Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Patzer Erika

Magasabb rendű deriváltak

BSc szakdolgozat

Alkalmazott matematika szakirány

Témavezető:

Dr. Kovács Sándor
Numerikus Analízis Tanszék

Budapest, 2020.

Köszönetnyilvánítás

Legelőször is szeretnék köszönetet mondani Dr. Kovács Sándor tanár úrnak, aki türelemmel kísérte végig a szakdolgozatom megírását. Köszönetet mondok továbbá tanáraimnak, akik az egyetemen eltöltött éveim alatt oktattak, és segítették a munkámat, illetve szüleimnek, akik tartották bennem a lelket, és bátorítottak a vizsgaidőszakokban, és akiknek a támogatására mindig számíthattam a nehezebb tárgyak abszolválása során.

Budapest, 2020. ősz

Patzer Erika

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Egyetemi tanulmányaink során alapvető jelentősége van az összetett függvényre vonatkozó deriválási szabálynak. Nevezetesen, ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválható függvények, akkor igaz az

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

egyenlőség. Szélsőértékszámítási feladatokban gyakran szükségünk van a kompozíciófüggvény második deriváltjára is. A fenti feltétel mellett kétszer deriválható f és g esetén ugyanis

$$\left.\begin{aligned}(f \circ g)'' &= ((f' \circ g) \cdot g')' = (f' \circ g)' \cdot g' + (f' \circ g) \cdot g'' = \\ &= (f'' \circ g)(g')^2 + (f' \circ g) \cdot g'',\end{aligned}\right\} \tag{0.0.1}$$

ahol már a szorzatfüggvény deriváltjára vonatkozó Leibniz-szabályt is felhasználtuk. A 19. századtól kezdődően ismertek a kompozíciófüggvény deriváltjának kiszámítására különféle formulák. Az [13] dolgozatban olvashatunk ennek a formulának a történetéről, és különféle (természetesen egymással egyenértékű) alakjairól.

Dolgozatunk első fejezetében bemutatjuk a Leibnoz-formula egy általánosítását, majd annak hasznos speciális eseteit.

A második fejezetben a Faà-di-Bruno-formulát tárgyaljuk, amelynek segítségével kompozíciófüggvény magasabbrendű deriváltjait számíthatjuk ki. Továbbá megmutatjuk, hogyan általánosítható a formula többváltozós külső, illetve vektorértékű belső függvények kompozíciójának magasabbrendű deriváltjaira.

A következő fejezetben az inverz függvények magasabbrendű deriváltjainak kiszámítására adunk rekurzív formulát.

Végezetül az utolsó fejezetben a bemutatott képletek néhány alkalmazására térünk ki, példákon mutatjuk meg, hogyan is lehet felhasználni az ismertetett formulákat.

1. fejezet

A szorzatfüggvény

Ismeretes, hogy ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum $f, g : I \to \mathbb{R}$ deriválható függvények, akkor az $f \cdot g$ szorzatfüggvény is deriválható és deriváltjára

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

teljesül. Ha $f, g \in \mathfrak{D}^d$, ahol $d := 2$, ill. $d := 3$, akkor

$$(f \cdot g)'' = ((f \cdot g)')' = (f' \cdot g + f \cdot g')' = f'' \cdot g + f' \cdot g' + f' \cdot g' + f \cdot g'' = f'' \cdot g + 2 \cdot f' \cdot g' + f \cdot g'',$$

ill.

$$\begin{aligned}(f \cdot g)''' &= ((f \cdot g)'')' = (f'' \cdot g + 2 \cdot f' \cdot g' + f \cdot g'')' = \\ &= f''' \cdot g + f'' \cdot g' + 2 \cdot f'' \cdot g' + 2 \cdot f' \cdot g'' + f' \cdot g'' + f \cdot g''' = \\ &= f''' \cdot g + 3 \cdot f'' \cdot g' + 3 \cdot f' \cdot g'' + f \cdot g'''\end{aligned}$$

Indukcióval megmutatható (vö. [21]), hogy ha $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és valamely $n \in \mathbb{N}$, ill. $a \in \mathbb{R}$ esetén $f, g \in \mathfrak{D}^n[a]$, akkor $f \cdot g \in \mathfrak{D}^n[a]$ és igaz az

$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(k)}(a) \cdot g^{(n-k)}(a)$$

ún. **Leibniz-formula**. A fenti formula általánosításához vezessük be a multinomiális együttható fogalmát. Adott $r \in \mathbb{N}$ esetén értelmezzük a $\mathbf{k} := (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{N}_0^r$ multiindex abszolút értékét a

$$|\mathbf{k}| := k_1 + \ldots + k_r$$

formulával.

1.0.1. definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}_0$, $r \in \mathbb{N}$, $\mathbf{k} := (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{N}_0^r$. Ekkor a

$$\binom{n}{\mathbf{k}} := \binom{n}{k_1, \ldots, k_r} := \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_r! \cdot (n - |\mathbf{k}|)!}$$

számot **multinomiális együtthatónak** nevezzük.

1.0.1. tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}_0$ és $r \in \mathbb{N}$, majd tegyük fel, hogy a $h, f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvények analitikusak valamely $a \in \mathbb{C}$ pont egy környezetében és $h(a) \neq 0$. Ekkor

$$\sum_{|\mathbf{k}|=n} \binom{n}{\mathbf{k}} \prod_{i=1}^{r} (h^{k_i} f_i)^{(k_i)}(a) = \left(\frac{d^n}{dz^n} \frac{h^{n+r-1}(z) \prod_{i=1}^{r} f_i(z)}{(h(z) - h'(z)(z-a))^{r-1}} \right)_{z=a} \tag{1.0.1}$$

(**általánosított Leibniz-formula**).

Biz.

1. lépés. Ha $r = 1$, akkor $|\mathbf{k}| = k_1 =: k$ és az $f_1 =: f$ jelöléssel a bizonyítandó egyenlőség triviális, hiszen

- annak bal oldala:
$$\sum_{k=n} \binom{n}{k} (h^k \cdot f)^{(k)}(a) = (h^n \cdot f)^{(n)}(a)$$

- jobb oldala:
$$\left(\frac{d^n}{dz^n} \frac{h^n(z) f(z)}{(h(z) - h'(z)(z-a))^0} \right)_{z=a} = \left(\frac{d^n}{dz^n} h^n(z) f(z) \right)_{z=a}.$$

2. lépés. Ha $r = 2$, akkor $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$, így a $|\mathbf{k}| = n$ egyenlőségben, ha $k := k_1$, akkor $k_2 = n - k$ és

$$\binom{n}{\mathbf{k}} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot (n - k_1 - k_2)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)! \cdot 0!} = \binom{n}{k},$$

ezért az $f := f_1$, ill. $g := f_2$ jelölésekkel a bizonyítandó egyenlőség bal oldala a következő alakot ölti:

$$\sum_{|\mathbf{k}|=n} \binom{n}{\mathbf{k}} \prod_{i=1}^{r} (h^{k_i} f_i)^{(k_i)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (h^k f)^{(k)}(a) (h^{n-k} g)^{(n-k)}(a).$$

Alkalmazva a Cauchy-féle integrálformulát azt kapjuk, hogy a $0 < r < s$ számok, ill. $\mathbb{C}$-beli $K_r(a)$, $K_s(a)$ köznyezetek esetén

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (h^k f)^{(k)}(a) (h^{n-k} g)^{(n-k)}(a) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k!}{2\pi\imath} \int_{\partial K_r(a)} \frac{h^k(w) f(w)}{(w-a)^{k+1}} dw \frac{(n-k)!}{2\pi\imath} \int_{\partial K_s(a)} \frac{h^{n-k}(z) g(z)}{(z-a)^{n-k+1}} dz =$$

$$= n! \left(\frac{1}{2\pi\imath} \right)^2 \int_{\partial K_r(a)} \int_{\partial K_s(a)} \frac{f(w) g(z)}{(w-a)(z-a)} \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k(w) h^{n-k}(z)}{(w-a)^k (z-a)^{n-k}} dz dw.$$

Ha $0 \neq \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, akkor az elemi

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta^{n-k} = \beta^n \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^k = \beta^n \cdot \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{n+1} - 1}{\frac{\alpha}{\beta} - 1} = \beta^{n+1} \cdot \frac{\frac{\alpha^{n+1}}{\beta^{n+1}} - 1}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$$

összegzésből kiindulva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(w-a)(z-a)}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{h^k(w)h^{n-k}(z)}{(w-a)^k(z-a)^{n-k}}=\frac{\left(\frac{h(z)}{z-a}\right)^{n+1}-\left(\frac{h(w)}{w-a}\right)^{n+1}}{(w-a)h(z)-(z-a)h(w)}.$$

Mivel bármely $z, w \in \mathbb{C}$, $w \neq z$ esetén

$$\begin{aligned}
&(w-a)h(z)-(z-a)h(w)=\\
=\;& wh(z)-ah(z)-zh(w)+ah(w)=\\
=\;& a(h(w)-h(z))+(w-z)h(w)+w(h(z)-h(w))=\\
=\;& a\cdot\frac{h(w)-h(z)}{w-z}\cdot(w-z)+(w-z)h(w)-w\cdot\frac{h(w)-h(z)}{w-z}\cdot(w-z)=\\
=\;& \left[h(w)-\frac{h(w)-h(z)}{w-z}\cdot(w-a)\right](w-z)=:\left[h(w)-H(w,z)(w-a)\right](w-z),
\end{aligned}$$

ahol

$$H(w,w):=\lim_{z\to w}\frac{h(w)-h(z)}{w-z}=h'(w).$$

Mivel $h(a)\neq 0$, ezért $r>0$ megválasztható úgy, hogy alkalmas $K_s(a)\subset K\subset\mathbb{C}$ nyílt halmaz esetén

$$h(w)-H(w,z)\cdot(w-a)\neq 0 \qquad (w,z\in K).$$

Következésképpen a bizonyítandó egyenlőség bal oldala nem más, mint az

$$\frac{n!}{(2\pi\imath)^2}(I_1+I_2)$$

összeg, ahol

$$I_1:=\int_{\partial K_r(a)}\int_{\partial K_s(a)}\frac{f(w)g(z)}{\left[h(w)-H(w,z)(w-a)\right](w-z)}\left(\frac{h(z)}{z-a}\right)^{n+1}dzdw,$$

ill.

$$I_2:=\int_{\partial K_r(a)}\int_{\partial K_s(a)}\frac{-f(w)g(z)}{\left[h(w)-H(w,z)(w-a)\right](w-z)}\left(\frac{h(w)}{w-a}\right)^{n+1}dzdw$$

Az integrálás sorrendjének felcserélésével azt kapjuk, hogy

$$I_1=\int_{\partial K_s(a)}g(z)\left(\frac{h(z)}{z-a}\right)^{n+1}\left(\int_{\partial K_r(a)}\frac{-f(w)}{\left[h(w)-H(w,z)(w-a)\right](w-z)}dw\right)dz=0,$$

hiszen a Cauchy-Goursat-tétel következtében

$$\int_{\partial K_r(a)}\frac{-f(w)}{\left[h(w)-H(w,z)(w-a)\right](w-z)}dw=0.$$

A második integrált a Cauchy-formula kétszeri alkalmazásával és a $h'(w) = H(w, w)$ egyenlőség figyelembe vételével azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} I_2 &= = \int_{\partial K_r(a)} f(w) \left(\frac{h(w)}{w-a}\right)^{n+1} \left(\int_{\partial K_s(a)} \frac{g(z)}{[h(w) - H(w,z)(w-a)]\,(w-z)} dz\right) dw = \\ &= 2\pi\iota \int_{\partial K_r(a)} f(w) \left(\frac{h(w)}{w-a}\right)^{n+1} \frac{g(w)}{[h(w) - H(w,z)(w-a)]\,(w-z)} dw = \\ &= \frac{(2\pi\iota)^2}{n!} \left(\frac{d^n}{dw^n} \frac{h^{n+1}(w) f(w) g(w)}{h(w) - h'(w)(w-a)}\right)_{w=a}, \end{aligned}$$

így

$$\frac{n!}{(2\pi\iota)^2}(I_1 + I_2) = \frac{n!}{(2\pi\iota)^2} \cdot \frac{(2\pi\iota)^2}{n!} \cdot \left(\frac{d^n}{dw^n} \frac{h^{n+1}(w) f(w) g(w)}{h(w) - h'(w)(w-a)}\right)_{w=a},$$

nem más, mint az igazolandó fomula jobb oldala.

3. lépés. Az $r > 2$ esetben indukcióval kapjuk az állítást (vö. [2]). ■

Megjegyezzük, hogy

1. az (1.0.1) formula a deriváltak tekintetében algebrai természetű, ezért a $h, f_1, \ldots, f_r$ függvényre tett feltétel kicserélhető az $a \in \mathbb{R}$ valamely környezetében n-szer folytonosan differenciálható feltételre.
2. ha valamely $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{N}_0^r$, $|\boldsymbol{\alpha}| \leq n$ multiindex esetén

$$f_i = h^{\alpha_i} \qquad (i \in \{1, \ldots, r\}),$$

akkor tetszőleges $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n - |\boldsymbol{\alpha}|$ index esetén (1.0.1) formula

$$\sum_{|\mathbf{k}|=m} \binom{m}{\mathbf{k}} \prod_{i=1}^{r} (h^{k_i+\alpha_i})^{(k_i)}(a) = \left(\frac{d^m}{dx^m} \frac{h^{m+|\boldsymbol{\alpha}|+r-1}(x)}{(h(x) - h'(x)(x-a))^{r-1}}\right)_{x=a} \tag{1.0.2}$$

alakú, aminek az igaz voltát komplex függvénytani eszközök felhasználása nélkül is beláthatjuk. Az (1.0.1) formula bal oldala ui.

$$\begin{aligned} &\sum_{|\mathbf{k}|=n} \binom{n}{\mathbf{k}} \prod_{i=1}^{r} (h^{k_i} f_i)^{(k_i)}(a) = \\ &= \sum_{|\mathbf{k}|=n} \binom{n}{\mathbf{k}} \prod_{i=1}^{r} \left(\sum_{\alpha_i=0}^{k_i} \binom{k_i}{\alpha_i} f_i^{\alpha_i}(a) (h^{k_i})^{(k_i-\alpha_i)}(a)\right) = \\ &= \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leq n} \left(\prod_{i=1}^{r} f_i^{(\alpha_i)}(a)\right) \sum_{\substack{|\mathbf{k}|=n \\ \mathbf{k}\geq\boldsymbol{\alpha}}} n! \prod_{i=1}^{r} \left[\frac{(h^{k_i})^{(k_i-\alpha_i)}(a)}{\alpha_i!\,(k_i-\alpha_i)!}\right] = \end{aligned}$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=l} \left(\prod_{i=1}^{r} \frac{f_i^{(\alpha_i)}(a)}{\alpha_i!} \right) \sum_{|\mathbf{k}|=n-|\boldsymbol{\alpha}|} n! \prod_{i=1}^{r} \left[\frac{(h^{k_i+\alpha_i})^{(k_i)}}{k_i!}(a) \right] =$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{(n-l)!} \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=l} \left(\prod_{i=1}^{r} \frac{f_i^{(\alpha_i)}(a)}{\alpha_i!} \right) \sum_{|\mathbf{k}|=n-l} \binom{n-l}{\mathbf{k}} \prod_{i=1}^{r} (h^{k_i+\alpha_i})^{(k_i)}(a),$$

ahol

$$\boldsymbol{\alpha} \le \mathbf{k} \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \alpha_i \le k_i \quad (i \in \{1, \ldots, r\});$$

a jobb oldala pedig a

$$Q(x) := \frac{h^{n+r-1}(x)}{(h(x) - h'(x)(x-a))^{r-1}} \qquad (x \in K(a))$$

függvény bevezetésével tetszőleges $x \in K(a)$ esetén

$$\left(\frac{d^n}{dx^n} \right) \frac{h^{n+r-1}(x) \prod_{i=1}^{r} f_i(x)}{(h(x) - h'(x)(x-a))^{r-1}} =$$

$$= \left(\frac{d^n}{dx^n} \right) \left[Q(x) \prod_{i=1}^{r} f_i(x) \right] = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \left(\prod_{i=1}^{r} f_i \right)^{(l)} Q^{(n-l)}(x) =$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=l} \binom{l}{\boldsymbol{\alpha}} \left(\prod_{i=1}^{r} f_i^{(\alpha_i)} \right) Q^{(n-l)}(x) =$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{(n-l)!} \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=l} \left(\prod_{i=1}^{r} \frac{f_i^{\alpha_i}}{\alpha_i!} \right) Q^{(n-l)}(x)$$

alakú. A két oldalt egyelővé téve pedig azt kapjuk, hogy

$$\sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{(n-l)!} \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=l} \left(\prod_{i=1}^{r} \frac{f_i^{(\alpha_i)}(a)}{\alpha_i!} \right) \sum_{|\mathbf{k}|=n-l} \binom{n-l}{\mathbf{k}} \prod_{i=1}^{r} (h^{k_i+\alpha_i})^{(k_i)}(a) =$$
$$= \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{(n-l)!} \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=l} \left(\prod_{i=1}^{r} \frac{f_i^{\alpha_i}(a)}{\alpha_i!} \right) Q^{(n-l)}(a),$$

ami azzal egyenértékű, hogy

$$\sum_{|\mathbf{k}|=n-|\boldsymbol{\alpha}|} \binom{n-|\boldsymbol{\alpha}|}{\mathbf{k}} \prod_{i=1}^{r} (h^{k_i+\alpha_i})^{(k_i)}(a) = Q^{(n-|\boldsymbol{\alpha}|)}(a).$$

Az $m := n - |\boldsymbol{\alpha}|$ helyettesítéssel a kívánt egyenlőséget kapjuk.

