

NYILATKOZAT

Név: SIMON MÁTÉ

ELTE Természettudományi Kar, szak: BSc matematikus

NEPTUN azonosító: GHLKWP

Szakdolgozat címe:

1 - 2 - 3 sejtés

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2021. május 30.



a hallgató aláírása

AZ 1-2-3 SEJTÉS

Simon Máté

Matematika BSc

Alkalmazott matematikus szakirány

Szakedolgozat

Témavezető:

Madarasi Péter

ELTE Matematikai Intézet,

Operációkutatási Tanszék



Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest, 2021

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
1.1. A sejtés	1
1.1.1. Motiváció	2
1.2. Ismerkedés a problémával	3
1.2.1. Utak	3
1.2.2. Körök	4
1.2.3. Fák	5
1.2.4. Páros gráfok	5
2. Eddigi eredmények	7
3. 1-2 tulajdonság	8
3.1. NP-teljesség	9
4. Páros gráfok 1-2 karakterizációja	12
4.1. Bevezetés	12
4.2. Karakterizáció	13
4.2.1. Első karakterizáció	13
4.2.2. Második karakterizáció	14
4.2.3. Két karakterizáció ekvivalenciája	14
4.3. Egy páros gráf páratlan multi-kaktusz-e polinom időben	15
5. Változatok	18
5.1. Élsúlyozások	18
5.2. Csúcs és totális súlyozások	22
6. Az 1-2-3 sejtés vizsgálata számítógépes módszerekkel	24
6.1. Az IP modell	24
6.2. Számítógépes eredmények	26
6.2.1. Megkezdett súlyozás befejezhetősége	27
7. Gráfok (a,b) súlyozásának nehézsége	30
8. Összefoglalás	38

Köszönetnyilvánítás

Hatalmas köszönettel tartozom témavezetőmnek, Madarasi Péternek, aki bevezetett az operációkutatás világába és tanácsaival, ötleteivel segítette a szakdolgozatom létrejöttét, továbbá biztosította a lehetőséget az ELTE Atlasz szuperszámítógép használatához.

Továbbá köszönöm a barátnőmnek e dolgozat nyelvezetének fáradthatatlan javíttatását és családomnak a támogatást tanulmányaim során.

1. Bevezetés

Az 1-2-3 sejtés szerint minden legalább két élű összefüggő gráf élei megsúlyozhatóak az 1, 2, 3 számokkal úgy, hogy a csúcsokra az oda illeszkedő élek súlyösszegét írva egy megengedett csúcsszínezést kapunk. A szakdolgozatomban a sejtéssel kapcsolatos eddigi eredményeket és néhány a sejtés ihlette új területet fogunk bemutatni. A dolgozatban felvetünk néhány új kérdést és számos új megfigyelést teszünk.

A dolgozat felépítése a következő: Először magával a sejtéssel és annak eredetével fogunk megismerkedni, majd ezután prezentálunk néhány a sejtéssel kapcsolatos eddigi eredményt. Ezt követően az $\{1, 2, 3\}$ halmazról áttérünk az $\{1, 2\}$ halmazra, és többek között megmutatjuk, hogy az élek súlyait az $\{1, 2\}$ halmazból választva NP-teljes annak eldöntése, hogy egy gráf rendelkezik-e az 1-2 tulajdonsággal. Ugyanakkor páros gráfokra egy teljes karakterizációt fogunk adni a [10]-es cikk alapján, és ezt felhasználva kidolgozunk egy polinomiális algoritmust is az 1-2 tulajdonságú páros gráfok felismerésére — ami jelenlegi ismereteink szerint eddig nem jelent meg a szakirodalomban. Ezek után megismerkedünk más típusú színezésekkel, például a csúcsokra nem az éleik súlyainak összegét írjuk, hanem szorzatát. Majd egy IP modellel leírjuk, modellezük az eredeti problémát, és bemutatjuk, hogy az ELTE szuperszámítógépén, az Atlaszon [32] milyen eredményeket értünk el. Többek között ellenőrizzük, hogy a sejtés igaz legfeljebb 12 csúcsú összefüggő gráfokon. Végül, de nem utolsósorban bemutatjuk a szakdolgozat fő új eredményét, miszerint az élek súlyait a tetszőlegesen lerögzített nemnegatív racionális (a, b) párból választva NP-teljes annak eldöntése is, hogy egy tetszőleges gráf rendelkezik-e megengedett (a, b) élsúlyozással, ami a [10]-es cikkben szereplő eredmény — ahol ezt csak a $(0, 1)$ és az $(1, 2)$ számpárokra mondják ki — messze menő általánosítása.

1.1. A sejtés

Legyen G egy tetszőleges, egyszerű, véges, irányítatlan gráf. 2004-ben Karoński, Łuczak és Thomason [1] a következő sejtést fogalmazták meg:

1-2-3 sejtés *Legyen G egy tetszőleges gráf, aminek nincs K_2 -vel izomorfkomponense. Ekkor G éleihez hozzárendelhetőek súlyok az $\{1, 2, 3\}$ halmazból, hogy bármely szomszédos u, v csúcsokra, az u -ra illeszkedő élek súlyainak az összege különbözik v ezen összegétől.*

Vezessünk be néhány rövid fogalmat, hogy a későbbiekben könnyebben tudjunk beszélni erről a témáról.

Az $él$ k -súlyozás alatt egy $w : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ hozzárendelést értünk, azaz G éleihez rendelünk súlyokat az $\{1, 2, \dots, k\}$ halmazból. Azt mondjuk, hogy ez az $él$ k -súlyozás *megengedett*, hogyha a $z : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}^+$ indukált csúcs címkézés, ahol $z(v) = \sum_{e \in E(v)} w(e)$ egy megengedett színezés, azaz ha tetszőleges $e = uv \in E$,

akkor $z(u) \neq z(v)$, ahol $E(v)$ a v -re illeszkedő éleket jelenti.

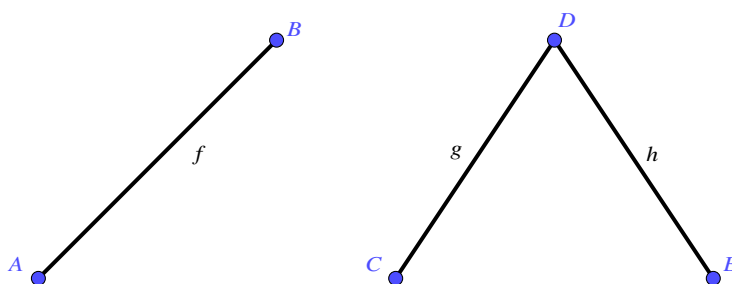
1.1. Megjegyzés. Ha $k = 2$, akkor az él 2-súlyozást gyakran 1-2 élsúlyozásnak nevezzük.

Ha egy G gráf rendelkezik megengedett él 3-súlyozással, akkor azt mondjuk, hogy G 1-2-3 tulajdonságú (hasonlóan definiálható, ha más a k értéke). Végül jelöljük $\chi_{\Sigma}^e(G)$ -vel, azt a legkisebb k számot, amire létezik megengedett él k -súlyozás. Azt mondjuk, hogy G szép, ha nincsen izolált éle.

Tehát az 1-2-3 sejtés így fogalmazható meg rövidebben:

1.2. Sejtés (Karoński, Łuczak és Thomason [1]). *Legyen G szép, ekkor G rendelkezik megengedett él 3-súlyozással.*

Láthatjuk a 1. ábrán, hogy az első esetben bármilyen valós számot írunk f -re $z(a)$ meg fog egyezni $z(b)$ -vel. Ezért is kell ezt az esetet kizárni, mikor erről a témáról beszélünk. Ezzel szemben, bárhogy súlyozzuk a g, h éleket a második esetben az $\{1, 2, \dots, k\}$ halmazból tetszőleges k -ra, mindig egy megengedett indukált színezést fogunk kapni.



1. ábra. Két egyszerű példa

1.1.1. Motiváció

Az 1-2-3 sejtés egy másik hasonlóan érdekes témakör — az "irreguláris" gráfok — tanulmányozásából származik. Ismerkedjünk meg tehát azzal, hogy milyen is egy lehet egy "irreguláris" gráf.

Egy egyszerű megfigyelés alapján nincsen a reguláris gráfoknak "ellentettje", azaz olyan gráf, amelynek minden fokszáma különböző lenne. Mégpedig azért, mert tegyük fel, hogy G tetszőleges n csúcsú gráf. Ekkor n különböző fokszáma lehet,

mégpedig $0, 1, \dots, n - 1$. Csak úgy lehet minden fokszáma különböző, hogy minden fokszámhoz az előbbiek közül pontosan egy csúcs van rendelve. Viszont ez nem lehet, mivel nem lehet 0 és $(n - 1)$ is egyszerre fokszám. Lehetséges alternatív definíció, az irreguláris gráfokra Chartrand, Erdős és Oellermann [25] cikkében olvasható. Mások, mint például Chartrand [26] alternatív definíciók helyett, inkább azt a problémát vizsgálták, hogy egy adott gráf mennyire irreguláris. Ez alatt azon legkisebb k értéknek a megadását értjük egy tetszőleges egyszerű G gráfhoz, ahol megengedjük az élek többszörözését és akár minden élet kicserélve legfeljebb k párhuzamos élre a kapott G' multigráf irreguláris lesz (azaz minden csúcsának különböző a fokszáma). Ezt a minimális k értéket *irregularitási erősségnek* nevezzük, és bővebb információkat például a következő cikkekben olvashatunk erről a témáról: [27], [28], [29].

Láthatjuk, hogy ahogy elkezdték kutatni ezt a területet, hamar szóba került, az irregularitási erősségnek a lokális változata is, ahol nem azt követeljük meg, hogy a kapott multigráfban minden csúcs fokszáma különböző legyen, hanem csak azt, hogy a szomszédos csúcsok fokszáma legyen különböző. Vegyük észre, hogy éltöbbszörözés helyett vehetjük az éleknek egy k -súlyozását, csak ekkor a fokszámokra koncentráció helyett, a fent bevezetett indukált z címkézéssel foglalkozunk. Tehát eljutottunk a diplomamunkámban tárgyalt témakörhöz és megjegyezhetjük, hogy ennek a problémakörnek a vizsgálata, legalább akkora figyelemben részesül, mint az előbb tárgyalt irregularitási erősség témaköre — nagymértékben az 1-2-3 sejtésnek köszönhetően.

1.2. Ismerkedés a problémával

Ebben a fejezetben megnézzük, hogy néhány speciális gráf éleihez hogyan tudjuk hozzárendelni az 1, 2, 3 illetve az 1, 2 számokat, hogy megengedett él 2-, illetve 3-súlyozást kapjunk, ezzel jobban megismerkedve a problémával.

1.2.1. Utak

1.3. Állítás. *Minden legalább két hosszú út 1-2 tulajdonságú. Ezáltal 1-2-3 tulajdonságú is.*

Bizonyítás. Nézzük az út éleit sorban, az egyik végétől elindulva. Ekkor az első két élhez 1-et rendelünk, a második kettőhöz 2-őt, majd a következő kettőhöz megint 1-et és így tovább amíg a végére nem érünk. Láthatjuk, hogy így egy megengedett él 2-súlyozást kapunk, mert az első és utolsó csúcs színe mindenképpen különbözik a szomszédjaiktól, a második csúcstól kezdődően pedig periodikusan a 2,3,4,3 számok követik egymást. Azt gondoljuk még meg, hogy az első két élünk súlyválasztásán kívül, semekkora szabadságunk nincsen. Mert ha az első két élet lerakjuk tetszőlegesen, akkor vegyük észre, hogy a harmadik élsúly nem egyezhet meg, az

első élsúlyával, mivel akkor $z(v_2) = z(v_3)$ teljesülne, ahol v_i az út i -edik csúcsa. Így a harmadik élre kötelezőek vagyunk az elsőtől különbözőt rakni és mivel csak két súlyunk van, ezért semekkora szabadságunk sincsen. Végül jegyezzük meg, hogy ha egy gráf 1-2 tulajdonságú, akkor 1-2-3 tulajdonságú is. Ez pedig nyilván teljesül, mert csak nem használjuk a harmadik, 3-as súlyt. \square

1.2.2. Körök

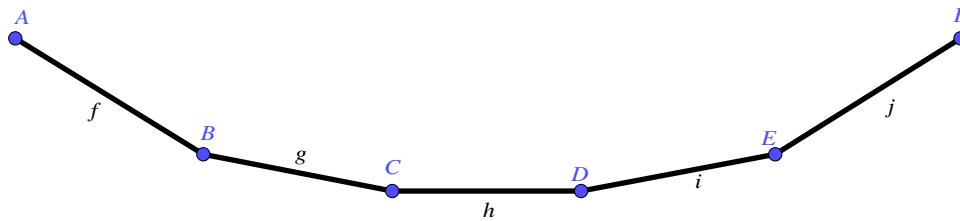
1.4. Állítás. *A 0 mod 4 hosszú körök 1-2 tulajdonságúak, minden más hosszú kör csak 1-2-3 tulajdonságú.*

Bizonyítás. Az utaknál láttuk, hogy csak az első két élünket választhatjuk meg szabadon, utána meg van kötve a kezünk. Szóval a körök esetében is, ha csak az 1, 2 számokat akarjuk használni, hasonlóan járhatunk el. Kiindulva egy tetszőleges élből és sorra haladva rajtuk, színezhajjuk az éleket, mint az utaknál. Viszont az utakkal ellentétben vissza fogunk érni oda, ahonnan indultunk és ott is teljesülnie kell a feltételeknek. Ami azt jelenti, hogy a kör éleinek a súlyainak rendre a 1122 mintát kell követni, azon észrevétel alapján, hogy az i -edik élsúlyának különbözőnek kell lennie az $(i - 2)$ -edik élsúlyától. Továbbá mikor körbe érünk, akkor is teljesülnie kell ennek a mintának. Ezzel beláttuk, hogy egy kör csak akkor 1-2 tulajdonságú, hogyha $4k$ hosszú, ahol k tetszőleges természetes szám.

Most vegyük át még azt is, hogy azért az összes többi kör, 1-2-3 tulajdonságú, úgy, hogy adunk egy konkrét konstrukciót rájuk. Alapvetően az összes eddig nem tárgyalt kört kezdjük el, a fent is használt 1122 mintával színezn, az f éltől balra amint a 2. ábrán láthatjuk. Amint láttuk, csak a végén lehet probléma. Ha a körünk:

1. 1 mod 4 hosszú, akkor az utolsó élt, g -t válasszuk 3-nak. Ekkor $z(A) = 2$, $z(B) = 4$, $z(C) = 5$, $z(D) = 4$, szóval itt nem lett gond, máshol pedig nem lehet, az előzőekben átgondoltak alapján.
2. 2 mod 4 hosszú, akkor az utolsó előtti és az utolsó élt, azaz h -t és g -t is válasszuk 3-nak. Ekkor $z(A) = 2$, $z(B) = 4$, $z(C) = 6$, $z(D) = 5$, $z(E) = 4$, szóval itt sem lett gond, máshol pedig nem lehet.
3. 3 mod 4, azaz $4k + 3$ hosszú, akkor a $4k + 1$. élt, i -t 1-nek, a $4k + 2$ -at, h -t 3-nak, végül az utolsó, g -t 2-nek válasszuk. Ekkor $z(A) = 2$, $z(B) = 3$, $z(C) = 5$, $z(D) = 4$, $z(E) = 3$, $z(F) = 4$ tehát itt sem lett gond, máshol pedig nem lehet.

\square



2. ábra. Kör részlet, a színezésben f az első él, és g az utolsó

1.2.3. Fák

1.5. Állítás. Minden nem egy élű fa 1-2 tulajdonságú.

Bizonyítás. Az állítás belátásához egy algoritmust fogunk adni, amely generál egy megengedett 1-2 élsúlyozást. Legyen az algoritmusunk, ami megsúlyozza az éleket a következő: Futtassunk le egy szélességi keresést, még pedig azzal a módosítással, hogy mikor az u csúcsban vagyunk, és végig megyünk a belőle kimenő éleken, akkor először minden élt, amelyikhez nem rendeltünk még számot, a kettes színűre állítsunk. Ezután nézzük meg, hogy még mindig jó színezésünk van-e, azaz azt kell ellenőrizni, hogy $z(u) \neq z(p(u))$ teljesül-e, ahol $p(u)$ -val jelöljük u szülőjét a bejárásban (legelső csúcsnál ezt kihagyjuk). Ha pedig $z(u)$ megegyezne $z(p(u))$ -val, akkor az újonnan színezett élek közül tetszőlegesen színezzünk át egyet egyesre. Azt állítjuk, hogy ez az algoritmus egy jó 1-2 élsúlyozást ad.

Ez pedig azért van így, mert egyrészt az összes v csúcs színe, ami nem levél a BFS fában, különbözik $p(v)$ színétől, mert ugye, ha megegyezett tudtunk rajta állítani. Másrészt, ha w egy levél csúcs a BFS fában, akkor $d(p(w)) \geq 2$ (mert az egyetlen élből álló fa kivan zárva), így $z(w) = z(p(w))$ sem teljesülhet, mert minden élhez legalább 1 van rendelve. \square

1.2.4. Páros gráfok

Páros gráfokkal kapcsolatban viszont már nem lesz igaz, hogy az összes páros gráf 1-2 tulajdonságú, azonban a 4. fejezetben látni fogjuk, hogy karakterizálhatóak azok a páros gráfok amelyek nem azok. Ebben az alfejezetben egy érdekes tulajdonságát mutatjuk be a páros gráfoknak, ami a [3]-as cikkben is megtalálható bizonyítás nélkül.

