Eötvös Loránd Tudományegyetem

Termszettudományi Kar

Matematikai Intézet

Számítógéptudományi Tanszék

Permutációminták és elkerülő sorozatok

Szakács Lili Kata

Alkalmazott Matematikus BSc

Belső konzulens:
dr. Sziklai Péter
egyetemi tanár

Külső témavezető:
Burcsi Péter
docens

Budapest, 2020

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Burcsi Péternek, aki megbízott bennem és a témámban, elvállalta a szakdolgozatom segítését. Köszönettel tartozom Sziklai Péternek, a belső konzulensemnek is, aki érdemesnek tartotta a témát a dolgozat elkészülésére.

1.2. A témáról

Véges Matematika dolgozatra készültem, a Catalan-számok különböző interpretációit gyakoroltam. Így futottam bele az interneten egy elkerülő sorozatokkal kapcsolatos példába, aminek elsőre nem is igazán értettem a definícióját, és megoldani sem tudtam, miért a Catalan-számok jönnek ki az adott feladatban. Nem hagyott nyugodni, így utánaolvastam kicsit a témának. Láttam, hogy magyar szakirodalom lényegében nincs, és megfogalmazódott bennem, hogy ebből lehetne szakdolgozatot írni... Így esett majdnem 2 évvel később erre a témára a választásom.

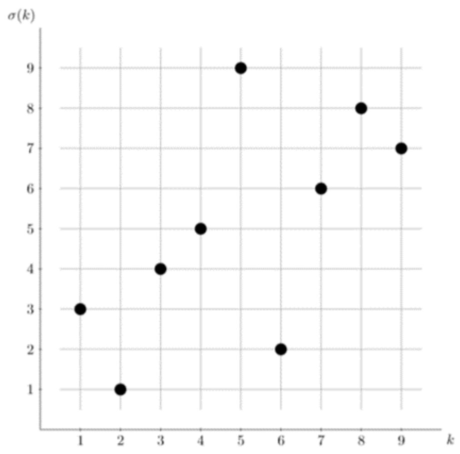
A permutációminták a kombinatorika, az elméleti számítástudomány egyik friss témaköre. Sok fontos tétel az elmúlt 20-25 év eredménye ebben a témakörben, aktualitását a 2003 óta évente megrendezésre kerülő *The International Conference on Permutation Patterns* konferencia is bizonyítja. A terület alappilléreinek mondható állítások összeszámlálási problémák, de könnyen elkanyarodhatunk az algoritmusok, bonyolultságelmélet, vagy épp csoportelmélet irányába.

2. fejezet

Alapfogalmak, példa eredmények

Definíció [1]: *Permutációnak nevezzük az* $1, 2, \ldots, n$ *számok valamilyen sorba rendezését, valamilyen* n *pozitív számra. Egy* σ *permutáció hosszát* $|\sigma|$*-val jelöljük. Az* S_n *halmaz az* n*-hosszú permutációk halmazát jelöli.*

Szokás a permutációkat grafikusan ábrázolni, egy $n \times n$-es négyzetrácson elhelyezett „korongokkal". Például a 314592687 permutáció így ábrázolva:



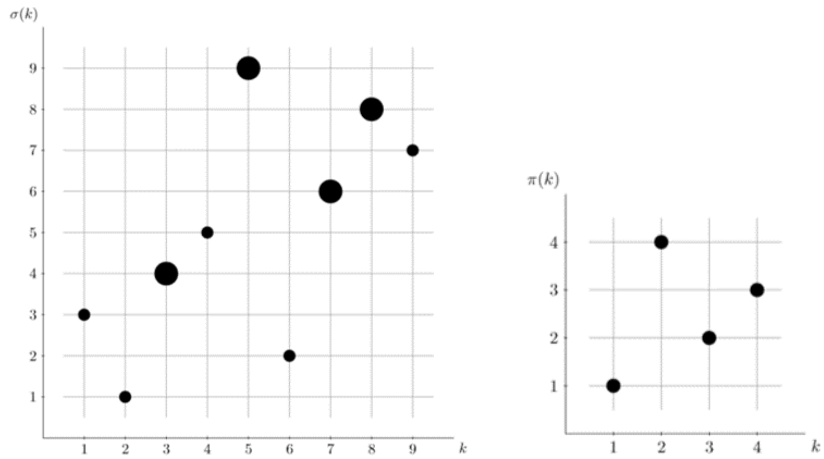
2.1. ábra. Permutációk ábrázolása

Definíció [1]: *Azt mondjuk, hogy egy* σ *permutáció tartalmaz egy* π *permutációmintát (vagy röviden: mintát), azaz egy másik permutációt, ha* σ*-ban van egy, nem feltétlenül egymást követő sorozata az elemeinek, melyek relatív sorrendje ugyanaz, mint* π*-é.*

Példa: a 314592687 permutáció tartalmazza az 1423 mintát, mert a 4968 részsorozatában a számok nagyság szerinti sorrendje ugyanaz, mint az 1423-ban.

Jelölés: Azon n-hosszú permutációk halmazát, melyek elkerülik π-t, $S_n(\pi)$-vel jelöljük, amelyek pedig egyszerre kerülik el egy R minták halmazának összes elemét, $S_n(R)$-rel jelöljük.

A permutációminták tartalmazását is lehet grafikusan ábrázolni: egy permutáció akkor tartalmaz egy mintát, ha néhány pontot (majd a megüresedett sorokat és oszlopokat) eltávolítva ugynazt az ábrát kapjuk, mint a mintánál. Az előző példa ábrázolva:



(a) 314592687 permutáció (b) 1423 minta

2.2. ábra. Példa minta tartalmazására

2.1. Erdős–Szekeres-tétel

A témakör egyik kezdeti eredményének tekinthető az Erdős–Szekeres-tétel is. Ugyan a tételt a Ramsey-elmélet alapköveként szokták emlegetni, tárgyalható a permutációminták nyelvén is.

Erdős–Szekeres-tétel (hagyományos megfogalmazás) [2]: *Adott r és s pozitív egész számok. Egy legalább $rs+1$ hosszú, különböző számokból álló sorozat biztosan tartalmaz legalább $r+1$ hosszú növekvő, vagy legalább $s+1$ hosszú csökkenő részsorozatot.*

Erdős–Szekeres-tétel (permutációmintás megfogalmazás): *Adott r és s pozitív egész számok. Minden $rs+1$-hosszú permutációnak tartalmaznia kell az $1, 2, \ldots, r+1$ vagy az $s+1, s, \ldots, 1$ mintát.*

A talán legismertebb bizonyítás Hammersley-től származik, mely skatulya-elvet használ:

Bizonyítás. Írjuk az $rs+1$ db számunkat különböző sorokba!

- Az első elemet írjuk fel az első sor elejére.
- Minden további elemet az első olyan sornak a végére írunk, amelyiknek a végén álló számnál nagyobb. Ha nincs ilyen sor, új sort kezdünk a számnak.

Az így kapott elrendezésnél az egy sorba írt számok növekvő sorrendben vannak, amennyiben van egy legalább $r+1$-hosszú sor, kész vagyunk.

Tegyük fel, hogy egyik sor sem hosszabb r-nél, ekkor azt tudjuk, hogy legalább $s+1$ sornak kell lenni, mivel (skatulya-elv) ha s sor mindegyikébe legfeljebb r elemet írtunk, az csak rs elem lenne. Most minden sorból ki fogunk választani úgy egy elemet, hogy egy csökkenő sorozatot kapjunk. Ehhez visszafelé fogunk haladni, az utolsó sorból indulva.

Válasszuk ki az utolsó sor első elemét, ez legyen x_s. Az utolsó sor első eleme kisebb, mint az utolsó előtti sornak az az eleme (legyen x_{s-1}), ami akkor volt a sorában utolsó, amikor x_s-t írtuk le. Válasszuk ki ezt az elemet is. Ehhez találunk az egyel fölötte lévő sorban is egy nagyobb elemet: ami akkor volt a sorában utolsó, amikor x_{s-1}-et írtuk le (különben x_{s-1} nem az $(s-1)$-edik sorban lenne, hanem feljebb). Ezt tudjuk folytatni, az $(s-k)$-adik sorban lévő x_{s-k}-nál nagyobb lesz az az elem, ami az $(s-k-1)$-edik sor utolsó eleme volt x_{s-k} leírásánál.

Tehát vagy van egy $r+1$-hosszú monoton növekvő részsorozatunk (egy elég hosszú sor vételével), vagy van egy $s+1$-hosszú monoton csökkenő részsorozatunk (soronként egy elem választásával, a fent leírt módszerrel). $\square$

2.2. Kapcsolat a Catalan-számokkal

Feltehetően az első eredmény a permutációminták körében *Percy MacMahonnak* köszönhető, aki *Combinatory Analysis* [3] című könyvében foglalkozott az angolul „lattice permutations” néven emlegetett, különleges tulajdonságú permutációkkal. Ennek kapcsán bizonyította be az alábbi állítást:

Tétel: *Azon permutációk száma* ($1, 2, \ldots, n$ *felett), melyek két csökkenő sorozatra bonthatók, megegyezik az* n*-edik Catalan-számmal.*

A tételt átfogalmazhatjuk a következő állítás segítségével:

Állítás: *Egy sorozatban nincs* 123*-minta (*3*-hosszú növekvő részsorozat) akkor és csak akkor, ha két csökkenő részsorozatra bontható.*

Bizonyítás. Ha lenne a permutációban 123-minta, abból a három számból semelyik kettő nem kerülhetne egy részsorozatba.

Ha nincs ilyen minta, akkor fel tudjuk építeni a permutációból a két részsorozatot (jelöljük P_1, P_2-vel):

- Vegyük ki a permutáció első elemét, tegyük bele P_1-be.
- Minden nála nagyobb elemét a sorozatnak tegyük bele P_2-be (ezek csökkenő sorrendben vannak).
- A permutáció maradék elemével ismételjük az előző két lépést.

Ez jó lesz, mivel...

... a P_1-be került elemeknél már csak kisebb elemek vannak a permutációban, így P_1 csökkenő lesz.

... a P_2-nek mindig a végére kerülnek az új elemek (különben az aktuális első elem, a P_2-be éppen bekerülő elem, és a P_2-ben lévő, a bekerülő utáni elem 123 minta lenne), így P_2 is csökkenő.

□

Ez alapján az új megfogamazás:

Tétel: *Az n-hosszú, 123-minta elkerülő permutációk száma az n-edik Catalan-szám.*

Számtalan szép és szemléletes bizonyítás született arra, miért bukkanak fel itt is a Catalan-számok [4]. Nagyrészük, az elegánsabbak, igazából nem is az 123-elkerülő, hanem a 213-elkerülő permutációkat számolják meg, illetve mutatnak egy bijekciót eközött a két halmaz között. Erre részletesebben a következő fejezetben térek ki.