3. Ha h állandófüggvény, akkor az (1.0.1) formula

$$\left(\prod_{i=1}^{r} f_i \right)^{(n)} (a) = \sum_{|\mathbf{k}|=n} \binom{n}{\mathbf{k}} \prod_{i=1}^{r} f_i^{(k_i)}(a) \qquad (n =\in \mathbb{N}_0). \tag{1.0.3}$$

4. Ha h lineáris függvény, akkor

$$h(x) - h'(x)(x - a) = h(a) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

és így az (1.0.1) formula

$$h^{r-1} \sum_{|\mathbf{k}|=n} \binom{n}{\mathbf{k}} \prod_{i=1}^{r} (h^{k_i} f_i)^{(k_i)}(a) = \left(h^{n+r-1} \prod_{i=1}^{r} f_i \right)^{(n)} (a) \tag{1.0.4}$$

alakú. Speciálisan, ha

$$r = 2 \qquad \text{és} \qquad h(x) = x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$a \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{d^k}{dx^k} x^k f(x) \right)_{x=a} \cdot \left(\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} x^{n-k} g(x) \right)_{x=a} = \left(\frac{d^n}{dx^n} x^{n+1} f(x) g(x) \right)_{x=a}.$$

2. fejezet

A kompozíciófüggvény

2.1. A Faà-di-Bruno-formula egyváltozós függvényekre

Az alábbiakban legyen $n \in \mathbb{N}$, és $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alkalmas n-szer differenciálható függvények. Míg a szorzatfüggvény n-edik deriváltjára vonatkozó

$$(f \cdot g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \tag{2.1.1}$$

Leibniz-formula többször felbukkan a matematikai köztudatban, addig a kompozíciófüggvény n-edik deriváltjára vonatkozó

$$(f \circ g)^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n=k,\\ k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot \left(f^{(k)} \circ g\right) \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{g^{(i)}}{i!}\right)^{k_i} \tag{2.1.2}$$

Faà-di-Bruno-formula lényegesen kisebb ismertségnek örvend. Az (2.1.2) formulában a „második" összegzés olyan

$$k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$$

indexekre történik, amelyekre

$$k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n \qquad \text{és} \qquad k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k.$$

2.1.1. példa. Az

- Ha $n = 1$, akkor $k = 1$, így

$$(f \circ g)' = \frac{1!}{1!} \cdot (f' \circ g) \cdot \frac{g'}{1!} = (f' \circ g) \cdot g'.$$

- Ha $n = 2$, akkor $k = 1$ esetén $(k_1, k_2) = (0,1)$, míg $k = 2$ esetén $(k_1, k_2) = (2,0)$, így

$$(f \circ g)'' = \frac{2!}{0! \cdot 1!} \cdot (f' \circ g) \cdot \frac{g''}{2!} + \frac{2!}{2! \cdot 0!} \cdot (f'' \circ g) \cdot \left(\frac{g'}{1!}\right)^2 = (f' \circ g) \cdot g'' + (f'' \circ g) \cdot (g')^2.$$

2.1.2. példa. Az $n = 3$ esetben három olyan $(k_1, k_2, k_3) \in (\mathbb{N}_0)^3$ rendezett hármas van, amelyre

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 3 \qquad \text{és} \qquad k_1 + k_2 + k_3 = k \in \{1,2,3\}$$

teljesül:

$$(0,0,1), \qquad (1,1,0), \qquad (3,0,0).$$

Ennélfogva

$$(f \circ g)''' =$$

$$= \frac{3!}{0! \cdot 0! \cdot 1!} \cdot (f' \circ g) \cdot \frac{g'''}{3!} + \frac{3!}{1! \cdot 1! \cdot 0!} \cdot (f'' \circ g) \cdot \frac{g'}{1!} \cdot \frac{g''}{2!} + \frac{3!}{3! \cdot 0! \cdot 0!} \cdot (f''' \circ g) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{g'}{1!}\right)^3 = (f' \circ g) \cdot g''' + 3 \cdot (f'' \circ g) \cdot g' \cdot g'' + (f''' \circ g) \cdot (g')^3.$$

2.1.3. példa. Az $n = 4$ esetben öt olyan $(k_1, k_2, k_3, k_4) \in (\mathbb{N}_0)^4$ rendezett négyes van, amelyre

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 4 \qquad \text{és} \qquad k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = k \in \{1,2,3,4\}$$

teljesül:

- $k = 1$ esetén $(0,0,0,1)$;
- $k = 2$ esetén $(1,0,1,0)$, $(0,2,0,0)$;
- $k = 3$ esetén $(2,1,0,0)$;
- $k = 4$ esetén $(4,0,0,0)$.

Ennélfogva

$$(f \circ g)^{(4)} = \frac{4!}{0! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 1!} \cdot (f' \circ g) \cdot \frac{g^{(4)}}{4!} +$$

$$+ (f'' \circ g) \cdot \left\{ \frac{4!}{1! \cdot 0! \cdot 1! \cdot 0!} \cdot \frac{g'}{1!} \cdot \frac{g'''}{3!} + \frac{4!}{0! \cdot 2! \cdot 0! \cdot 0!} \cdot \left(\frac{g''}{2!}\right)^2 \right\} +$$

$$+ \frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 0! \cdot 0!} \cdot (f''' \circ g) \cdot \left(\frac{g'}{1!}\right)^2 \cdot \frac{g''}{2!} + \frac{4!}{4! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 0!} \cdot (f^{(4)} \circ g) \cdot \left(\frac{g'}{1!}\right)^4 =$$

$$= (f' \circ g) \cdot g^{(4)} + 4 \cdot (f'' \circ g) \cdot g' \cdot g''' + 3 \cdot (f'' \circ g) \cdot (g'')^2 + 6 \cdot (f''' \circ g) \cdot (g')^2 \cdot g'' +$$

$$(f^{(4)} \circ g) \cdot (g')^4.$$

2.1.4. példa. Az $n = 5$ esetben hét olyan $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) \in (\mathbb{N}_0)^5$ rendezett ötös van, amelyre

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 + 5k_5 = 5 \qquad \text{és} \qquad k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = k \in \{1,2,3,4,5\}$$

teljesül:

- $k = 1$ esetén $(0,0,0,0,1)$;
- $k = 2$ esetén $(1,0,0,1,0)$, $(0,1,1,0,0)$;
- $k = 3$ esetén $(2,0,1,0,0)$, $(1,2,0,0,0)$;
- $k = 4$ esetén $(3,1,0,0,0)$.
- $k = 5$ esetén $(5,0,0,0,0)$.

Ennélfogva

$$\begin{aligned}
(f\circ g)^{(5)} &= \frac{5!}{0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 1!}\cdot(f'\circ g)\cdot\frac{g^{(5)}}{5!}+\\
&+(f''\circ g)\cdot\left\{\frac{5!}{1!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 1!\cdot 0!}\cdot\frac{g'}{1!}\cdot\frac{g^{(4)}}{4!}+\frac{5!}{0!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot\frac{g''}{2!}\cdot\frac{g'''}{3!}\right\}+\\
&+(f'''\circ g)\cdot\left\{\frac{5!}{2!\cdot 0!\cdot 1!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot\left(\frac{g'}{1!}\right)^2\cdot\frac{g'''}{3!}+\right.\\
&\left.+\frac{5!}{1!\cdot 2!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot\frac{g'}{1!}\cdot\left(\frac{g''}{2!}\right)^2\right\}+\\
&+\frac{5!}{3!\cdot 1!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot(f^{(4)}\circ g)\cdot\left(\frac{g'}{1!}\right)^3\cdot\frac{g''}{2!}+\\
&+\frac{5!}{5!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot(f^{(5)}\circ g)\cdot\left(\frac{g'}{1!}\right)^5=\\
&= (f'\circ g)\cdot g^{(5)}+(f''\circ g)\cdot\{5\cdot g'\cdot g^{(4)}+10\cdot g''\cdot g'''\}+\\
&+(f'''\circ g)\cdot\{10\cdot(g')^2\cdot g'''+15\cdot g'\cdot(g'')^2\}+10\cdot(f^{(4)}\circ g)\cdot(g')^3\cdot g''+\\
&+(f^{(5)}\circ g)\cdot(g')^5.
\end{aligned}$$

2.1.5. példa. Legyen

$$f(x) := e^x \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g(x) := \ln(x^5) \quad (0 < x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor

$$\boxed{\begin{array}{ll} f'(x) = e^x \quad (x \in \mathbb{R}), & g'(x) = \dfrac{5}{x} \quad (0 < x \in \mathbb{R}), \\[2ex] f''(x) = e^x \quad (x \in \mathbb{R}), & g''(x) = -\dfrac{5}{x^2} \quad (0 < x \in \mathbb{R}), \\[2ex] f'''(x) = e^x \quad (x \in \mathbb{R}), & g'''(x) = \dfrac{10}{x^3} \quad (0 < x \in \mathbb{R}), \\[2ex] f^{(4)}(x) = e^x \quad (x \in \mathbb{R}), & g^{(4)}(x) = \dfrac{-30}{x^4} \quad (0 < x \in \mathbb{R}), \\[2ex] f^{(5)}(x) = e^x \quad (x \in \mathbb{R}), & g^{(5)}(x) = \dfrac{120}{x^5} \quad (0 < x \in \mathbb{R}), \end{array}}$$

így az 2.1.4. pédabeli formulát alkalmazva azt kapjuk, hogy bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} (f \circ g)^{(5)}(x) &= e^{\ln(x^5)} \cdot \frac{120}{x^5} + e^{\ln(x^5)} \cdot \left\{ \frac{5 \cdot 5 \cdot (-30)}{x^5} + \frac{10 \cdot (-5) \cdot 10}{x^5} \right\} + \\ &\quad + e^{\ln(x^5)} \cdot \left\{ \frac{10 \cdot 5^2 \cdot 10}{x^5} + \frac{15 \cdot 5 \cdot (-5)^2}{x^5} \right\} + \\ &\quad + e^{\ln(x^5)} \cdot \frac{10 \cdot 5^3 \cdot (-5)}{x^5} + e^{\ln(x^5)} \cdot \frac{5^5}{x^5} = \\ &= 120 - 25 \cdot 30 - 500 + 2500 + 75 \cdot 25 - 250 \cdot 25 + 125 \cdot 25 = \\ &= 120 - 25 \cdot (30 + 20 - 100 - 75 + 250 - 125) = 120 - 25 \cdot 0 = 120, \end{aligned}$$

ami nem csoda, hiszen

$$(f \circ g)(x) = e^{\ln(x^5)} = x^5 \qquad (0 < x \in \mathbb{R}),$$

és így

$$(f \circ g)^{(5)}(x) = 5! = 120 \qquad (0 < x \in \mathbb{R}).$$

2.1.6. példa. Legyen

$$f(x) := e^x \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f^{(n)}(x) = e^x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

továbbá

$$g'(x) = 2x, \quad g''(x) = 2, \quad g^{(n)}(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R},\, 3 \le n \in \mathbb{N}).$$

Így az (2.1.2)-beli Faà-di-Bruno-formula felhasználásával azt kapjuk, hogy ha $n \in \mathbb{N}$, akkor a

$$h := f \circ g$$

függvény n-edik deriváltjára tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$h^{(n)}(x) = e^{x^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2=k,\\ k_1+2k_2=n}} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2!} \cdot \left(\frac{2x}{1!}\right)^{k_1} \cdot \left(\frac{2}{2!}\right)^{k_2} = e^{x^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2=k,\\ k_1+2k_2=n}} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2!} \cdot (2x)^{k_1}.$$

Ha tehát

- $n = 6$, akkor $k \in \{3,4,5,6\}$, ill.

$$(k_1, k_2) \in \{(0,3), (2,2), (4,1), (6,0)\},$$

  és így tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} h^{(6)}(x) &= e^{x^2}\left\{\frac{6!}{0! \cdot 3!} + \frac{6!}{2! \cdot 2!} \cdot (2x)^2 + \frac{6!}{4! \cdot 1!} \cdot (2x)^4 + \frac{6!}{6! \cdot 0!} \cdot (2x)^6\right\} = \\ &= e^{x^2}\left(120 + 720x^2 + 480x^4 + 64x^6\right); \end{aligned}$$

- $n = 8$, akkor $k \in \{4,5,6,7,8\}$, ill.

$$(k_1, k_2) \in \{(0,4), (2,3), (4,2), (6,1), (8,0)\},$$

  és így tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} h^{(8)}(x) &= e^{x^2}\left\{\frac{8!}{0! \cdot 4!} + \frac{8!}{2! \cdot 3!} \cdot (2x)^2 + \frac{8!}{4! \cdot 2!} \cdot (2x)^4 + \frac{8!}{6! \cdot 1!} \cdot (2x)^6 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{8!}{8! \cdot 0!} \cdot (2x)^8\right\} = \\ &= e^{x^2}\left(1680 + 13440x^2 + 13440x^4 + 3584x^6 + 256x^8\right). \end{aligned}$$

Francesco Faà di Bruno 1825 március 29-én született az itáliai Alekszandriában. Nemesi család gyermeke volt, és mint a legkisebb fiú a családban katonai pályára lépett. 1849-ben részt vett a szárd-osztrák háború egyik utolsó, fontos ütközetében, a novarai csatában (1849). A háború mély nyomokat hagyott benne; leszerelt, lemondott tiszti rangjáról, és elment Párizsba, ahol matematikát tanult. Hazatérve a torinói egyetem professzora lett, közben pedig megszerezte a doktori fokozatot. Francesco Faà di Bruno a világ egyik vezető matematikusa lett. Számos jelentős felfedezést tett a modellelmélet és az elliptikus függvények elmélete terén. Mintegy negyven tudományos cikk szerzője volt, amelyek francia, amerikai és olasz folyóiratokban jelentek meg. Mindeközben egyre inkább részt vállalt abban a szociális reformban, amely akkoriban Torinóban zajlott. Bosco Szent János közeli barátja és munkatársa lett. Segített hajléktalanszállásokat, valamint idős emberek számára otthonokat létrehozni. Emellett fölépíttetett egy templomot azoknak a katonáknak az emlékére, akik az olasz egységtörekvések harcaiban vesztették életüket. Francesco már a negyvenes éveiben járt, amikor megérett benne a papi hivatás gondolata. Elkezdte teológiai tanulmányait, majd 51 éves korában pappá szentelték. 1881-ben megalapított egy női jótékonysági szervezetet, amely évtizedekkel később szerzetesrenddé alakult, hogy segítséget nyújtson az akkoriban igen kiszolgáltatott helyzetben lévő női háztartási alkalmazottak, cselédek, illetve leányanyák számára. Francesco Faà di Bruno 1888. március 27-én halt meg Torinoban, 1988-ban avatta boldoggá őt II. János Pál pápa.