1.6. Állítás. Ha G szép páros gráfban van egy v levél csúcs, azaz olyan csúcs melyre $\deg(v) = 1$, akkor G 1-2 tulajdonságú.

Bizonyítás. Legyen G a páros gráfunk. Futtassunk le egy szélességi keresést a G -n. Azt szeretnénk elérni, hogy minden u csúcsra (a gyökért leszámítva), $z(u)$ paritása

megegyezzen a szint paritásával, röviden azért, mert mint látni fogjuk, az így kapott színezéssel egy megengedett 1-2 élsúlyozást kapunk. Nézzük, ezt hogyan tudjuk elérni.

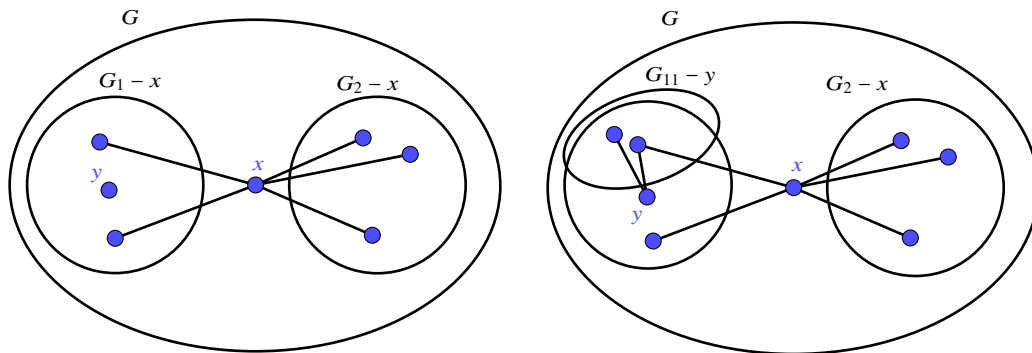
A szélességi bejárás után rázzuk meg úgy a fánkat, hogy a gyökércsúcs egy levél legyen a fában és az eredeti gráfban is. Ezt megtehetjük, mert mindenképpen van levél G -ben. Az így kapott fának legyen a mélysége m . Igazából ezt elérhetjük úgy is, ha a v levél csúcsból futtatjuk a szélességi keresést. Milyen fa kívüli élek lehetnek a gráfban? Ha a BFS szerinti bejárást nézzük, akkor páros szintről páratlanra, és páratlanról párosra menő nem fa élek lehetnek a bejárásnak köszönhetően, mivel a gráfunkban, csak páros hosszú körök lehetnek. Ezért tűztük ki magunknak az említett célt. Tehát induljunk ki a fa leveleiből a m -edik szinten. Az ezekből kiinduló összes élre úgy írjuk a számokat, hogy amit írunk szám paritása megegyezzen m paritásával. Majd mikor a m -edik szinttel végeztünk, akkor folytassuk a $(m - 1)$ -edik szinttel a következőképpen:

A szélességi fában minden csúcsból felfelé pontosan egy él megy. Ezért számoljuk össze a beérkező éleken lévő számok összegét (ha egy levél csúcsot nézünk, akkor ez 0 lesz), és ha ennek az összegnek a paritása megegyezik a szint paritásával, akkor a felfelé menő élre 2-est írunk, egyébként 1-est. Minden más nem fa élre írunk 2-est. Így eltudjuk érni, a kitűzött célt, kivéve egy csúcson, a gyökércsúcson, v -n, mert abból nem megy felfelé él — amit felhasználva beállíthatnánk az ő paritását. De vegyük észre, hogy ott sem lehet gond, mert v gyerekeire illeszkedik még legalább egy él, mivel feltettük, hogy G szép, szóval lehet, hogy v szintjének paritása nem egyezik meg $z(v)$ -vel, de ez nem baj, mert $z(v) \neq z(w)$, ahol w, v gyereke. Tehát a súlyozás, amit az algoritmus ad egy megengedett él 2-súlyozás. \square

1.7. Következmény. Minden szép páros gráfban létezik olyan v csúcs, hogy v -ből elhagyható legfeljebb $\deg(v) - 1$ él, hogy a keletkező gráf 1-2 tulajdonságú legyen.

Bizonyítás. Láthatjuk, hogyha a G gráfunk 1-2 tulajdonságú, akkor rendben vagyunk. Ha pedig G nem 1-2 tulajdonságú, akkor pedig az előző állítás alapján tudhatjuk, hogy G -nek nincs levél csúcsa, azaz $d(w) \geq 2$ tetszőleges w csúcsra.

Azt állítjuk, hogy létezik v csúcs G -ben amely nem elvágó csúcs. Tegyük fel, hogy nem így van és minden csúcs elvágó csúcs. Ekkor tetszőleges x csúcsot elhagyva a gráfunk legalább két kisebb részre esik, az egyszerűség kedvéért azt az esetet nézzük mikor csak két részre esik (a többi eset is hasonlóan átgondolható). Legyen G_1 és G_2 a kisebb gráfok plusz vegyük hozzájuk x -et is. Láthatjuk, hogy G_1 és G_2 között nem megy él, mivel x elvágó csúcs volt. Ekkor válasszunk ki G_1 -ben egy tetszőleges csúcsot, ami nem x , legyen y . Feltettük, hogy y is egy elvágó csúcs G -ben, és y élei csak G_1 -ben mennek az előbb látottak alapján, ami egy kisebb gráf mint G , igazából G -nek a részgráfja G_1 , tehát y G_1 -ben is egy elvágó csúcs. Azaz y -t elhagyva G_1 is két részre esik legalább, azzal a kisebb gráffal foglalkozunk tovább amelyik nem tartalmazza az x -et, azaz a 3-as ábrán G_{11} -gyel. Ezt az eljárást folytatva egyre kisebb gráfokat kapunk, tehát elfogunk jutni olyan kicsi gráfokhoz, hogy a tetszőleges c csúcs választásakor már csak egyetlen csúcs marad az egyik



3. ábra. Ezen az ábrán látható, hogy hogyan válasszuk az elvágó csúcsokat, emellett, hogy hogyan alakulnak ki a kisebb gráfok.

kisebb gráfban. Emellett láttuk, hogy csak a kisebb gráfon belül mennek élek, plusz még a kiválasztott csúccsal lehetnek összekötve, de akkor ez azt jelentené, hogy c egy levél, ami ellentmondás, mivel láttuk, hogy G -nek nincs levele (továbbá annak is ellentmond, hogy c is elvágó csúcs).

Tehát létezik nem elvágó csúcs, ami legyen v . Mivel v nem elvágó csúcs ezért elhagyva legfeljebb $\deg(v) - 1$ ráilleszkedő éle, egy összefüggő páros gráfot, G' -t kapjuk, amely rendelkezik egy levél csúccsal és az előző állítás alapján így G' 1-2 tulajdonságú. Onnan látható, hogy G' is páros gráf, hogy ha G -re a csúcsosztályos felbontás alapján gondolunk, azaz $V = (S, T)$, akkor az eredeti felbontás, az említett élek elhagyása után is egy megengedett felbontás lesz, azaz G' is páros gráf marad.

□

1.8. Megjegyzés. Az előző állítás bizonyításában igazából azt is beláttuk, hogy tetszőleges gráfban van legalább egy csúcs, ami nem elvágó csúcs.

2. Eddigi eredmények

Korai cikkek és eredmények, mint például amelyekben az 1-2-3 sejtést először megfogalmazzák [1], $\chi_{\Sigma}^e(G)$ és $\chi(G)$ közötti kapcsolatokra fókuszálnak. Az egyik legelső eredmény az imént említett cikkben szerepel, és a következőt állítja:

2.1. Állítás (Karoński, Łuczak és Thomason [1]). *Legyen $(\Gamma, +)$ egy véges Abel-csoport páratlan renddel és G egy szép $|\Gamma|$ -színezhető gráf. Ekkor létezik az éleknek egy olyan súlyozása, ami a Γ -ból rendel az élekhez.*

További eredmények a kromatikus számmal kapcsolatban:

2.2. Állítás. *Ha G 2-összefüggő és $\chi(G) \geq 3$, akkor $\chi_{\Sigma}^e(G) \leq \chi(G)$. Emellett minden $k \geq 3$ egész számra és G szép gráfra a következők teljesülnek:*

1. (Karoński, Łuczak és Thomason [1]) Ha G k -színezhető páratlan k -ra, akkor $\chi_{\Sigma}^e(G) \leq k$;
2. (Duan, Lu, Yu [3]) Ha G k -színezhető, $k \equiv 0 \pmod{4}$, akkor $\chi_{\Sigma}^e(G) \leq k$.

Az első általánosságban érvényes konstanst, amely felső becslés $\chi_{\Sigma}^e(G)$ -re Addario-Berry, Dalal, McDiarmid, Reed és Thomason [5] adta. Ők azt igazolták, hogy $\chi_{\Sigma}^e(G) \leq 30$. Mégpedig úgy, hogy széleskörben használható tételeket bizonyítottak be, úgynevezett fokszámkorlátos részgráfokra. Ugyanezt a technikát használva, Addario-Berry, Dalal és Reed [6] letudta vinni a 30-at 16-ra, majd Wang és Yu [7] még tovább 13-ra. Végül a nagy áttöréseket elsősorban Kalkowskinak köszönhetjük, mivel a ma ismert legjobb korlátot ő, Karoński és Pfender adta [8], Kalkowski előző munkájára [24] támaszkodva. A [8]-as cikkben azt látják be, hogy minden G szép gráf 1-2-3-4-5 tulajdonságú.

Továbbá ismert, hogy az 1-2-3 sejtés igaz minden elég nagy, elég sűrű gráfra. Pontosabban létezik n' konstans, hogy minden legalább n csúcsú gráfra létezik egy megengedett él 3-súlyozás, ahol $n \geq n'$, és $\delta(G) \geq 0.99985n$ [9]. Emellett az is, hogy már csak az 1,2 súlyok is majdnem biztosan elegendő aszimptotikusan, hogyha G egy véletlen gráf (ahol a véletlen gráfot az Erdős-Rényi modell szerint értjük), lásd [6]. Másrészt pedig Dudek és Wajc [10] belátta, hogy annak az eldöntése, hogy egy tetszőleges adott gráf 1-2 tulajdonságú-e NP-teljes. Viszont páros gráfok között karakterizálhatóak a gráfok melyek nem azok, Thomassen, Wu és Zhnag [11] ezt a karakterizációt meg adta, mi pedig adni fogunk egy polinomiális algoritmust annak az eldöntésére, hogy a páros gráfunk 1-2 tulajdonságú-e, az imént említett karakterizáció segítségével.

Ha pedig reguláris gráfokra szorítkozunk megint csak elég komoly eredményeket sikerült elérni. Jakob Przybylo [4] megmutatta, hogy minden reguláris gráf 1-2-3-4 tulajdonságú, emellett, ha $d \geq 10^8$, és G d -reguláris, akkor G 1-2-3 tulajdonságú.

3. 1-2 tulajdonság

A következő két fejezetben az 1-2 tulajdonságú gráfok körül fogunk vizsgálni. Először belátjuk, hogy egy tetszőleges gráfról NP-teljes eldönteni, hogy 1-2 tulajdonságú-e. Következésképpen, nem lehet polinomiális algoritmust adni, ami eldönti, hogy egy tetszőleges gráf 1-2 tulajdonságú-e, hacsak $P=NP$ nem teljesül. Majd a 4-es fejezetben át fogunk térni a páros gráfok vizsgálatára. Megadunk két karakterizációt is a nem 1-2 tulajdonságú páros gráfokra, majd egy polinomiális algoritmust dolgozunk ki annak eldöntésére, hogy egy páros gráf 1-2 tulajdonságú-e.

3.1. NP-teljesség

Ebben a fejezetben megmutatjuk az 1-2 tulajdonság NP-teljességét. Formálisan legyen

$$1\text{-SÚLY} = \{G : G \text{ 1-2 tulajdonságú gráf}\}.$$

3.1. Tétel. [Dudek, Wajc [10]] *Annak eldöntése, hogy egy tetszőleges G gráf eleme-e az 1-2SÚLY-nak NP-teljes, azaz 1-2SÚLY NP-teljes.*

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy a probléma NP-ben van, mert ha egy orákulum ad egy 1-2 élsúlyozást, polinom időben leellenőrizhető, hogy valóban megengedett-e. Tehát az NP-teljesség belátása maradt. Ehhez vizsgáljuk a következő közismert NP-teljes problémát:

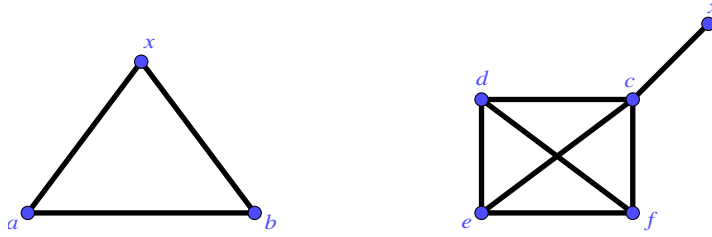
$$3\text{-SZÍN} = \{G : G \text{ kiszínezhető 3 színnel}\}.$$

Annak érdekében, hogy belássuk az 1-2SÚLY NP-teljességét, mutatunk egy redukciót 3-SZÍN-ről 1-2SÚLY-ra. Azaz definiálunk egy olyan polinomiális idejű f redukciót, amelyre $G \in 3\text{-SZÍN}$ akkor és csak akkor, ha $f(G) \in 1\text{-2SÚLY}$ teljesül. Először három segéd gráfot kell definiálnunk az f előállításához.

Az első segéd gráfot *háromszög gráfnak* fogjuk nevezni. Ez alatt a gráf alatt egy olyan három hosszú kört értünk, amelynek csúcsai: rendre x, a és b . Képzeljük el a gráfot úgy, hogy x van felül, a bal alul és b jobb alul, ahogy a 4. ábrán látható. Az a csúcsra és a b csúcsra nem illeszkedik a kör élein kívül más él, viszont x -re fog, mert a segédgráfokat úgy fogjuk használni, hogy csatlakoztatjuk az eredeti gráfhoz, és az x lesz ez a becsatolási pont. Ekkor láthatjuk, hogy bárhogy választanánk a w élsúlyozást, $w(xa) = w(xb)$ nem teljesülhet, mert ha így lenne, akkor $z(a) = w(xa) + w(ab) = w(xb) + w(ab) = z(b)$ egyenlőségnek kéne teljesülnie, és így az élsúlyozás nem lenne megengedett. Tehát egy ilyen háromszög segédgráf minden megengedett címkézésben $z(x) = 3$. A következő segédgráfot nevezzük *négyzet gráfnak*. A négyzet gráfnak legyen 5 csúcsa: $\{x, c, d, e, f\}$, legyen x és c szomszédos és $\{c, d, e, f\}$ csúcsok pedig feszítsenek ki egy K_4 -et, lásd 4. ábra. Hasonlóan az előbbihez, csak x mentén fogjuk csatlakoztatni az eredeti gráfhoz. Ellenőrizhető, hogy minden megengedett 1-2 élsúlyozásban $w(xc) = 2$ teljesül. Az x -re a későbbiekben végpontként hivatkozunk.

A következőkben megadunk egy konstrukciót, amelyben tetszőleges megengedett 1-2 élsúlyozásban $z(v) \neq k$.