Előbb viszont lássunk egy bizonyítást arra, hogy a 231-elkerülő sorozatokat miért a Catalan-számokkal számláljuk [5]:

Tétel: Az n-hosszú, 231-minta elkerülő permutációk száma az n-edik Catalan-szám.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van egy P_{n-1} $(n-1)$-hosszú permutációnk, amiből n beszúrásával képzünk egy n-hosszú P_n-t úgy, hogy 231-elkerülő maradjon.

Tegyük fel, hogy n-t a k-adik és $(k+1)$-edik elem közé szúrtuk be és P_n 231-elkerülő lett. Ekkor nem lehet az, hogy P_{n-1} első k eleme között van olyan $P_{n-1}(i)$ és az utolsó $(n-k-1)$ eleme között van olyan $P_{n-1}(j)$, amire $P_{n-1}(i) > P_{n-1}(j)$, mert akkor $P_{n-1}(i)$, n és $P_{n-1}(j)$ 231-mintát alkotnának. Tehát P_{n-1} első k eleme az $\{1, 2, \ldots, k\}$ halmazból, utolsó $(n-k-1)$ eleme a $\{k+1, k+2, \ldots, n-1\}$ halmazból kerül ki. Ennek a két permutációrésznek is 231-elerülőnek kell lennie, és ha ez teljesül, akkor P_n is 231-elkerülő lesz, mivel a két permutációrészből vegyesen választva elemeket nem kaphatnánk 231-mintát. Amennyiben n-t az első vagy az utolsó helyre szúrjuk be, akkor 231-elkerülő marad a sorozat, ha eddig is az volt.

Jelölje A_k a k-hosszú 231-elkerülő permutációk számát, illetve $A_0 = 1$ legyen. Ekkor az előbbiek alapján $A_n = \sum_{i=0}^{n-1} A_i A_{n-1-i}$, ez a képzési szabály pedig pont a Catalan-számokat adja. $\square$

3. fejezet

Wilf-ekvivalencia

Felmerül a kérdés, hogy mely minták állnak közeli rokonságban egymással, melyeket elkerülő permutációk viselkednek hasonlóan. Például az 1234 és a 4321 minták szinte egyformák, mindössze a sorrendek megfordításával megkapjuk egyik esetből a másikat. Ennél bonyolultabb kapcsolatban álló mintákról is kijelenhetjük, hogy valamilyen értelemben hasonlítanak. Ehhez hívjuk segítségül a Wilf-ekvivalencia fogalmát, mely a mintát elkerülő permutációk számán keresztül azonosítja a mintákat, vagy minták egy halmazát.

Definíció [1]: *A C permutációk halmazát permutációosztálynak hívjuk, ha minden $\pi \in C$ permutáció összes tartalmazott mintája is eleme C-nek.*

Minden permutációosztályt meghatározhatunk a legkisebb olyan permutációhalmazzal, ami nem szerepel benne, ezt hívjuk az osztály bázisának. Vagyis a bázisokat olyan minták alkotják, melyeket minden osztálybeli permutáció elkerül. Például a két csökkenő részsorozatra bontható permutációk osztályának bázisa az 123 permutáció.

Definíció [1]: *Két permutációosztály Wilf-ekvivalens, ha bennük minden lehetséges hosszúságú permutációk számai megegyeznek; ezzel ekvivalensen: ugyanaz a generátorfüggvényük.*

Hasonló a definíció a minták ekvivalenciájára is:

Definíció [1]: *Két permutáció Wilf-ekvivalens, ha az őket, mint mintát elkerülő, adott hosszúságú permutációk számai megegyeznek.*

Definíció [1]: *A Wilf-ekvivalens permutácóosztályokat azonosítva kapjuk a Wilf-osztályokat.*

3.1. Triviális ekvivalenciák

Van a permutációmintáknak két triviális Wilf-ekvivalenciája:

- Legyen π' egy π mintát „megfordítva”, vagyis az elemek sorrendjét felcserélve kapott minta. Egy π-t tartalmazó σ permutációt is megfordítva a kapott permutáció legyen σ'. Ekkor σ' is tartalmazni fogja π'-t, hiszen hátulról olvasva mindent, semmi nem változott. Hasonlóan, ha σ elkerüli π-t, akkor σ' is elkerüli π'-t. Így $S_n(\pi)$ és $S_n(\pi')$ elemei között bijekció van (a megfordítás), elemeik száma megegyezik, vagyis π és π' Wilf-ekvivalensek.
- Legyen π^* az a minta, amit π elemeinek nagyság szerinti megfordításával kapunk, azaz k helyére $(n-k+1)$ kerüljön. Legyen σ^* az a permutáció, amit egy π-t tartalmazó σ permutáció elemeinek nagyság szerinti megfordításával kapunk. Ilyenkor σ^* is tartalmazza π^*-ot, hiszen a megfelelő helyeken lévő elemek relatív sorrendje σ^*-ban ellentétes lett, ahogy π^*-ban is. Hasonlóan, ha σ elkerüli π-t, akkor σ^* is elkerüli π^*-ot. Így $S_n(\pi)$ és $S_n(\pi^*)$ elemei között bijekció van (a megfordítás), elemeik száma megegyezik, vagyis π és π^* Wilf-ekvivalensek.

Ezt a kétféle ekvivalenciát használva 4-féle, egy adott permutációmintával ekvivalens mintát kaphatunk meg: az eredetit, azt, amiben az elemek sorrendjét megfordítjuk, amiben az elemek nagyságát megfordítjuk, illetve azt, amit a sorrend és a nagyság befordításával kapunk. (Természetesen bármelyik műveletet kétszer alkalmazva visszakapjuk az eredeti permutációt, lletve ezek sorrendje felcserélhető.) Általában ez 4 különböző permutációt jelent, azonban az olyan permutációknál, ahol a k-adik és $(n-k+1)$-edik helyen álló elemek összege $n + 1$, a két művelet ugyanazt a permutációt adja, a kettő együttes használata pedig az identitás.

Például: A 3-hosszú permutációknál a triviálisan Wilf-ekvivalens permutációk:

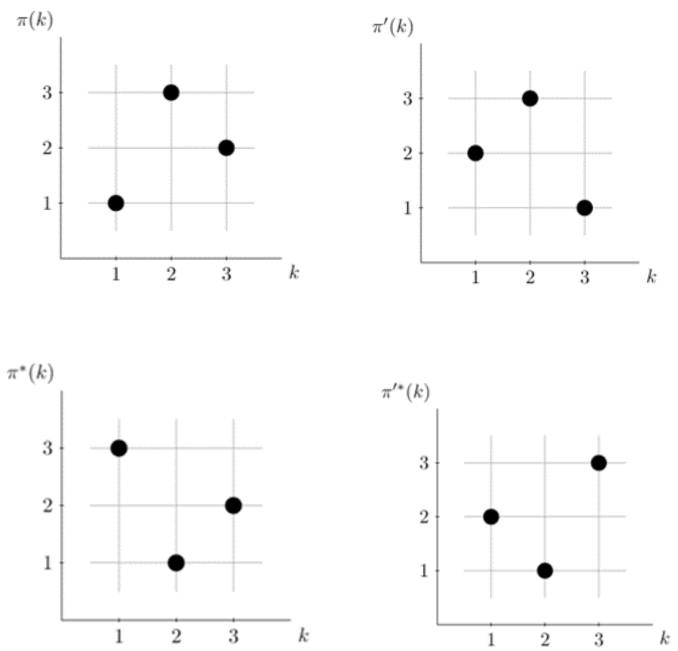
	eredeti minta	**sorrend fordítás**
eredeti minta	123	321
nagyság fordítás	321	123

3.1. táblázat. Példa: kétféle minta a triviális ekvivalenciákból

	eredeti minta	**sorrend fordítás**
eredeti minta	132	231
nagyság fordítás	312	213

3.2. táblázat. Példa: négyféle minta a triviális ekvivalenciákból

Megjegyzés: Ezt a két triviális ekvivalenciát a „négyzetrácsos-korongos” ábrázoláson tekintve a vízszintes (nagyság fordítás) és függőleges (sorrend fordítás) tükrözésnek feleltethetjük meg. Például az $\pi = 132$ mintára ezek így néznek ki:



3.1. ábra. Példa triviális Wilf-ekvivalenciára

3.2. A három hosszú mintákról

Az előző szakasz miatt tudjuk, hogy az 123 és 321 mintákat elkerülő permutációk osztályai, illetve az 132, 231, 312, 213 minták triviálisan Wilf-ekvivalensek, vagyis az 123 vagy 321 mintákat elkerülő n-hosszú permutációk számai megegyeznek, ahogy az 132, 231, 312 vagy 213 mintákat elkerülőké is. Az utóbbi négyről (illetve $S_n(231)$-ről) az előző fejezet végén kifejtettem, hogy a Catalan-számokkal számolhatók.

Ha meg tudnánk mutatni, hogy a két különböző kategóriából is van két Wilf-ekvivalens, azzal igazolva lenne, hogy egy tetszőleges 3-hosszú mintát elkerülő n-hosszú permutációk száma az n. Catalan-szám.

3.2.1. 123 és 132 minták ekvivalenciája

Valóban igaz a fentebb megfogalmazott állítás, melyre rengeteg különböző bizonyítást ismerünk. A következő *Bóna Miklós A Walk Through Combinatorics* című könyvében olvasható [5]:

Tétel: *Az* 123*-elkerülő és a* 132*-elkerülő permutációk osztályai Wilf-ekvivalensek.*

Bizonyítás. [5] Mutatunk egy bijekciót a két osztály között. Ehhez definiáljuk az alábbi, $f : S_n(123) \mapsto S_n(132)$ függvényt:

Legyen $\pi \in S_n(123)$ permutáció, ebből $\pi' = f(\pi)$-t készítsük el a következő szabályok alapján:

1. Amennyiben $1 \leq i \leq n$ indexre a $\pi(i)$ elem az addig tartó kezdőszelet minimuma (vagyis $1 \leq k \leq i$-re $\pi(k) > \pi(i)$), akkor $\pi'(i) := \pi(i)$. Ezt végezzük el az összes indexre.
2. Ha $\pi(i)$ nem a kezdőszelet minimuma, akkor $\pi(i)$ legyen a legkisebb, nem kezdőszelet-minimum elem, ami nagyobb, mint az addigi utolsó kezdőszelet-minimum.

Tehát π'-t úgy képezzük, hogy a kezdőszeletek minimumai ugyanazok, ugyanott maradjanak, a köztük lévő elemek pedig mindig a lehető legkisebbek, kvázi „növekvő sorrendben” szerepelnek (amellett, hogy a kezdőszeletek minimumai megtartják tulajdonságukat).