Az alábbiakban feltesszük, hogy $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok, az

$$f : J \to \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad g : I \to J$$

függvények pedig n-szer differenciálhatók. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy az (2.1.2) formula polinomok lineáris kombinációjaként írható, pontosabban igaz az

2.1.1. lemma. Alkalmas n-változós $P_{n,k}$ polinom esetén a (2.1.2) formula

$$(f \circ g)^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} (f^{(k)} \circ g) \cdot P_{n,k}\left(g', g'', \ldots, g^{(n)}\right) \tag{2.1.3}$$

alakú, ahol $P_{n,k}$ valamely n-változós k-adfokú polinom.

Biz. Világos, hogy

- $n = 1$ esetén

  $$(f \circ g)^{(1)} = (f' \circ g) \cdot g' = (f' \circ g) \cdot P_{1,1}(g'),$$

  ahol

  $$P_{1,1}(x) := x \qquad (x \in \mathbb{R});$$

- $n = 2$ esetén (vö. (0.0.1) formula)

  $$(f \circ g)^{(2)} = (f'' \circ g)(g')^2 + (f' \circ g) \cdot g'' = (f'' \circ g) \cdot P_{2,2}(g') + (f' \circ g) \cdot P_{2,1}(g', g''),$$

  ahol

  $$P_{2,2}(x, y) := x^2, \qquad P_{2,1}(x, y) := y \qquad (x, y \in \mathbb{R});$$

- ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll a (2.1.3) formula, akkor

$$\begin{aligned}(f\circ g)^{(n+1)} &= \left((f\circ g)^{(n)}\right)' = \sum_{k=0}^{n}\left\{(f^{(k+1)}\circ g)\cdot g'\cdot P_{n,k}\left(g',g'',\ldots,g^{(n)}\right)+\right.\\ &\left.+(f^{(k)}\circ g)\cdot\sum_{i=1}^{n}\partial_i P_{n,k}\left(g',g'',\ldots,g^{(n)}\right)\cdot g^{(i+1)}\right\}=\\ &=\sum_{k=0}^{n+1}(f^{(k)}\circ g)\cdot P_{n+1,k}\left(g',g'',\ldots,g^{(n)},g^{(n+1)}\right),\end{aligned}$$

ahol tetszőleges $x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}\in\mathbb{R}$ esetén

$$P_{n+1,k}(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1}) := x_1\cdot P_{n,k-1}(x_1,\ldots,x_n)+\sum_{i=1}^{n}\partial_i P_{n,k}(x_1,\ldots,x_n)\cdot x_{i+1}. \quad\blacksquare$$

Megjegyezzük, hogy az (2.1.3) formulában valamely $a\in\mathbb{R}$ esetén $(f\circ g)^{(n)}(a)$ csak $g^{(k)}(a)$-tól és $f^{(k)}(g(a))$-tól függ, ahol $k\in\{0,\ldots,n\}$. Ezért, ha n-edrendig bezárólag alkalmas $F, G:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ függvényeknek ugyanaz a deriváltja, mint f-nek és g-nek $g(a)$-ban és a-ban, akkor a fenti formulában f, ill. g helyett F-et, ill. G-t is írhatunk. Ennélfogva a Faà-di-Bruno-formulát elegendő polinomokra igazolni.

Az alábbiakban a Faà-di-Bruno-formulát igazoljuk polinomokra.

2.1.1. tétel. Tetszőleges $f, g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ polinomra igaz az (2.1.2) formula.

Biz. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $g(0)=0$. Ennélfogva azt írhatuk, hogy

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n,\quad g(x)=b_1x+\ldots+b_nx^n\qquad(x\in\mathbb{R}),$$

ahol $f(0)=: a_0$, továbbá tetszőleges $k\in\{1,\ldots,n\}$ index esetén

$$a_k:=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\qquad\text{és}\qquad b_k:=\frac{g^{(k)}(0)}{k!}.$$

Így az (2.1.2) formula igazolásához mát csak azt kell megmutatnunk, hogy $f(g(x))$-ben az x^n hatvány együtthatója nem más, mint

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n=k,\\ k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}}\frac{k!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}\cdot a_k\cdot b_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot b_n^{k_n}.$$

Ez azonban triviális, hiszen a polinomiális tétel következtében tetszőleges

$$\xi_1,\ldots,\xi_n\in\mathbb{R},\qquad\text{ill.}\qquad k\in\{1,\ldots,n\}$$

esetén

$$(\xi_1+\ldots+\xi_n)^k=\sum_{k_1+\ldots+k_n=k}\frac{k!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}\cdot\xi_1^{k_1}\cdot\xi_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot\xi_n^{k_n},$$

így az

$$\xi_k =: b_k x^k$$

helyettesítéssel azt kapjuk, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
f(g(x)) &= \sum_{k=1}^{n} a_k (b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n)^k = \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k_1+\ldots+k_n=k} \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot b_1^{k_1} \cdot b_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot b_n^{k_n} \cdot x^{k_1+2k_2+\ldots+nk_n} = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \sum_{k_1+\ldots+k_n=k} \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot \left(\frac{g'(0)}{1!}\right)^{k_1} \cdot \left(\frac{g''(0)}{2!}\right)^{k_2} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{g^{(n)}(0)}{n!}\right)^{k_n} \cdot \\
&\quad \cdot x^{k_1+2k_2+\ldots+nk_n}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

2.1.7. példa. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, továbbá tegyük fel, hogy a $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény n-szer differenciálható. Ekkor a

$$h := \exp \circ g$$

függvényre tetszőleges $x \in I$ esetén

$$h^{(n)}(x) = e^{g(x)} \cdot \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n=k,\\ k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{g^{(i)}(x)}{i!}\right)^{k_i}. \tag{2.1.4}$$

2.1.8. példa. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, továbbá tegyük fel, hogy a $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény n-szer differenciálható, továbbá

$$g(x) > 0 \qquad (x \in I)$$

teljesül. Ekkor a

$$h := \ln \circ g$$

függvényre

$$\ln^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} \qquad (0 < x \in \mathbb{R})$$

következtében tetszőleges $x \in I$ esetén

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n=k,\\ k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}} (-1)^{k-1} \cdot \frac{n! \cdot (k-1)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{g^{(i)}(x)}{i! \cdot g(x)}\right)^{k_i}. \tag{2.1.5}$$

A Faà-di-Bruno-formulában a szereplő

$$\sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n=k,\\ k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}}$$

összeg multindex segítségével barátságosabbá tehető a következő módon.

2.1.1. definíció. Legyen $k, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$. Azt mondjuk, hogy a $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ rendezett n-es (n, k)**-multiindex** – jelben $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathcal{M}(n, k)$ –, ha

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + \ldots + k_{n-1} + k_n &= k, \\ k_1 + 2k_2 + \ldots + (n-1)k_{n-1} + nk_n &= n. \end{aligned}$$

Az alábbi példákon szemléltetünk néhány ilyen multiindexekvől álló halmazt.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(1{,}1) &= \{(1)\}, \\
\mathcal{M}(2{,}1) &= \{(0{,}1)\}, \\
\mathcal{M}(2{,}2) &= \{(2{,}0)\}, \\
\mathcal{M}(3{,}2) &= \{(1{,}1{,}0)\}, \\
\mathcal{M}(4{,}2) &= \{(1{,}0{,}1{,}0), (0{,}2{,}0{,}0)\}, \\
\mathcal{M}(4{,}3) &= \{(2{,}1{,}0{,}0)\}, \\
\mathcal{M}(5{,}2) &= \{(1{,}0{,}0{,}1{,}0), (0{,}1{,}1{,}0{,}0)\}, \\
\mathcal{M}(5{,}3) &= \{(2{,}0{,}1{,}0{,}0), (1{,}2{,}0{,}0{,}0)\}, \\
\mathcal{M}(5{,}4) &= \{(3{,}1{,}0{,}0{,}0)\}, \\
\mathcal{M}(6{,}3) &= \{(1{,}1{,}1{,}0{,}0{,}0), (2{,}0{,}0{,}1{,}0{,}0), (0{,}3{,}0{,}0{,}0{,}0)\}, \\
\mathcal{M}(6{,}4) &= \{(3{,}0{,}1{,}0{,}0), (2{,}2{,}0{,}0{,}0{,}0)\}.
\end{aligned}$$

Így a Faà-di-Bruno-formula a következő alakot ölti:

$$(f \circ g)^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathcal{M}(n,k)} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot \left(f^{(k)} \circ g\right) \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{g^{(i)}}{i!}\right)^{k_i}. \qquad (2.1.6)$$

2.2. A Faà-di-Bruno-formula egy általánosítása

2.2.1. tétel. ([18])Legyen $d \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $\mathbf{g} := (g_1, \ldots, g_d) : I \to \mathbb{R}^d$, $f \in \in \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ olyan n-szer differenciálható függvények $(n \in \mathbb{N})$, amelyekre bármely $t \in I$ esetén $\mathbf{g}(t) \in \mathcal{D}_f$ teljesül. Ekkor

$$(f \circ \mathbf{g})^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{0} \sum_{1} \sum_{2} \cdots \sum_{n} \frac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{n}(i!)^{k_i} \prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{d} q_{ij}!} \cdot \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \ldots \partial x_d^{p_d}} \circ \mathbf{g} \right) \cdot$$

$$\cdot \prod_{i=1}^{n} (g_1^{(i)})^{q_{i1}} (g_2^{(i)})^{q_{i2}} \cdot \ldots \cdot (g_d^{(i)})^{q_{id}}, \tag{2.2.1}$$

ahol az összegzések olyan

$$k_1, \ldots, k_n, q_{ij} \in \mathbb{N} \qquad ((i,j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, d\})$$

indexekre történnek, amelyekre

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n &= n \quad \longleftrightarrow \quad \sum_0, \\ q_{11} + \ldots + q_{1d} &= k_1 \quad \longleftrightarrow \quad \sum_1, \\ &\vdots \\ q_{n1} + \ldots + q_{nd} &= k_n \quad \longleftrightarrow \quad \sum_n \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

továbbá

$$p_j = q_{1j} + \ldots + q_{nj} \quad (j \in \{1, \ldots, d\}), \qquad k = p_1 + \ldots + p_d = k_1 + k_2 + \ldots + k_n.$$

Jól látható, hogy a $d = 2$ esetben az első deriváltra igaz az (2.2.1) formula, hiszen az (2.2.2) diofantoszi egyenletrendszer megoldása $k_1 = 1$, továbbá $q_{11} = 1$, $q_{12} = 0$ és $q_{11} = 0$, $q_{12} = 1$, ill.

$$\begin{aligned} (f \circ \mathbf{g})' &= \langle (\partial_1 f, \partial_2 f) \circ \mathbf{g}), (g_1', g_2') \rangle = \partial_1 f \cdot g_1' + \partial_2 f \cdot g_2' = \\ &= \frac{1!}{1! \cdot 1! \cdot 0!} \cdot \partial_1 f \cdot g_1' + \frac{1!}{1! \cdot 0! \cdot 1!} \cdot \partial_2 f \cdot g_2'. \end{aligned}$$

A második, harmadik és negyedik derivált az (2.2.1) formula alapján a következő alakú:

$$(f \circ \mathbf{g})^{(2)} = \sum_0 \sum_1 \sum_2 \frac{2!}{\prod_{i=1}^{2}(i!)^{k_i} \cdot \prod_{i=1}^{2}\prod_{j=1}^{2} q_{ij}!} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{p1} x_2^{p2}} \cdot \prod_{i=1}^{2} (g_1^{(i)})^{q_{i1}} (g_2^{(i)})^{q_{i2}},$$

$$(f \circ \mathbf{g})^{(3)} = \sum_0 \sum_1 \sum_2 \sum_3 \frac{3!}{\prod_{i=1}^{3}(i!)^{k_i} \cdot \prod_{i=1}^{3}\prod_{j=1}^{2} q_{ij}!} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{p1} x_2^{p2}} \cdot \prod_{i=1}^{3} (g_1^{(i)})^{q_{i1}} (g_2^{(i)})^{q_{i2}},$$

$$(f \circ \mathbf{g})^{(4)} = \sum_0 \sum_1 \sum_2 \sum_3 \sum_4 \frac{4!}{\prod_{i=1}^4 (i!)^{k_i} \cdot \prod_{i=1}^4 \prod_{j=1}^2 q_{ij}!} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{p1} x_2^{p2}} \cdot \prod_{i=1}^4 (g_1^{(i)})^{q_{i1}} (g_2^{(i)})^{q_{i2}},$$

azaz

$$\begin{aligned}
(f \circ \mathbf{g})'' &= \frac{2!}{(1!)^0 \cdot (2!)^1 \cdot 0! \cdot 0! \cdot 1! \cdot 0!} \cdot \partial_1 f \cdot 1 \cdot 1 \cdot g_1'' \cdot 1 + \\
&+ \frac{2!}{(1!)^0 \cdot (2!)^1 \cdot 0! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 1!} \cdot \partial_2 f \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot g_2'' + \\
&+ \frac{2!}{(1!)^1 \cdot (2!)^0 \cdot 2! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 0!} \cdot \partial_{11} f \cdot (g_1')^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + \\
&+ \frac{2!}{(1!)^1 \cdot (2!)^0 \cdot 0! \cdot 2! \cdot 0! \cdot 0!} \cdot \partial_{22} f \cdot 1 \cdot (g_2')^2 \cdot 1 \cdot 1 + \\
&+ \frac{2!}{(1!)^1 \cdot (2!)^0 \cdot 1! \cdot 1! \cdot 0! \cdot 0!} \cdot \partial_{12} f \cdot g_1' \cdot g_2' \cdot 1 \cdot 1 = \\
&= \partial_{11} f \cdot (g_1')^2 + \partial_{12} f \cdot g_1' \cdot g_2' + \partial_1 f \cdot g_1'' + \partial_{21} f \cdot g_1' \cdot g_2' + \partial_{22} f \cdot (g_2')^2 + \partial_2 f \cdot g_2'' = \\
&= \partial_{11} f \cdot (g_1')^2 + 2 \cdot \partial_{12} f \cdot g_1' \cdot g_2' + \partial_1 f \cdot g_1'' + \partial_{22} f \cdot (g_2')^2 + \partial_2 f \cdot g_2''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f \circ \mathbf{g})''' &= \frac{3!}{(1!)^3 \cdot (2!)^0 \cdot (3!)^0 \cdot 3! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 0!} \cdot \partial_{111} f \cdot (g_1')^3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + \\
&+ \frac{3!}{(1!)^3 \cdot (2!)^0 \cdot (3!)^0 \cdot 2! \cdot 1! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 0!} \cdot \partial_{112} f \cdot (g_1')^2 \cdot (g_2')^1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + \\
&+ \frac{3!}{(1!)^3 \cdot (2!)^0 \cdot (3!)^0 \cdot 1! \cdot 2! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 0!} \cdot \partial_{122} f \cdot (g_1')^1 \cdot (g_2')^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + \\
&+ \frac{3!}{(1!)^3 \cdot (2!)^0 \cdot (3!)^0 \cdot 0! \cdot 3! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 0!} \cdot \partial_{222} f \cdot 1 \cdot (g_2')^3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + \\
&+ \frac{3!}{(1!)^1 \cdot (2!)^1 \cdot (3!)^0 \cdot 1! \cdot 0! \cdot 1! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 0!} \cdot \partial_{11} f \cdot (g_1')^1 \cdot 1 \cdot (g_1'')^1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + \\
&+ \frac{3!}{(1!)^1 \cdot (2!)^1 \cdot (3!)^0 \cdot 1! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 1! \cdot 0! \cdot 0!} \cdot \partial_{12} f \cdot (g_1')^1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (g_2'')^1 \cdot 1 \cdot 1 + \\
&+ \frac{3!}{(1!)^1 \cdot (2!)^1 \cdot (3!)^0 \cdot 0! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 0!} \cdot \partial_{12} f \cdot 1 \cdot (g_2')^1 \cdot (g_1'')^1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 +
\end{aligned}$$

