elsorendu kozelitesek:
17 ujpont1 = x1+i*y1 + M1*conj(i/(x1+i*y1));
18 ujpont2 = x2+i*y2 + M2*conj(i/(x2+i*y2));
19 %a masodrendu kozelitesek:
20 %ujpont1 = x1+i*y1 + M1*conj(i/(x1+i*y1)) + (1/4)*M1*M1*((-2*x1
      /(x1*x1+y1*y1)^2) + i*(-2*y1/(x1*x1+y1*y1)^2));
21 %ujpont2 = x2+i*y2 + M2*conj(i/(x2+i*y2)) + (1/4)*M2*M2*((-2*x2
      /(x2*x2+y2*y2)^2) + i*(-2*y2/(x2*x2+y2*y2)^2));
22 pontok1 = [pontok1, ujpont1];
23 pontok2 = [pontok2, ujpont2];
24 end;
25
26 %Az utolso pontok koordinatai:
27 z1 = pontok1(length(pontok1))
28 z2 = pontok2(length(pontok2))
29
30 axis equal;
31 plot(real(pontok1), imag(pontok1), 'b');
32 hold on
33 plot(real(pontok2), imag(pontok2), 'r');
34 plot(real(pontok1(1)), imag(pontok1(1)), 'k*');
35 plot(0,0, 'k*');
36
37 xlabel('valos tengely');
38 ylabel('kepzetes tengely');
39 title('i/z, 50 lepes')
40 hold off

```

A.1. forráskód. Az $\frac{i}{z}$ kódja Matlabban

Megjegyzés. A leírt kód a 2.2-es ábrához tartozik.

Irodalom

[1] Halász Gábor, Kis hidrodinamika, jegyzet

[2] Gilányi Gergely Tamás, Hidrodinamikai problémák, Szakdolgozat

[3] Wikipédia