Az így kapott π' permutáció 132-elkerülő lesz. Tegyük fel, hogy $1 \leq i < j \leq n$ indexekre $\pi'(i) < \pi'(j)$, ekkor $\pi'(j)$ biztos nem kezdőszelet-minimum. Ha van olyan $1 \leq k \leq n$, amire $\pi'(i) < \pi'(k) < \pi'(j)$, akkor $k < j$, mivel ha $\pi'(k)$ kezdőszelet-minimum, akkor $\pi'(i)$ előtt van (tehát $k < i < j$), ha pedig nem, akkor hamarabb kell felhasználnunk, mint $\pi'(j)$-t a második szabály alapján. Ha lehetne $\pi'(i) < \pi'(k) < \pi'(j)$ esetén $i < j < k$, akkor 132-mintát találnánk π'-ben, azonban az előző érvelés miatt $i < k < j$, vagy $k < i < j$ minden megfelelő relációjú elemekre, tehát π' tényleg 132-elkerülő.

Megmutattuk, hogy az $S_n(123)$ halmaz elemeit hogyan képezzük $S_n(132)$ elemeire, most visszafelé is megmutatjuk ugyanezt, azaz π'-ből előállítjuk π-t.

Mivel π-ben és π'-ben ugyanott vannak a kezdőszelet-minimumok, ezeket helyben hagyjuk. A maradék elemeket a maradék helyekre pedig csökkenő sorrendben kell elhelyezni, mivel ha lenne ezek között $j < k$ indexekre $\pi(j) < \pi(k)$, akkor az őket megelőző, legutolsó kezdőszelet-minimummal ($\pi(i)$) a reláció $\pi(i) < \pi(j) < \pi(k)$ lenne $i < j < k$ mellett, vagyis π nem lenne 123-elkerülő. Ez azt jelenti, hogy egyértelműen lehet előállítani π'-ből π-t.

Tehát $S_n(123)$ és $S_n(132)$ bijekcióban állnak, elemszámaik azonosak, így az 123 és 132-elkerülő permutációk osztályai Wilf-ekvivalensek. $\square$

3.3. További ekvivalenciák

Definíció: *Az m-hosszú π és az n-hosszú σ permutációk direktösszege:*

$$(\pi \oplus \sigma)(i) = \begin{cases} \pi(i) & \text{ha } 1 \leq i \leq m \\ \sigma(i-m)+m & \text{ha } m+1 \leq i \leq m+n \end{cases}$$

Stankova és *West* megmutatta 2002-ben, hogy bármilyen π permutációra a $231 \oplus \pi$ és a $312 \oplus \pi$ minták Wilf-ekvivalensek [6].

Például: A 2315476 és 3125476 minták Wilf-ekvivalensek, a tételt $\pi = 2143$-ra kell használni.

Beckelin, *West* és *Xin* 2007-es eredménye, hogy az $12...m \oplus \pi$ és $m(m-1)...1 \oplus \pi$ minták is Wilf-ekvivalensek [7].

Például: Az 1234756 és a 4321756 minták Wilf-ekvivalensek, a tételt $m = 4$-re és $\pi = 312$-re kell használni.

4. fejezet

Stanley–Wilf-sejtés (Marcus–Tardos-tétel)

A Stanley–Wilf-sejtés (vagy ahogy ma nevezhetnénk, Marcus–Tardos-tétel) a permutációk Wilf-osztáyainak egy fontos határtulajdonságát bizonyítja. Az állítást Richard P. Stanley és Herbert Wilf fogalmazta meg a '80-as években, amit Adam Marcus és Tardos Gábor 2004-ben bizonyított néhány másik állításon keresztül.

Definíció: *Azt mondjuk, hogy egy permutációosztály valódi, ha nem tartalmazza az összes permutációt.*

A valódi permutációosztályokat vizsgálva szeretnénk tudni, hogy hány adott hosszú elemet tartalmaznak. Ez a kérdés így túl általános, nagyon bonyolult, így megelégszünk azzal, ha a növekedési ütemet meg tudjuk becsülni. Stanley és Wilf egymástól függetlenül megállapította, hogy ez a növekedési ütem exponenciális lesz.

Stanley–Wilf-sejtés: *Tekintsük az $S_n(\sigma)$, σ mintát elkerülő, n-hosszú permutációk halmazait. Ekkor létezik egy $C(\sigma)$ konstans, hogy $|S_n(\sigma)| \leq C(\sigma)^n$.*

Richard Arratia 1999-ben belátta, hogy ezt a sejtést máshogy is meg lehet fogalmazni, egy ekvivalens állítás [8]:

Stanley–Wilf-sejtés (Arratia) [8]: *Tekintsük az $S_n(\sigma)$, σ mintát elkerülő, n-hosszú permutációk halmazait. Ekkor a $\lim_{n\to\infty} |S_n(\sigma)|^{1/n}$ határérték létezik.*

Definíció: *A $\lim_{n\to\infty} |S_n(\sigma)|^{1/n}$ határértéket a σ-elkerülő permutációosztály Stanley–Wilf limeszének nevezzük.*

Példa: Ha σ 3-hosszú, akkor $S_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$, így a Stirling formulát alkalmazva kapjuk, hogy:

$$\left(\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}\right)^{1/n} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}\cdot\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\cdot\sqrt{2\pi(n+1)}\cdot\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}} =$$

$$= (2\sqrt{\pi(n+1)})^{1/n}\cdot\left(\frac{(2n)^{2n}}{n^n(n+1)^{n+1}}\right)^{1/n}\cdot\left(\frac{e^n e^{n+1}}{e^{2n}}\right)^{1/n} \to 4$$

Martin Klazar 2000-ben mutatta meg, hogy a Stanley–Wilf-sejtés visszavezethető egy másik sejtésre, melyet Füredi Zoltán és Hajnal Péter fogalmaztak meg [9]. Az Ő sejtésükre úgy is tekinthetünk, mint ami a "mátrix-minták elkerülésével" foglalkozik:

Definíció: *Egy M mátrixot permutációmátrixnak nevezünk, ha minden sorában és minden oszlopában pontosan egy 1-es helyezkedik el, minden további eleme pedig 0.*

Füredi–Hajnal-sejtés (Marcus–Tardos-tétel) [9, 10]: *Legyen M egy csak 0 és 1 elemeket tartalmazó mátrix. Az $f(n, M)$ legyen az 1-esek száma abban az $n \times n$-es $0-1$ mátrixban, mely nem tartalmazza M-et részmátrixként, és a lehető legtöbb 1-es van benne. Ha M permutációmátrix, akkor $f(n, M) = \mathcal{O}(n)$*

Ezt a sejtést látta be Adam Marcus és Tardos Gábor, amivel az egyik legfontosabb állítás nyert igazolást az elkerülő sorozatok témakörében [10].

Ha már tudjuk, hogy létezik egy ilyen $C(\sigma)$ konstans, amivel felülről becsülhetjük a növekedési hányadost, szeretnénk is meghatározni, vagy legalább megbecsüli ezt.

Legyen $|\sigma| = k$. A Marcus és Tardos által adott bizonyításban k-ban exponenciális nagyságú $C(\sigma)$-t adtak meg. Arratia azt az erősebb sejtést fogalmazta meg, hogy $C(\sigma) = (k-1)^2$ – ez egy éles becslés lenne, az identitáspermutációval mint mintával kapnánk ezt az értéket [8]. Sejtése azonban helytelennek bizonyult, M. H. Albert és társai mutattak erre ellenpéldát [11]:

Állítás [11]: *A* $\sigma = 4231$ *mintát elkerülő permutációosztály Stanley–Wilf-limesze legalább* $9.47 > 9$

Sőt, 2013-ban Jacob Fox belátta, hogy $C(\sigma)$ exponenciális k-ban majdnem minden σ-ra [12]. Tehát Arratia feltételezése egy ritkább esetből indulhatott ki.

5. fejezet

Rendezési algoritmusok

A permutációminták témaköre összefonódik a rendezési algoritmusokkal. Ez érezhető is, hiszen egy speciális rendezési algoritmus helyessége múlhat az input elemeinek nagysági viszonyán. *Donald Knuth* nevéhez fűződnek – ahogy angolul hívják – a „switchyard network” rendezések, most ezek közül vizsgálok meg három esetet [13].

5.1. Rendezés veremmel

A verem (angolul: stack) egy számítástechnikában gyakran használatos adatstruktúra. Nevét azért a földbe ásott veremről kapta, mert beletehetünk „egymás tetejére” tárgyakat, de mindig csak a legfölsőt van lehetőségünk kivenni. A verem két legfontosabb művelete: a *verembe(x)* utasításra az x elemet belehelyezzük a verembe, a *veremből* utasítás pedig visszaadja a verembe utoljára illesztett elemet (ha a verem nem üres éppen). A verem utolsóként-be, elsőként-ki, azaz LIFO (last-in, first-out) eljárást valósít meg.

Definíció [13]: *Egy permutációt verem-rendezhetőnek hívunk, ha vissza tudjuk kapni az identitás permutációt veremrendezéssel; azaz a rendező algoritmus nem használ más memóriát (az inputon és outputon kívül), csak egy vermet.*

Megjegyzés: Könnyen végiggondolható, hogy a veremmel való rendezést visszafelé csinálva, az input és output szerepét felcserélve, azok a permutációk, amelyek verem-rendezhetők, előállíthatók egy verem segítségével az identitás permutációból.

Annak kérdését, hogy mely permutációk rendezhetők veremmel, *Knuth* tette fel a *A számítógép-programozás művészete* című könyvsorozatának első részében, 1968-ban. Egyből választ és lineáris idejű algoritmust is adott a problémára:

Állítás [13]: *Egy permutáció pontosan akkor verem-rendezhető, ha* 231-*elkerülő.*

Bizonyítás. Legyen a $P = p_1 p_2 \dots p_n$ permutáció, amit rendezni szeretnénk. P pontosan akkor 231-elkerülő, ha nincsenek olyan $1 \leq i < j < k \leq n$ indexek, amire $p_k < p_i < p_j$ teljesül.

Ha $1 \leq i < j \leq n$ indexekre $p_i < p_j$, akkor ez azt jelenti, hogy p_i-t hamarabb tettük bele a verembe és hamarabb is vettük ki, mint p_k-t, tehát p_i-t még azelőtt kivettük, hogy p_k-t beletettük volna. Ha pedig $p_i > p_j$ teljesül, akkor p_i előbb került a verembe, de p_j került ki onnan előbb. Ezt a két tudajdonságot véve adódik, hogy ha $1 \leq i < j < k \leq n$ indexek mellett $p_k < p_i < p_j$ igaz lenne, akkor nem tudnánk verem-rendezni: p_k-t hamarabb kéne kivenni, mint p_i-t, míg p_j-t később kéne betenni, mint hogy p_i-t kivennénk, és csak ez után kerülhetne sor p_k betevésére, ami ellentmondás, mert p_k-t hamarabb kéne kivenni, mint ahogy betettük. Tehát a verem-rendezhető sorozatok 231-elkerülők

A többi permutációra alkalmazzuk az alábbi algoritmust:

Tegyük fel, hogy az outputnál az $123 \dots (j-1)$ sorozat már rendben van, most a j-t kéne a veremből kivenni.