$$+\frac{3!}{(1!)^1\cdot(2!)^1\cdot(3!)^0\cdot 0!\cdot 1!\cdot 0!\cdot 1!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot\partial_{22}f\cdot 1\cdot(g_2')^1\cdot 1\cdot(g_2'')^1\cdot 1\cdot 1+$$

$$+\frac{3!}{(1!)^0\cdot(2!)^0\cdot(3!)^1\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 1!\cdot 0!}\cdot\partial_{1}f\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot(g_1''')^1\cdot 1+$$

$$+\frac{3!}{(1!)^0\cdot(2!)^0\cdot(3!)^1\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 1!}\cdot\partial_{2}f\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot(g_2''')^1=$$

$$=\partial_{111}f\cdot(g_1')^3+3\cdot\partial_{112}f\cdot(g_1')^2\cdot g_2'+3\cdot\partial_{122}f\cdot g_1'\cdot(g_2')^2+\partial_{222}f\cdot(g_2')^3+$$

$$+3\cdot\partial_{11}f\cdot g_1'\cdot g_1''+3\cdot\partial_{12}f\cdot(g_1'\cdot g_2''+g_2'\cdot g_1'')+3\cdot\partial_{22}f\cdot g_2'\cdot g_2''+$$

$$+\partial_1 f\cdot g_1'''+\partial_2 f\cdot g_2''',$$

$$(f\circ\mathbf{g})^{(4)}=\frac{4!}{(1!)^4\cdot(2!)^0\cdot(3!)^0\cdot(4!)^0\cdot 4!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot\partial_{1111}f\cdot(g_1')^4+$$

$$+\frac{4!}{(1!)^4\cdot\cdot(2!)^0\cdot(3!)^0\cdot(4!)^0\cdot 1!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 3!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot\partial_{1222}f\cdot g_1'\cdot(g_2')^3+$$

$$+\frac{4!}{(1!)^4\cdot(2!)^0\cdot(3!)^0\cdot(4!)^0\cdot 1!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 3!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot\partial_{1222}f\cdot(g_1')\cdot(g_2')^3+$$

$$+\frac{4!}{(1!)^4\cdot(2!)^0\cdot(3!)^0\cdot(4!)^0\cdot 2!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 2!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot\partial_{1122}f\cdot g_1'\cdot(g_2')^3+$$

$$+\frac{4!}{(1!)^4\cdot(2!)^0\cdot(3!)^0\cdot(4!)^0\cdot 3!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 1!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot\partial_{1112}f\cdot(g_1')^3\cdot g_2'+$$

$$+\frac{4!}{(1!)^4\cdot(2!)^0\cdot(3!)^0\cdot(4!)^0\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 4!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot\partial_{2222}f\cdot(g_2')^4+$$

$$+\frac{4!}{(1!)^2\cdot(2!)^1\cdot(3!)^0\cdot(4!)^0\cdot 2!\cdot 1!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot\partial_{111}f\cdot(g_1')^2\cdot g_1''+$$

$$+\frac{4!}{(1!)^2\cdot(2!)^1\cdot(3!)^0\cdot(4!)^0\cdot 2!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 1!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot\partial_{112}f\cdot(g')^2\cdot g_2''+$$

$$+\frac{4!}{(1!)^2\cdot(2!)^1\cdot(3!)^0\cdot(4!)^0\cdot 0!\cdot 1!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 2!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot\partial_{122}f\cdot g_1''\cdot(g_2')^2+$$

$$+\frac{4!}{(1!)^2\cdot(2!)^1\cdot(3!)^0\cdot(4!)^0\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot\partial_{222}f\cdot(g_2')^2\cdot g_2''+$$

$$+\frac{4!}{(1!)^2\cdot(2!)^1\cdot(3!)^0\cdot(4!)^0\cdot 1!\cdot 1!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 1!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot\partial_{112}f\cdot g_1'\cdot g_1''\cdot g_2'+$$

$$+\frac{4!}{(1!)^2\cdot(2!)^1\cdot(3!)^0\cdot(4!)^0\cdot 1!\,0!\,0\cdot!\,0!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot\partial_{1122}f\cdot g_1'\cdot g_2'\cdot g_2''+$$

$$+\frac{4!}{(1!)^1\cdot(2!)^0\cdot(3!)^1\cdot(4!)^0\cdot 1!\cdot 0!\cdot 1!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot\partial_{12}f\cdot g_1'\cdot g_2'''+$$

$$+\frac{4!}{(1!)^1\cdot(2!)^0\cdot(3!)^1\cdot(4!)^0\cdot 1!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 1!\cdot 0!}\cdot\partial_{12}f\cdot g_1'''\cdot g_2'+$$

$$+\frac{4!}{(1!)^1\cdot(2!)^0\cdot(3!)^1\cdot(4!)^0\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 1!\cdot 0!\cdot 1!\cdot 0!}\cdot\partial_{22}f\cdot g_2'\cdot g_2'''+$$

$$+\frac{4!}{(1!)^0\cdot(2!)^2\cdot(3!)^0\cdot(4!)^0\cdot 0!\cdot 2!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot\partial_{11}f\cdot\left(g_1''\right)^2+$$

$$+\frac{4!}{(1!)^0\cdot(2!)^2\cdot(3!)^0\cdot(4!)^0\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 2!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot\partial_{22}f\cdot\left(g_2''\right)^2+$$

$$+\frac{4!}{(1!)^0\cdot(2!)^2\cdot(3!)^0\cdot(4!)^0\cdot 0!\cdot 1!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 1!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot\partial_{12}f\cdot g_1''\cdot g_2''+$$

$$+\frac{4!}{(1!)^0\cdot(2!)^0\cdot(3!)^0\cdot(4!)^1\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 1!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot\partial_{1}f\cdot g_1^{(4)}+$$

$$+\frac{4!}{(1!)^0\cdot(2!)^0\cdot(3!)^0\cdot(4!)^1\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 1!}\cdot\partial_{2}f\cdot g_2^{(4)}=$$

$$=\partial_1 f\cdot g_1^{(4)}+\partial_2 f\cdot g_2^{(4)}+$$

$$+4\cdot\partial_{11}f\cdot\left(g_1'\cdot g_1'''+\left(g_1''\right)^2\right)+\partial_{22}f\cdot\left(4\cdot g_2'\cdot g_2'''+3\cdot\left(g_2''\right)^2\right)+$$

$$+\partial_{12}f\cdot\left(4\cdot g_1'\cdot g_2'''+6\cdot g_1''\cdot g_2''+4\cdot g_1'''\cdot g_2'\right)+$$

$$+\partial_{111}f\cdot 6\cdot\left(g_1'\right)^2\cdot g_1''+\partial_{112}f\cdot\left(6\cdot\left(g_1'\right)^2\cdot g_2''+12\cdot g_1'\cdot g_1''\cdot g_2'\right)+$$

$$+\partial_{122}f\cdot\left(12\cdot g_1'\cdot g_2'\cdot g_2''+6\cdot g_1''\cdot\left(g_2'\right)^2\right)+\partial_{222}f\cdot 6\cdot\left(g_2'\right)^2\cdot g_2''+$$

$$+\partial_{1111}f\cdot\left(g_1'\right)^4+\partial_{1112}f\cdot 4\cdot\left(g_1'\right)^3\cdot g_2'+\partial_{1122}f\cdot 6\cdot\left(g_1'\right)^2\cdot\left(g_2'\right)^2+$$

$$+\partial_{1222}f\cdot 4\cdot g_1'\cdot\left(g_2'\right)^3+\partial_{2222}f\cdot\left(g_2'\right)^4.$$

2.2.1. példa. Ha

$$f(x,y) := e^{xy} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

akkor

$$f(g_1(t), g_2(t)) = e^{g_1(t)g_2(t)} \qquad (t \in (I))$$

és

$$\begin{aligned}
(e^{g_1g_2})^{(4)} \quad = \quad & e^{g_1g_2}\Big[g_2^4(g_1')^4 + 4(g_1^3g_2 + 3g_1^2)(g_1')(g_2')^3 + 6(g_1^2g_2^2 + 4g_1g_2 + 2)(g_1')^2(g_2')^2 + \\
& +4(g_1g_2^3 + 3g_2^2)(g_1')^3(g_2') + g_1^4(g_2')^4 + 6g_2^3(g_1')^2(g_1'') + 6(g_1g_2^2 + 2g_2)(g_1')^2(g_2'') + \\
& +6(g_1^2 + 2g_1)(g_1'')(g_2')^2 + 6g_1^3(g_2')^2(g_2'') + 12(g_1g_2^2 + 2g_2)(g_1')(g_1'')(g_2') + \\
& +12(g_1^2 + 2g_1)(g_1')(g_2')(g_2'') + 4g_2^2(g_1')(g_1''') + 4(g_1g_2 + 1)(g_1')(g_2''') + \\
& +4(g_1g_2 + 1)(g_1''')(g_2') + 4g_1^2(g_2')(g_2''') + 3g_2^2(g_1'')^2 + 3g_1^2(g_2'')^2 + \\
& +6(g_1g_2 + 1)(g_1'')(g_2'') + g_2g_1^{(4)} + g_1g_2^{(4)}\Big].
\end{aligned}$$

3. fejezet

Az inverz függvény

Már láttunk formulákat a kompozíció és szorzatfüggvények magasabb deriváltjaira. Értelemszerűen a következő fejezet az inverz függvényekről fog szólni. Tehát nézzük milyen módszerrel tudjuk kiszámolni az inverz függvény n-edik deriváltját.
Első lépésként megfogalmazzuk az inverz függvény deriválhatóságára vonatkozó tételt (vö. [21]).

3.0.1. tétel. Ha $I \subset \mathbb{R}$ (valódi) intervallum, az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény injektív és folytonos, $a \in I$, továbbá $f \in \mathfrak{D}[a]$, akkor az $f^{-1} : \mathcal{R}_f \to \mathcal{D}_f$ függvényre a következők igazak:

1. $f^{-1} \in \mathcal{D}[f(a)] \quad \Longleftrightarrow \quad f'(a) \neq 0;$
2. $f^{-1} \in \mathcal{D}[f(a)] \quad \Longrightarrow$

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(f(a))} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Az inverz függvény magasabbrendű deriváltjára vonatkozó formula megsejtésére a következő gondolatmenetből érdemes kindulni. Világos, hogy ha f injektív, akkor $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$. Innen – a fenti tétel feltételei mellett – mindkét oldalt deriválva azt kapjuk

$$\left(f' \circ f^{-1}\right) \cdot \left(f^{-1}\right)' = 1, \qquad \text{így} \qquad \boxed{\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}}.$$

Ha a bal oldali egyenlőséget mindkét oldalt deriválju, akkor

$$\left(f' \circ f^{-1}\right)' \cdot \left(f^{-1}\right)' + \left(f' \circ f^{-1}\right) \cdot \left(f^{-1}\right)'' = 0 \tag{3.0.1}$$

adódik. Mivel

$$\left(f' \circ f^{-1}\right)' = \left(f'' \circ f^{-1}\right) \cdot \left(f^{-1}\right)' = \left(f'' \circ f^{-1}\right) \cdot \frac{1}{f' \circ f^{-1}}, \tag{3.0.2}$$

ezért (3.0.1) nem más, mint

$$\frac{f'' \circ f^{-1}}{\left(f' \circ f^{-1}\right)^2} + \left(f' \circ f^{-1}\right) \cdot \left(f^{-1}\right)'' = 0, \qquad \text{azaz} \qquad \boxed{\left(f^{-1}\right)'' = -\frac{f'' \circ f^{-1}}{\left(f' \circ f^{-1}\right)^3}}.$$

A (3.0.1) egyenlőséget ismét deriválva

$$\left(f'\circ f^{-1}\right)''\cdot\left(f^{-1}\right)'+\left(f'\circ f^{-1}\right)'\cdot\left(f^{-1}\right)''+\left(f'\circ f^{-1}\right)'\cdot\left(f^{-1}\right)''+\left(f'\circ f^{-1}\right)\cdot\left(f^{-1}\right)'''=0,$$

azaz

$$\left(f'\circ f^{-1}\right)''\cdot\left(f^{-1}\right)'+2\cdot\left(f'\circ f^{-1}\right)'\cdot\left(f^{-1}\right)''+\left(f'\circ f^{-1}\right)\cdot\left(f^{-1}\right)'''=0, \tag{3.0.3}$$

adódik. A hányadosra és a kompozícióra vonatkozó deriválási szabály felhasználásával (3.0.2)-ből

$$\begin{aligned}\left(f'\circ f^{-1}\right)'' &= \frac{\left(f''\circ f^{-1}\right)'\cdot\left(f'\circ f^{-1}\right)-\left(f''\circ f^{-1}\right)\cdot\left(f'\circ f^{-1}\right)'}{(f'\circ f^{-1})^2}=\\ &= \frac{\left(f'''\circ f^{-1}\right)\cdot\left(f^{-1}\right)'\cdot\left(f'\circ f^{-1}\right)-\left(f''\circ f^{-1}\right)\cdot\left(f''\circ f^{-1}\right)\cdot\left(f^{-1}\right)'}{(f'\circ f^{-1})^2}=\\ &= \frac{\left(f'''\circ f^{-1}\right)\cdot\left(f'\circ f^{-1}\right)-\left(f''\circ f^{-1}\right)\cdot\left(f''\circ f^{-1}\right)}{(f'\circ f^{-1})^3}=\\ &= \frac{f'''\circ f^{-1}}{(f'\circ f^{-1})^2}-\frac{\left(f''\circ f^{-1}\right)^2}{(f'\circ f^{-1})^3}.\end{aligned}$$

adódik. Így (3.0.3) nem más, mint

$$\frac{f'''\circ f^{-1}}{(f'\circ f^{-1})^3}-\frac{\left(f''\circ f^{-1}\right)^2}{(f'\circ f^{-1})^4}-\frac{2\left(f''\circ f^{-1}\right)^2}{(f'\circ f^{-1})^4}+\left(f'\circ f^{-1}\right)\cdot\left(f^{-1}\right)'''=0,$$

azaz

$$\frac{f'''\circ f^{-1}}{(f'\circ f^{-1})^3}-\frac{3\left(f''\circ f^{-1}\right)^2}{(f'\circ f^{-1})^4}+\left(f'\circ f^{-1}\right)\cdot\left(f^{-1}\right)'''=0.$$