Az előbb definiált segédgráfok felhasználásával definiáljuk ezt a harmadik segédgráfot, melyet *k -kizáró gráfnak* nevezzük. Tegyük fel, hogy $k \geq 8$, kisebb k -kra nem tudjuk ezt a segédgráfot definiálni. A k -kizáró gráf, tartalmaz egy fő háromszöget, aminek a csúcsai rendre v, x és y . Továbbá másképp fog kinézni ez a segédgráf annak függvényében, hogy a k páros, vagy páratlan. Ha k páros akkor mind x , mind y pontosan $\binom{k-6}{2}$ darab diszjunkt négyzet segédgráfnak a végpontja, és egy-egy háromszög segédgráfnak a becsatlakoztatási pontja. Ha pedig k páratlan, akkor x



4. ábra. Bal oldalon a háromszög gráf, jobb oldalon a négyzet gráf

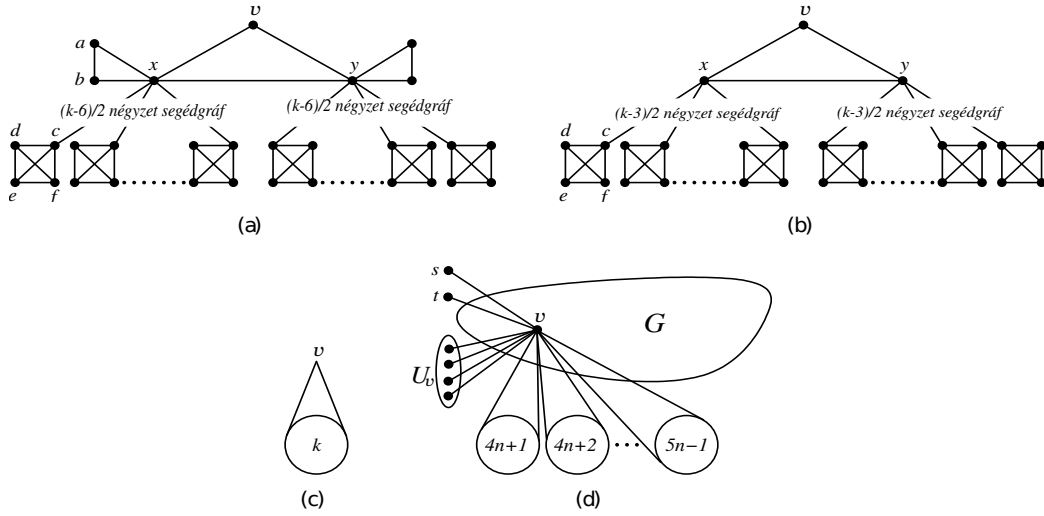
és y is $(\frac{k-3}{2})$ darab négyzet segédgráfnak a végpontja, lásd 5. ábra. A háromszög segédgráfoknál tett megfigyeléshez hasonlóan $w(vx) \neq w(vy)$, annyi különbséggel, hogy az adott csúcsokba most pluszba még beérkeznek összesen $(k-3)$ súlyú élek, pontosabban mind a páros: $(\frac{k-6}{2} \cdot 2 + 3)$, mind a páratlan esetben: $(\frac{k-3}{2} \cdot 2)$. Így $z(x) = w(vx) + w(xy) + k - 3 = w(vy) + w(xy) + k - 3 = z(y)$ teljesülne, ha $w(vx) = w(vy)$ igaz lenne. Tehát figyeljük meg, hogy $z(x), z(y) \in \{k-1, k\}$, ha a közöttük menő élsúlya 1, illetve $z(x), z(y) \in \{k, k+1\}$, ha ezen élsúlya 2. Láthatjuk, hogy mindkét esetben van v -nek legalább egy $n \in \{x, y\}$ szomszédja, amelyre $z(n) = k$. Következésképpen $z(v) \neq k$ fennál. A későbbiekben ezt a tulajdonságát fogjuk felhasználni a k -kizáró segédgráfnak. Emellett megjegyezzük, hogy az előző megfigyelések alapján a k -kizáró segédgráfra teljesül, hogy $z(v) = 3$.

Most már minden eszközünk megvan annak az f polinomiális redukciónak az előállításához, melyre $G \in 3$ -SZÍN akkor és csak akkor, ha $f(G) \in 1$ -2SÚLY teljesül. Legyen $G = (V, E)$ és $n = |V|$. Az általánosság elvesztése nélkül, tegyük fel, hogy $n \geq 3$. Különben, ha $n \leq 2$, akkor $G \in 3$ -SZÍN és $f(G)$ pedig legyen az üres gráf, ez is mindig 1-2 tulajdonságú. Térjünk át az $n \geq 3$ esetre: Induljunk ki G -ből, az eredeti gráfból, és ki fogjuk egészíteni további élekkel és csúcsokkal a következők szerint.

Az $f(G)$ definiálásához módosítsuk G -t a következőképpen, lásd 5. ábra: minden $v \in V$ -re:

1. Kössük össze v -t két új csúccsal, s_v -vel és t_v -vel.
2. Legyen U_v egy olyan halmaz, melyre $|U_v| = n - 1 - d(v)$. Kössük össze v -t minden U_v -beli csúccsal.
3. Adjunk hozzá $n - 1$ új k -kizáró gráfot, minden $k \in \{4n + 1, 4n + 2, \dots, 5n - 1\}$ -re, úgy, hogy v a csatlakozási pont.

Nézzük meg, hogy f valóban polinomiális időben előállítható. Minden v -re: **1.**, **2.** és **3.** rendre $O(1)$, $O(n)$, és $O(n^2)$ időt emészt fel, mivel egy k -kizáró segédgráf előállítására legfeljebb $\frac{k-3}{2} \cdot 2 \cdot (4+7) \approx 11k$ lépésben tehető meg, azaz $O(k)$ időben, és ezen segédgráfok esetében $k = O(n)$. Tehát a gráf mérete polinomiális.



5. ábra. Az a) esetben a páros, a b) esetben a páratlan változatot, a c) esetben a szemantikus ábrázolását láthatjuk a k -kizáró segédgráfnak, d)-ben pedig $f(G)$ konstrukcióját láthatjuk.

3.2. Lemma. $f(G)$ minden megengedett 1-2 élsúlyozására $z(v) \in \{4n-2, 4n-1, 4n\}$ teljesül minden $v \in V$ -re.

Bizonyítás. Legyen $v \in V$ tetszőleges. Ekkor nyilván, $w(s_v, v) + w(vt_v) \in \{2, 3, 4\}$. Definíció szerint $U_v \cup V$ -ből $n-1$ él megy v -be. A k -kizáró segédgráfok mindegyike pedig 3-at ad hozzá $z(v)$ -hez, és $n-1$ van belőlük. Mivel más él nem illeszkedik v -re, ezekből következik, hogy:

$$\{2, 3, 4\} + \{n-1, n, \dots, 2n-2\} + 3 \cdot (n-1) = \{4n-2, 4n-1, \dots, 5n-1\} \ni z(v),$$

ahol két vagy több halmaz összegén, most azt a halmazt értjük, amelynek az elemei úgy állíthatók elő, hogy minden összeadandó halmazból kivesszünk egy-egy elemet, majd azokat összeadjuk.

Figyeljük meg, hogy a v -re illeszkedő k -kizáró segédgráfok miatt $z(v) \notin \{4n+1, 4n+2, \dots, 5n-1\}$. Ebből kapjuk, hogy $z(v) \in \{4n-2, 4n-1, 4n\}$, amivel beláttuk a lemmát. \square

Most lássuk be, hogy $G \in 3$ -SZÍN, akkor és csak akkor, ha $f(G) \in 1$ -2SÚLY fennáll.

Elsőként nézzük a balról jobbra irányt, azaz tegyük fel, hogy $G \in 3$ -SZÍN. Ez azt jelenti, hogy G -nek van egy megengedett χ csúcs színezése. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy a három szín rendre $4n-2, 4n-1$ és $4n$. Ezt pedig azért csináltuk, mivel így tudjuk definiálni az élek súlyait úgy, hogy adott v -re

a $z(v)$ megegyezzen a 3-színezésbeli színével: Minden $e \in E$ -re, azaz az eredeti gráf éleire legyen $w(e) = 1$. Minden e élre, ami U_v -beli csúcsra illeszkedik legyen $w(e) = 1$. Továbbá, minden $v \in V$ -re,

- ha $\chi(v) = 4n - 2$, akkor $w(vs_v) = w(vt_v) = 1$;
- ha $\chi(v) = 4n - 1$, akkor $w(vs_v) = 1, w(vt_v) = 2$;
- ha $\chi(v) = 4n$, akkor $w(vs_v) = w(vt_v) = 2$.

A segédgráfok éleit pedig a következőképpen súlyozzuk: A k -kizáró gráf fő háromszögében, vxy -ban legyen $w(vx) = w(xy) = 2$ és $w(vy) = 1$.

A fő háromszögon kívüli éleket, melyeket háromszög- és négyszög gráfok diszjunkt uniójaként definiáltunk, a következő szabály szerint súlyozzuk: Minden háromszög segédgráfban legyen $w(xa) = 2, w(xb) = w(ab) = 1$, ahol x, a és b a háromszög 4-es ábra szerinti csúcsai. A négyszög segédgráfokban legyen $w(xc) = w(cd) = w(ce) = w(de) = w(df) = 2$ és $w(cf) = w(ef) = 1$, ahol d, c, e, f és x a 4-es ábrán látható négyzet segédgráf csúcsai. Megfigyelhetjük, hogy az így kapott 1-2 élsúlyozás megengedett, mivel tetszőleges $v \in V$ -re illeszkedik $n - 1$ darab 1 súlyú él az eredeti gráfból és U_v -ből, a k -kizáró segédgráfokból pedig összesen $3(n - 1)$ összsúlyú élnek érkeznek be, így s_v és t_v súlyának is a beállításával elérve, hogy $z(v) = \chi(v)$ teljesüljön. Ezzel befejeztük, az egyik irány bizonyítását.

Nézzük a másik irányt:

Tegyük fel, hogy $G \notin 3\text{-SZÍN}$, ekkor belátjuk, hogy $f(G) \notin 1\text{-2SÜLY}$. Mivel G nem 3-színezhető, ezért minden $\chi: V \rightarrow \{4n - 2, 4n - 1, 4n\}$ -re χ nem megengedett színezés. Ekkor a 3.2-es lemma miatt G -nek nem is lehet megengedett 1-2 élsúlyozása, azaz nem lehet 1-2 tulajdonságú.

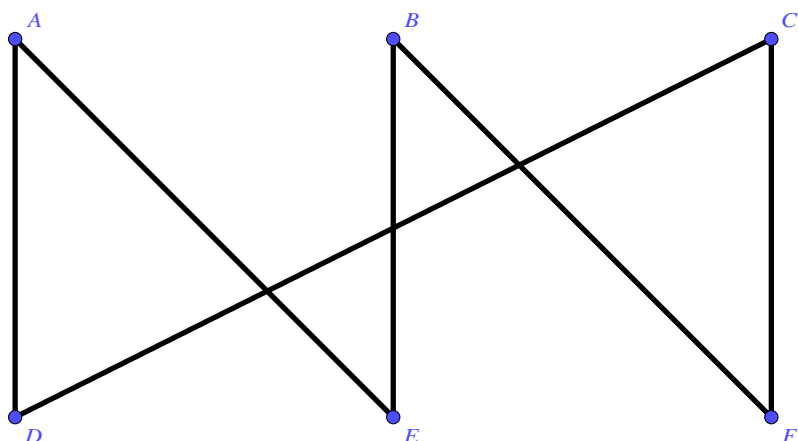
Ezzel beláttuk a 3.1. Tételt. □

3.3. Megjegyzés. A cikkben ahol az NP-teljséget megmutatják [10] nem csak az eddig tárgyalt problémáról beszélnek, hanem arról is, hogyha lecseréljük az $\{1,2\}$ halmazt a $\{0,1\}$ -re akkor is hasonlóan nehéz problémát kapunk. Sőt, azt sejtik, hogy a módszer amit az eredeti problémára adtak általánosítható tetszőleges a, b racionális számokra, amit a 7-es fejezetben be is látunk.

4. Páros gráfok 1-2 karakterizációja

4.1. Bevezetés

Ebben a részben teljes karakterizációt fogunk adni arra, hogy egy páros gráf 1-2 tulajdonságú-e Thomassen, Wu, és Zhang [11] cikkére hivatkozva. Először is nézzünk példát egy olyan páros gráfra, amely nem rendelkezik az 1-2 tulajdonsággal,



6. ábra. Példa nem 1-2 tulajdonságú páros gráfra.

ezzel megmutatva, hogy nem minden páros gráf 1-2 tulajdonságú:
 Ha visszaemlékezünk, a 1.2.2. alfejezetben tárgyaltakra, akkor könnyen láthatjuk, hogy a 6. ábrán látható körnek nem létezik megengedett 1-2 élsúlyozása a 1.4. állítás alapján.

4.2. Karakterizáció

Annak megmutatására, hogy egy páros gráf mikor nem 1-2 tulajdonságú két különböző karakterizációt fogunk adni.

4.2.1. Első karakterizáció

Definíció szerint egy két csúcsú gráf nem rendelkezik az 1-2 tulajdonsággal, kivéve, ha nincsen éle. Legyen $1 < q \in \mathbb{N}$, páratlan és legyen G_1, G_2, \dots, G_q páronként diszjunkt gráfok, és mindegyik tartalmazzon legalább egy többszörös élt (multiplicitása legalább kettő). Az adott gráfhoz legyen x_i, y_i a két csúcs, amelyek között megy többszörös él. Töröljük ki az egyik élt a két csúcs között, minden $i = 1, 2 \dots q$ -ra. Majd adjuk hozzá az $y_i x_{i+1}$ élt, minden $i = 1, 2 \dots q$ -ra, plusz az $y_q x_1$ élt. Azt mondjuk, hogy az így kapott gráf, G egy *páratlan kombinációja* G_1, G_2, \dots, G_q -nak.

Ha G 1-2 tulajdonságú, akkor nyilván legalább az egyiknek a G_1, G_2, \dots, G_q gráfok közül 1-2 tulajdonságúnak kell lennie, mivel az újonnan bevett élek között lesz legalább kettő egymást követő amelyre ugyanaz a szám kerül, mert q élt vettünk újonnan be, ami páratlan.

Tehát ha azokból a gráfokból indulunk ki, amelyek két csúcsból és egy többszörös élből állnak, majd ezeknek vesszük egy páratlan kombinációjukat, akkor a páros gráfoknak egy olyan osztályát kapjuk, amelyik nem rendelkezik az 1-2 tulajdonsággal. Nevezzük, az így kapott gráfokat *páratlan multi-kaktusz*-nak.

4.2.2. Második karakterizáció

Írjuk le a páratlan multi-kaktusz gráfokat másféleképpen is. Vegyünk köröket, melyek hossza 2 mod 4, majd színezzük be az éleket felváltva pirosra és zöldre. Ezután ragasszuk össze a köröket, mégpedig úgy, hogy kiválasztunk egy-egy zöld élet a körökből, és azon élek mentén ragasszuk össze a köröket. Ezután a zöld éleket tetszőlegesen lecserélhetjük többszörös élekre.

4.1. Megjegyzés. Azt a gráfot, amelynek két csúcsa van és közöttük egy él megy, szintén páratlan multi-kaktusznak nevezzük, a későbbiek miatt.

4.2.3. Két karakterizáció ekvivalenciája

Röviden tekintsük át, hogy a kettő karakterizáció miért ekvivalens. Amikor úgy alakítjuk ki G -t, hogy kisebb gráfok páratlan kombinációjaként alkotjuk meg, akkor indukció szerint feltehetjük, hogy a kisebb gráfokat a második karakterizáció szerint kaptuk, azaz, hogy azokat körökből, élek mentén ragasztottuk össze. Tegyük fel, hogy minden komponensben az $x_i y_i$ élet választottuk ki a páratlan kombinációnk megalkotásához. Ekkor a kombinálás után egy új hurokmentes kör keletkezik, mégpedig az, amelyiknek minden második éle az újonnan hozzáadott él, a többi éle, pedig az $x_i y_i$ élek. Láthatjuk, hogyha ebben a $2q$ hosszú körben az $x_i y_i$ éleket választjuk zöldnek, akkor olyan mintha ezt az új kört ragasztanánk hozzá a többi, eddigi kisebb gráfokhoz, amelyekről meg már tudjuk, hogy körök ragasztásával kaptuk. És a kisebb gráfokban is tudjuk, hogy az $x_i y_i$ élek vannak zöldre színezve, mivel úgy választottuk, hogy az egy többszörös él, és tudjuk a konstrukcióból, hogy akkor az csak zöld lehet.

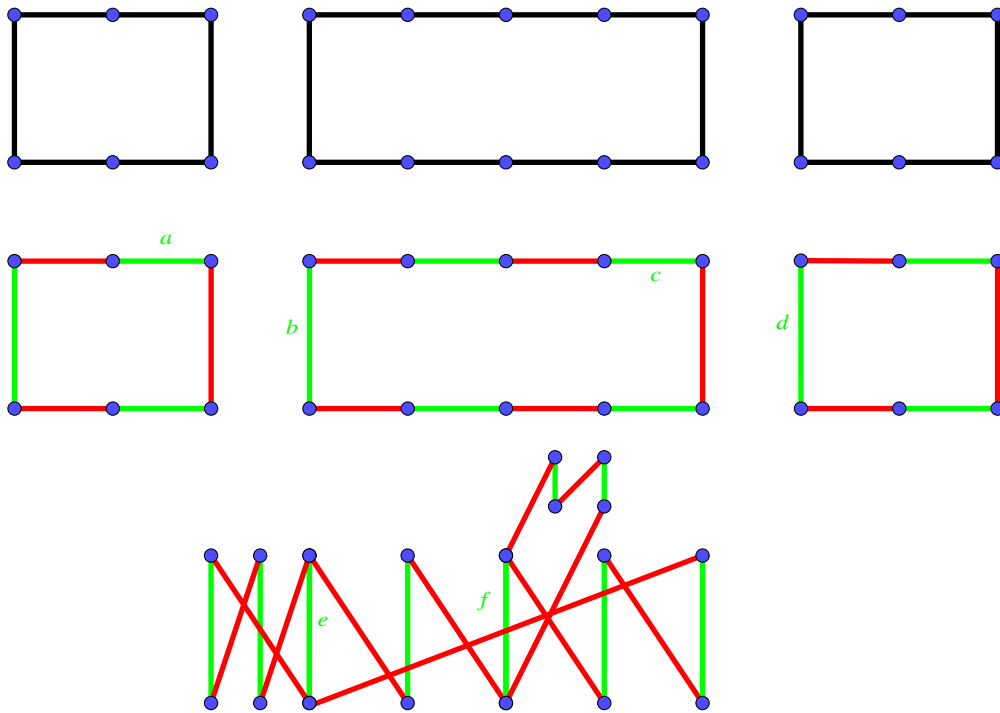
A másik irány is hasonlóan átgondolható.