- Ha a verem tetején j van, kiveszem.
- Ha az input következő eleme j, beteszem a verembe és kiveszem.
- Ha az input következő eleme nem j, akkor beteszem a verembe és megvizsgálom az input soron következő elemét.

Ezzel az algoritmussal csak akkor lehet probléma, ha a soron következő j valahol a veremben van és van rajta legalább egy másik elem – mivel eddig jól működött az algoritmus, ez(ek) csak nagyobb elem(ek) lehet(nek). Tehát megtörtént az algoritmus során valamikor, hogy j-t beletettük a verembe, később k-t is beletettük, ahol $j < k$, majd valamikor $(j-1)$ bekerült a verembe és ki is került onnan. Tehát a $(j-1), j, k$ elemek a sorozatban 231-mintát alkotnak. Ha nincs ilyen minta a permutációban, akkor az algoritmusban nem tapasztalunk hibát, vagyis a 231-elkerülő sorozatok verem-rendezhetők. □

Ebből következően, illetve az alábbi állítás segítségével új bizonyítást nyerhetünk arra, hogy a 231-elkerülő sorozatok számai a Catalan-számok:

Állítás: *Az n-hosszú, veremmel rendezhető permutációk száma (illetve az n-hosszú, veremmel előállítható permutációk száma) megegyezik az n-edik Catalan-számmal.*

Bizonyítás. Amikor veremmel rendezünk, minden elem bekerül egyszer a verembe és kikerül onnan egyszer. Így lényegében kétféle lépésünk van: „be" (az input soron következő elemét betesszük a verembe), vagy „ki" (a verem legfelső elemét az outputba írjuk). Arra figyelnünk kell, hogy a veremből csak akkor tudunk kivenni elemet, ha van is benne, így a „be" lépések száma nem lehet kevesebb, mint a „ki" lépéseké.

Tehát egy rendezés felfogható úgy, mint $n-n$ darab „be" és „ki" valamilyen sorbarendezése úgy, hogy annak bármely kezdőszeletében a „be" lépések száma legalább annyi, mint a „ki" lépéseké. Az ilyen feltételekkel előállított sorozatok (ezek a $2n$-hosszú Dyck-szavak) száma pedig pont a Catalan-számokat adja.

Két rendezés azonos inputra különböző outputot eredményez, ezért az n-hosszú identitás permutációból veremrendezéssel kapható sorozatok száma, vagyis az n-hosszú veremrendezhető sorozatok száma pont az n-edik Catalan-szám. □

Érdekes általánosítása a problémának, hogy több verem segítségével milyen sorozatok rendezhetők. Ha például két vermünk van és nem engedjük meg, hogy az egyik veremből a másikba tegyünk elemeket („független" vagy „párhuzamos" a két verem), akkor bonyolultabb kérdést kapunk.

Megjegyzés: Ha megengednénk, hogy át lehessen tenni bármelyik veremből bármelyikbe elemeket, akkor minden permutációt tudnánk rendezni.

5.2. Rendezés két párhuzamos veremmel

Vegyünk két vermet. Két párhuzamos veremmel való rendezésnél ugyanazokat a lépéseket végezhetjük, mint egy veremnél, annyi különbséggel, hogy eldönthetjük, a két verem közül melyikbe tesszük az input soron következő elemét, vagy melyikből vesszük ki a legfelső elemet és tesszük az outputba. Tehát egyik veremből a másikba nem tehetünk át elemet.

Definíció [13]: *Egy permutációt kétvégű sorral rendezhetőnek hívunk, ha vissza tudjuk kapni az identitás permutációt egy olyan rendező algoritmussal, mely nem használ más memóriát (az inputon és outputon kívül), csak két párhuzamos vermet, melyekből nem tudunk egymásba elemet áthelyezni.*

5.2.1. Szükséges és elégséges feltétel

A két párhuzamos veremmel való rendezhetőségre szükséges és elégséges feltételt *Vaughan Pratt* adott 1973-ban [14].

Tétel [14]: *Egy n-hosszú, P permutáció pontosan akkor rendezhető két párhuzamos veremmel, ha minden pozitív egész k-ra elkerüli a* $4, 1, 6, 3, \ldots, 4k, 4k-3, 2, 4k-1$ *és az* $5, 2, 7, 4, \ldots, 4k+3, 4k, 1, 4k+2, 3$ *mintákat.*

Például:

$k = 1$-re az alábbi mintákat kell elkerülni: 4123 és 5274163.

$n = 4$-re csak a 4123 permutáció nem jó, tehát ezt kivéve minden legfeljebb 4-hosszú permutáció rendezhető két párhuzamos veremmel.

Máshogy megfogalmazva az előző tételt:

Tétel [14]: *A két párhuzamos veremmel rendezhető permutációk osztályának bázisát a* $4, 1, 6, 3, \ldots, 4k, 4k-3, 2, 4k-1$ *és az* $5, 2, 7, 4, \ldots, 4k+3, 4k, 1, 4k+2, 3$ *alakú permutációk alkotják ($k \in \mathbb{N}^+$).*

5.2.2. Lineáris idejű algoritmus

Most mutatunk egy lineáris idejű algoritmust, mely eldönti egy permutációról, hogy rendezhető-e két párhuzamos sorral. Az algoritmus lényegében a rendezés lépéseit szimulálja, így kiolvasható lesz belőle, milyen lépésekkel tudjuk az adott permutációt rendezni [15, 16].

Szükséges fogalmak

Az algoritmusban ikervermek egy halmát fogjuk használni. Ikerveremnek nevezünk két párhuzamos vermet, melyek közül az egyik a „jobb", másik a „bal" verem lesz, illetve bennük az elemek fentről lefelé növekvő sorrendben vannak. Az ikervermek halmában pedig egymás tetejére képzelünk ikervermeket úgy, hogy a jobb és bal vermek egymás felett legyenek. Ha a fentről lefelé növekedés globálisan is igaz, azaz a feljebb lévő ikervermek összes eleme kisebb, mint a lejjebb lévők összes eleme (nem csak az összetartozó oldalakon), illetve nem tartalmaz üres ikervermeket, akkor a halmot normálisnak hívunk.

A π permutációt szeretnénk rendezni párhuzamos vermek segítségével. Úgy fogjuk eldönteni, hogy ez lehetséges-e, hogy az ikervermek halmával kezdjük rendezni π-t. Ha az ikervermes algoritmusunk elakad, akkor nem rendezhető párhuzamos vermekkel π, de ha sikerül néhány (egészen pontosan n) lépés után az identitást visszakapni, akkor az ikervermes algoritmus megadja a rendező algoritmust is.

A halomban lévő ikervermeken definiáljuk az alábbi két műveletet:

- *Fordítás:* az adott ikerverem jobb és bal vermét megcseréljük, a bennük lévő összes elemmel együtt.

- *Összeolvasztás:* A halomban a két felső ikervermet „összeolvasztjuk”, vagyis az alsó veremre rátesszük a felső verem elemeit olyan sorrendben, hogy a növekedés lefelé megmaradjon (konkatenálunk), töröljük a feleslegessé vált, kiürült legfelső ikervermet. (Ez a művelet nem végezhető el mindig, csak ha a felső ikervermek elemeinek jó a relációja.)

Az algoritmus:

Az algoritmusunkkal arra fogunk törekedni, hogy normális halmot tartsunk fent. Tegyük fel, hogy néhány eleme π-nek már az outputban van, vagy az ikervermek H halmában, ami normális, most következik az i elem. Csináljuk a következőket:

1. Elhelyezés a halomban: Hozzunk létre egy új ikervermet H tetején és ennek bal felébe helyezzük el i-t (a jobb fele üres marad)!

2. Normalizálás:

   – Ha i kisebb, mint H felülről második ikervermének felső eleme(i), akkor H normális maradt.

   – Ha i a H felülről második ikervermének két felső eleme között áll, akkor fordítsuk meg az i-t tartalmazó ikervermet úgy, hogy i nagyobb elem felett legyen. Ekkor a növekedés lefelé teljesül külön-külön a két oldalon, a globális növekedéshez pedig olvasszuk össze a két felső ikervermet.

   – Ha i nagyobb, mint az alatta lévő (azaz felülről második) ikerverem egyik oldalán a felső elem, a másik oldala pedig üres ennek az ikerveremnek, akkor az i-t tartalmazó ikervermet fordítsuk úgy, hogy i az üres oldal fölé kerüljön. Olvasszunk össze (ezt megtehetjük, mert az i előtt normális H két fölső verme közül az egyikben jó sorrendben vannak elemek, a másikban meg egyedül van i). Az így kapott elredezésben lehet, hogy H nem normális, így hajtsuk végre mégyegyszer a normalizáló lépést.

– Ha i nagyobb, mint az alatta lévő ikerverem bármelyik felső eleme, akkor megállunk, a permutáció nem rendezhető párhuzamos vermekkel.

3. Kiovasás a halomból: Miután a halom normális lett, megvizsgáljuk, hogy a két oldalának legfelső elemei közül van-e olyan, ami épp a soron következő az oututnál. Ha van ilyen, ezt kiírjuk oda, eltávolítjuk az elemet a veremből. Ha út közben kiürülnek ikevermek, azokat eltávolítjuk.

Az algoritmus helyességéről:

Ez az eljárás a döntéseinket szimulálja az eredeti, párhuzamos vermes rendezési feladatnál – azokat a döntéseinket, hogy egy elemet melyik verembe tegyük. Amikor egy elemet tetszőlegesen helyezhetünk el a két verem valamelyikében, akkor az külön ikerkermet kap a halomban. Ha két lépés (azaz két elemnél a megfelelő verem választása) nem függ egymástól, akkor ezek külön ikervermekben maradnak. Azonban ha az egyik lépés „kényszerít" más lépéseket, ott olvasztunk össze ikervermeket, ezzek elemsorozatokat egymással „összeragasztva". A fordítás jelenti azt, hogy az addigi döntéshez képest a másik alternatívát, a másik vermet kellett volna választani. Így amikor többször végezzük egymás után a normalizálást, akkor több lépésre visszamenőleg választjuk inkább a másik döntést.

Állítás: *Az előző algoritmus lineáris futásidejű.*

Bizonyítás. Minden elem legfeljebb egyszer kerül be a halomba, illetve kerül ki onnan, ikervermet is legfeljebb n-szer hozunk lérte és törlünk, így az 1. és 3. műveletek összesen $\mathcal{O}(n)$ lépést vesznek igénybe.