Innen az inverz függvény harmadik deriváltjára

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'''=-\frac{f'''\circ f^{-1}}{(f'\circ f^{-1})^4}+\frac{3\left(f''\circ f^{-1}\right)^2}{(f'\circ f^{-1})^5}}.$$

Tekintsük példának például az

$$f(x):=\mathrm{tg}(x)\qquad\left(x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

függvény inverzét, az

$$f^{-1}(x)=\mathrm{arctg}(x)\qquad(x\in\mathbb{R})$$

függvényt. Tudjuk, hogy bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{1+x^2},\qquad\left(f^{-1}\right)''(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

és

$$\left(f^{-1}\right)'''(x) = -\frac{2(1+x^2)^2 - 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = -\frac{2-6x^2}{(1+x^2)^3}.$$

Mivel

$$f' = \frac{1}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = 1 + \mathrm{tg}^2, \qquad f'' = 2 \cdot \mathrm{tg} \cdot \mathrm{tg}' = 2 \cdot \mathrm{tg} \cdot (1 + \mathrm{tg}^2)$$

és

$$f''' = 2 \cdot \mathrm{tg}' \cdot \mathrm{tg}' + 2 \cdot \mathrm{tg} \cdot \mathrm{tg}'' = 2 \cdot (1 + \mathrm{tg}^2)^2 + 4 \cdot \mathrm{tg}^2 \cdot (1 + \mathrm{tg}^2)$$

ezért

$$\begin{aligned}
(f' \circ f^{-1})(x) &= (1 + \mathrm{tg}^2)(\mathrm{arctg}(x)) = 1 + x^2, \\
(f'' \circ f^{-1})(x) &= \left(2 \cdot \mathrm{tg} \cdot (1 + \mathrm{tg}^2)\right)(\mathrm{arctg}(x)) = 2 \cdot x \cdot (1 + x^2), \\
(f''' \circ f^{-1})(x) &= 2 \cdot (1 + \mathrm{tg}^2)^2(\mathrm{arctg}(x)) + 4 \cdot \mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}(x)) \cdot (1 + \mathrm{tg}^2)(\mathrm{arctg}(x)) = \\
&= 2 \cdot (1 + x^2)^2 + 4 \cdot x^2 \cdot (1 + x^2).
\end{aligned}$$

Így – egyezően a fentiekkel –

$$\begin{aligned}
\left(f^{-1}\right)'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\mathrm{tg}'(\mathrm{arctg}(x))} = \frac{1}{(1 + \mathrm{tg}^2)(\mathrm{arctg}(x))} = \frac{1}{1 + x^2}, \\
\left(f^{-1}\right)''(x) &= -\frac{\left(f'' \circ f^{-1}\right)(x)}{\left(f' \circ f^{-1}\right)^3(x)} = -\frac{2 \cdot x \cdot (1 + x^2)}{(1 + x^2)^3} = -\frac{2 \cdot x}{(1 + x^2)^2}, \\
\left(f^{-1}\right)'''(x) &= -\frac{\left(f''' \circ f^{-1}\right)(x)}{\left(f' \circ f^{-1}\right)^4(x)} + \frac{3\left(f'' \circ f^{-1}\right)^2(x)}{\left(f' \circ f^{-1}\right)^5(x)} = \\
&= \frac{-2 \cdot (1 + x^2)^2 - 4 \cdot x^2 \cdot (1 + x^2)}{(1 + x^2)^4} + \frac{12 \cdot x^2 \cdot (1 + x^2)^2}{(1 + x^2)^5} = \\
&= \frac{-2 \cdot (1 + x^2) - 4 \cdot x^2}{(1 + x^2)^3} + \frac{12 \cdot x^2}{(1 + x^2)^3} = \\
&= \frac{-2 \cdot (1 + x^2) - 4 \cdot x^2 + 12 \cdot x^2}{(1 + x^2)^3} = \frac{-2 + 6 \cdot x^2}{(1 + x^2)^3} = -\frac{2 - 6x^2}{(1 + x^2)^3}.
\end{aligned}$$

A (3.0.3) egyenlőség mindkét oldalát tovább deriválva kaphatunk formulát az inverz függvény magasabbrendű deriváltjára egyre hosszabb számítások elvégzésével. Egy [20]-beli módszerrel belátható pl., hogy

$$\left(f^{-1}\right)^{(4)}(x) = \frac{-15\left(f''\circ f^{-1}\right)^3}{\left(f'\circ f^{-1}\right)^7} + \frac{10\left(f''\circ f^{-1}\right)\left(f'''\circ f^{-1}\right)}{\left(f'\circ f^{-1}\right)^6} - \frac{f^{(4)}\circ f^{-1}}{\left(f'\circ f^{-1}\right)^5},$$

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)^{(5)}(x) &= \frac{105\left(f''\circ f^{-1}\right)^4}{\left(f'\circ f^{-1}\right)^9} - \frac{105\left(f''\circ f^{-1}\right)^2\left(f'''\circ f^{-1}\right)}{\left(f'\circ f^{-1}\right)^8}+\\ &+\frac{15\left(f''\circ f^{-1}\right)\left(f^{(4)}\circ f^{-1}\right)}{\left(f'\circ f^{-1}\right)^7} + \frac{10\left(f'''\circ f^{-1}\right)^2}{\left(f'\circ f^{-1}\right)^7} + \frac{10\left(f^{(5)}\circ f^{-1}\right)}{\left(f'\circ f^{-1}\right)^6},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)^{(6)}(x) &= -\frac{945\left(f''\circ f^{-1}\right)^5}{\left(f'\circ f^{-1}\right)^{11}} + \frac{1260\left(f''\circ f^{-1}\right)^3\left(f'''\circ f^{-1}\right)}{\left(f'\circ f^{-1}\right)^{10}}-\\ &-\frac{210\left(f''\circ f^{-1}\right)^2\left(f^{(4)}\circ f^{-1}\right)}{\left(f'\circ f^{-1}\right)^9} - \frac{280\left(f''\circ f^{-1}\right)\left(f'''\circ f^{-1}\right)^2}{\left(f'\circ f^{-1}\right)^9}+\\ &+\frac{21\left(f''\circ f^{-1}\right)\left(f^{(5)}\circ f^{-1}\right)}{\left(f'\circ f^{-1}\right)^8} + \frac{35\left(f'''\circ f^{-1}\right)\left(f^{(4)}\circ f^{-1}\right)}{\left(f'\circ f^{-1}\right)^8} - \frac{\left(f^{(6)}\circ f^{-1}\right)}{\left(f'\circ f^{-1}\right)^7}.\end{aligned}$$

Indukcióval nem nehéz belátni, hogy tetszőleges $n\in\mathbb{N}$ esetén az inverz függvény $(n+1)$-edik deriváltjára

$$\left(f'\circ f^{-1}\right)^{2n+1}\cdot\left(f^{-1}\right)^{(n+1)} = (-1)^n\cdot\frac{n!}{2^n}\cdot\binom{2n}{n}\cdot\left(f''\circ f^{-1}\right)^n+\ldots-\left(f'\circ f^{-1}\right)^{n-1}\cdot\left(f^{(n+1)}\circ f^{-1}\right).$$

teljesül. Szintén indukcióval igazolható (vö. [4]) a

3.0.2. tétel. Legyen $n\in\mathbb{N}$, $I\subset\mathbb{R}$, intervallum, $f: I\to\mathbb{R}$ olyan n-szer deriválható függvény, amelyre tetszőleges $x\in I$ esetén $f'(x)\neq 0$ teljesül. Ekkor fennáll az

$$\left(f'\circ f^{-1}\right)^{2n-1}\cdot\left(f^{-1}\right)^n = P_n$$

egyenlőség, ahol P_n az $f'\circ f^{-1},\ldots,f^{(n)}\circ f^{-1}$ deriváltak egész együtthatós polinomja, amely a

$$P_1 := 1 \qquad P_{n+1} := \left(f'\circ f^{-1}\right)\cdot P_n' - (2n-1)\cdot\left(f''\circ f^{-1}\right)\cdot P_n \quad (n\in\mathbb{N})$$

rekurzió alapján számítható ki.

4. fejezet

Alkalmazások

4.1. Egy kombinatorikai lemma

Az alábbiakban a Faà-di-Bruno-formula egy kombinatorikai alkalmazását mutatjuk be.

4.1.1. lemma. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $R \in (0, +\infty)$ esetén fennáll a

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n=k,\\ k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}} \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot R^k = R(1+R)^{n-1} \tag{4.1.1}$$

egyenlőség.

Biz. Legyen

$$g(x) := \frac{1}{1-x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu \qquad (x \in (-1,1))$$

és

$$f(x) := \frac{1}{1-R(x-1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} R^\nu (x-1)^\nu \qquad \left(x \in \left(\frac{R-1}{R}, \frac{R+1}{R}\right)\right).$$

Ekkor bármely $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1/(R+1)$ esetén

$$\begin{aligned}
f(g(x)) &= \frac{1}{1-R\left(\frac{1}{1-x}-1\right)} = \frac{1}{\frac{1-x}{1-x} - \frac{Rx}{1-x}} = \frac{1-x}{1-(R+1)x} = \frac{1}{1-(R+1)x} - \frac{x}{1-(R+1)x} = \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} (1+R)^\nu x^\nu - \sum_{\nu=0}^{\infty} (1+R)^\nu x^{\nu+1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (1+R)^\nu x^\nu - \sum_{\nu=1}^{\infty} (1+R)^{\nu-1} x^\nu = \\
&= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (1+R)^\nu x^\nu - \sum_{\nu=1}^{\infty} (1+R)^{\nu-1} x^\nu = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{(1+R)^\nu - (1+R)^{\nu-1}\right\} x^\nu = \\
&= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} R(1+R)^{\nu-1} x^\nu.
\end{aligned}$$

Nem nehéz utánaszámolni, hogy

$$g^{(\nu)}(0) = \nu!\,, \qquad f^{(\mu)}(g(0)) = \mu!\,R^{\mu} \qquad \text{és} \qquad (f \circ g)^{(n)}(0) = n!\,R(R+1)^{n-1}$$

teljesül. Így az (2.1.2) formulába helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$n!\,R(R+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n=k,\\ k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}} \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}\cdot k!\cdot R^k \cdot \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{i!}{i!}\right)^{k_i},$$

ahonnan – mindkét oldalt $n!$-sal osztva – az igazolandó állítás következik. ■

4.2. Analitikus függvények kompozíciója

Az elemei analízisből ismeretes, hogy ha $\alpha \in \mathbb{R}$ és valamely $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat esetén

$$R := \limsup(\sqrt[n]{|a_n|}),$$

akkor a

$$\sum_{n=0} a_n(x-\alpha)^n \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{4.2.1}$$

hatványsor ρ konvergenciasugarára

$$\rho = \begin{cases} 0 & (R = 0), \\ 1/R & (0 < R < \infty), \\ \infty & (R = 0), \end{cases}$$

hiszen a gyökkritérium következtében

$$\limsup(\sqrt[n]{|a_n(x-\alpha)^n|}) = R|x-\alpha| \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Következésképpen a $\rho \in [0, \infty]$ pontosan akkor lesz a (4.2.1) hatványsor konvergenciasugara, ha bármely $r \in \mathbb{R}$, $0 < r < \rho$ szám esetén van olyan $0 < C := C_r$ szám, amellyel

$$|a_n| \leq \frac{C}{r^n} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

teljesül. Sok jó tulajdonsággal rendelkeznek azok a függvények, amelyek hatványsorok összegfüggvényeként írhatók fel.

4.2.1. definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Azt mondjuk, hogy az $f : I \to \mathbb{K}$ függvény **analitikus valamely** $\alpha \in I$ **pontban**, ha alkalmas $\epsilon > 0$ és $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat esetén

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x-\alpha)^n \qquad (x \in (\alpha-\epsilon, \alpha+\epsilon)).$$

Ha f analitikus az I intervallum minden pontjában, akkor azt mondjuk, hogy f **analitikus**; mindezt a $f \in \mathfrak{C}^{\omega}(I)$ szimbólummal jelöljük.

Megjegyezzük, hogy

- ha f analitikus, akkor $f \in \mathfrak{C}^\infty(I)$;
- ha $f \in \mathfrak{C}^\infty(I)$, akkor f nem feltételenül analitikus, hiszen az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0), \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

  függvényre $f \in \mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R})$, de f nem analitikus az $\alpha := 0$ pontban, ui. bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $f^{(n)}(0) = 0$, viszont tetszőleges $x > 0$ esetén $f(x) \neq 0$;
- valamely $f \in \mathfrak{C}^\infty(I)$ függvény pontosan akkor analitikus (vö. [16]), ha alkalmas $C, r, \epsilon > 0$, ill. tetszőleges $k \in \mathbb{N}_0$ index esetén esetén

$$\left|f^{(k)}(x)\right| \leq C \cdot \frac{k!}{r^k} \qquad (x \in (\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)).$$

Nem nehéz belátni (vö. [16]), hogy analitikus függvények összege, szorzata és hányadosa szintén analitikus függvény. Nem olyan könnyű viszont igazolni azt, hogy analitikus függvények kompozíciója szintén analitikus. Általában ezt úgy szokták bizonyítani, hogy komplex kiterjesztésüket véve belátják, hogy holomorf függvények kompozíciója szintén holomorf függvény. Az alábbiakban megmutatjuk, hogyan lehet belátni a komplex kiterjesztésre való hivatkozás nélkül azt, hogy a függvények analitikussága öröklődik a kompozícióra.

4.2.1. tétel. Ha $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $g : I \to J$, akkor igaz az

$$(g \in \mathfrak{C}^\omega(I) \quad \wedge \quad f \in \mathfrak{C}^\omega(J)) \qquad \Longrightarrow \qquad f \circ g \in \mathfrak{C}^\omega(I)$$

implikáció.

Biz. Ha $\alpha \in I$ és $\beta := g(\alpha) \in J$, akkor alkalmas $C, D, r, s, \epsilon > 0$ számok, ill. tetszőleges $k \in \mathbb{N}_0$ index esetén

$$\left|g^{(k)}(x)\right| \leq C \cdot \frac{k!}{r^k} \quad \text{és} \quad \left|f^{(k)}(g(x))\right| \leq D \cdot \frac{k!}{s^k} \qquad (x \in (\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)).$$

Alkalmazva a Faà-di-Bruno-formulát a $h := f \circ g$ függvényre, az 4.1.1 lemma felhasználásával azt kapjuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\begin{aligned} \left|h^{(n)}(\alpha)\right| &\leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n=k,\\ k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot D \cdot \frac{k!}{s^k} \cdot \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{C}{r^j}\right)^{k_j} = \\ &= n! \cdot \frac{D}{r^n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n=k,\\ k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}} \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot \frac{C^k}{s^k} = \\ &= n! \cdot \frac{D}{r^n} \cdot \frac{C}{s} \cdot \left(1 + \frac{C}{s}\right)^{n-1} =: E \cdot \frac{n!}{T^n}, \end{aligned}$$

ahol

$$E := \frac{C \cdot D}{s \cdot (1 + C/s)} \qquad \text{és} \qquad T := r \cdot \left(1 + \frac{C}{s}\right)^{-1},$$

ami a fentiek értelmében azt jelenti, hogy a h függvény analitikus. ■

4.3. Analitikus függvények inverze

Az integrál-maradéktagos Taylor-formula felhasználásával könnyen belátható (vö. [21]) a binomiális sor konvergenciája, pontosabban tetszőleges $\mu \in \mathbb{R}$, ill. $x \in (-1,1)$ esetén fennáll az

$$(1+x)^{\mu} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\mu}{k} \cdot x^k$$

egyenlőség, ahol az általánosított binomiális együtthatót a

$$\binom{\mu}{n} := \frac{1}{n!} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} (\mu - k)$$

összefüggéssel értelmezzük.