Ezáltal elérkeztünk arra a pontra, hogy ki tudjuk mondani, a karakterizációt:

4.2. Tétel. *Legyen G egy páros gráf. Ekkor G pontosan akkor páratlan multi-kaktusz, ha nem 1-2 tulajdonságú.*

Ennek a tételnek a bizonyítása nem fér bele a szakdolgozatom kereteibe.

A 7. ábrán bemutatjuk, hogy például hogyan lehet megfelelő hosszú körökből egy páratlan multi-kaktuszt előállítani. Első lépésként kiszínezzük az éleket, majd ezt követően kiválasztjuk a zöld éleket amik mentén ragasztani szeretnénk, jelen esetben az a -t a b -hez, illetve a c élet a d élhez fogjuk ragasztani. Legyen az e él a és b összeragasztva, míg az f a c és d összeragasztva, így legalul láthatjuk összeragasztva a páratlan multi-kaktuszt. Utolsó lépésként a zöld éleket tetszőlegesen kicserélhetnénk párhuzamos élekre.



7. ábra. Az ábrán egy páratlan multi-kaktusz előállítását láthatjuk három, 2 mod 4 hosszú körből.

4.3. Egy páros gráf páratlan multi-kaktusz-e polinom időben

A cikkben, amiben az előbb tárgyalt karakterizációt részletezik [11] megemlítik, hogy annak eldöntése, hogy egy páros gráf páratlan multi-kaktusz-e P-ben van, de magát az algoritmust nem dolgozzák ki. A következő alfejezetben, éppen ezért megadunk egy polinomiális algoritmust az előbb vázolt probléma megoldására.

Az algoritmus ismertetése előtt nézzük a következő állítást, ami elengedhetetlen a továbbiakban.

4.3. Állítás. *Ha G egy páratlan multi-kaktusz, akkor minden hurokmentes kör maximum egy többszörös élben csatlakozik.*

Bizonyítás. Tekintsük az első karakterizáció által adott konstrukciót és használjunk indukciót. Tehát G -t G_1, \dots, G_q páratlan kombinációjaként kaptuk, és tudjuk, hogy a kisebb gráfok is páratlan multi-kaktuszok, mert ha lenne egy kisebb gráf ami nem multi-kaktusz, akkor G sem lehetne az. Emellett tudjuk, hogy G_i gráfok páronként diszjunktak és bennük minden hurokmentes kör legfeljebb egy többszörös élben csatlakozik indukció szerint. Ekkor mikor megalkotjuk G -t megalkotjuk a páratlan kombináció vétellel sem alakulhat ki több érintkezési pont a körök között, mert csak egyetlen új hurokmentes kör keletkezik, amely ugyanaz a kör, amit előbb a két karakterizáció ekvivalenciájában kiemeltünk. És ez az új hurokmentes kör a többi komponens hurokmentes köreivel maximum egy többszörös élben csatlakozik,

mivel így alkottuk meg, és a külön komponensek hurokmentes körei továbbra is diszjunktak maradnak. \square

4.4. Megjegyzés. Tehát láthatjuk, hogy az így definiált páratlan multi-kaktusz hasonlít tulajdonságaiban a jól ismert kaktusz gráfra.

Az algoritmus

A polinomiális algoritmusunkat a 4.3-as állítás alapján és leginkább a második (ragasztós) karakterizációra hivatkozva fogjuk kidolgozni.

Mindenekelőtt, tegyük fel, hogy a G gráfunk összefüggő. Ha nem lenne az, akkor külön-külön tekinthetjük, az összefüggő komponenseit. Emellett vegyük észre, hogy G csak körökből állhat, különben a 2. karakterizációra hivatkozva rögtön tudhatjuk, hogy nem páratlan multi-kaktuszról van szó.

Először is, megszeretnénk határozni, hogy a gráf mely élei pirosak, illetve zöldek, feltéve, hogy megtudjuk így őket színezni, mert ha nem tudjuk, akkor már itt elbukott a multi-kaktuszság. Ehhez keressünk egy olyan kört, amelyben pontosan egy húr található, mert ha találunk egy ilyet, akkor máris meghatározhatóak a színek, mivel a húrnak zöldnek kell lennie. Ezt a következőképpen tudjuk megtenni: keressünk egy olyan (akár többszörös) élet, hogy az él és a ráilleszkedő csúcsok kitörlésével a gráfunk legalább kettő komponensre esik szét. Ha nincs ilyen él, akkor könnyen meggondolható, hogy a gráfunk maga is egy kör, de ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy páratlan multi-kaktusz-e hiszen ez ebben a speciális esetben annyit jelent, hogy a hossza $2 \bmod 4$ -e. Egyébként tekintsünk a komponensek közül tetszőlegesen kettőt. Ezekben a komponensekben külön-külön fogunk vizsgálni. Először is tegyük vissza a kivett csúcsokat, legyen ez a két csúcs v_1 és v_2 . Ezután, ha valóban páratlan multi-kaktuszról van szó, akkor kikövetkeztetjük a zöld, illetve piros éleket. Ezt úgy tehetjük meg, hogy az élet, amelyet kiválasztottunk zöldre kell színezni, majd tőle kiindulva felváltva színezzük. Ha nem egy jó piros-zöld színezést kapnánk, akkor máris megkapjuk, hogy G nem páratlan multi-kaktusz, ugyanis ha G páratlan multi-kaktusz akkor a második karakterizáció szerint létezik hozzá megfelelő piros-zöld színezés.

Ezután keressünk az egyik komponensben v_1 -ből v_2 -be egy legrövidebb utat, mivel ezen út mentén szeretnénk a problémát több kisebb feladatra felválni. Ekkor ez hurokmentes is lesz, mert ha nem az lenne, akkor a hurkon menve még rövidebb utat kapnánk. Ezt az utat kiegészítve a v_1v_2 éllel egy hurokmentes kört kapunk. Nevezzük el az így kapott kört C -nek.

Ezt követően hagyjuk el C piros éleit. Ekkor G szétesik legalább kettő komponensre, ha G páratlan multi-kaktusz. Mégpedig azért, mert tekinthetünk úgy a problémára, mintha C az a kör lenne, amelyik a páratlan kombináció vételénél képződik, és akkor valóban C minden második (zöld) éléhez, egy diszjunkt részgráf, azaz komponens fog tartozni. Emellett azért tekinthetünk így a problémára, mert ha G páratlan multi-kaktusz, akkor minden köre páratlan kombináció vételkor képződik.

Végül azt vegyük észre, hogy ha ezek a komponensek páratlan multi-kaktuszok, akkor G is az lesz, sőt ha van amelyik nem az, akkor G sem lehet az. Szóval a kisebb komponensekre kezdjük előlről az algoritmust, az útkereséstől kezdődően.

Ha pedig végig fut az algoritmus, azaz már az összes komponens csak él vagy egyszerű kör, és nem találunk ellentmondást, akkor a gráfunk páratlan multi-kaktusz.

Az algoritmus komplexitása

Végezetül vizsgáljuk meg, hogy az algoritmus valóban polinomiális időben végrehajtható. Első lépésként a színeket állapítjuk meg a G gráfunkban. Először is nézzük meg, hogy az algoritmusban leírt húr megkeresése mennyi időt vesz igénybe. Egy körben minden élre kitöröljük saját magát, és a rá illeszkedő csúcsokat. Ez minden $e = uv \in E$ élre $d(u) + d(v) + 1$ lépés. Majd leellenőrizzük, hogy az így kapott G' gráf összefüggő maradt-e, például szélességi kereséssel, ami $O(m)$ időben tehető meg. Szóval összeségében a húr keresésére

$$\begin{aligned} d(u_1) + d(v_1) + 1 + O(m) + d(u_2) + d(v_2) + 1 + O(m) + \dots + d(u_m) + d(v_m) + 1 + O(m) = \\ = m + O(m^2) + \sum_{v \in V} d^2(v) \end{aligned}$$

fordítódik. Végül az élek színeinek eldöntése inntől kezdve még $O(m)$ lépés, mivel egy élről fixen el tudjuk dönteni, hogy zöld, a többinek pedig felváltva kell egymást követnie. Szóval azt kaptuk, hogy a színek meghatározása egyszerűen megvan $O(m^2)$ időben, mivel

$$\sum_{v \in V} d^2(v) \leq \left(\sum_{v \in V} d(v) \right)^2 = 4|E|^2 = O(m^2).$$

Ezután térjünk át a rekurzív részre. Ha n csúcsú a komponensünk és m éle van, akkor a legrövidebb út keresése megvan $O(m)$ -ben, majd ezen út minden második élének elhagyása is megvan $O(n)$ időben. Ezután jön a rekurzív hívás a kisebb gráfokra. De vegyük észre, hogy a következő lépésben a kisebb komponensekben, ha össze is adjuk a lépésszámokat, azt kapjuk, hogy $O(T(n)) \geq \sum O(T(n_i))$, ahol a $T(n)$ az eredeti n csúcsú komponensre fordított lépések számát, míg a $T(n_i)$ -k a kisebb komponensekre fordított lépések számát jelenti. Ez pedig azért van így, mivel amint fentebb láttuk $T(n) = O(m)$, és a kisebb gráfok élszáma együtt kisebb egyenlő, mint a nagyobbé.

Emellett láttuk az algoritmus leírásában, hogy legalább két komponens jön létre, de igazából azt is feltehetjük, hogy legalább három komponens jön létre. Mert ha nem lenne legalább három, akkor az azt jelentené, hogy egy olyan kör mentén vágunk, aminek a hossza kisebb mint 6, de hát akkor tudjuk, hogy a gráfunk nem lehet páratlan multi-kaktusz, mert egy páratlan multi-kaktusz nem tartalmazhat ilyen kört. Tehát láthatjuk, hogy lefeljebb $\log_3(n)$ szint van, emellett minden szinten legfeljebb $T(n) = O(m)$ lépést teszünk, így az össz lépésszáma a rekurzív résznek $O(m \log(n))$.

Összeségében tehát láttuk, hogy egy adott G páros gráfokról valóban el tudjuk dönteni polinom időben, hogy rendelkezik-e az 1-2 tulajdonsággal.

5. Változatok

Eddig olyan fajta színezéssel foglalkoztunk, amiket élek súlyozásának összeadásából nyertünk, viszont úgy is érdekes feladatokat kapunk, ha az összeadás helyett más művelettel állítjuk elő a csúcsok színeit vagy nem feltétlen az éleket súlyozzuk, hanem például a csúcsokat, és hasonlóan, a szomszédos csúcsok súlyainak összegével gyártjuk le a színeket. Ebben a fejezetben ezeket a másfajta színezéseket, az ezekkel kapcsolatos eredményeket és az effajta színezési problémák komplexitását mutatjuk be, leginkább a [14] és a [13] cikkekre hivatkozva.

Az első variációk, amiket tárgyalni fogunk, csak abban térnek el az eredeti feladattól, hogy az összeadás helyett szorzással, multihalmaz-, illetve halmaz képzéssel állítjuk elő a csúcsok színeit. Mivel már ismerjük az alap koncepciót, ezért rövidebben meg tudjuk fogalmazni ezeket a változatokat.

5.1. Élsúlyozások

Ebben a fejezetben három alternatív élsúlyozást vizsgálunk meg.

Él k -súlyozás szorzással. Ez egy $p : E \rightarrow \mathbb{N}$ élsúlyozás, ahol az indukált címkézés: $z(v) = \prod_{e \in E(v)} p(e)$. Itt és a további variációkban is hasonlóan fogjuk definiálni a megengedettséget, mint az eredeti problémában. A legkisebb k -t, amire ilyen színezés létezik G -re jelöljük $\chi_{\prod}^e(G)$ -vel.

Él k -súlyozás multihalmazzal. Ez egy $m : E \rightarrow \mathbb{N}$ élsúlyozás, ahol az indukált címkézés: $z(v) = \cup_{e \in E(v)} m(e)$. A legkisebb k -t, amire ilyen színezés létezik G -re, jelöljük $\chi_m^e(G)$ -vel.

Él k -súlyozás halmazzal. Ez egy $h : E \rightarrow \mathbb{N}$ élsúlyozás, ahol az indukált címkézés: $z(v) = \cup_{e \in E(v)} h(e)$. A legkisebb k -t, amire ilyen színezés létezik G -re, jelöljük $\chi_h^e(G)$ -vel.

Foglalkozzunk először a multihalmazos változattal. Figyeljük meg, hogyha van két multihalmazunk és a benne szereplő számok összege különböző, akkor maguk a multihalmazok is különbözőek lesznek. Ugyanez igaz akkor is, ha a szorzatuk különböző. Ezen egyszerű megfigyelés alapján a következőt állíthatjuk:

5.1. Állítás. *Ha $\min\{\chi_{\Sigma}^e(G), \chi_{\prod}^e(G)\} \leq k$, akkor $\chi_m^e(G) \leq k$.*

Az 1-2-3 sejtésből és a 5.1-es állításból következik, hogy χ_m^e -re várhatóan a felsőkorlát 3. Elsőként Karoński, Łuczak, és Thomasonnak [1] azt sikerült belátni, hogy

$\chi_m^e \leq 183$. Viszont azóta jelentősebb eredmények is születtek. Nézzük meg a ma ismert legjobb eredményt, ami azt mondja, hogy $\chi_m^e \leq 4$, ehhez ismerkedjünk meg egy érdekes lemmával, amit bizonyítás nélkül mutatunk be:

5.2. Lemma (Addario-Berry, Aldred, Dalal, Reed [2]). *Legyen G egy összefüggő gráf, ami nem 3-színezhető. Ekkor létezik G csúcsainak, azaz $V(G)$ -nek egy V_0, V_1, V_2 csúcs halmazokból álló partíciója, és egy $w : E(G) \rightarrow \{c_0, c_1, c_2, c^*\}$ élsúlyozása, ahol c^* független súly a többtől, a következő tulajdonságokkal:*

1. *Legyen $i \in \{0, 1, 2\}$, ekkor minden $v \in V_i$ -re illeszkedik legalább egy él, melynek a súlya c_i .*
2. *Legyen $i \in \{0, 1, 2\}$, ekkor minden V_i belüli csúcsra csak olyan élek illeszhetnek, amelyeknek a súlya c_i, c_{i-1}, c^* .*
3. *Legyen $i \in \{0, 1, 2\}$, ekkor, ha $u, v \in V_i$, szomszédos csúcsok, akkor az u -ra illeszkedő c_i súlyú élek száma különböző v ezen éleinek a számától.*

Ahol az indexelés (mod 3) értendő.

Ezen lemma felhasználásával belátható a következő tétel:

5.3. Tétel (Addario-Berry, Aldred, Dalal, Reed [2]). *Ha G szép gráf, akkor $\chi_m^e \leq 4$.*

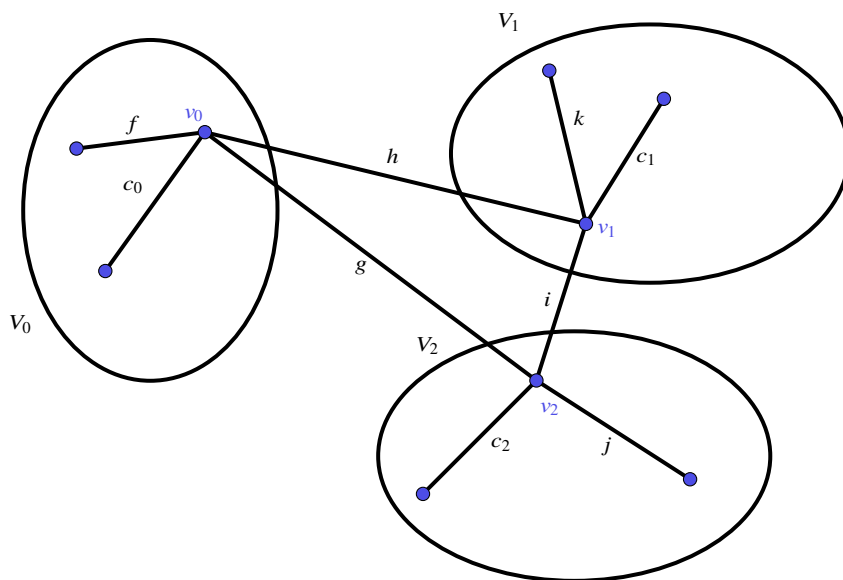
Bizonyítás. Az imént kimondott tételt immáron a 5.2. lemma alkalmazásával beláthatjuk. Ha G 3-színezhető, akkor 2.2-es tételből és az 5.1-es állítás előtti megfigyelésből kapjuk a következő egyenlőtlenségeket: $\chi_m^e \leq \chi_\Sigma^e \leq 3 < 4$. Ha pedig G nem 3-színezhető, akkor az az élszínezés, amit az 5.2-es lemma alapján kapunk, az egy megengedett él 4-súlyozás lesz multihalmazzal. Nézzük miért; legyen V_i az adott partícióra bontás, amit a 5.2-es lemma alapján kapunk és v_i tetszőleges pont V_i -ben.