A normalizáló lépésnél vagy nem kell csinálnunk semmit (1. és 4. eset), vagy csak egy fordítást és összeolvasztást végzünk (2. eset), vagy az üres helyre fordítás után meghívjuk még egyszer a normalizálást (3. eset). Mivel ezt az újrahívást megelőzi egy összeolvasztás, összeolvasztásból pedig összesen nem történhet $(n-1)$-nél több (n ikerverem van, ha mindent összeolvasztok, az is csak $(n-1)$ alkalom), így a normalizáló lépések is beleférnek az $\mathcal{O}(n)$ lépésszámba. Tehát az egész algoritmus is $\mathcal{O}(n)$ lépésszámú, vagyis lineáris idejű. □

5.3. Rendezés kétvégű sorral

A kétvégű sor (angolul: deque) egy másik elterjedt adatstruktúra, mely ötvözi a verem és a sor tulajdonságait. A kétvégű sort úgy kell elképzelni, mint egy hosszú csövet, melynek mindkét végén lehet elemeket kivenni, vagy betenni. A kétvégű soroknak ez alapján négy fontos művelete van: *beszúrás az elejére*, *beszúrás a végére*, *kivétel az elejéről*, illetve *kivétel a végéről*.

Vegyük észre, hogy ha beszúrunk a kétvégű sor közepére egy „falat”, akkor lényegében a két független veremmel való rendezést kapjuk vissza - tehát a kétvégű sor használható két párhuzamos veremként is. Emiatt érezhető, hogy hasonlóak ezzel két struktúrával rendezhető permutációk, illetve a rendezhetőséget eldöntő algoritmus is.

Definíció [13]: *Egy permutációt kétvégű sorral rendezhetőnek hívunk, ha vissza tudjuk kapni az identitás permutációt egy olyan rendező algoritmussal, mely nem használ más memóriát (az inputon és outputon kívül), csak egy kétvégű sort.*

Megjegyzés: Hasonlóan a veremhez, a kétvégű sorral való rendezést is visszafelé csinálva, az input és output szerepét felcserélve, azok a permutációk, amelyek kétvégű sorral rendezhetők, előállíthatók egy kétvégű sor segítségével az identitáspermutációból.

Szintén *Knuth* nevéhez fűződik az a kérdés, hogy mely permutációk állíthatók elő kétvégű sorok segítségével. Arra született megfejtés, hogy melyek az ilyen a permutációk, azomban ezek számát még mindig nem tudjuk...

5.3.1. Szükséges és elégséges feltétel

Vaughan Pratt 1973-as cikkében a két párhuzamos verem mellett a kétvégű sorral való rendezhetőségre is adott szükséges és elégséges feltételt [14].

Tétel [14]: *Egy n-hosszú, P permutáció pontosan akkor rendezhető kétvégű sorral, ha minden pozitív egész k-ra elkerüli az* $5, 2, 7, 4, \ldots, 4k+1, 4k-2, 3, 4k, 1$ *és* $5, 2, 7, 4, \ldots, 4k+3, 4k, 1, 4k+2, 3$ *mintákat, és azokat a mintákat is, melyeket úgy kaptunk, hogy az előző kettőben felcseréljük az* 1*-est és a* 2*-est, vagy az utolsó két elemet.*

Például:

$k = 1$-re az alábbi mintákat kell elkerülni: 52341, 51342, 52312, 51324 (első mintatípus és felcserélések) és 5274163, 5274136, 5174263, 5174236 (második mintatípus ésfelcserélések).

$n = 5$-re az alábbi permutációkat nem lehet kétvégű sorral rendezni: 52341, 51342, 52312, 51324; így a kétvégű sorral rendezhető 5-hosszú permutációk száma 116.

Minden legfeljebb 4-hosszú permutáció rendezhető kétvégű sorral.

Ugyan a feltétel egyszerűnek tűnik, annak kiszámolása, hogy hány n-hosszú, kétvégű sorral rendezhető permutáció van, nagyon nehéz kérdés. Sokáig csak $n = 14$-ig volt kiszámolva az érték (nagy számításigényű programokkal).

Permutációosztályokkal megfogalmazva az előző tételt:

Tétel [14]: *A kétvégű sorral rendezhető permutációk osztályának bázisát az* $5, 2, 7, 4, \ldots, 4k+1, 4k2, 3, 4k, 1$ *és az* $5, 2, 7, 4, \ldots, 4k+3, 4k, 1, 4k+2, 3$ *alakú permutációk, illetve, bennük az* 1*-est és a* 2*-est, vagy az utolsó két elemet felcserélve kapott permutációk alkotják ($k \in \mathbb{N}^+$).*

Megjegyzés: A kétvégű sorral rendezhető permutációk bázisa majdnem részhalmaza a két párhuzamos veremmel rendezhető permutácók bázisának. Ennek hátterében az áll, hogy a kétvégű sor alkalmazható két párhuzamos veremként is, így a vele rendezhető permutációk osztályának részhalmaza a két párhuzamos veremmel rendezhetők osztálya.

5.3.2. Lineáris idejű algoritmus

A párhuzamos vermekkel való rendezés eredményeinek kis módosításaival oldhatjuk meg a kétvégű sorok problémáját is. Így született a következő algoritmus is, mely lineáris időben eldönti, hogy egy permutáció rendezhető-e kétvégű sorral [15, 16].

Az algoritmus majdnem ugyanaz, mint a párhuzamos vermek esetében: ugyanúgy ikervermek halmával próbálunk rendezni, ami ha sikerül, a permutáció rendezhető kétvégű sorral. Egyedül a normalizálást kell módosítani.

Néhány feltételes lépéssel kell kiegészíteni az algoritmust, melyek az alábbiak:

Ha a most következő i elem nagyobb, mint bármelyik másik elem az ikervermek halmában, akkor hozzunk létre egy olyan ikervermet, melynek bal oldalában i van, jobb oldala üres, majd tegyük ezt az ikervermet a halom legaljára.

- Ha minden ikerveremnek az egyik oldala üres, akkor fordítsuk meg őket úgy, hogy mindenhol a jobb oldal legyen üres. Ezután olvassuk össze a halom összes ikervermét.
- Ha minden ikerveremnek a egyik oldala üres, kivéve alulról a másodikat (i érkezése előtti legalsót), és ebben az egyik oldalon csak egy j elem van, mely a legnagyobb a halomban i után, akkor tegyük a következőket:
  - j-t kivéve minden elemet hozzunk bal oldalra fordítással
  - j-nek hozzunk létre egy új ikervermet, melynek a bal oldalába tegyük j-t, jobb oldala maradjon üresen, majd ezt szúrjuk be az i-t tartalmazó ikerverem fölé közvetlenül a halomban

  Ezzel visszakaptuk az előző esetet, olvassuk össze az egész halmot.
- Ha van olyan ikerverem a halomban, hogy annak jobb és bal oldala sem üres, és ez nem az előző feltételeknek megfelelő, akkor álljon meg az algoritmus, nem lehet kétvégű sorral rendezni a permutációt.

Az algoritmus helyességéről:

Ebben az algoritmusban is, akárcsak a párhuzamos vermes esetben, szimuláljuk egy kétvégű sor működését. Tekintsünk az ikervermek halmának két oszlopára úgy, mint egy-egy nagy veremre, majd ezeket fenekükönél összeragasztva kapunk egy kétvégű sort – melyben van egy fal. Mivel mindig csak a nagyobb elemek lehetnek a fal közelében, melyeknek később kell az outputba távozniuk, ez nem egy rossz elindulás.

Amíg egy kétvégű sor monoton tud maradni a rendezési algoritmus alatt, addig egyszerű kezelni – ez az algoritmusban akkor jelenik meg, amikor minden ikerverem egyik oldala üres. Ám, ha ezt valahol meg kell sértenünk, akkor a legnagyobb elemnél ott a fal (valamelyik oldalról), két párhuzamos vermet kapunk, ilyenkor használjuk az algoritmus korábban ismertetett lépéseit. Ezt a falat csak olyankor „mozdítjuk el", amikor valamelyik oldalról kiürülnek az elemek mellőle, ez az algoritmus kiegészítésében a második pontnál jelenik meg: áttesszük a falat a legnagyobb elem másik oldalára, majd az új legnagyobb elem másik oldalára.

Állítás: *A módosított algoritmus is lineáris futásidejű.*

Bizonyítás. Az eddigi algoritmus futásideje $\mathcal{O}(n)$ volt, ahol annak a lépéseit használjuk, továbbra sem lesz hosszabb. Csak a módosításokat kell ellenőrizni.

Minden inputról érkező i elemről el kell dönteni, hogy az nagyobb-e, mit minden elem a halomban. Ehhez fenntartunk egy memóriaegységet, melyben a legnagyobb halombeli elem értéke van, így csak ezzel kell i-t összehasonlítani, illetve ha i tényleg legnagyobb, ezt a memóriaegységet frissíteni. Ez az első elemnél egyszer sem, a többi elemnél egyszer fordul elő, tehát $\mathcal{O}(n)$ időben teljesíthető.

Ha i legnagyobb elem a halomban, akkor ennek kezelése sem rontja el a lineáris futásidőt, mivel fenntarthatunk egy-egy számlálót arra, hány elem van a halom egyik, illetve másik oldalán. Ennek frissítése lépésenként konstans mennyiségű lépés, ennek segítségével pedig minden feltételre gyorsan tudunk válaszolni. A speciális esetek kezelése is konstans lépésben elvégezhető, tehát itt is lineáris lépésszám-növekedés van.

Tehát a módosított algoritmus is $\mathcal{O}(n)$ futásidejű. $\square$

6. fejezet

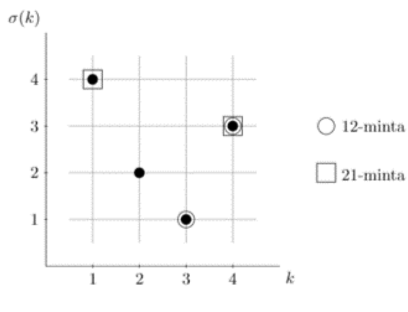
Szuperminták

A szuperminták (angolul: superpattern vagy universal pattern) témakörében az eddigiekkel ellentétes a motivációnk: nem azt szeretnénk, hogy valamilyen minta ne szerepeljen a permutációnkban, hanem minden egyes adott hosszú mintát szeretnénk megtalálni benne.

Definíció [8]: *Egy permutációt k-szupermintának hívunk, ha minden k-hosszú mintát tartalmaz.*

Példa: A 4213 4-hosszú permutáció egy 2-szuperminta, mivel szerepel benne az 12-minta (pl. 13) és a 21-minta is (pl. 43).