4.3.1. lemma. Legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor fennáll a

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n=k,\\ k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}} \frac{(-1)^k \cdot k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot \prod_{i=1}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{i}^{k_i} = 2 \cdot (n+1) \cdot \binom{\frac{1}{2}}{n+1}$$

egyenlőség.

Biz. Ha az

$$f(x) := \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad (x \in (-1,1)),$$

$$g(x) := 1 - \sqrt{1-2x} = -\sum_{k=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-2x)^k \quad \left(x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$$

függvények esetében

$$h(x) := f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}} = g'(x) \qquad \left(x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right),$$

akkor

$$g^{(n+1)} = h^{(n)},$$

továbbá tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ indexre

$$f^{(k)}(g(0)) = k! \qquad \text{és} \qquad g^{(k)}(0) = -k! \cdot \binom{\frac{1}{2}}{k} \cdot (-2)^k.$$

A Faà-di-Bruno-formulát felhasználva így azt kapjuk, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$-(n+1)! \cdot \binom{\frac{1}{2}}{n+1} \cdot (-2)^{n+1} = g^{(n+1)}(0) = h^{(n)}(0) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n=k,\\ k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot k! \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(-\binom{\frac{1}{2}}{i} \cdot (-2)^i \right)^{k_i} =$$

$$= (-2)^n \cdot n! \cdot \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n=k,\\ k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}} \frac{(-1)^k \cdot k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot k! \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(\binom{\frac{1}{2}}{i} \right)^{k_i},$$

ahonnan – mindkét oldalt $(-2)^n \cdot n!$-sal osztva – az igazolandó állítás következik. ■

A fentiek segítségével már nem nehéz belátni az analitikus függvények kompozíciója is analitikus, azaz igaz az

4.3.1. tétel. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, továbbá tegyük fel, hogy $g \in \mathfrak{C}^{\omega}(I)$. Ha valamely $\alpha \in I$ esetén $\beta := g(\alpha)$, $g'(\alpha) \neq 0$, akkor alkalmas $0 < r, s \in \mathbb{R}$ számok, ill. analitikus $f : (\beta - s, \beta + s) \to \mathbb{R}$ függvény esetén

$$f(g(x)) = x \quad (x \in (\alpha - r, \alpha + r)) \qquad \text{és} \qquad g(f(x)) = x \quad (x \in (\beta - s, \beta) + s)).$$

Biz.

0. lépés. Mielőtt rátérnénk a bizonyítás lényegére megjegyezzük, hogy az implicit függvényre vonatkozó tétel következtében a $g(\alpha)$ egy környezetében értelmezett f függvény is $\mathfrak{C}^{\infty}$-beli.

1. lépés. Mivel a

$$h(x) := \frac{1}{g'(x)} \qquad (x \in (\alpha - r, \alpha + r))$$

függvény analitikus (vö. [16]), ezért

$$f'(y) = h(f(y)) \qquad (y \in (\beta - s, \beta + s)).$$

Következésképpen alkalmas $0 < C, \delta \in \mathbb{R}$ szám, ill. tetszőleges $k \in \mathbb{N}_0$ index esetén

$$\left| h^{(k)}(x) \right| \leq C \cdot \frac{k!}{\delta^k} \qquad (x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)).$$

2. lépés. Megmutatjuk, hogy bármely $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left| f^{(k)}(y) \right| \leq k! \cdot (-1)^{k-1} \cdot \binom{\frac{1}{2}}{k} \cdot \frac{(2C)^k}{\delta^{k-1}} \qquad (y \in (\beta - s, \beta + s)) \tag{4.3.1}$$

teljesül. Valóban

- $k = 1$ esetén az állítás nyilvánvaló, hiszen

$$f'(y) = h(f(y))) \quad (y \in (\beta - s, \beta + s)) \qquad \text{és} \qquad |h(x)| \leq C.$$

- Megjegyezve, hogy bármely $k \in \mathbb{N}$ indexre

$$(-1)^{k-1}\binom{\frac{1}{2}}{k} > 0,$$

tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén (4.3.1) igaz minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ indexre. Ekkor a 4.3.1. lemmát felhasználva azt kapjuk, hogy tetszőleges $y \in (\beta - s, \beta + s)$ esetén

$$\left|f^{(n+1)}(y)\right| = \left|(h \circ f)^{(n)}(y)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n=k,\\ k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot k! \cdot \frac{C}{\delta^n} \cdot \prod_{i=1}^{n} \left((-1)^{i-1} \cdot \binom{\frac{1}{2}}{i} \cdot (2C)^i\right)^{k_i} =$$

$$= n! \cdot (-1)^n \cdot \frac{(2C)^n}{\delta^n} \cdot C \cdot \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n=k,\\ k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}} \frac{(-1)^k \cdot k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot k! \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(\binom{\frac{1}{2}}{i}\right)^{k_i} =$$

$$= n! \cdot (-1)^n \cdot \frac{(2C)^n}{\delta^n} \cdot C \cdot 2 \cdot (n+1) \cdot \binom{\frac{1}{2}}{n+1} = (n+1)! \cdot (-1)^n \cdot \binom{\frac{1}{2}}{n+1} \cdot \frac{(2C)^{n+1}}{\delta^n}.$$

A második sor végén lévő egyenlőség magyarázata a következő:

$$\prod_{i=1}^{n} \left((-1)^{i-1}\right)^{k_i} = (-1)^{\sum_{i=1}^{n}(i-1)\cdot k_i} = (-1)^{n-k} = (-1)^n \cdot (-1)^k,$$

hiszen

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1) \cdot k_i + \sum_{i=2}^{n} k_i = \sum_{i=2}^{n} i \cdot k_i = n - k_1,$$

azaz

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1) \cdot k_i = n - k_1 - (k - k_1) = n - k.$$

3. lépés. Az (4.3.1) becslés fényében nem nehéz megadni olyan $0 < D, S \in \mathbb{R}$ számokat, amelyekkel

$$\left|f^{(k)}(y)\right| \leq D \cdot \frac{k!}{S^k} \qquad (y \in (\beta - s, \beta + s)).$$

Ez viszont azt jelenti, hogy f analitikus függvény. ■

4.4. Diszkrét dinamikai rendszerek

Az alábbiakban adott $(\mathcal{M}, d)$ metrikus tér, illetve $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ folytonos leképezés esetén az f fixpontjainak kvalitatív tulajdonságait fogjuk vizsgálni. Ezzel kapcsolatos az

4.4.1. definíció. (vö. [15]) Azt mondjuk, hogy az f leképezés $\alpha \in \mathcal{M}$ fixpontja

- **stabilis**, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$, ill. $x \in \mathcal{M}$ esetén igaz a
$$d(x, \alpha) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad d\left(f^{[n]}(x), \alpha\right) < \varepsilon$$
implikáció, ahol $f^{[n]}$ jelöli az f leképezés n-edik iteráltját $(n \in \mathbb{N}_0)$:
$$f^{[0]} := f, \qquad f^{[n]} := f \circ f^{[n-1]} = \underbrace{f}_{1} \circ \ldots \circ \underbrace{f}_{n} \quad (n \in \mathbb{N});$$
- **labilis**, ha nem stabilis;
- **vonzó**, ha alkalmas $r > 0$ szám, ill. tetszőleges $x \in (\alpha - r, \alpha + r)$ esetén
$$\lim_{n\to\infty} f^{[n]}(x) = \alpha \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} d\left(f^{[n]}(x), \alpha\right) = 0.$$
- **aszimptotikusan stabilis**, ha stabilis és vonzó.

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to I$. Ha f folytonosan deriválható, akkor az $\alpha \in I$ fixpont stabilitásának eldöntésére pl. az alábbi elégséges feltételek is használhatók.

4.4.1. tétel. Ha

1. $|f'(\alpha)| < 1$, akkor az α fixpont aszimptotikusan stabilis;
2. $|f'(\alpha)| > 1$, akkor az α fixpont labilis.

Biz. Vö. pl. [15]. ■

4.4.2. tétel. Ha $f'(\alpha) = 1$, továbbá $f''(\alpha) = \ldots = f^{(2k)}(\alpha) = 0$ és $f^{(2k+1)}(\alpha) \neq 0$, akkor

- $f^{(2k+1)}(\alpha) < 0$ esetén az α fixpont aszimptotikusan stabilis;
- $f^{(2k+1)}(\alpha) > 0$ esetén az α fixpont labilis.

Biz. Vö. pl. [7]. ■

Ha $f'(\alpha) = -1$, akkor a következőképpen járhatunk el. Vegyük észre, hogy ha α fixpontja f-nek, akkor fixpontja a
$$h := f^{[2]} = f \circ f$$
leképezésnek is:
$$f(\alpha) = \alpha \qquad \Longrightarrow \qquad h(\alpha) = f^{[2]}(\alpha) = f(f(\alpha)) = f(\alpha) = \alpha.$$

Ennek az a haszna, hogy (vö. [9], [25]) az α fixpont pontosan akkor aszimptotikusan stabilis, ill. labilis f-re vonatkozóan, mint h-ra vonatkozóan, továbbá igaz a

4.4.1. tétel. Legyen $f \in \mathfrak{C}^{2k+1}$ és α olyan fixpontja f-nek, amelyre $f'(\alpha) = -1$. Ha a $h := f^{[2]}$ függvényre valamely $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$h''(\alpha) = \ldots = h^{(2k)}(\alpha) = 0 \qquad \text{és} \qquad h^{(2k+1)}(\alpha) \neq 0,$$

akkor

- $h^{(2k+1)}(\alpha) < 0$ esetén az α fixpont aszimptotikusan stabilis;
- $h^{(2k+1)}(\alpha) > 0$ esetén az α fixpont labilis.

Az iménti tétel alkalmazásához tehát egy kompozíció magasabbrendű deriváltjait kell kiszámítani egy adott pontban.

4.4.1. példa. Ha pl.

$$f(x) := -x + 2x^2 - 4x^3 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor $f(0) = 0$, azaz 0 fixpontja f-nek, továbbá

$$h(x) = f(f(x)) = -x + 4x^2 - 8x^3 + 64x^5 - 192x^6 + 384x^7 - 384x^8 + 256x^9 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel

$$h(0) = 0, \qquad h'(0) = -1,$$

ill.

$$h''(0) = h'''(0) = h^{(4)}(0) = 0 \qquad \text{és} \qquad h^{(5)}(0) = 64 \cdot 5! = 7680 > 0,$$

ezért a 0 a h-nak, így az f-nek is labilis fixpontja.

A kompozícióképzés viszonylag sok munkával jár, ezért a h deriváltjainak kiszámítására érdemes a Faà-di-Bruno-formulát alkalmazni. Ekkor ugyanis a $h := f \circ f$ függvény n-edik deriváltjára tetszőleges $x \in I$ esetén

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n=k,\\ k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot f^{(k)}(f(x)) \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{f^{(i)}(x)}{i!} \right)^{k_i}$$

teljesül, feltéve persze, hogy $f \in \mathfrak{D}^n$ teljesül. Így

$$f(\alpha) = \alpha \qquad \text{és} \qquad f'(\alpha) = -1,$$

figyelembe vételével azt kapjuk, hogy

$$h^{(n)}(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n=k,\\ k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}} \frac{(-1)^{k_1} \cdot n! \cdot f^{(k)}(\alpha)}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot \prod_{i=2}^{n} \left(\frac{f^{(i)}(\alpha)}{i!} \right)^{k_i}. \tag{4.4.1}$$

Az alábbi példákban kiszámítjuk a h függvény deriváltját ötödrendig bezárólag, ui. később ezek ismerete alkalmazásra kerül.

4.4.2. példa. Ha

- $n = 2$, akkor
$$(k_1, k_2) \in \{(0,1), (2,0)\},$$
és így az (4.4.1) formula nem más, mint
$$h''(\alpha) = \frac{(-1)^0 \cdot 2!}{0! \cdot 1!} \cdot f'(\alpha) \cdot \frac{f''(\alpha)}{2!} + \frac{(-1)^2 \cdot 2!}{2! \cdot 0!} \cdot f''(\alpha) = f''(\alpha) - f''(\alpha) = 0;$$
- $n = 3$, akkor
$$(k_1, k_2, k_3) \in \{(0,0,1), (1,1,0), (3,0,0)\},$$
és így az (4.4.1) formula nem más, mint
$$\begin{aligned} h'''(\alpha) &= \\ &= \frac{(-1)^0 \cdot 3!}{0! \cdot 0! \cdot 1!} \cdot f'(\alpha) \cdot \frac{f'''(\alpha)}{3!} + \frac{(-1)^1 \cdot 3!}{1! \cdot 1! \cdot 0!} \cdot f''(\alpha) \cdot \frac{f''(\alpha)}{2!} + \frac{(-1)^3 \cdot 3!}{3! \cdot 0! \cdot 0!} \cdot f'''(\alpha) = \\ &= -2f'''(\alpha) - 3(f''(\alpha))^2; \end{aligned}$$
- $n = 4$, akkor
$$(k_1, k_2, k_3, k_4) \in \{(0,0,0,1), (1,0,1,0), (0,2,0,0), (2,1,0,0), (4,0,0,0)\},$$
és így az (4.4.1) formula nem más, mint
$$\begin{aligned} h^{(4)}(\alpha) &= \frac{(-1)^0 \cdot 4!}{0! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 1!} \cdot f'(\alpha) \cdot \frac{f^{(4)}(\alpha)}{4!} + \\ &\quad + f''(\alpha) \cdot \left\{ \frac{(-1)^1 \cdot 4!}{1! \cdot 0! \cdot 1! \cdot 0!} \cdot \frac{f'''(\alpha)}{3!} + \frac{(-1)^0 \cdot 4!}{0! \cdot 2! \cdot 0! \cdot 0!} \cdot \left(\frac{f''(\alpha)}{2!}\right)^2 \right\} + \\ &\quad + \frac{(-1)^2 \cdot 4!}{2! \cdot 1! \cdot 0! \cdot 0!} \cdot f'''(\alpha) \cdot \frac{f''(\alpha)}{2!} + \frac{(-1)^4 \cdot 4!}{4! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 0!} \cdot f^{(4)}(\alpha) = \\ &= 2 \cdot f''(\alpha) \cdot f'''(\alpha) + 3\,(f''(\alpha))^3 . \end{aligned}$$

4.4.3. példa. Ha $n = 5$, akkor $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) \in \mathcal{I}$, ahol

$$\mathcal{I} := \{(0,0,0,0,1), (1,0,0,1,0), (0,1,1,0,0), (2,0,1,0,0), (1,2,0,0,0), (3,1,0,0,0), (5,0,0,0,0)\},$$

és így az (4.4.1) formula

$$\begin{aligned}
h^{(5)}(\alpha) &= \frac{(-1)^0 \cdot 5!}{0! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 1!} \cdot f'(\alpha) \cdot \frac{f^{(5)}(\alpha)}{5!} + \\
&\quad + f''(\alpha) \cdot \left\{ \frac{(-1)^1 \cdot 5!}{1! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 1! \cdot 0!} \cdot \frac{f^{(4)}(\alpha)}{4!} + \frac{(-1)^0 \cdot 5!}{0! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 0! \cdot 0!} \cdot \frac{f''(\alpha)}{2!} \cdot \frac{f'''(\alpha)}{3!} \right\} + \\
&\quad + f'''(\alpha) \cdot \left\{ \frac{(-1)^2 \cdot 5!}{2! \cdot 0! \cdot 1! \cdot 0! \cdot 0!} \cdot \frac{f'''(\alpha)}{3!} + \frac{(-1)^1 \cdot 5!}{1! \cdot 2! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 0!} \cdot \left(\frac{f''(\alpha)}{2!} \right)^2 \right\} + \\
&\quad + \frac{(-1)^3 \cdot 5!}{3! \cdot 1! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 0!} \cdot f^{(4)}(\alpha) \cdot \frac{f''(\alpha)}{2!} + \frac{(-1)^5 \cdot 5!}{5! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 0!} \cdot f^{(5)}(\alpha) = \\
&= -2 \cdot f^{(5)}(\alpha) - 15 \cdot f''(\alpha) \cdot f^{(4)}(\alpha) - 5 \cdot (f''(\alpha))^2 + 10 \cdot (f'''(\alpha))
\end{aligned}$$

alakú.