A 5.2 lemma 1. pontja alapján minden V_i -beli csúcsra illeszkedik legalább egy él c_i súllyal, amint láthatjuk a 8. ábrán. Milyen súlyokat vehet fel f például (mindjárt megvizsgáljuk a többi élet is)? A 2. pont alapján c_0 -ás, c_2 -es, vagy c^* -os élsúlyokat. Hasonlóan a k él a c^*, c_1, c_0 és a j él a c^*, c_1, c_2 súlyok közül veheti fel a súlyát. A g, h, i élek súlyait pedig a szomszédos csúcsok súlyainak a lehetséges metszetei közül választhatjuk. Akkor most lássuk be, hogy minden szomszédos csúcs indukált $z(v)$ címkéje különböző, mégpedig úgy, hogy sorra vesszük az élfajtákat. Legyen $e = uv \in E$. Ha

1. $u \in V_i$ és $v \in V_i$ valamely $i \in \{1, 2, 3\}$ -re, akkor az előző lemma 3. pontja miatt $z(u) \neq z(v)$.
2. $u \in V_0$ és $v \in V_1$, akkor láthatjuk az ábra alapján is, hogy $c_1 \in z(v)$, viszont tudjuk, hogy v_0 -ra nem illeszkehet c_1 -es él, mert $c(f) \in \{c_0, c_2, c^*\}$ és $c(h) \in \{c^*, c_0\}$, azaz a két csúcs $z(v)$ címkéje nem egyezhet meg.
3. $u \in V_0$ és $v \in V_2$, akkor nagyon hasonlóan az előző ponthoz láthatjuk, hogy v_2 -nek nem lehet c_0 -ás éle, míg v_0 -nak van legalább egy, azaz a két csúcs élsúly multihalmaza nem egyezhet meg.

4. $u \in V_1$ és $v \in V_2$, akkor ugyanígy látható, hogy v_1 -nek nem lehet c_2 -es éle, míg v_2 -nek van, azaz a két csúcs élsúly multihalmaza nem egyezhet meg.

Ezzel végig néztük az összes lehetséges él fajtát és láttuk, hogy mindegyik esetben az él két végpontjához rendelt indukált multihalmaz különböző, ezzel belátva a tételt. \square



8. ábra. A három partíció, és a lehetséges élek szemléltetése a tetszőleges V_i -beli csúcsokra

Térjünk át most a szorzásos verzió vizsgálatára. Az első megfigyelés, hogy egy felső becslés χ_m^e -re implikál egy felső becslést χ_{Π}^e -ra is, mivel ha egy gráf él k -súlyozható multihalmazzal, akkor az a gráf él p -súlyozható szorzással is, ahol p a k -adik prímszám. Tehát ezek alapján a következő állítást mondhatjuk ki:

5.4. Következmény. Ha G szép gráf, akkor $\chi_{\Pi}^e \leq 5$.

Bizonyítás. Ha G 3-színezhető, akkor tudjuk, hogy $\chi_m^e \leq 3$, az 5.1-es állítás előtti észrevételre, és 2.2-es tételre hivatkozva. Emellett az előző észrevétel alapján a $(2, 3, 5)$ élsúlyok megfelelőek lesznek. Ha viszont G nem 3-színezhető, akkor vegyük az 5.2-es lemma által indukált élsúlyozást, és legyen $c_0 = 2, c_1 = 3, c_2 = 5, c^* = 1$. Ekkor a 5.3. tétel bizonyításának mintájára analóg megtehető, hogy ez megengedett él 5-súlyozás szorzással. \square

Ezt a variációt Skowronek-Kaziów mutatta be először, és az 1-2-3 sejtéshez hasonlóan, erre a színezésre is az a sejtés, hogy minden gráfra létezik megengedett él 3-súlyozás szorzással [12]. Viszont itt már tudjuk, hogy minden gráfra létezik megengedett él 4-súlyozás szorzással. Komplexitás terén hasonló eredmények vannak, mint amiket már láttunk a sima összeadási változatban:

5.5. Állítás (Ali Dehghan, Mohammad-Reza Sadeghi, Arash Ahadi [13]). *Egy tet-szőleges 3-színezhető G gráfra NP-teljes eldönteni, hogy létezik-e megengedett él 2-súlyozása szorzással. Sőt, ha még feltesszük, hogy G sík gráf is, akkor is NP-teljes marad eldönteni.*

Fordítsuk figyelmünket ezután a halmazképzéses változatra. Amint láttuk, χ_{Π}^e , χ_{Σ}^e -re és χ_m^e esetén is létezik konstans felső korlát, szóval gondolhatnánk, hogy χ_h^e sem fog kilógni a sorból. Viszont ez sajnos nem lesz igaz. Gondoljuk meg, hogy egy él k -súlyozás halmazzal legfeljebb $(2^k - 1)$ csúcs szint tud előállítani (mivel az üres halmaz nem lehet csúcsszín egy összefüggő gráfban). Ekkor viszont legyen G egy 2^k méretű teljes gráf. Ez azt jelenti, hogy minden csúcsának különböző színűnek kéne lennie, de egy él k -súlyozás halmazzal maximum $(2^k - 1)$ szín állítható elő. Tehát $\chi_h^e(G) > k$, azaz $\chi_h^e(G)$ -re nem lehet egy konstans felső becslést adni, mert elég nagy gráfra mindig túlszárnyalná a kitűzött értéket.

Ha konstans becslés nincs is, akkor gondolhatnánk, hogy itt is lehetne keresni kapcsolatot $\chi_h^e(G)$ és $\chi(G)$ között. A következő tétel ezt valóban meg is teszi:

5.6. Tétel (Győri, Palmer [15]). *Ha G szép gráf, akkor $\chi_h^e(G) = \lceil \log_2 \chi(G) \rceil + 1$.*

Az eddigiekben tárgyalt $\chi_h^e(G)$ paramétert $gndi(G)$ -vel is szokták jelölni (az angol general neighbourhood distinguishing index rövidítése). A másik jelölés annak köszönhető, hogy ez a paraméter más területen is előkerült mégpedig egy G gráf szomszédság különböztető indexének (angolul neighbourhood distinguishing index), $ndi(G)$ -nek a vizsgálatában. Az $ndi(G)$ paraméter az a legkisebb k , amelyre G -nek létezik olyan megengedett élszínezése, hogy a szomszédos csúcsok színhal-mazai különbözőek, ahol ez alatt a csúcsokra illeszkedő élek színének unióját értjük. A szomszédság különböztető indexet először Liu, Wang és Zhang vezette be [16], és a következő sejtést fogalmazták meg:

5.7. Sejtés. *Ha G szép, összefüggő és $G \neq C_5$, akkor $\Delta(G) \leq ndi(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Láthatjuk, hogy az alsó becslés triviálisan igaz, mivel megengedett élszínezésről beszélünk. Viszont amennyire egyszerű az alsó becslés, annyira nehéznek tűnik a felső, ennek a sejtésnek a belátáshoz közel sem járunk még, amint ezt a következő néhány eredmény bemutatása után látni fogjuk:

5.8. Tétel (Balister, Győri, Lehel, Schelp [18]). *5.7-es sejtés igaz, ha G páros vagy $\Delta(G) \leq 3$.*

5.9. Tétel (Balister, Győri, Lehel, Schelp [18]). *Legyen G szép gráf. Ekkor $ndi(G) \leq \Delta(G) + O(\log(\chi(G)))$.*

5.10. Tétel (Hatami [17]). *Legyen G szép gráf és $\Delta(G) > 10^{20}$. Ekkor $ndi(G) \leq \Delta(G) + 300$.*

5.2. Csúcs és totális súlyozások

Eddig csak az éleket súlyoztuk, de felmerülhet a kérdés, hogy miket tudunk, ha az élek helyett csúcsokat súlyozunk? Esetleg az élek mellett csúcsokat is? Ebben az alfejezetben ezen másfajta súlyozásokat ismerjük meg.

G -nek egy *csúcs k -súlyozása* egy $w : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ hozzárendelés. Hasonló kérdésekkel fogunk foglalkozni, mint az előbb: úgy kapjuk egy adott csúcs színét, hogy vesszük a szomszédos csúcsok súlyának összegét, szorzatát, multihalmazát, halmazát. Ha az így kapott színezés megengedett, akkor azt mondjuk, hogy a csúcs k -súlyozás *megengedett*. A legkisebb k értékeket, amelyre létezik megengedett színezés az adott típusokhoz rendre $\chi_{\Sigma}^v, \chi_{\Pi}^v, \chi_m^v, \chi_h^v$ -val jelöljük. A megengedett csúcs k -súlyozást összeggel szerencsés címkézésnek is nevezik. Ezt a csúcs súlyozásos változatot [19]-ben tanulmányozzák először és a következő sejtést teszik:

5.11. Sejtés (Czerwiński, Grytczuk és Żelazny [19]). *Tetszőleges G gráfra*
 $\chi_{\Sigma}^v \leq \chi(G)$.

5.12. Tétel (S. Akbari, M. Ghanbari, R. Manaviyat, S. Zare [21]). *Minden G gráfra, melyre $\Delta(G) \geq 2$ teljesül, igaz, hogy $\chi_{\Sigma}^v \leq \Delta^2 + \Delta + 1$.*

Ebben az esetben azt láthatjuk, hogy még nehezebb problémáról van szó mint az eddig tárgyalt problémák, mivel amint [20]-ban látható, ha adott egy G gráf, akkor nem csak $k = 2$ -re, hanem bármely k -ra NP-teljes annak az eldöntése, hogy $\chi_{\Sigma}^v(G) = k$. Sőt, még ha csak a 3-színezhető sík gráfok között vizsgálódunk is NP-teljes eldönteni, hogy $\chi_{\Sigma}^v(G) = 2$ teljesül-e. Egyszerűen megfigyelhető, hogy konstans felső becslés itt sem adható, mivel $\chi_{\Sigma}^v(K_n) = n$ tetszőleges $n \geq 2$ -re. További megkötések kellene, ha konstans felső korlátról akarunk beszélni. Ilyen lehet, hogy ha kikötjük, hogy G sík gráf. Ekkor ismert, hogy $\chi_{\Sigma}^v(G) \leq 468$, vagy ha még plusz feltétel, hogy G emellett 3-színezhető is, akkor $\chi_{\Sigma}^v(G) \leq 36$, amint [22]-ben láthatjuk.

Röviden adjunk egy felső becslést a multihalmazos változatra:

5.13. Állítás (Czerwiński, Grytczuk és Żelazny [19]). *Tetszőleges G gráfra $\chi_m^v(G) \leq \chi(G)$.*

Bizonyítás. Legyen $k = \chi(G)$ és $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ a megengedett színezés. Ekkor az így kapott él k -színezés is megengedett lesz multihalmazzal, mivel legyen v, w két szomszédos csúcs. Ekkor $c(N_v)$ valahogy így néz ki: $\{c(w), \dots\}$, $c(N_w)$ pedig: $\{c(v), \dots\}$. Vegyük észre, hogy $c(N_v)$ multihalmazban nem szerepelhet $c(u)$, mivel c alapvetően egy megengedett színezés, viszont $c(v) \in c(N_w)$, azaz $c(N_v) \neq c(N_w)$ bármely két szomszédos csúcsra teljesül, így a csúcs k -színezésünk multihalmazzal megengedett lesz. \square

Vegyük észre, hogy az előző bizonyítás halmazoknál is megállja a helyét.

5.14. Következmény. Minden G gráfra $\chi_h^v(G) \leq \chi(G)$.

Térjünk át a totális súlyozásokra. A totális súlyozás egy olyan súlyozás, amely a G gráfunk éleihez és csúcsaihoz is rendel súlyokat. Totális k -súlyozás hasonlóan definiálható az előzőkéhez. Hasonló variációkkal fogunk találkozni, mint az előbbieken: úgy kapjuk egy adott csúcs színét, hogy vesszük a rá illeszkedő élek súlyának, és magának a csúcsnak a súlyának az összegét, szorzatát, multihalmazát, halmazát. Ha az így kapott színezés megengedett, akkor azt mondjuk, hogy a totális k -súlyozás *megengedett*. A legkisebb k értékeket, amelyre létezik megengedett színezés az adott típusokhoz rendre $\chi_\Sigma^t, \chi_\Pi^t, \chi_m^t, \chi_h^t$ -vel jelöljük.

Egyszerű megfigyelés, hogyha minden csúcs súlyát 1-nek válasszuk, akkor az a színezést egyáltalán nem befolyásolja, szóval így vissza tudtuk vezetni egy él k -súlyozásra. Viszont mivel a csúcsokra más számokat is írhatunk, az 1-en kívül, ezért egy G gráf totális megengedett k -súlyozásához potenciálisan kisebb k is elég, mint G megengedett él k -súlyozásához. Így a következőket állíthatjuk:

5.15. Állítás. Tetszőleges G gráf esetén

1. $\chi_\Sigma^t(G) \leq \chi_\Sigma^e(G)$,
2. $\chi_\Pi^t(G) \leq \chi_\Pi^e(G)$,
3. $\chi_m^t(G) \leq \chi_m^e(G)$,
4. $\chi_h^t(G) \leq \chi_h^e(G) = \lceil \log_2 \chi(G) \rceil + 1$ [14].

A totális súlyozások tanulmányozását az 1-2-3 sejtéshez igen hasonló sejtés, az 1-2 sejtés motiválja, amelyet a következőképpen fogalmazhatunk meg:

5.16. Sejtés (Przybylo és Woźniak [23]). Tetszőleges G gráfra $\chi_\Sigma^t(G) \leq 2$.

Felmerülhet bennünk az ötlet, hogy mi van, hogyha egy kicsit általánosabb problémát nézünk, és nem ugyanabból a súlykészletből súlyozzuk az éleket/csúcsokat. Például egy totális (k, l) -súlyozás, egy olyan w súlyozás, hogy w a csúcsokhoz az $\{1, 2, \dots, k\}$, az élekhez pedig az $\{1, 2, \dots, l\}$ halmazból rendel. Éppen ezen súlyozások tanulmányozásából jön egy a sejtés állításához nagyon közeli, érdekes eredmény, mégpedig, hogy:

5.17. Tétel (Kalkowski [24]). Minden G gráfhoz létezik megengedett totális $(2, 3)$ súlyozás összeggel.

5.18. Következmény. Tetszőleges G gráfra $\chi_\Sigma^t(G) \leq 3$

Vajmi keveset tudunk abban az esetben, ha a színező operációt lecseréljük. Az 5.18-as következmény implikálja, hogy $\chi_m^t(G) \leq 3$ minden gráfra, amint ezt már átgondoltuk. Szorzásos változat esetén a következő sejtés motiválja a további kutatómunkát a területen:

5.19. Sejtés (Skowronek-Kaziów [24]). Tetszőleges G gráfra $\chi_\Pi^t(G) \leq 2$.

6. Az 1-2-3 sejtés vizsgálata számítógépes módszerekkel

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk, hogy az 1-2-3 tulajdonság felismerését hogyan lehet az egészértékű programozás nyelvén megfogalmazni. Majd miután felírtuk az egészértékű programot, megmutatjuk, hogy az ELTE szuperszámítógépén, az Atlaszon [32] futtatva olyan eredményeket tudtunk elérni, mint például, hogy ha $V(G) \leq 12$, akkor igaz a sejtés, Vagy, hogy feltudtuk használni a programot, olyan gráfok keresésére, amivel belátható, hogy ha (a, b) fix nemnegatív racionális pár, akkor annak eldöntése, hogy egy G gráfnak létezik-e megengedett (a, b) élsúlyozása NP-teljes. Első lépésként egy nemlineáris feltételeket is tartalmazó rendszert adunk meg, majd megmutatjuk, hogy hogyan lehet egészértékű lineáris programként megfogalmazni.

6.1. Az IP modell

$$x_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i : 1 \leq i \leq |E| \quad (1a)$$

$$1 \leq x_i \quad \forall i : 1 \leq i \leq |E| \quad (1b)$$

$$x_i \leq 3 \quad \forall i : 1 \leq i \leq |E| \quad (1c)$$

$$y_i = \sum_{j \in J^*(i)} x_j \quad \forall i : 1 \leq i \leq |V| \quad (1d)$$

$$y_i \neq y_j \quad v_i v_j \in E \quad (1e)$$

Tehát az élekhez egészértékű változókat rendelünk (1a)-ban, amelyek értéke 1 és 3 közé esik, amit (1b, 1c)-ben láthatunk. Ez felel meg annak, hogy az adott élhez mekkora számot rendelünk. Legyen a $J^*(i)$ az élindexek azon részhalmaza, hogyha $j \in J^*(i)$, akkor e_j (a j -edik él) illeszkedik v_i -re. Tehát (1d)-ben azt fogalmazzuk meg, hogy minden csúcshoz definiálunk egy új y_i változót, úgy, hogy y_i -be az i -edik csúcsra illeszkedő élek súlyainak összege kerül.

Végül még azt a feltételt kéne megfogalmazzuk, hogy ezeknek az y_i változóknak egy jó színezést kell adniuk. Azaz azt szeretnénk elérni, hogy bármely $i \neq j$ párra, amelyhez él tartozik a hozzájuk rendelt y változó értéke ne legyen egyenlő. Ezt írja le nagyon röviden (1e). Amint látjuk, ez sajnos nem lineáris kifejezés.