Ha a 3. fejezetben bemutatotthoz hasonlóan, grafikusan szeretnénk ábrázolni a k-szupermintákat, akkor közös tulajdonságuk, hogy minden $k \times k$-s ábra előállítható belőlük, néhány sor és oszlop törlésével (pont ezt jelenti, hogy minden mintát tartalmaznak). Az előző példát így ábrázolva:



6.1. ábra. Példa szupermintára

Megjegyzés: A fogalom nem összekeverendő a *szuperpermutációval*, amit az olyan számsorozatokra értünk (számismétlődést megengedve), melyek minden lehetséges mintát mint egymást követő elemek összeolvasását („substringet”) tartalmaznak.

Példa: A 212 egy 2-szuperpermutáció, mert megtalálható benne az 12 és a 21 is részsorozatként. Az 123121321 pedig a legrövidebb 3-szuperpermutáció.

A szuperminták témakörében több izgalmas irányba is el lehet kalandozni. Természetes kérdés, hogy milyen hosszú a legrövidebb k-szuperminta - erre alsó és felső becslések (konstrukciók) is születtek. Egészen más jellegű kérdés, hogy hány n-hosszú k-szuperminta van - sajnos kevés esetben ismerünk képletet.

6.1. 3-szuperminták

Vizsgáljuk meg az előző két kérdést a 3-szuperminták körében.

Állítás: *A legrövidebb* 3*-szuperminta* 5*-hosszú permutáció.*

Bizonyítás. Egy 3-szuperminta kell, hogy tartalmazza az 123 és a 321 mintákat is, márpedig ennek a két mintának legfeljebb egy közös eleme lehet (ha lenne kettő, ott egyszerre várnánk el csökkenést és növekvést is). Ebből következően a keresett permutációk hossza legalább $6 - 1 = 5$.

Lehet is 5-hosszú 3-szupermintát találni, például a 25314 tartalmazza mind a 6 3-hosszú mintát:

minta	**megjelenés**
123	234
132	253
213	214
231	251
312	534
321	531

6.1. táblázat. Példa: 3-hosszú minták egy 3-szupermintában

$\square$

A második kérdést először *Rodica Simion* és *Frank W. Schmidt* válaszolta meg $k = 3$-ra [17]. Erre az eredményre logikai szitával jutottak, ugyanis előtte behatóan foglalkoztak 3-hosszú minták kombinációinak elkerülésével.

Tétel [17]: *Az n-hosszú 3-szuperpermutációk száma $n \geq 5$ esetén:*

$$n! - 6C_n + 5 \cdot 2^n + 4\binom{n}{2} - 2F_n - 14n + 20,$$

ahol C_n az n. Catalan-szám, F_n pedig az n. Fibonacci-szám ($F_1 = F_2 = 1$ jelölés mellett).

Bizonyítás (vázlat): Simion és *Schmidt* kiszámolta S_3 minden egyes részhalmazára az őket elkerülő permutációk számát. Ezeket a részeredményeket a részletes bizonyítások, hosszú számolások nélkül felhasználjuk.

Jelöljük $A_n(R)$-rel az $S_n(R)$ halmaz elemszámát.

- Egyelemű halmazok:

  Ahogy a 4. fejezetben már kifejtésre került, bármelyik 3-hosszú mintát elkerülő, n-hosszú sorozatok száma az n-edik Catalan-szám: C_n.

- Kételemű halmazok:

$$A_n(123,132) = A_n(123,213) = A_n(231,321) = A_n(312,321) =$$

$$= A_n(132,213) = A_n(231,312) = A_n(132,231) = A_n(213,312) =$$

$$= A_n(132,312) = A_n(213,231) = 2^{n-1}$$

$$A_n(132,321) = A_n(123,231) = A_n(123,312) = A_n(213,321) = \binom{n}{2} + 1$$

  Az Erdős-Szekeres-tételből következően $n \geq 5$-re $A_n(123,321) = 0$

- Háromelemű halmazok:

$$A_n(123,132,213) = A_n(231,312,321) = F_{n+1}$$

$$A_n(123,132,231) = A_n(123,213,312) = A_n(132,231,321) =$$

$$= A_n(213,312,321) = A_n(132,213,231) = A_n(132,213,312) =$$

$$= A_n(132,231,312) = A_n(213,231,312) = A_n(123,132,312) =$$

$$= A_n(123,213,231) = A_n(132,312,321) = A_n(213,231,321) =$$

$$= A_n(123,231,312) = A_n(132,213,321) = n$$

A többi háromelemű R halmaz mindegyike tartalmazza az 123 és a 321 mintákat is, így ezek esetén is $A_n(R) = 0$ az Erdős-Szekeres-tétel következményeként.

- Négyelemű halmazok:

  Ha az $R \subset S_3$ tartalmazza 123-at és 321-et is, akkor ismét nincs megfelelő permutáció. Tehát R-ben legfeljebb egy szerepelhet az 123 és a 321 közül. Az így kapott 9 mintahalmaz mindegyikéhez $2-2$ permutációt találunk, melyek azokat kerülik el.

- Ötelemű halmazok:

  Csupán két olyan permutáció van $n \geq 4$ esetén, melyek $5db$ 3-hosszú mintát is elkerülnek (azaz csak 1-féle mintát tartalmaznak): az identitás (elkerüli a 321-et) és ennek inverze (elkerüli az 123-at).

- Hatelemű halmaz:

  Mivel az 123 és a 321 mintákat is el kéne kerülni, nincs ilyen permutáció $n \geq 5$-re.

Összefoglalva: Jelöljük $B_n(k)$-val az n-hosszú, az S_3 egy k elemű részhalmazát elkerülő permutációk számát. Ezek értékei:

k	$\mathbf{B_n(k)}$
1	$6C_n$
2	$10 \cdot 2^{n-1} + 4\left(\binom{n}{2} + 1\right)$
3	$2F_n + 14n$
4	$2 \cdot 9$
5	2
6	0

Innen egy logikai szitával számolható ki a 3-szuperminták száma:

$$n! - 6C_n + 5 \cdot 2^n + 4\binom{n}{2} - 2F_n - 14n + 20$$

6.2. Alsó becslés legrövidebb szupermintára

Most vizsgáljuk meg, legalább milyen hosszúnak kell lennie egy k-szupermintának. Az eddig ismert legjobb alsó becslést *Richard Arratia* fedezte fel 1999-ben [8], ami az alábbi:

Tétel [8]: *A legrövidebb k-szuperminta hossza legalább $\frac{k^2}{e^2}$*

Bizonyítás. Ahhoz, hogy egy permutáció minden k-hosszú mintát tartamazzon, a k-hosszú részsorozatainak a száma legalább annyi kell, hogy legyen, mint a minták száma. A k-hosszú minták száma $k!$, a k-hosszú rézsorozatoké $\binom{n}{k}$, így $\binom{n}{k} \geq k!$, amiből az $n! \geq (k!)^2(n-k)!$ becslés adódik. A Stirling-formulát ($n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$) használva:

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \geq \sqrt{2\pi(n-k)}\left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k} \cdot 2\pi k\left(\frac{k}{e}\right)^2 k$$

$$2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \geq 2\pi(n-k)\left(\frac{n-k}{e}\right)^{2n-2k} \cdot 4\pi^2 k^2\left(\frac{k}{e}\right)^{4k}$$

$$n^{2n+1} \geq (n-k)^{2n-k+1} \cdot 4\pi^2 k^{4k+2} e^{-4k} \geq (n-k)^{2n-k+1} k^{4k} e^{-4k}$$

$$\frac{n^{2n+1}}{(n-k)^{2n-2k+1}} \sim n^{2k} \geq \left(\frac{k}{e}\right)^{4k}$$

Tehát (k-hoz képest) nagy n-re $n \geq \left(\frac{k}{e}\right)^2$. □

6.3. Felső becslés legrövidebb szupermintára

Nem csak arra ismerünk becslést, hogy legalább milyen hosszú a legrövidebb k-szuperminta, tudunk mutatni ügyes konstrukciókat, amivel felső becslés is adható.

Állítás [8]: *Van k^2-hosszú k-szuperminta.*

Bizonyítás. Konstrukciót fogunk mutatni:

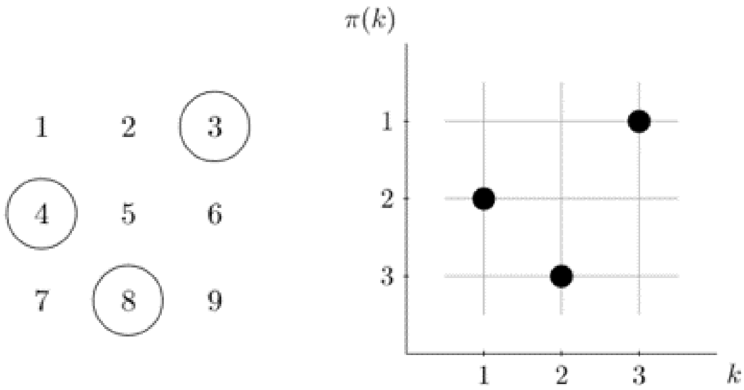
Helyezzük el a számokat egy k-szor k méretű négyzetben úgy, hogy a sorokat egymás után olvasva kapjuk az identitást. Most olvassuk össze az oszlopokat egymás után, ez lesz a nekünk megfelelő P permutáció.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & k \\ k+1 & k+2 & \cdots & 2k \\ & & \cdots & \\ k^2-k+1 & & \cdots & k^2 \end{array}$$

P permutációban minden k-hosszú minta megtalálható, mert ha ez a minta az $a_1 a_2 \dots a_k$, akkor az 1. oszlop (a_1)-edik sor, a második oszlop, (a_2)-edik oszlop, ... k-adik oszlop (a_k)-adik sorban található elemek relatív nagysága pont megegyező lesz a soraik sorszámának relatív nagyságával, illetve az oszlopok egymás utánisága miatt ez P egy részsorozata lesz.

□

Példa: A fenti bizonyítás szemléltetése $k = 3$-ra, a 231 mintára:



6.2. ábra. Példa k^2 hosszú szupermintára

A legrövidebb k-szuperminta hosszára van jobb felső becslés is, mint a k^2. 2009-ben *Alison Miller* bizonyította hogy létezik $\frac{k(k+1)}{2}$, azaz közel feleolyan hosszú permutáció is, ami minden mintát tartalmaz [18]. Ezt az eredményt azóta *Michael Engen* és *Vincent Vatter* javította, ők $\lceil\frac{k^2+1}{2}\rceil$-re adtak konstrukciót, Milleréből kiindulva [19].