Megjegyezzük, hogy ha f analitikus függvény, $h'''(\alpha) = 0$, akkor $h^{(4)}(\alpha) = 0$, ui.

$$h'''(\alpha) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f'''(\alpha) = (-3/2) \cdot (f''(\alpha))^2,$$

és így

$$h^{(4)}(\alpha) = 2 \cdot f''(\alpha) \cdot (-3/2) \cdot (f''(\alpha))^2 + 3\,(f''(\alpha))^3 = 0.$$

Az alábbi tételből látható, hogy ennél több is igaz.

4.4.3. tétel. Ha $f'(\alpha) = -1$, akkor alkalmas $2 \leq k \in \mathbb{N}$ esetén igaz a

$$h''(\alpha) = \ldots = h^{(2k-1)}(\alpha) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad h^{(2k)}(\alpha) = 0$$

implikáció.

Biz. Vö. [7]. ■

Ennélfogva, ha

$$f'(\alpha) = -1 \qquad \text{és} \qquad h'''(\alpha) = 0,$$

akkor a (4.4.1) formula, ill. az (4.4.3). példa felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$h^{(5)}(\alpha) = -2 \cdot f^{(5)}(\alpha) - 15 \cdot f''(\alpha) \cdot f^{(4)}(\alpha) + 30 \cdot (f''(\alpha))^4.$$

4.4.4. példa. Tekintsük ismét az

$$f(x) := -x + 2x^2 - 4x^3 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

függvényt. Világos, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = -1 + 4x - 12x^2, \qquad f''(x) = 4 - 24x, \qquad f'''(x) = -24,$$

így a $h := f \circ f$ kompozíció ötödik deriváltjára a következő módon számítható:

$$h^{(5)}(0) = 30 \cdot 4^4 = 7680.$$

4.5. Formula-gyártás

Ebben a pontban megmutatjuk, hogy miként lehet (2.1.2) segítségével formulákat gyártani. Tegyük fel ehhez, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan $\mathfrak{C}^\infty$-beli függvények, amelyek esetén az $f \circ g$ és a $g \circ f$ kompozíció képezhető, továbbá

$$f \circ g = g \circ f$$

teljesül.

4.5.1. tétel. Ha $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ továbbá valamely $a \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_n := f^{(n)}(a), \quad g_n := g^{(n)}(a), \qquad f_k^{(a)} := f^{(k)}(g(a)), \quad g_k^{(a)} := g^{(k)}(f(a)),$$

akkor

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n=k,\\ k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}} \frac{1}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot f_k^{(a)} \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{g_i}{i!}\right)^{k_i} = \\ = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n=k,\\ k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}} \frac{1}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot g_k^{(a)} \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{f_i}{i!}\right)^{k_i}.\end{aligned} \tag{4.5.1}$$

Biz. A (4.5.1) formulát az (2.1.2) formulából kapjuk $n!$-sal történő egyszerűsítés után. ■

4.5.1. példa. Ha $a := 1$, ill.

$$f(x) := e^x \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g(x) := \ln(x) \quad (0 < x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$f^{(k)}(g(a)) = 1 \qquad \text{és} \qquad g^{(k)}(f(1)) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{e^k}.$$

Ennélfogva

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n=k,\\ k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}} \frac{1}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot \left(\frac{1}{1!}\right)^{k_1} \cdot \left(\frac{-1}{2!}\right)^{k_2} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}\right)^{k_n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n=k,\\ k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{e^k} \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{e}{i!}\right)^{k_i},$$

ahonnan egyszerűsítéssel a

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n=k,\\ k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}} \frac{1}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot \left(\frac{1}{1!}\right)^{k_1} \cdot \left(\frac{-1}{2!}\right)^{k_2} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}\right)^{k_n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n=k,\\ k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n! \cdot (1!)^{k_1} \cdot (2!)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (n!)^{k_n}}$$

formulához jutunk.

4.6. Momentumok és kumulánsok

Legyen (X, Ω, μ) Kolmogorov-mező, $\xi \in L$. Ekkor a $\xi : X \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó

$$F(t) := \mu(\{\xi < t\}) = \mu(\{x \in X : \ \xi(x) < t\}) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

eloszlásfüggvénye monoton növekedő, jobbról folytonos, továbbá

$$\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{t \to +\infty} F(t) = 1.$$

Ha $k \in \mathbb{N}$ és $\xi^k \in L$, akkor a ξ valószínűségi változó k-adrendű momentumára

$$m_k := M(\xi^k) = \int \xi^k \, d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \, dF(x)$$

(vö. pl. [14]). A ξ valószínűségi változó momentumai kifejezhetők

$$\phi_\xi(t) := M(\exp(\imath t \xi)) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\imath t x} \, dF(x) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

karakterisztikus függvényének segtségével, hiszen ha $\xi^k \in L$, akkor

$$m_k = M(\xi^k) = \frac{\phi_\xi^{(k)}(0)}{\imath^k} \tag{4.6.1}$$

(vö. [19]). Mivel ϕ_ξ folytonos és $\phi_\xi(0) = 1$, ezért van olyan $r > 0$ szám, hogy bármely $t \in (-r, r)$ esetén $\phi_\xi(t) > 0$. Ez ad lehetőséget a következő fogalom bevezetésére.

4.6.1. definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}$, (X, Ω, μ) Kolmogorov-mező. Ekkor a $\xi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó k-adik **kumuláns**ának nevezzük a

$$\kappa_n := \frac{1}{\imath^k} \cdot \frac{d^k}{dt^k} \ln\left(\phi_\xi(t)\right)\Big|_{t=0} \tag{4.6.2}$$

számot.

A momentumok és a kumulánsok az alábbi kapcsolatban vannak egymással.

4.6.1. tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}$, (X, Ω, μ) Kolmogorov-mező, majd tegyük fel, hogy a $\xi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi válzozóra $\xi^n \in L$. Ekkor

$$\kappa_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n=k,\\ k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}} \frac{n! \cdot (k-1)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{m_i}{i!}\right)^{k_i} \tag{4.6.3}$$

és

$$m_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n=k,\\ k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\kappa_i}{i!}\right)^{k_i}. \tag{4.6.4}$$

Biz. Az (4.6.3)-beli állítás (2.1.5), (4.6.1) és (4.6.2) közvetlen következménye. Az (4.6.4)-beli állítás pedig a $g := \phi_\xi$ választással (2.1.4), (4.6.1) és (4.6.2) következménye. Ekkor ui. $\phi_\xi = \exp\left(\ln\left(\phi_\xi\right)\right)$ ■

4.6.1. példa. Az (4.6.4)-beli formula következtében

$$\begin{aligned}
m_1 &= \kappa_1 \\
m_2 &= \frac{2!}{0! \cdot 1!} \cdot \frac{\kappa_2}{4!} + \frac{2!}{2! \cdot 0!} \cdot \left(\frac{\kappa_1}{1!}\right)^2 = \kappa_2 + \kappa_1^2, \\
m_3 &= \frac{3!}{0! \cdot 0! \cdot 1!} \cdot \frac{\kappa_3}{3!} + \frac{3!}{1! \cdot 1! \cdot 0!} \cdot \frac{\kappa_1}{1!} \cdot \frac{\kappa_2}{2!} + \frac{3!}{3! \cdot 0! \cdot 0!} \cdot \left(\frac{\kappa_1}{1!}\right)^3 = \kappa_3 + 3\kappa_1 \cdot \kappa_2 + \kappa_1^3. \\
m_4 &= \frac{4!}{0! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 1!} \cdot \frac{\kappa_4}{4!} + \frac{4!}{1! \cdot 0! \cdot 1! \cdot 0!} \cdot \frac{\kappa_1}{1!} \cdot \frac{\kappa_3}{3!} + \frac{4!}{0! \cdot 2! \cdot 0! \cdot 0!} \cdot \left(\frac{\kappa_2}{2!}\right)^2 + \\
&\quad + \frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 0! \cdot 0!} \cdot \left(\frac{\kappa_1}{1!}\right)^2 \cdot \frac{\kappa_2}{2!} + \frac{4!}{4! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 0!} \cdot \left(\frac{\kappa_1}{1!}\right)^4 = \\
&= \kappa_4 + 4 \cdot \kappa_1 \cdot \kappa_3 + 3 \cdot \kappa_2^2 + 6 \cdot \kappa_1^2 \cdot \kappa_2 + \kappa_1^4.
\end{aligned}$$

4.7. Speciális függvények

Ebben az alfejezetben néhány – a fizikai alkalmazásokban fontos szerepet játszó – két speciális függvény deriváltelőállításának felhasználásából következtetünk arra, hogy ezek a függvények valójában polinomok.

4.7.1. Hermite-polinomok

Ismeretes (vö. [10]), hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén a

$$H_n(x) := e^{x^2} \cdot \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény megoldása az

$$y''(x) - 2 \cdot x \cdot y'(x) + 2 \cdot n \cdot y(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

ún. n-edfokú **Hermite-féle differenciálegyenlet**nek. Mivel a

$$g(x) := -x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényre

$$g'(x) = -2x, \quad g''(x) = -2, \quad g^{(n)}(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R},\ 3 \leq n \in \mathbb{N}),$$

ezért a Faà-di-Bruno-formulát felhasználva (vö. 2.1.7. példa) azt kapjuk, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} H_n(x) &= e^{x^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2=k,\\ k_1+2k_2=n}} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2!} \cdot e^{-x^2} \cdot \left(\frac{-2x}{1!}\right)^{k_1} \cdot \left(\frac{-2}{2!}\right)^{k_2} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2=k,\\ k_1+2k_2=n}} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2!} \cdot (-1)^{k_1+k_2} \cdot (2x)^{k_1} \qquad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Következésképpen bármely $n \in \mathbb{N}_0$ indexre H_n polinom (**Hermite-polinom**). Az első néhány Hermite-polinomot részletesen kiírjuk:

- $n = 0$ esetén
$$H_0(x) = e^{x^2} \cdot e^{-x^2} = 1 \qquad (x \in \mathbb{R});$$
- $n = 1$ esetén $k = 1$, így
$$H_1(x) = (-1)^1 \cdot 2x = -2x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

- $n = 2$ esetén
$$(k_1, k_2) \in \{(0,1), (2,0)\},$$
így
$$H_2(x) = \frac{2!}{0! \cdot 1!} \cdot (-1)^1 \cdot (2x)^0 + (-1)^2 \frac{2!}{2! \cdot 0!} \cdot (2x)^2 = -2 + 4x^2 \qquad (x \in \mathbb{R});$$
- $n = 3$ esetén
$$(k_1, k_2, k_3) \in \{(1,1,0), (3,0,0)\},$$
és így
$$H_3(x) = \frac{3!}{1! \cdot 1!} \cdot (-1)^2 \cdot (2x)^1 + \frac{3!}{3! \cdot 0!} \cdot (-1)^3 \cdot (2x)^3 = 12x - 8x^3 \qquad (x \in \mathbb{R});$$
- $n = 4$ esetén
$$(k_1, k_2, k_3, k_4) \in \{(0,2,0,0), (2,1,0,0), (4,0,0,0)\},$$
és így
$$\begin{aligned} H_4(x) &= \frac{4!}{0! \cdot 2!} \cdot (-1)^2 \cdot (2x)^0 + \frac{4!}{2! \cdot 1!} \cdot (-1)^3 \cdot (2x)^2 + \frac{4!}{4! \cdot 0!} \cdot (-1)^4 \cdot (2x)^4 = \\ &= 12 - 48x + 16x^4 \qquad (x \in \mathbb{R}); \end{aligned}$$
- $n = 5$ esetén
$$(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) \in \{(1,2,0,0,0), (3,1,0,0,0), (5,0,0,0,0)\},$$
és így
$$\begin{aligned} H_5(x) &= \frac{5!}{1! \cdot 2!} \cdot (-1)^3 \cdot (2x)^1 + \frac{5!}{3! \cdot 1!} \cdot (-1)^4 \cdot (2x)^3 + \frac{5!}{5! \cdot 0!} \cdot (-1)^5 \cdot (2x)^5 = \\ &= 120x + 160x^3 - 32x^5 \qquad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

4.7.2. Legendre-polinomok

Némi számolással meggyőződhetünk róla (vö. [10]), hogy a bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén a
$$P_n(x) := \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$
függvény megoldása az
$$(1 - x^2) \cdot y''(x) - 2x \cdot y'(x) + n \cdot (n+1) \cdot y(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$
n-edfokú **Legendre-féle differenciálegyenlet**nek. Az
$$f(x) := x^n \qquad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és a} \qquad g(x) := x^2 - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényre tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f^{(k)}(x)\begin{cases} n^{[k]}x^k & (k \leq n),\\ 0 & (k > n),\end{cases} \qquad g'(x) = 2x, \quad g''(x) = 2, \quad g^{(n)}(x) = 0 \quad (3 \leq n \in \mathbb{N}),$$

ahol az $n^{[k]}$ Pochhammer-szimbólum jelentése a következő (vö. [15]):

$$n^{[k]} := \frac{n!}{(n-k)!} = \prod_{l=0}^{k-l} = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1).$$

Alkalmazva a Faà-di-Bruno-formulát azt kapjuk, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, ill. $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{k_1+k_2=k,\\ k_1+2k_2=n}}\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!}\cdot n^{[k]}(x^2-1)^k\cdot\left(\frac{2x}{1!}\right)^{k_1}\cdot\left(\frac{2}{2!}\right)^{k_2} = \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^k\cdot\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!\cdot(n-2k)!\cdot k!\cdot 2^n}\cdot x^{n-2k}, \end{aligned}$$

ahol

$$\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor := \begin{cases} \frac{n}{2} & (n \text{ páros}),\\ \\ \frac{n-1}{2} & (n \text{ páratlan}),\end{cases}$$

hiszen a binomiális tételt és a deriváltoperátor linearitását kihasználva

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{2n-2k}(-1)^k = \\ &= \frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\cdot\frac{d^n}{dx^n}x^{2n-2k} = \\ &= \frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^k\binom{n}{k}\cdot\frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}x^{n-2k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n\cdot k!\cdot(n-k)!\cdot(n-2k)!}x^{n-2k} \end{aligned}$$

adódik.