Úgy szeretnénk linearizálni új z_{ij} bináris változók bevezetésével, hogy z egyik lehetséges értéke implikálja, hogy $(y_i - y_j) \geq \epsilon$, míg a másik lehetséges érték az $(y_j - y_i) \geq \epsilon$ kifejezést implikálja, ahol ϵ pozitív kicsi szám. Ekkor, ha megoldható a modell, akkor x egy megengedett él 3-súlyozás, mivel a megoldhatóságba beletartozik, hogy minden z -hez kell értéket rendelni, ami azt jelenti, hogy egy él két végén lévő szám nem egyezhet meg. Tehát akkor nézzük, hogy pontosan hogyan vegyük

fel a z segédváltozókat, emellett, hogy milyen plusz egyenlőtlenségek kellenek még az előbb említett célok eléréséhez:

$$z_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i < j : \exists e = v_i v_j \in E \quad (1f)$$

$$y_i - y_j \leq -\epsilon + M z_{ij} \quad \forall i < j : \exists e = v_i v_j \in E \quad (1g)$$

$$y_i - y_j \geq \epsilon - (1 - z_{ij})M \quad \forall i < j : \exists e = v_i v_j \in E \quad (1h)$$

Azt állítjuk, hogy ezzel a néhány sor hozzávételével a modellhez kiválthatjuk az (1e) feltételt. Ennek az ellenőrzéséhez először tegyük fel, hogy $z_{ij} = 1$. Ekkor lássuk be, hogy ebből következik, hogy $(y_i - y_j) \geq \epsilon$:

$$y_i - y_j \leq -\epsilon + M \quad (1i)$$

ha M elég nagy, akkor ez biztosan teljesül. Az (1h) egyenlőtlenség, miután behelyettesítünk z_{ij} -be:

$$y_i - y_j \geq \epsilon - 0 \cdot M \quad (1j)$$

Tehát ha $z_{ij} = 1$, akkor abból következik, hogy $(y_i - y_j) \geq \epsilon$, azaz $y_i \neq y_j$, mivel az y koordinátái egész változók összegei és mivel $\epsilon > 0$ pozitív szám.

Nézzük a második esetet, azaz tegyük fel, hogy $z_{ij} = 0$. Ekkor

$$y_i - y_j \geq \epsilon - M \quad (1k)$$

is teljesül, ha M elég nagy. Hasonlóan az (1h) megfogalmazása a $z_{ij} = 0$ esetben:

$$y_i - y_j \leq -\epsilon + 0 \cdot M \quad (1l)$$

$$y_j - y_i \geq \epsilon \quad (1m)$$

Tehát ha $\epsilon > 0$ és $z_{ij} = 0$, akkor abból következik, hogy $(y_j - y_i) \geq \epsilon$, azaz $y_i \neq y_j$.

A bizonyítás során két helyen is megemlítettük, hogy az érintett egyenlőtlenség biztosan teljesül, ha M elég nagy konstans. Nézzük meg, hogy pontosan mekkorának kell lennie. Láthatjuk a bizonyítás első felében, az (1i) egyenletben, hogy M értékét legalább $(3\Delta - 1 + \epsilon)$ -ra kell állítani, mivel y_i maximális értéke 3Δ , míg y_j minimális értéke 1. Szóval, ha M értékét az előbb említett $(3\Delta - 1 + \epsilon)$ értékre állítjuk, akkor biztosan teljesülő egyenlőtlenséget kapunk. A második felében szereplő (1k) egyenlőtlenség esetében is hasonlóan lehet okoskodni, azaz y_i minimális értéke 1, y_j maximális értéke 3Δ , és -1 -gyel szorozva ugyanazt a korlátot kapjuk mint az előző esetben. Hátra marad még ϵ megválasztása. Láthatjuk a modell alapján ϵ -nak az az egyetlen szerepe van, hogy előírja, hogy a szomszédos címkéknek legalább ϵ -nyival kell eltérniük. És ha két címke különbözik, akkor legalább egy a különbség közöttük, mivel y_i -k egész értékeket vehetnek csak fel, ezért nem gátol abban semmi sem minket, hogy ϵ -t pontosan egynek válasszuk. Ezáltal M -et is 3Δ -nak választva.

6.1. Megjegyzés. Látható, hogy ez a modell könnyen megváltoztatható úgy, hogy ne azt ellenőrizze le, hogy a G gráfunk 1-2-3 tulajdonságú-e, hanem azt, hogy 1-2 tulajdonságú-e. Ehhez egyszerűen cseréljük le az (1c)-ben található 3-as felső korlátot 2-re, és kész is a modell, ami egy input gráfról eldönti, hogy 1-2 tulajdonságú-e.

6.2. Számítógépes eredmények

A diplomamunka következő részében térjünk át az Atlaszon elért eredmények vizsgálatára a fentebb bemutatott IP modell alkalmazásával.

Először is az IP modellt a LEMON [30] és a CPLEX [31] felhasználásával implementáltuk. Elsősorban a programot arra terveztük, hogy ellenőrizze, hogy az input gráf 1-2 tulajdonságú-e, és csak akkor ellenőrizze az 1-2-3 tulajdonságot, ha az 1-2 nem teljesül rá. Majd miután elkészült a program két különböző modellel is összevetettük az eredményeket ezzel is tesztelve, hogy mennyire jelennek meg számítási hibák. Örömmel tapasztaltuk, hogy a bugok kijavítása után megszűntek az ilyen fajta hibák. Végül a modell mellé raktunk egy ellenőrző függvényt is, ezzel megbizonyosodva, hogy ha a modellünk talál egy megoldást, az valóban megfelel-e egy színezésnek. Majd ezután elkezdhetjük futtatni a programot. Egészen az összes 12 csúcsú gráfig le tudtuk futtatni a programot, bár már a 12 csúcsú gráfokra is két hétig futott a szuperszámítógépen. A következő csúcsszámra, azaz a 13 csúcsú gráfokra a becslésünk szerint megközelítőleg 6614 napig futna a program. Látható, hogy jelentős gyorsítások nélkül a 13 csúcsú gráfokra már reménytelen, hogy végig várjuk a futást. A futási eredményeket egészen 12 csúcsig a 1-es táblázatban foglaljuk össze.

Láthatjuk az 1-es táblázatban, hogy ahogy növeljük a csúcs számot egyre valószínűbb, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott gráf rendelkezik az 1-2 tulajdonsággal, ezzel a gyakorlatban is látva Addario-Berry, Dalal és Reed [6] azon eredményét, miként ha G egy véletlen gráf (az Erdős-Rényi modell szerint), akkor aszimptotikusan majdnem biztosan 1-2 tulajdonságú. Emellett, amint látható a táblázatban, az egy csúcsú gráf nincsen feltüntetve, mert annak élei sincsenek, ezért érdemtelen a szempontunkból, míg a 2 csúcsú gráfról az egyik legelső megfigyelés alapján tudjuk, hogy nem 1-2 tulajdonságú.

n	Összefüggő gráfok száma n csúcson	Nem 1-2 tulajdonságúak száma	1-2 tulajdonságú gráfok aránya
2	1	1	0%
3	2	1	50%
4	6	1	83.33%
5	21	2	90.48%
6	112	5	95.54%
7	853	5	99.41%
8	11117	10	99.91%
9	261080	19	99.9927%
10	11716571	101	99.9991%
11	1006700565	306	99.9999696%
12	164059830476	2072	99.9999987%

1. táblázat

További területeken is megpróbáltuk a modellünket használni, mint például mit tudunk abban az esetben, ha van egy páros gráfunk és az éleire már kezdetben is vannak írva számok, akkor befejezhető-e, ha megengedett 1-2 élsúlyozást szeretnénk. Vagy amint a 3.3-as megjegyzésben láttuk vajon kiterjeszhető-e a 3.1-es bizonyításban adott módszer tetszőleges racionális (a, b) számokra. A következőkben ezen problémákat vizsgáljuk és hogy milyen megoldásokra, következtetésekre jutottunk velük kapcsolatban.

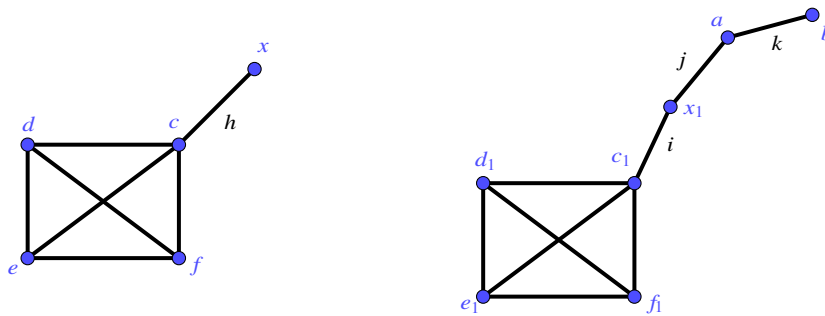
6.2.1. Megkezdett súlyozás befejezhetősége

Először is vázoljuk az alapfeladatot, amelyről jelen tudásunk szerint az irodalom még nem foglalkozott.

6.2. Feladat. *Adott egy G páros gráf, és néhány éle megvan súlyozva az $\{1, 2\}$ halmazból. A kérdés, hogy befejezhető-e ez a súlyozás, azaz tudunk-e a G gráfunk nem súlyozott éleihez olyan súlyokat rendelni az $\{1, 2\}$ halmazból, hogy az így kapott 1-2 élsúlyozás (kiegészítve a rögzített élekkel) megengedett legyen.*

A következőkben vázolunk egy ötletet ennek a feladatnak a megoldására. Az első megfigyelés, amit tehetünk, hogy erre a problémára lehet hasonlóan tekinteni, mint egy totális súlyozásra, szóval hátha tudunk az ott elért eredményekből valamit hasznosítani. Mindjárt látni fogjuk, hogy sajnos nem így lesz. Mégpedig azért tekinthetünk a problémára hasonlóan, mint egy totális súlyozás feladatra, mert ha van egy $e = uv$ élünk, aminek fixálva van a súlya, akkor megtehetjük azt, hogy kitöröljük az élet és a súlyát ráírjuk az u és v csúcsokra. Így a csúcsok címkéi nem 0-ról indulnak, hanem a fix súlyról. Ha van egy csúcs amire több ilyen él is illeszkedik, akkor az összes él kitörlése után a súlyok szummáját írjuk a csúcsra. Láthatjuk, hogy így valóban nagyon hasonló feladatot kaptunk az 5.2-es fejezetben látott totális súlyozásokhoz. Viszont egyrészt azon a területen sincsen szó fix csúcssúlyokról, másrészt egy fix súlya így a csúcsnak akár 2Δ -ig is felmehet, míg sokkal kisebb fix számokra összpontosít az irodalom, harmadrészt pedig az olyan csúcsokra melyekre nem illeszkedik fixált él, 0-át kéne írni, de a totális súlyozásoknál ez nem volt megengedve.

Közelítsük meg másképp a problémát. Először is vizsgáljuk tetszőleges G gráfra, ne páros gráfra. Első lépés legyen ugyanaz, mint az előbb, szóval kitöröljük az éleket melyek súlya rögzített, majd ráírjuk a csúcsokra a súlyokat. Ezután a 3.1. tétel bizonyításban használt hasonló segédgráfok segítségével, amint a 9-es ábrán láthatjuk, el tudjuk érni, hogy ne kelljen a csúcsokra számokat írni. Mégpedig úgy, hogyha egy u csúcsra páros szám van írva, például $2k$, akkor felveszünk a baloldali segédgráfból k darabot az u csúcsra, ha pedig páratlan, legyen $(2k + 1)$, akkor a baloldali k -t és a jobb oldali 1 -et. Mivel a bal oldali segédgráfról tudjuk, hogy $w(h) = 2$ mindenképp teljesül, amint a 3.1. tétel bizonyításban láttuk, ha megengedett súlyozást szeretnénk. A jobb oldali segédgráf k élére pedig, éppen



9. ábra. Bal oldalt $w(h) = 2$, míg jobb oldalt a $w(k) = 1$ mindenképp teljesül, ha megengedett él 2-súlyozásról beszélünk.

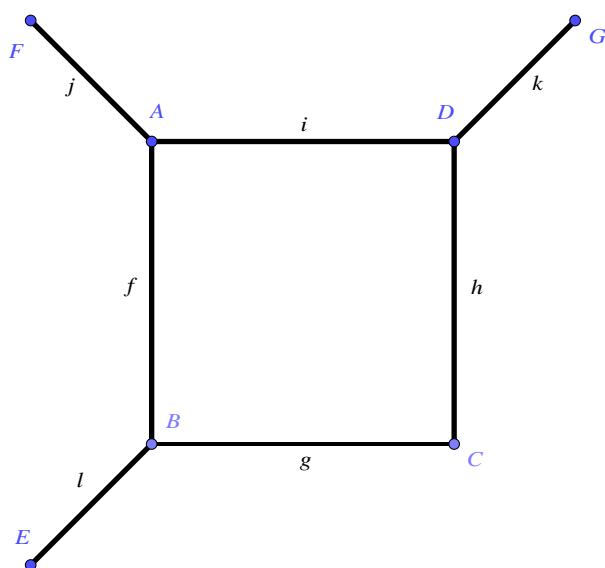
ezért teljesülni fog, hogy $w(k) = 1$, mivel, ha $w(i) = 2$, és $w(k) = 2$ teljesülne, akkor bármit írunk a j élre $z(x_1) = z(a)$ teljesülne. Ezáltal egy megkezdett problémát visszavezetve egy sima megengedett él 2-színezés keresésére.

Ezután térjünk át a páros gráfok vizsgálatára. Láthatjuk, hogy a 9-es ábrában bemutatott segédgráfok nem párosak. Szóval megkezdett páros feladat sima páros feladatra való visszavezetését nem lehet annyival elintézni, hogy az eddig kitalált segédgráfokat használjuk fel — ezzel kész lennénk, hiszen egy páros gráfról polinom időben eldönthető, hogy 1-2 tulajdonságú-e. A megközelítést illetően aggodalomra ad okot a következő állítás:

6.3. Állítás. *Nem létezik olyan H páros segédgráf, amelynek van egy olyan e levele, hogy H minden megengedett él 2-súlyozásában $w(e) = 1$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik ilyen segédgráf. Emellett jelöljük (G, u) -val azt a feladatot, hogy a G gráfunk u csúcsára elő van írva, hogy $z_0(u) = 1$, ahol $z_0(u)$, azt jelenti, hogy u címkézése mennyiről indul. Ekkor azt kapnánk, hogy (G, u) akkor és csak akkor befejezhető megengedetten, ha $G \cup H$ 1-2 tulajdonságú, ahol H az említett segédgráf és az unió vétel úgy értődik, hogy G fixálni kívánt csúcsára illesszük H -t. Azaz ha $G \cup H$ nem egy páratlan multi-kaktusz. De azt tudjuk a 4.2.2-es karakterizációból, hogy egy páratlan multi kaktusz körök uniója, viszont $G \cup H$ nem körök uniója, így sosem lesz páratlan multi-kaktusz. Ezáltal ha adott a (G, u) pár, akkor ez a feladat mindig befejezhető. Könnyen látható, hogy ha (G, u) pár helyett (G, u_1, \dots, u_n) -t feltételezünk, akkor is ugyanezeket az állításokat mondhatjuk el. Még kell mutatnunk arra egy ellenpéldát, hogy (G, u_1, u_2, u_3) , ahol G páros, de mégsem befejezhető: tekintsük a 10. ábrát. Legyen előírva, hogy $w(j) = w(l) = w(k) = 1$. Ekkor $z_0(A) = z_0(B) = z_0(D) = 1$. Szóval ezek alapján $w(i) \neq w(f)$, ezzel látva, hogy $z(A) = 4$. Ezáltal négy eset marad: $w(g) = w(h) = 1, w(g) = 2, w(h) = 1, w(g) = 1, w(h) = 2, w(g) = w(h) = 2$. Könnyen ellenőrizhető, hogy egyik esetben sem kapunk megengedett színezést.

Tehát azt kaptuk, hogy létezik G páros gráf és hozzá néhány élére 1-es súly megkötve, hogy ne legyen befejezhető. Ezáltal ellentmondásra jutottunk, nem lehet olyan segédgráf, amit eddig kerestünk. \square



10. ábra. Ellenpélda, ahol $w(j) = 1 = w(l) = w(k)$ -t előírva nem befejezhető páros gráfot kapunk.

6.4. Következmény. *Olyan páros segédgráf sem létezik melyre a fixált érték nem 1-es, hanem 2-es.*

A fenti állításból tudjuk tehát, hogy azt nem nagyon remélhetjük, hogy egy páros gráfhoz tudjunk olyan segéd gráfot gyártani, ami páros és egy levelén csak egy adott érték lehessen. Gondolhatjuk tehát, hogyha nem is tudjuk elérni, egy levél rögzített súlyát, talán olyan segéd gráfokat tudunk adni, amelynek egy csúcsán bármely megengedett színezésre a címkéje p lesz. Mert ha találnánk két olyan segédgráfot, hogy az egyiknek van olyan csúcsa, hogy mindig p a címkéje, míg a másiknak $(p + 1)$, akkor azzal már mindent tudnánk modellezni, mivel akkor már tudunk tetszőleges csúcsra 1-est is kényszeríteni, amivel pedig minden egész szám előállítható. Még pedig úgy, hogy a tetszőleges csúcsához, amelyiken az 1-est szeretnénk lefixálni hozzáadjuk a $(p + 1)$ -es segédgráfot, míg minden más csúcsához a p -set. E probléma által vezérelve átalakítottuk a programot, és a fentebb adott modellt, hogy próbáljon meg olyan segédgráfokat keresni, hogy a segédgráf egy kijelölt csúcsán csak egy adott p érték lehet. Először megvizsgáltuk a program helyességét általános gráfokra, és örömeinkre minden féle p -re tudunk találni kívánt segédgráfokat, Természetesen kisebb gráfok esetében kisebb p -kre. Többek között az 3.1-es bizonyításban használt segédgráfokat is megtaláltuk.