Tétel[18]: *A legrövidebb k-szuperminta hossza legfeljebb* $\frac{k(k+1)}{2}$

Bizonyítás. Ismét egy konstrukciót fogunk mutatni, két lépésben. Először egy olyan $\{1, 2, \ldots, k, k+1\}$ feletti számsorozatról mutatjuk meg, hogy minden mintát tartalmaz, amiben többször is előfordulhatnak egyes számok (ezeket hívjuk $\{1, 2, \ldots, k+1\}$ feletti szavaknak), majd ebből konstruálunk egy permutációt, úgy, hogy a mintatartalmazás ne romoljon el.

Vegyük azt a w szót, ami összesen $\lceil\frac{k}{2}\rceil$ alkalommal tartalmazza az $1, 3, 5, \ldots, (2\lfloor\frac{k}{2}\rfloor + 1)$ részsorozatot (ezeket most nevezzük „felfutásoknak”, mivel növekvő sorrendben vannak), illetve $\lfloor\frac{k}{2}\rfloor$ alkalommal tartalmazza a $2\lceil\frac{k}{2}\rceil, (2\lceil\frac{k}{2}\rceil - 2), \ldots, 4, 2$ részsorozatot (ezeket pedig nevezzük „lefutásoknak”, a csökkenő sorrend miatt), ezeket felváltva. Ennek a szónak összesen $\lceil\frac{k}{2}\rceil(\lfloor\frac{k}{2}\rfloor + 1) + \lfloor\frac{k}{2}\rfloor\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor = \frac{k(k+1)}{2}$ eleme van. A felfutást és lefutást együttesen „futásnak” nevezzük most, ebbők $\lceil\frac{k}{2}\rceil + \lfloor\frac{k}{2}\rfloor = k$ darab van.

Például: $k = 4$-re így néz ki az ilyen módszerrel készült szó: $1, 3, 5, 4, 2, 1, 3, 5, 4, 2$.

Most meg fogjuk mutatni, hogy w-ben minden π minta megtalálható, mégpedig úgy, hogy π vagy $(\pi+1)$ (az a sorozat, amit úgy kapunk, hogy π minden eleméhez 1-et hozzáadunk) részsorozata w-nek.

Vegyük először azt a W szót, amit ugyanúgy készítünk, mint w-t, csak nem állunk meg ennyi futásnál, hanem csinálunk $2n$ futást, így biztos minden minta megtalálható benne. Legyen $\pi = a_1a_2 \ldots a_k$ minta. Keressük meg π-t és $(\pi + 1)$-et mohón W-ben:

Válasszuk ki a_1-et az első előfordulásánál, majd a_{i+1}-et az első olyan előfordulásánál, ami a kiválasztott a_i után van $(1 < i < n)$. Ugyanezt ismételjük el az (a_i+1)-ekkel is $(1 \leq i \leq n)$. Nézzük meg, minden kiválasztott elemre, hogy hanyadik futásban van: a π minta i. elemére ezt jelöljük $m_i(\pi)$-vel, $(\pi+1)$-re pedig $m_i(\pi+1)$-gyel.

Célunk, hogy megmutassuk, $m_k(\pi) \leq k$ vagy $m_k(\pi+1) \leq k$, mert ilyenkor π vagy $(\pi+1)$ nem csak W-ben van benne részsorozatként, hanem w-ben is.

Bevezetünk még néhány jelölést:

$F_0(\pi)$ az olyan $1 \leq i \leq n$ indexek halmaza, ahol $a_i < a_{i+1}$ és mindkettő páros (páros növekedő pár)

$F_1(\pi)$ az olyan $1 \leq i \leq n$ indexek halmaza, ahol $a_i < a_{i+1}$ és mindkettő páratlan (páratlan növekedő pár)

$L_0(\pi)$ az olyan $1 \leq i \leq n$ indexek halmaza, ahol $a_i > a_{i+1}$ és mindkettő páros (páros csökkenő pár)

$L_1(\pi)$ az olyan $1 \leq i \leq n$ indexek halmaza, ahol $a_i > a_{i+1}$ és mindkettő páratlan (páratlan csökkenő pár)

Könnyen észrevehető, hogy $|F_0(\pi)| = |F_1(\pi+1)|$, $|F_1(\pi)| = |F_0(\pi+1)|$, $|L_0(\pi)| = |L_1(\pi+1)|$ és $|L_1(\pi)| = |L_0(\pi+1)|$ (hiszen ezeknek a halmazoknak ugyanazok az elemeik).

Most nézzük meg, mi lehet $m_i(\pi)$ értéke:

$$m_1(\pi) = \begin{cases} 1 & \text{ha } a_1 \text{ páratlan} \\ 2 & \text{ha } a_2 \text{ páros} \end{cases}$$

$$m_{i+1}(\pi) = \begin{cases} m_i(\pi)+1 & \text{ha } a_i \text{ és } a_{i+1} \text{ paritása különböző} \\ m_i(\pi) & \text{ha } i \in F_1(\pi) \text{ vagy } i \in L_0(\pi) \\ m_i(\pi)+2 & \text{ha } i \in F_0(\pi) \text{ vagy } i \in L_1(\pi) \end{cases}$$

Ez alapján fejezzük ki $m_k(\pi)$-t és $m_k(\pi+1)$-et:

$$m_k(\pi) = m_1(\pi) + (k-1) + |F_0(\pi)| + |L_1(\pi)| - |F_1(\pi)| - |L_0(\pi)|$$

$$m_k(\pi+1) = m_1(\pi+1) + (k-1) + |F_0(\pi+1)| + |L_1(\pi+1)| - |F_1(\pi+1)| - |L_0(\pi+1)|$$

Összeadva a kettőt, felhasználva az F és L halmazok elemszámára vonatkozó összefüggéseket, illetve, hogy $m_1(\pi)$ és $m_1(\pi+1)$ közül az egyik 1, a másik pedig 2:

$$\mathrm{m}_k(\pi) + m_k(\pi+1) = 3 + 2k - 2 + |F_0(\pi)| + |L_1(\pi)| - |F_1(\pi)| -$$
$$- |L_0(\pi)| + |F_1(\pi)| + |L_0(\pi)| - |F_0(\pi)| - |L_1(\pi)| = 2k+1$$

Innen pedig skatulya-elvvel következik, hogy $m_k(\pi) \leq k$ vagy $m_k(\pi+1) \leq k$, tehát π vagy $(\pi+1)$ szerepel w-ben részsorozatként, azaz w egy szuperminta lenne, ha permutáció lenne...

... és w-ből nagyon egyszerűen tudunk permutációt csinálni: számoljuk meg, hány darab 1-es, 2-es, ... $(k+1)$-es van w-ben (ezek a számok legyenek $b_1, b_2, ...b_{k+1}$, majd írjuk be az 1-esek helyére az első b_1 számot (mindegyiket pontosan egyszer), a 2-esek helyére a következő b_2 számot, és így tovább. Ha w-ben valahol szerepelt egy π minta, akkor az így kapott permutációban, ugyanazokon a helyeken a relatív nagyság nem változott, tehát az előállított permutáció egy k-szuperminta. $\square$

7. fejezet

Permutációminták egy gimnáziumi versenyfeladatban

Ebben a fejezetben egy mintaelkerüléssel kapcsolatos számítási problémát fogok olyan köntösbe bújtatni, hogy az egy gimnáziumi matematikaversenyen feladható probléma legyen. Mind a feladat megfogalmazása, mind a részletes megoldás kezelhető már alapszintű kombinatorika tudással, ám a probléma hossza és az esetszétválasztás nehézsége miatt csak $11-12$. évfolyamon ajánlanám. A megoldás részletezésénél direkt olyan nyelvezetet használtam, ami egy gimnazistától is várható lenne, nem a permutációminták témakörének szókincsével írtam a kifejtést.

Alapkérdés: *Hány olyan* 6*-hosszú permutáció van, ami elkerüli az* 1234*-permutációt?*

Válasz: Az n-hosszú, 1234-mintát elkerülő permutációk számára az explicit képlet [20]:

$$\frac{1}{(n+1)^2(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{n+1}{k+1}\binom{n+2}{k+1}$$

Tehát $n=6$-ra a megodás: 513.

Mivel az 1234-permutációk azok, melyekben a leghosszabb növekvő részsorozat 3-hosszú, ezt a megfogalmazást használva lehet könnyen életszerű szöveget alkotni:

Átfogalmazás: *6 diák áll egymás mögött tesiórán, sorversenyre készülve, nincs közöttük két egyforma magas. A tesitanár 2 diákot szeretne közülük leültetni, hogy az első forduló hamarabb véget érjen. Akáhogy is teszi ezt meg, a sorban maradt 4 diák nem állhat növekvő tornasorban. Hányféleképpen állhatott egymás mögé a 6 diák?*

Megoldás: Feladatunk megszámolni, hogy hányféleképpen lehet az $1, 2, 3, 4, 5$ és 6 számokat úgy sorba rakni, hogy ne legyen benne olyan 4-elemű részsorozat, mely növekvő sorrendben van.

Esetszétválasztást alkalmazunk az alapján, hogy a 6-os hol helyezkedik el.

Jelöljük most $A(n, k)$-val azt, hogy hány olyan sorbarendezése van az $1, 2, ...n$ számoknak, melyben nincs k-elemű részsorozat, mely növekvő sorrendben van. Keressük $A(6, 4)$-et.

- Ha a 6 az első három hely valamelyikén van, akkor biztos, hogy nincs olyan 4-elemű részsorozat, ami növekedik és a 6 is benne van (hiszen utolsónak kéne lennie benne), így ezekben az esetekben csak arra kell figyelni, hogy a többi 5 szám által alkotott részsorozatban se legyen 4-hosszú növekedő részsorozat. Tehát ebben az esetben $3 \cdot A(5, 4)$ jó permutáció van.

- Ha a 6 a negyedik helyen van, akkor egyszerűbb azokat a permutációkat megszámolni, melyeknél van 4-hosszú növekedő részsorozat, majd ezt kivonni az összes, $5! = 120$ db permutációból. Az nem jó, ha a 6 előtti három elem növekvő sorrendben van, ilyen permutációból van $5 \cdot 4 = 20$. Ezen kívül 8 olyan permutáció van, ahol a többi 5 elem alkot 4-hosszú növekedést és az első három helyen nincs növekedés: $132645, 231645, 213645, 312645, 412635, 142635, 512634, 152634$. Így tehát $120 - 20 - 8 = 92$ jó permutáció van.

- Ha a 6 az ötödik helyen van, akkor mindegy, mi jön utána, ha az az elem benne lenne a 4-hosszú növekedő részsorozatban, akkor akár a 6-ot is választhatjuk helyette (hiszen a 6 csak utolsó lehet). Az első négy elem között pedig nem lehet 3-hosszú növekedő részsorozat. Tehát ebben az esetben $4 \cdot A(4,3)$ jó permutáció van.