4.8. Az általánosított Leibniz-formula alkalmazásai

4.8.1. Az Abel-azonosság

Az alábbiakban az (1.0.1) általánosított Leibniz-formula következő speciális esetével foglalkozunk. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$, $2 \le r \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{C}$, $\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{C}^r$, illetve $z \in K(a)$ esetén legyen

$$h(z) := \exp(-cz),$$

$$f_i(z) := \exp(a_i z) \cdot \frac{h(z) - h'(z)(z-a)}{h(z)} = \exp(a_i z) \cdot (1 + c(z-a)) \quad (i \in \{1, \dots, r-1\}),$$

$$f_r(z) := \exp((a_r + nc)z).$$

Ekkor

$$\frac{d^{k_i}}{dz^{k_i}} \left(h^{k_i} f_i\right)(z) =$$

$$= \frac{d^{k_i}}{dz^{k_i}} \exp\left((a_i - k_i c)z\right) \cdot (1 + c(z-a)) =$$

$$= \frac{d^{k_i-1}}{dz^{k_i-1}} (a_i - k_i c) \cdot \exp\left((a_i - k_i c)z\right) \cdot (1 + c(z-a)) + \exp\left((a_i - k_i c)z\right) \cdot c =$$

$$= \frac{d^{k_i-2}}{dz^{k_i-2}} \left\{(a_i - k_i c)^2 \cdot \exp\left((a_i - k_i c)z\right) \cdot (1 + c(z-a)) + \right.$$

$$\left. +2 \cdot (a_i - k_i c) \cdot \exp\left((a_i - k_i c)z\right) \cdot c\right\} =$$

$$= \frac{d^{k_i-3}}{dz^{k_i-3}} \left\{(a_i - k_i c)^3 \cdot \exp\left((a_i - k_i c)z\right) \cdot (1 + c(z-a)) + \right.$$

$$\left. +3 \cdot (a_i - k_i c)^2 \cdot \exp\left((a_i - k_i c)z\right) \cdot c\right\} =$$

$$\vdots$$

$$= (a_i - k_i c)^{k_i} \cdot \exp\left((a_i - k_i c)z\right) \cdot (1 + c(z-a)) + k_i \cdot (a_i - k_i c)^{k_i - 1} \cdot \exp\left((a_i - k_i c)z\right) \cdot c =$$

$$= (a_i - k_i c)^{k_i - 1} \cdot \exp\left((a_i - k_i c)z\right) \cdot \{(a_i - k_i c) \cdot (1 + c(z-a)) + k_i c\} =$$

$$= (a_i - k_i c)^{k_i - 1} \cdot \exp\left((a_i - k_i c)z\right) \cdot \{a_i + (a_i - k_i c) \cdot c \cdot (z-a)\} =$$

$$= a_i \cdot (a_i - k_i c)^{k_i - 1} \cdot \exp\left((a_i - k_i c)z\right) + (a_i - k_i c)^{k_i} \cdot \exp\left((a_i - k_i c)z\right) \cdot c \cdot (z-a),$$

ill.

$$\frac{d^{k_r}}{dz^{k_r}} \left(h^{k_r} f_r\right)(z) = \frac{d^{k_r}}{dz^{k_r}} \exp\left((a_r + c(n - k_r))z\right) = (a_r + (n - k_r)c)^{k_r} \cdot \exp\left((a_r + c(n - k_r))z\right),$$

továbbá

$$\frac{d^n}{dz^n}\frac{h^{n+r-1}(z)\prod_{i=1}^{r} f_i(z)}{(h(z)-h'(z)(z-a))^{r-1}} =$$

$$= \frac{d^n}{dz^n}\frac{\exp(-c(n+r-1)z)\cdot\exp(|\mathbf{a}|z+ncz)\cdot(1+c(z-a))^{r-1}}{(\exp(-cz)+c\exp(-cz)(z-a))^{r-1}} =$$

$$= \frac{d^n}{dz^n}\frac{\exp(-c(n+r-1)z)\cdot\exp(|\mathbf{a}|z+ncz)\cdot(1+c(z-a))^{r-1}}{\exp(-c(r-1)z)\cdot(1+c(z-a))^{r-1}} =$$

$$= \frac{d^n}{dz^n}\exp(-cnz)\cdot\exp(|\mathbf{a}|z+ncz) = \frac{d^n}{dz^n}\exp(|\mathbf{a}|z) = |\mathbf{a}|^n\cdot\exp(|\mathbf{a}|z).$$

Következésképpen

$$\sum_{|\mathbf{k}|=n}\binom{n}{\mathbf{k}}\prod_{i=1}^{r}(h^{k_i}f_i)^{(k_i)}(a) =$$

$$= \sum_{|\mathbf{k}|=n}\binom{n}{\mathbf{k}}\left[\prod_{i=1}^{r-1} a_i\cdot(a_i-k_ic)^{k_i-1}\right]\cdot(a_r+(n-k_r)c)^{k_r}\cdot\exp\left(|\mathbf{a}|a-c|\mathbf{k}|a+cna\right) =$$

$$= \sum_{|\mathbf{k}|=n}\binom{n}{\mathbf{k}}\left[\prod_{i=1}^{r-1} a_i\cdot(a_i-k_ic)^{k_i-1}\right]\cdot(a_r+(n-k_r)c)^{k_r}\cdot\exp\left(|\mathbf{a}|a\right),$$

ahonnan az $\exp(|\mathbf{a}|a)\neq 0$ számmal osztva alábbi tételben megfogalmazott állítás következik.

4.8.1. tétel. Ha $n\in\mathbb{N}_0$, $2\le r\in\mathbb{N}$, és $\mathbf{a}\in\mathbb{C}^r$, $c\in\mathbb{C}$, akkor

$$\sum_{|\mathbf{k}|=n}\binom{n}{\mathbf{k}}\left[\prod_{i=1}^{r-1}(a_i(a_i-k_ic)^{k_i-1})\right](a_r+(n-k_r)c)^{k_r} = |\mathbf{a}|^n. \tag{4.8.1}$$

4.8.1. következmény. Az $r=2$ esetben, ha $\mathbf{a}:=(x,y)\in\mathbb{C}^2$, ill. $c\in\mathbb{C}$, akkor igaz a

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x(x-kc)^{k-1}(y+kc)^{n-k} = (x+y)^n \tag{4.8.2}$$

Abel-azonosság (vö. [1]).

Megjegyezzük, hogy $c:=0$ esetén (4.8.2) nem más, mint a

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x(x-k0)^{k-1}(y+k0)^{n-k} = (x+y)^n$$

binomiális tétel.

4.8.2. A binomiális azonosság

Legyen $n \in \mathbb{N}_0$, $2 \leq r \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{N}^r$, illetve $z \in K(a)$ esetén legyen

$$h(z) := z \qquad (z \in \mathbb{C}), \quad \text{ill.} \quad f_i(z) := z^{a_i} \quad (i \in \{1, \dots, r\},\ z \in K(a)).$$

Ekkor tetszőleges $z \in K(a)$ esetén

$$\frac{d^{k_i}}{dz^{k_i}}\left(h^{k_i} f_i\right)(z) = \frac{d^{k_i}}{dz^{k_i}} z^{k_i} = \frac{(k_i + a_i)!}{a_i!} \cdot z^{a_i},$$

és így (1.0.4) bal oldala nem más, mint

$$\begin{aligned}
a^{r-1} \sum_{|\mathbf{k}|=n} \binom{n}{\mathbf{k}} \prod_{i=1}^{r} \frac{d^{k_i}}{dz^{k_i}}\left(h^{k_i} f_i\right)(a) &= a^{r-1} \cdot \sum_{|\mathbf{k}|=n} \binom{n}{\mathbf{k}} \prod_{i=1}^{r} \frac{(k_i + a_i)!}{a_i!} \cdot a^{a_i} = \\
&= a^{r-1} \cdot \sum_{|\mathbf{k}|=n} \binom{n}{\mathbf{k}} \left(\prod_{i=1}^{r} \frac{(k_i + a_i)!}{a_i!}\right) \cdot a^{|\mathbf{a}|} = \\
&= \sum_{|\mathbf{k}|=n} \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_r!} \cdot \left(\prod_{i=1}^{r} \frac{(k_i + a_i)!}{a_i!}\right) \cdot a^{|\mathbf{a}|+r-1} = \\
&= \sum_{|\mathbf{k}|=n} n! \cdot \left(\prod_{i=1}^{r} \frac{(k_i + a_i)!}{k_i! \cdot a_i!}\right) \cdot a^{|\mathbf{a}|+r-1} = \\
&= \sum_{|\mathbf{k}|=n} n! \cdot \left(\prod_{i=1}^{r} \binom{k_i + a_i}{a_i}\right) \cdot a^{|\mathbf{a}|+r-1}.
\end{aligned}$$

Az (1.0.4) egyenlőség jobb oldala pedig

$$\begin{aligned}
\left(h^{n+r-1} \prod_{i=1}^{r} f_i\right)^{(n)}(a) &= \left(\frac{d^n}{dz^n} z^{n+r-1} \cdot \prod_{i=1}^{r} z^{a_i}\right)_{z=a} = \left(\frac{d^n}{dz^n} z^{|\mathbf{a}|+n+r-1}\right)_{z=a} = \\
&= \frac{(|\mathbf{a}| + n + r - 1)!}{(|\mathbf{a}| + r - 1)!} \cdot a^{|\mathbf{a}|+r-1} = \\
&= \frac{(|\mathbf{a}| + n + r - 1)!}{n! \cdot (|\mathbf{a}| + r - 1)!} \cdot n! \cdot a^{|\mathbf{a}|+r-1} = \\
&= \binom{n + |\mathbf{a}| + r - 1}{n} \cdot n! \cdot a^{|\mathbf{a}|+r-1}.
\end{aligned}$$

ahonnan az $n! \cdot a^{|\mathbf{a}|+r-1} \neq 0$ számmal való osztással alábbi tételben megfogalmazott állítást kapjuk.

4.8.2. tétel. Ha $n \in \mathbb{N}_0$, $2 \leq r \in \mathbb{N}$ és $\mathbf{a} := (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{C}^r$, akkor fennáll a

$$\sum_{|\mathbf{k}|=n} \prod_{i=1}^{r} \binom{k_i + a_i}{k_i} = \binom{n + |\mathbf{a}| + r - 1}{n}. \tag{4.8.3}$$

egyenlőség (**binomiális azonosság**).

4.8.2. következmény. Az $r = 2$ esetben, ha $\mathbf{a} := (x, y) \in \mathbb{N}^2$, akkor igaz a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k + x}{k} \binom{n - k + y}{n - k} = \binom{n + x + y + 1}{n} \tag{4.8.4}$$

egyenlőség.

4.8.3. A Rothe-Hagen-azonosság

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$, $2 \leq r \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{C}$, $\mathbf{a} := (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{C}^r$, illetve $z \in K(a)$ esetén legyen

$$\begin{aligned} h(z) &:= z^{-c} := \exp\left(-c \cdot \log(z)\right), \\ f_i(z) &:= z^{a_i} \cdot \frac{h(z) - h'(z)(z - a)}{h(z)} = z^{a_i} \cdot \left(1 + c - \frac{ca}{z}\right) \qquad (i \in \{1, \ldots, r-1\}), \\ f_r(z) &:= z^{a_r + nc}. \end{aligned}$$

A fentiekhez hasonló számolások elvégzésével azt kapjuk (vö. [3]), hogy igaz a

4.8.3. tétel.

$$\sum_{|\mathbf{k}|=n} \binom{n}{\mathbf{k}} \left[\prod_{i=1}^{r-1} \left(\frac{a_i}{a_i - k_i c} \binom{a_i - k_i c}{k_i} \right) \right] \binom{a_r + (n - k_r)c}{k_r} = \binom{|\mathbf{a}|}{n} \tag{4.8.5}$$

Az $r = 2$, ill. $\mathbf{a} = (x, y) \in \mathbb{N}^2$ esetben (4.8.5) pedig

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x}{x - kc} \binom{x - kc}{k} \cdot \binom{y + kc}{n - k} = \binom{x + y}{n}$$

alakú.

Irodalomjegyzék

[1] ABEL, N. H.: *Beweis eines Ausdruckes, von welchem die Binomial-Formel ein einzelner Fall ist*, J. Reine Angew. Math. **10** (1826), 159–160.

[2] ABEL, U.: *A Generalization of the Leibniz Rule*, Amer. Math. Monthly **120**(10) (2013), 924–928.

[3] ABEL, U.: *Applications of a Generalized Leibniz Rule*, Constructive theory of functions, Sozopol, pp. 1-9. (2013).

[4] APOSTOL, T. M.: *Note sur un nouvelle formule de calcul différentiel.*, Amer. Math. Monthly, **107**(8) (2000), 738–741.

[5] FAÀ DI BRUNO, C. F.: *Sullo sviluppo delle funzione.*, Ann. di Scienze Matem. et Fisiche di Tortoloni. **6** (1855), 479–480.

[6] FAÀ DI BRUNO, C. F.: *Note sur un nouvelle formule de calcul différentiel.*, Quart. J. Math. **1** (1857), 359–360.

[7] DANNAN, F. M.; ELAYDI, S. N.; PONOMARENKO, V.: *Stability of hyperbolic and nonhyperbolic fixed points of one-dimensional maps.*, J. Difference Equ. Appl. **9**(5) (2003), 449–457.

[8] DVORYANINOV, S. V.; SILVANOVICH, M.: *On Faà di Bruno Formula for Composite Derivatives.*, Math. Ed. **1**(49) (2009), 22–26.

[9] ELAYDI, S. N.: *An introduction to difference equations*, Springer, New York, 2005.

[10] FARKAS, M.: *Speciális függvények*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1964.

[11] HE, TIANXIAO; LIAO, JEFF H.-C.; SHIUE, PETER J.-S.: *Application of Faà di Bruno's formula in the Construction of Combinatorial Identities.*, J. Comb. Number Theory **7**(3) (2009), 65–84.

[12] HUANG, H.-N.; MARCANTOGNINI, S. A. M.; YOUNG, N. J.: *Chain rules for higher derivatives.*, Math. Intelligencer. **28**(2) (2005), 61–69.

[13] JOHNSON, W. P.: *The curious history of Faà di Bruno's formula.*, Amer. Math. Monthly **109**(3) (2002), 217–234.

[14] KOVÁCS, S.: *Alkalmazott analízis gyakorlat*, Budapest, 2018. ISBN 978-963-489-032-4 (http://numanal.inf.elte.hu/~alex/AlkAnalGyak/AlkAnalGyakKS.pdf).

[15] KOVÁCS, S.: *Differenciaegyenletek*, Typotex Kiadó, Budapest, 2020.

[16] KRANTZ, S. G.; PARKS, H. R.: *A primer of real analytic functions*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002.

[17] LUKACS, E.: *Applications of Faà di Bruno's formula in mathematical statistics.*, Amer. Math. Monthly **62** (1955), 340–348.

[18] MISHKOV, T. L.: *Generalization of the Formula of Faa di Bruno for a composite function with a vector argument*, Internat. J. Math. & Math. Sci. **24**(7) (2000), 481–491.

[19] RÉNYI, A.: *Valószínűségszámítás*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.

[20] REYNOLDS, J. B.: *Discussions and Notes: Reversion of Series with Applications*, Amer. Math. Monthly **51**(10) (2000), 578–580.

[21] SIMON, P.: *Bevezetés az analízisbe 1*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2016.

[22] SIMON, P.: *Bevezetés az analízisbe 2*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2016.

[23] SPINDLER, K.: *A short proof of the formula of Faà di Bruno.*, Elem. Math. **60**(1) (2005), 33–35.

[24] *A hét szentje Boldog Francesco Faa di Bruno*, Új Ember (2019. 03. 24-i szám).

[25] SANDEFUR, J. T.: *Discrete Dynamical Systems*, The Clarendon Press/Oxford University Press, New York, 1990.

[26] SCHÄFER, J.: *Artikel Franz Faà di Bruno*, Ökumenisches Heiligenlexikon (https://www.heiligenlexikon.de/BiographienF/Franz_Faa_Bruno.html).

[27] SPIVAK, M.: *Calculus*, Publish or Perish, Inc., Houston, Texas, 1994.

[28] WANG, XINGHUA; XU, AIMIN: *On the divided difference form of Faa di Bruno's formula II.*, J. Comput. Math. **25**(6) (2007), 697–704.

[29] ZHAO, XI-QIANG; WANG, TIAN-MING: *Some strange identities related to Faà di Bruno formula.*, J. Math. Res. Exposition **21**(2) (2001), 215–218.

Patzer Erika,
alkalmazott matematika szakos egyetemi hallgató
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar,
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C,
ceruza11.14@gmail.com