Majd ezután csak a páros gráfok körében vizsgáltunk $p = 2, 3 \dots 8$ és $|V(G)| = 3, 4, \dots, 8$ paraméterek mellett, de sajnálatos módon nemhogy két egymás utáni p -re, de egyetlen egy p -re sem talált a program segédgráfot az iménti paraméterek mellett. Ez által nyitva maradnak a következő kérdések, mint például, hogy egyáltalán léteznek-e ilyen segédgráfok, vagy az eredmény, hogy nem tudunk kisebb páros gráfok között p -t kényszeríteni a számítási hibáknak tudható be, esetleg csak nagyobb gráfok között kéne keresni.

7. Gráfok (a,b) súlyozásának nehézsége

Amint a 3-as fejezetben láttuk, Dudek és Wajc [10], azt sejtették, hogy a módszer amit adtak arra az esetre amikor az $\{1, 2\}$ illetve a $\{0, 1\}$ halmazokból súlyozzuk az éleket, kiterjeszthető tetszőleges $\{a, b\}$ racionális súly halmazra is. Legjobb tudomásunk szerint a cikk 2011-es megjelenése óta nem történt előrelépés a problémával kapcsolatban. Bemutatjuk, hogy a módszer kiterjesztésében mi okozza a nehézséget, majd sikeresen meg is mutatjuk, hogy igaz a sejtés azon része, miszerint az adott polinomiális redukció kiterjeszthető tetszőleges nemnegatív, racionális (a, b) párokra — ezzel igazolva, hogy NP-teljes annak eldöntése, hogy egy G gráf rendelkezik-e megengedett (a, b) élsúlyozással.

Legyenek a és b különböző racionális számok. Az (a, b) élsúlyozás esetén az élekhez az $\{a, b\}$ halmazból rendelünk súlyokat. Egy ilyen élsúlyozást a fentiekhez hasonlóan akkor nevezünk megengedettnek, ha bármely két szomszédos csúcs súlyozott foka különböző.

Első lépésként csak nemnegatív egész (a, b) párokról fogunk beszélni, majd mikor ezekre megoldottuk a feladatot megmutatjuk, hogy kiterjeszthető nem negatív racionális számokra is. Tekintsük át röviden a 3.1-es bizonyítás lépéseit, mivel azon bizonyítást szeretnénk kiterjeszteni tetszőleges nemnegatív racionális (a, b) párra. Elsőként az $f(G)$ redukciót definiáltuk, amelyhez speciális segédgráfokra volt szükség. Majd ezután második lépésként kimondtuk a 3.2-es fontos lemmát, amely az $f(G)$ -ben lévő G -beli csúcsok lehetséges címkeire vonatkozott. Végül harmadik lépésben az előző lépésben kimondott lemma segítségével meg lehetett mutatni, hogy $G \in 3\text{-SZÍN}$ akkor és csak akkor, ha $f(G)$ -nek létezik megengedett 1-2 élsúlyozása. A következőkben kiterjesztjük a 3.1 tétel bizonyítását tetszőleges konstans (a, b) -re.

A 3.1 tétel bizonyításának a kulcsa az $f(G)$ redukció megfelelő előállítás. Ezen redukció analóg módon megtehető tetszőleges (a, b) -re, amennyiben a segédgráfokat sikerül megfelelően megkonstruálni. Mégpedig megfelelő alatt azt értjük, hogy a 3.2-es lemmához hasonló állítás teljesüljön $f(G)$ -re. A 3.1-es bizonyítástól eltérően most nem olyan segédgráfok kellenek, amelyek minden k -ra ki tudják zárni, hogy a becsatlakozási pontjukban található csúcs címkéje k legyen, hanem olyan segédgráfok, amelyek egy alsó és egy felső határ között az összes számot kizárják $(b - a)$ lépésközzel.

Nézzük meg, hogyha hűek maradunk az eredeti bizonyításban látott $f(G)$ redukció előállításához, akkor $f(G)$ -ben egy G -beli csúcs címkéje mekkora lehet (az eredeti $f(G)$ redukció előállítása a 5. ábrán látható). Az s_v és a t_v csúcsokból összesen $\{2a, a+b, 2b\}$ jöhet, a ráilleszkedő sima $(n-1)$ élből $\{(n-1)a, (n-2)a+b, \dots, (n-1)b\}$, a segédgráfokból pedig $(a+b)(n-1)$, mivel ha még nem is definiáltuk, hogy a segédgráfokat pontosan hogyan is kell előállítani, azt tudjuk, hogy az alapjának egy háromszög segédgráfnak kell lennie, amelyről pedig tudjuk, hogy $(a+b)$ -t ad

hozzá a becsatlakozási pontjának a címkéjéhez. Azaz

$$\begin{aligned} \{2a, a+b, 2b\} + \{(n-1)a, (n-2)a+b, \dots, (n-1)b\} + (a+b)(n-1) &= (2) \\ &= \{2na + (n-1)b, (2n-1)a + nb, \dots, (n-1)a + 2nb\} \ni z(u), \end{aligned}$$

ahol két vagy több halmaz összegén most azt a halmazt értjük, amelynek az elemei úgy állíthatóak elő, hogy minden összeadandó halmazból kivesszünk egy-egy elemet, majd azokat összeadjuk.

Szóval láthatjuk, hogy ezek a csúcs súlyok $(2na + (n-1)b)$ -től mennek egészen $((n-1)a + 2nb)$ -ig $(b-a)$ lépésközzel. Tehát konkrétan most olyan segédgráfok kellenének, amelyek a $((2n-3)a + (n+2)b)$ és az $((n-1)a + 2nb)$ közötti számokat zárják ki $(b-a)$ lépésközzel, ha azt szeretnénk, hogy a 3.2-es lemmához hasonló állítás teljesüljön $f(G)$ -re. Legyenek ezek a segédgráfok is k -kizáró segédgráfok (annyi különbséggel, hogy itt nem minden k -ra definiáljuk őket). Ehhez pedig, ha lenne olyan kisebb segédgráfunk, aminek az egyik levelén csak a lehet, ha a lehetséges élsúlyok a és b , akkor készen is lennénk. Nevezzük az ilyen segédgráfokat a -kényszerítő segédgráfnak. Hasonlóan definiálható a b -kényszerítő segédgráf is. Vegyük észre, ha van a -kényszerítő segédgráf, akkor van b -kényszerítő segédgráf is, mivel, ha a levelet amin a kényszerítve van, meghosszabbítjuk egy kettő hosszú úttal, akkor az út végén nem lehet a , mert akkor az út középső élének két végpontjának ugyanaz lenne súlya. Emellett megfigyelhetjük, hogy a 3-as fejezetben definiált négyzet segédgráf egy 2-kényszerítő segédgráf.

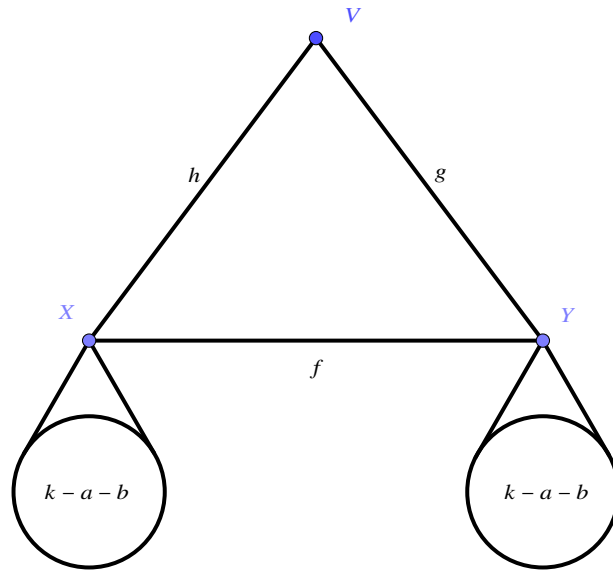
Tehát azt állítottuk, hogyha az (a, b) élsúlyozásos feladathoz van a -kényszerítő és b -kényszerítő segédgráf, akkor előállíthatóak a kívánt k -kizáró segédgráfok is. Ez azért teljesül, mert ha például a $k = ((2n-3)a + (n+2)b)$ -hez tartozó segédgráfot úgy tudnánk előállítani, hogy az X és az Y alá felvesszünk $(n+1)$ db b -kényszerítő segédgráfot, majd mellé $(2n-4)$ db a -kényszerítő segédgráfot a 11-es ábra alapján. Mivel a és b is fix, ezért az a -kényszerítő és a b -kényszerítő segédgráf is konstans méretű, azaz $f(G)$ G méretében polinomiális időben előállítható. Így a korábbi megfigyelések alapján a 11-es ábrán látható segédgráf bárhogy is van megsúlyozva, V csúcsában $(a+b)$ -t fog hozzáadni a kívánt csúcshoz, emellett a megfelelő k értéket kizárja. Fontos, hogy így a 3.2-es lemmához hasonló állítást fogalmazhatjuk meg:

7.1. Lemma. *Ha létezik az (a, b) élsúlyozásos feladathoz a -kényszerítő és b -kényszerítő segédgráf, akkor elő tudjuk állítani $f(G)$ -t, és $f(G)$ -ben minden megengedett (a, b) élsúlyozásra teljesül, hogy minden $v \in V$ -re:*

$$z(v) \in \{2na + (n-1)b, (2n-1)a + nb, (2n-2)a + (n+1)b\}.$$

Bizonyítás. A fenti 2-es egyenlet alapján tudjuk, hogy tetszőleges $v \in V$ -re $f(G)$ -ben:

$$z(v) \in \{2na + (n-1)b, (2n-1)a + nb, \dots, (n-1)a + 2nb\}.$$



11. ábra. k -kizáró segédgráf (a, b) élsúlyozás esetén, ahol az X és Y csúcs alatt láthatjuk a $k - a - b$ összsúlyú a -kényszerítő és b -kényszerítő segédgráfok összességének sematikus ábrázolását

Emellett tudjuk, hogy a v -re illeszkedő k -kizáró segédgráfok miatt

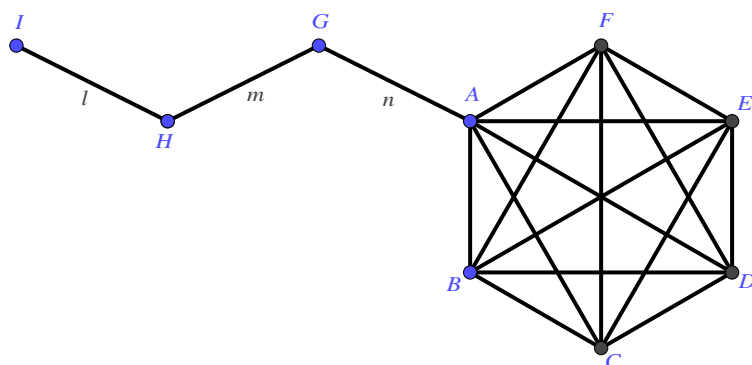
$$z(v) \notin \{(2n - 3)a + (n + 2)b, \dots, (n - 1)a + 2nb\}.$$

Ebből kapjuk, hogy $z(v) \in \{2na + (n - 1)b, (2n - 1)a + nb, (2n - 2)a + (n + 1)b\}$, amivel beláttuk a lemmát. \square

Tetszőleges (a, b) -re első látásra eléggé lehetetlen célnak tűnik a -kényszerítő vagy b -kényszerítő segédgráfot találni, ezért először csak olyan (a, b) párokra vizsgáljuk a feladatot, ahol $b = a + 1$ teljesül.

Szóval a feladat az, hogy keressünk egy olyan segédgráfot, amelynek van egy olyan e levele, amely súlya tetszőlegesen megengedett (a, b) élsúlyozás mellett a . Az előző fejezetben bemutatott program egyfajta általánosításával pedig elérhető az újabb feladat modellezése. Mégpedig úgy, hogy az (1b) és az (1c) korlátok helyett bevezetünk egy olyan $\hat{x}_i \in \{0, 1\}$ segédváltozót, hogy $x_i = (b - a)\hat{x}_i + a$. Ezáltal elérhető, hogy ha $\hat{x}_i = 0$, akkor $x_i = a$ és ha $\hat{x}_i = 1$, akkor $x_i = b$ teljesüljön.

Ezt a modellt használva sikeresen találtunk egy 2-kényszerítő segédgráfot a (2, 3) problémához, ami a következőképpen néz ki: egy K_6 , emellett az egyik csúcsából indul egy P_3 , amint azt a 12. ábrán láthatjuk, és azt tapasztaltuk, hogy az út utolsó élének a súlya csak 2-es lehet. Viszont a numerikus problémáktól aggódva, mivel ez még nem egy irtózatosan nagy gráf, leellenőriztük az összes lehetséges 2^{18} élsúlyozást programmal, hogy valóban nem lehet-e ott más súly, és azt kaptuk, hogy nem.



12. ábra. 2-kényszerítő segédgráf a (2, 3) esethez, ahol $w(l) = 2$ minden megengedett (2, 3) élsúlyozásban. Emellett látható, hogy egyben 3-kényszerítő segédgráf is képezhető belőle a P_3 utolsó két élének elhagyásával, mert ha $w(l) = 2$, akkor $w(n) = 3$, minden megengedett (2, 3) élsúlyozásban.

Ezt követően, miután sikeresen találtunk 2-kényszerítő segédgráfot a (2, 3) élsúlyozáshoz megvizsgáltuk a (3, 4) esetet is. Nagy örömünkre itt is találtunk egy nagyon hasonló 3-kényszerítő segédgráfot. Ebben az esetben a következőképpen nézett ki: egy K_8 és egy csúcsából induló P_3 . Ha figyelembe vesszük, hogy igazából az (1, 2) esetre is láttunk már 2-kényszerítő segédgráfot, amit akkor négyzet gráfnak neveztünk és megint csak hasonlóan néz ki: egy K_4 , plusz egy P_3 , akkor a következő sejtést fogalmazhatjuk meg az elhangzottak fényében, amit a továbbiakban be is bizonyítottunk:

7.2. Lemma. *Legyenek a, b különböző egész számok, és legyen $b = a + 1$. Emellett legyen G a következő gráf $2b + 3$ csúcson: v_1, v_2, v_3, v_4 alkosson egy P_3 -at és $V(G) \setminus \{v_1, v_2, v_3\}$ alkosson egy $K_{2(a+1)}$ -et. Ekkor G az (a, b) élsúlyozásos feladathoz egy megfelelő a -kényszerítő segédgráf.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a segédgráf előáll az előbb kimondott formában, és legyen A az a csúcs, ahol a P_3 becsatlakozik a teljes részgráfunkba, azaz v_4 . Ekkor $K_{2(a+1)}$ csúcsai az A -t kivéve a következő súlyokat vehetik fel:

1. $(2a + 1)a = 2a^2 + a$
2. $(2a)a + a + 1 = 2a^2 + a + 1$
- ⋮
- 2a+2.** $(2a + 1)(a + 1) = 2a^2 + 3a + 1$

Amint láthatjuk $(2a + 1)$ csúcsra $(2a + 2)$ súly jut, tehát először úgy tűnhet, hogy $(2a + 2)$ eset van. De ez nem teljesen lesz így, mert a $(2a + 1)a$ és a $(2a + 1)(a + 1)$ címke nem szerepelhet egyszerre a súlyok között, mivel mindenki mindenkivel össze van kötve, ezért nem lehet olyan eset, hogy van olyan csúcs is aminek az éleire csak a és mellé egy olyan csúcs is aminek az éleire csak $(a + 1)$ van írva.