- ha a 6 az utolsó helyen van, akkor ezt mindig érdemes kiválasztani, ha 4-hosszú növekedő részsorozatot keresünk, így az a fontos, hogy az első öt helyen ne legyen 3-hosszú növekedés se. Tehát ebben az esetben $A(5,3)$ jó permutáció van.

Most számoljuk ki azokat az $A(n,k)$ értékeket, amikre szükség van még:

$A(4,3)$ kiszámítása esetszétválasztással a 4-es helye szerint:

- Ha a 4-es az első két hely egyikén van, akkor nem lehet 3-hosszú, növekedő részsorozat eleme, tehát ilyenkor csak az a fontos, hogy az $1,2,3$ elemek ne ebben a sorrendben legyenek; ez így 10 jó permutáció.
- Ha a 4-es a harmadik helyre kerül, akkor mindegy, mi kerül az utolsó helyre, ha az benne lenne egy 3-hosszú növekvő részsorozatban, helyette választhatnánk a 4-et is. Tehát csak annyi a fontos, hogy a másik két elem csökkenő legyen; ez 3 jó permutáció.
- Ha a 4-es az utolsó helyre kerül, akkor előtte nem lehet 2-hosszú növekedő részsorozat sem, így az $1,2,3$ elemek csak 321 sorrendben lehetnek.

Tehát $A(4,3) = 14$.

$A(5,3)$ kiszámítása esetszétválasztással az 5-ös helye szerint:

- Ha az 5-ös az első két hely egyikén van, akkor nem lehet 3-hosszú, növekedő részsorozat eleme, tehát ilyenkor csak az a fontos, hogy a többi elem részsorozatában ne legyen 3-hosszú növekedő részsorozat; ez így $2(4,3) = 28$ jó permutáció.
- Ha az 5-ös a harmadik helyre kerül, akkor az első két helyen lévő elem csak csökkenhet, illetve a többi elem között sem lehet 3-hosszú növekedés. A megfelelő permutációk: 21543, 31542, 41532, 32514, 32541, 42513, 42531, 43512, 43521. Ez összesen 9 jó permutció.

- Ha az 5-ös a negyedik helyre kerül, akkor mindegy, mi kerül az utolsó helyre, ha az benne lenne egy 3-hosszú növekvő részsorozatban, helyette választhatnánk az 5-öt is. Tehát csak annyi a fontos, hogy az első három elem csökkenő legyen; ez 4 jó permutáció.
- Ha az 5-ös az utolsó helyre kerül, akkor előtte nem lehet 2-hosszú növekedő részsorozat sem, így az $1, 2, 3, 4$ elemek csak 4321 sorrendben lehetnek.

Tehát $A(5, 3) = 28 + 9 + 4 + 1 = 42$.

$A(5, 4)$ kiszámítása esetszétválasztással az 5-ös helye szerint:

- Ha az 5-ös az első három hely egyikén van, akkor nem lehet 4-hosszú, növekedő részsorozat eleme, tehát ilyenkor csak az a fontos, hogy a többi elem részsorozatában ne legyen 4-hosszú növekedő részsorozat (azaz csak 1234 sorrendben nem lehetnek); ez így $3 \cdot (4! - 1) = 69$ jó permutáció.
- Ha az 5-ös a negyedik helyre kerül, akkor mindegy, mi kerül az utolsó helyre, ha az benne lenne egy 4-hosszú növekvő részsorozatban, helyette választhatnánk az 5-öt is. Tehát csak annyi a fontos, hogy az első három elem ne növekvő legyen; ez $4 \times (3! - 1) = 20$ jó permutáció.
- Ha az 5-ös az utolsó helyre kerül, akkor előtte nem lehet 3-hosszú növekedő részsorozat. Ez tehát $A(4, 3) = 14$ jó permutáció

Tehát $A(5, 4) = 69 + 20 + 14 = 103$.

Így most mindent összeszámolva a végeredmény: $A(6, 4) = 3 \cdot 103 + 92 + 70 + 42 = 513$.

A permutációminták témaköre sok mélységet és komoly matematikai apparátust igénylő probémákat is rejt magában, ennek ellenére – mint a fenti példa is mutatja – bizonyos kérdései nagyon egyszerűen megfogalmazhatóak és közérthetőek. Könnyen elképzelhetőnek tartom, hogy már én is futottam össze olyan feladattal matekversenyen, ami a pemutációminták segítségével is megfogalmazható lenne.

8. fejezet

Összefoglalás

A dolgozatban igyekeztem különböző oldalait megmutatni a permutációminták témakörének. Az alapvető fogalmak bemutatása után néhány érdekes kérdésre, fontos tételre, alkalmazásra tértem ki.

A Wilf-ekvivalenciák fogalma a minták hasonló viselkedésének megállapítására szolgált, ami alapján a későbbi kérdésekben kevesebb eset vizsgálata is elég volt. Hasonlóan, általános tulajdonságok meghatározásáról szólt a Stanley–Wilf-sejtés, ez a minták határtulajdonságának egyik legfontosabb tétele volt. A mintaelkerülés egyik érdekes következménye a speciális algoitmusokkal való rendezhetőség. Ebből három példát mutattam be, melyből két eset nagyon hasonló volt, egy pedig korábbi tételekkel állt kapcsolatban. A szuperminták témaköre a mintákat más kontextusban vizsgálja, az erről szóló fejezetben két érdekes kérdésre tértem ki. Egyik nehézségét egy mintán mutattam be, másikra ismert becsléseket közöltem. Végül egy permutációminták ihlette gimnáziumi versenyfeladat-jellegű problémát vizsgáltam meg, hogy megmutassam, a témakör alapgondolata nem is olyan bonyolult.

A permutációminták kérdéskörében még sok érdekes terület van – például a Wilf-ekvivalenciák útján indulva csoportelméleti kérdéseket kapunk, a mintailleszkedés pedig a bonyolultságelmélet szemüvegén keresztül is izgalmas vizsgálatra. Ahogy messzebb kerülünk az alaperedményektől, egyre izgalmasabb kérdéseket kapunk, melyek között sok még a mai napig is nyitott...

Irodalomjegyzék

[1] David Bevan. *Permutation patterns: basic definitions and notation.* 2015. arXiv: 1506.06673 [math.CO].

[2] A. Seidenberg. “A Simple Proof of a Theorem of Erdös and Szekeres*”. *Journal of the London Mathematical Society* s1-34.3 (1959. júl.), 352–352. old. ISSN: 0024-6107. DOI: 10.1112/jlms/s1-34.3.352. eprint: https://academic.oup.com/jlms/article-pdf/s1-34/3/352/9683265/s1-34-3-352.pdf. URL: https://doi.org/10.1112/jlms/s1-34.3.352.

[3] P.A. MacMahon. *Combinatory Analysis.* Dover Books on Mathematics Series. Dover Publications, 2004. ISBN: 9780486495866. URL: https://books.google.hu/books?id=2YpMbdbr4-MC.

[4] Anders Claesson és Sergey Kitaev. *Classification of bijections between 321- and 132-avoiding permutations.* 2008. arXiv: 0805.1325 [math.CO].

[5] William Gasarch. “Review of: A Walk Through Combinatorics by Miklós Bóna”. *SIGACT News* 46.1 (2015. márc.), 13–14. ISSN: 0163-5700. DOI: 10.1145/2744447.2744451. URL: https://doi.org/10.1145/2744447.2744451.

[6] Zvezdelina Stankova-Frenkel és Julian West. *A New Class of Wilf-Equivalent Permutations.* 2001. arXiv: math/0103152 [math.CO].

[7] Jörgen Backelin, Julian West és Guoce Xin. “Wilf-equivalence for singleton classes”. *Advances in Applied Mathematics* 38.2 (2007), 133 –148. old. ISSN: 0196-8858. DOI: https://doi.org/10.1016/j.aam.2004.11.006. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0196885806000789.

[8] Richard Arratia. “On the Stanley-Wilf Conjecture for the Number of Permutations Avoiding a Given Pattern”. *Electron J Combin* 6 (2000. aug.). DOI: 10.37236/1477.

[9] Zoltán Füredi és Péter Hajnal. “Davenport-Schinzel theory of matrices”. *Discrete Mathematics* 103.3 (1992), 233 –251. old. ISSN: 0012-365X. DOI: https://doi.org/10.1016/0012-365X(92)90316-8. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0012365X92903168.

[10] Adam Marcus és Gábor Tardos. “Excluded permutation matrices and the Stanley–Wilf conjecture”. *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 107.1 (2004), 153 –160. old. ISSN: 0097-3165. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jcta.2004.04.002. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0097316504000512.

[11] M.H. Albert és tsai. “On the Stanley–Wilf limit of 4231-avoiding permutations and a conjecture of Arratia”. *Advances in Applied Mathematics* 36.2 (2006). Special Issue on Pattern Avoiding Permutations, 96 – 105. old. ISSN: 0196-8858. DOI: https://doi.org/10.1016/j.aam.2005.05.007. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0196885805000953.

[12] Jacob Fox. *Stanley-Wilf limits are typically exponential.* 2013. arXiv: 1310.8378 [math.CO].

[13] Donald E. Knuth. *The Art of Computer Programming, Volume 1 (3rd Ed.): Fundamental Algorithms.* USA: Addison Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1997. ISBN: 0201896834.

[14] Vaughan R. Pratt. “Computing Permutations with Double-Ended Queues, Parallel Stacks and Parallel Queues”. *Proceedings of the Fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing.* STOC ’73. Austin, Texas, USA: Association for Computing Machinery, 1973, 268–277. ISBN: 9781450374309. DOI: 10.1145/800125.804058. URL: https://doi.org/10.1145/800125.804058.

[15] Pierre Rosenstiehl és Robert E Tarjan. “Gauss codes, planar hamiltonian graphs, and stack-sortable permutations”. *Journal of Algorithms* 5.3 (1984), 375 –390. old. ISSN: 0196-6774. DOI: https://doi.org/10.

1016/0196-6774(84)90018-X. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/019667748490018X.

[16] Daniel Denton. *Methods of computing deque sortable permutations given complete and incomplete information.* 2012. arXiv: 1208.1532 [math.CO].

[17] Rodica Simion és Frank W. Schmidt. "Restricted Permutations". *European Journal of Combinatorics* 6.4 (1985), 383–406. old. ISSN: 0195-6698. DOI: https://doi.org/10.1016/S0195-6698(85)80052-4. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0195669885800524.

[18] Alison Miller. "Asymptotic bounds for permutations containing many different patterns". *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 116.1 (2009), 92–108. old. ISSN: 0097-3165. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jcta.2008.04.007. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0097316508000800.

[19] Michael Engen és Vincent Vatter. *Containing all permutations.* 2018. arXiv: 1810.08252 [math.CO].

[20] Richard P. Stanley és Sergey Fomin. *Enumerative Combinatorics.* 2. köt. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1999. DOI: 10.1017/CBO9780511609589.