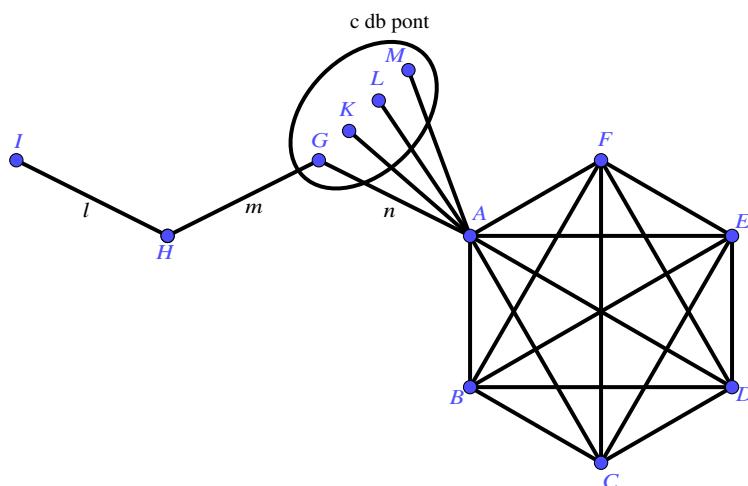
Két eset van tehát. Az első eset, hogy $(2a + 1)a = 2a^2 + a$ -s csúcs súly van. Ekkor a csúcs súlyok $(2a + 1)a = 2a^2 + a$ -tól egészen $(2a^2 + 3a)$ -ig terjednek egyesével. Állítsuk sorba a csúcsokat a címkéjük nagysága szerint. Megtehetjük, hogy már most minden csúcshoz hozzárendeljük a súlyát, mivel egy teljes részgráfról beszélünk. Ekkor vegyük sorra a csúcsokat úgy, hogy az elsőről indulunk, majd átugrunk az utolsóra, majd vissza a másodikra, majd hátra az utolsó előttihez, és így tovább. Tekinthezük úgy, hogy az i -edik lépésben megmutatjuk, hogy a $(2a^2 + a + i - 1)$ és a $(2a^2 + 3a + 1 - i)$ címkéjű csúcsok éleinek súlyának megválasztásakor 0 szabadsági fokunk van, mivel az előtte megsúlyozottak meghatározzák, hogy mit kell írunk a rá illeszkedő élekre. Tehát az első lépésben konstatálva, hogy van $(2a + 1)a$ -s csúcsunk, neki az éleire csupa a -t kell írunk. De akkor az utolsónak minden maradandó élére $(a + 1)$ -est kell írni, mivel az a címke úgy áll elő, hogy 1 db a -s és $2a$ db $(a + 1)$ -es éle van. A második lépésben először $(2a^2 + a + 1)$ nem súlyozott éleire kell a -t írni, majd a $(2a^2 + 3a - 1)$ címkéjű csúcs maradék éleire $(a + 1)$ -et, ugyanazon megfigyelés alapján, mint amit az első lépésben tettünk. Az i -edik lépésben tudjuk, hogy a $(i - 1)$ db legnagyobb címkéjű csúcs élei már megvannak súlyozva és belőlük már jön $(i - 1)$ db $(a + 1)$ -es él az i -edik csúcsba. De akkor több $(a + 1)$ -es éle nem lehet, mert $(a + 1)(i - 1) + a(2a + 1 - (i - 1)) = 2a^2 + a + i - 1$, szóval a maradék súlyozatlan éleinek a súlyának a -nak kell lennie. Ebből azt is tudjuk, hogy az első i db legkisebb címkéjű csúcs élei mind megvannak súlyozva, és belőlük minden $(a + 1)$ -es él a $(2a + 1 - i)$ -edik csúcsnál nagyobb címkéjű csúcsokba megy, azaz a $(2a + 1 - i)$ -edik csúcsnak i db a -s éle már van. És mivel $ai + (a + 1)(2a + 1 - i) = 2a^2 + 3a + 1 - i$, ezért neki minden maradék élére $(a + 1)$ -est kell írni. Tehát azt kaptuk, hogy az $(a + 1)$ -edik lépésre már csak a $(a + 1)$ -edik csúcs nem került sorra, amelyikhez a $(2a^2 + 2a)$ címkéjű csúcs tartozik. Viszont tudjuk, hogy az előtte lévő a db címkéjű csúcsból a -t kap, míg az utána lévő a darabból $(a + 1)$ -et. Tehát, hogy visszacapjunk a $(2a^2 + 2a)$ -t, az egyetlen még szabad, A -ba menő élére a -nak kell kerülnie, mivel $2a^2 + 2a - (a \cdot a + a(a + 1)) = a$. Végül az maradt, hogy meghatározzuk az A -ba bemenő élek összegét. $(a + 1)$ db a súlyú és a db $(a + 1)$ -es súlyú él megy A -ba a teljes részgráfból. Tehát mivel $(2a^2 + 2a + a)$ címkéjű csúcsunk már van és $(2a^2 + 2a + a + 1)$ címkéjű nincs, beláttuk, hogy ebben az esetben megkaptuk a kívánt segédgráfot.

A második eset, pedig annyiban különbözik az elsőttől, hogy most a legnagyobbbról indulunk, arról ugrunk az elsőre, arról az utolsó előttihez és így tovább. Végül a végén $(2a^2 + 2a + 1)$ -es címkéjű csúcs marad már csak és itt $(a + 1)$ -et kell írni az A -ra menő élére. Viszont mivel most a címkék halmazában a legnagyobb 1-gyel nagyobb, mint az előző esetben, ezért itt is kijön, hogy ez egy megfelelő segédgráf lesz. \square

Az $(a, a + 1)$ eset sikerét követően elgondolkoztunk, hogy nem lehet-e, hogy más $(a, a + c)$ számpárokra is kijöjjön valami hasonló. Megnéztük az $(1, 3)$ párra például és azt kaptuk, hogy itt is létezik segédgráf mégpedig a következőképpen néz ki: egy K_6 , egy P_3 hasonlóan az előző esethez, viszont itt illeszkedik még egy plusz levél arra a csúcsra ahonnan a P_3 is indul. Az $(1, 4)$ párra is nagyon hasonlóat kaptunk, ott pedig a K_8 és a P_3 mellett nem egy, hanem két plusz él illeszkedik a P_3 kiinduló csúcsára. Ezek alapján a következő sejtés fogalmazódott meg bennünk, amelyet

azonnal be is bizonyítunk:

7.3. Lemma. *Legyenek a, b különböző egész számok, és legyen $b = a + c$. Emellett legyen H a következő gráf $2b + 3 + c - 1$ csúcson: v_1, v_2, v_3, v_4 alkosson egy P_3 -at, $V(H) \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_5, \dots, v_{5+c-2}\}$ alkosson egy K_{2b} -t, és v_i legyen összekötve v_4 -gyel $\forall i = 5, \dots, 5+c-2$ -re. Ekkor H az (a, b) élsúlyozásos feladathoz egy megfelelő a -kényszerítő segédgráf.*



13. ábra. Ezen az ábrán láthatjuk a $(2, 6)$ élsúlyozásos feladathoz tartozó 2-kényszerítő segédgráfot. Ez alapján könnyen látható, hogy általánosságban hogyan néz ki a konstrukció. Sőt, ha $c \geq 2$, akkor ezek a fajta segédgráfok egyben b -kényszerítők is, mivel a bekeretezett $c - 1$ levél mindegyikére csak b kerülhet. Emellett megjegyezhetjük, hogy a $c = 1$ esetre visszkapjuk a 12-es ábrán bemutatott segédgráfot.

Bizonyítás. A 13. ábrán megtekinthető, hogyan is képzelhetőek el ezek a gráfok, amelyekről állítjuk, hogy megfelelő segédgráfok. A bizonyítás, amint látni fogjuk, hasonlóan megy a 7.2-es lemma bizonyításához. A teljes részgráfban legyen $A = v_4$, ahonnan lecsatlakoznak az élek és az út. Emellett a csúcsok címkéi a következő számok lehetnek:

1. $(2(a + c) - 1)a = 2a^2 + 2ac - a$
2. $2a^2 + 2ac - a + c$
3. $2a^2 + 2ac - a + 2c$
- ⋮

2a+2c. $(2(a + c) - 1)(a + c) = 2a^2 + 4ac - a + 2c^2 - c$

Itt is, mint az előző kevésbé általános esetben, a 7.2. lemma bizonyításánál, A kivételével $(2a + 2c - 1)$ csúcs van a teljes részgráfban, és erre van $(2a + 2c)$ súly amint fentebb láthatjuk, és itt nem egyesével, hanem c -esével lépkedünk a címkéken

felfelé. Az első és az utolsó címke nem lehet egyszerre a teljes részgráf- $\{A\}$ egy-egy csúcsának címkéje. Mivel ezt azt vonná magával, hogy a teljes részgráfunkban van csúcs, amelynek az éleire csak a van írva és van mellette egy olyan is aminek pedig b , pedig ezek közül csak az egyik lehetséges. Maga a "dominóeffektus" is ugyanúgy történik, szóval, ha feltesszük, hogy van csúcs a legkisebb címkével, akkor az implikálja, hogy az utolsó előttinek hogyan kell súlyozni az éleit, ami a második legkisebbnek és így tovább. Nézzük pontosan ez hogyan történik. Első esetben tegyük fel, hogy $(2(a+c)-1)a$ címkéjű csúcs van. Tegyük fel, hogy a teljes részgráf csúcsait A kivételével megsorszámozzuk aszerint, hogy mekkora címkét rendelünk hozzájuk a fenti felsorolás alapján. Ezt megtehetjük, mivel teljes részgráfról beszélünk. Tehát ha megsúlyoztuk az 1. csúcs éleit, akkor a $(2(a+c)-1)$ -edik csúcsnak is meg lesznek határozva az élei, mivel már megy bele egy a súlyú él, ezért minden más élének $(a+c)$ súlyúnak kell lennie. De ez már meghatározza a 2. csúcsnak a még súlyozatlan éleire mit kell írni, mivel a 2. súlynak pontosan egy $(a+c)$ súlyú éle van. Ez hasonlóan meghatározza a $(2(a+c)-2)$ -edik csúcs súlyozatlan éleinek súlyát. Vizsgáljuk meg, hogy az i -edik lépésben az i -edik és a $(2(a+c)-i)$ -edik csúcs éleinek megválasztásában nincsen szabadságunk, szóval azáltal, hogy lefixáltuk a $(2(a+c)-1)a$ címkéjű csúcsot, az végig implikálja az összes élsúlyát. Az i -edik lépésben tudjuk, hogy a $(i-1)$ db legnagyobb címkéjű csúcs élei már meg vannak súlyozva és belőlük már jön $(i-1)$ db $(a+c)$ súlyú él az i -edik csúcsba. Vegyük észre, hogy több $(a+c)$ súlyú éle nem lehet, mert az i -edik csúcsba pontosan $(i-1)$ darab $(a+c)$ súlyú él megy. Így az i -edik csúcs súlyozatlan éleire a kerül. De akkor már azt is tudjuk, hogy az első i db legkisebb címkéjű csúcs élei mind meg vannak súlyozva, és belőlük minden $(a+c)$ súlyú él a $(2(a+c)-i)$ -edik csúcsnál nagyobb címkéjű csúcsokba mennek, így a $(2(a+c)-i)$ -edik csúcsnak már van i db a súlyú éle, azaz minden súlyozatlan élére $(a+c)$ -nek kell kerülnie. A legvégén a legkisebb címkéjű esetben, az $(a+c)$ -edik lépésben a $(2a^2 + 3ac - a + c^2 - c)$ címkéjű csúcs marad csak, mivel

$$\frac{(2a^2 + 2ac - 1a) + (2a^2 + 4ac - a + 2c^2 - 2c)}{2} = 2a^2 + 3ac - a + c^2 - c.$$

Neki az egyetlen súlyozatlan élére, tehát ami A -ba megy a -t kell írni, mivel

$$a(a+c-1) + (a+c)(a+c-1) = 2a^2 + 3ac - 2a + c^2 - c.$$

Tehát most A -ba K_{2b} -ből $(a+c)$ db a súlyú és $(a+c-1)$ db $(a+c)$ súlyú él megy. Emellett még A -ra illeszkedik c db él. Ha mindegyiket $(a+c)$ -nek választjuk, akkor

$$z(A) = (2a^2 + 3ac - a + c^2 - c) + (c(a+c)) = 2a^2 + 4ac - a + 2c^2 - c.$$

Így elérve a legnagyobb címkét, ami azt jelenti, hogyha a legvégén a c élből akár egyet is a súlyúnak választanánk, akkor már lenne egy csúcs a K_{2b} -ben, akivel megegyezne a címkéje A -nak.

Így ebben az esetben a kívánt segédgráf állt elő. A bizonyításból az az eset maradt, amikor a legnagyobb címkéjű csúcsot használjuk a legkisebb helyett. Ebben az

esetben a 2. és a $(2a + 2c)$ -edik címkéket használjuk a fenti felsorolás szerit. Ekkor az $(a + c)$ -edik lépésben a $(2a^2 + 3ac - a + c^2)$ címkéjű csúc marad csak, aminek az utolsó élére $a + c$ súlyt kell, hogy írjuk. Így, ha A mind a c még szabad élére $(a + c)$ -t írunk:

$$z(A) = (2a^2 + 3ac - a + c^2) + (c(a + c)) = 2a^2 + 4ac - a + 2c^2.$$

Tehát $z(A)$ így c -vel nagyobb, mint a legnagyobb lehetséges címke, amit használunk is, tehát ha akár egy ilyen élre is a -t íránk, akkor használatban lévő címkét kapnánk. Azaz a P_3 utolsó éle mindenképpen a súlyú lesz. Ezzel beláttuk a lemmát. \square

7.4. Megjegyzés. Legyen (a, b) racionális számpár. Ekkor megengedett (a, b) élsúlyozás létezése ekvivalens megengedett $(a \cdot d, b \cdot d)$ élsúlyozás létezésével, ahol $d \neq 0$. Ez pedig azért teljesül, mert ha van egy megengedett címkézésünk, akkor, ha minden csúc címkéjét megszorozzuk d -vel, az a megengedettséget nem befolyásolja. Azaz azt kaptuk, hogy tetszőleges nem negatív racionális (a, b) párhoz is tudunk a -kényszerítő illetve b -kényszerítő segédgráfot adni, mivel ha d -t a nevezőjének és b nevezőjének a legkisebb közös többszörösének választjuk, akkor $(a \cdot d, b \cdot d)$ egész számpár lesz, amelyre a 7.3-as lemma alapján tudjuk, hogy létezik megfelelő $a \cdot d$ -kényszerítő illetve $b \cdot d$ -kényszerítő segédgráf. De az előző észrevétel szerint ezek a -kényszerítő és b -kényszerítő segédgráfnak is megfelelnek, az (a, b) élsúlyozásos feladathoz.

Eljutottunk arra a pontra, hogy kimondhatjuk és be is bizonyíthatjuk a szakdolgozat fő eredményét, amit a következőképpen fogalmazhatunk meg:

7.5. Tétel. *Legyenek a, b fix különböző nemnegatív racionális számok. Emellett legyen G tetszőleges gráf. Ekkor NP-teljes annak az eldöntése, hogy létezik-e megengedett (a, b) élsúlyozása G -nek.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy egészekkel dolgozunk, mert ha a, b racionális, de nem egész, akkor térjünk át az a', b' élsúlyozásos feladatra, ahol $a' = a \cdot d$, és $b' = b \cdot d$, ahol d az a nevezőjének és a b nevezőjének a legkisebb közös többszöröse, amint ezt a 7.4-es megjegyzésben is láttuk.

A fejezet eddigi részében tárgyalt segédgráfok segítségével polinomiális időben előtudjuk állítani $f(G)$ -t. Mivel fix (a, b) számpárra konstans időben előállítható az a -kényszerítő, illetve b -kényszerítő segédgráf és minden csúcshoz $O(n)$ k -kizáró segédgráf kell, amely segédgráfhoz ugyancsak $O(n)$ darab a -, és b -kényszerítő segédgráf szükséges. Továbbá láttuk, hogy $f(G)$ -re teljesül a 7.1-es lemma, szóval annak belátásához, hogy tetszőleges G gráfra NP-teljes eldönteni, hogy létezik-e megengedett (a, b) élsúlyozása már csak annak a megmutatása van hátra, hogy $G \in 3$ -SZÍN akkor és csak akkor, ha létezik $f(G)$ -hez megengedett (a, b) élsúlyozás.

Tegyük fel, hogy $G \in 3$ -SZÍN. Ekkor feltehető az általánosság megszorítása nélkül, hogy a három szín amellyel megszínezhetőek a csúcsok rendre a $(2na + (n - 1)b)$,

$((2n - 1)a + nb)$, és a $((2n - 2)a + (n + 1)b)$ címkék. Mutassuk meg, hogy ekkor $f(G)$ élei megszínezhetőek úgy, hogy az egy megengedett (a, b) élsúlyozás legyen. Minden $e \in E$ -re, azaz az eredeti gráf éleire legyen $w(e) = a$. Minden e élre, ami U_v -beli csúcsra illeszkedik legyen $w(e) = a$. Továbbá, minden $v \in V$ -re, ha

- $\chi(v) = 2na + (n - 1)b$, akkor $w(vs_v) = w(vt_v) = a$;
- $\chi(v) = (2n - 1)a + nb$, akkor $w(vs_v) = a$, $w(vt_v) = b$;
- $\chi(v) = (2n - 2)a + (n + 1)b$, akkor $w(vs_v) = w(vt_v) = b$,

ahol $\chi(v)$ alatt a v -hez rendelt szint értjük. A segédgráfokban pedig elég észrevenni, hogy a bizonyításokban indirekt két színezését is megadtuk ezeknek az a -kényszerítő, illetve b -kényszerítő segédgráfoknak. Éppen ezért, ha esetleg a becsatlakozási pont címkéje éppen megegyezne a segédgráf szomszédos címkéjével, akkor vesszük egyszerűen a másik lehetséges súlyozását a segédgráf éleinek. Lássuk be akkor, hogy az így kapott (a, b) élsúlyozás megengedett. Tetszőleges $v \in V$ -re illeszkedik $(n - 1)$ darab a súlyú él az eredeti gráfból és U_v -ből, a k -kizáró segédgráfokból pedig $(a + b)(n - 1)$ összsúlyú élek érkeznek be, így s_v és t_v súlyának a beállításával elérhető, hogy $z(v) = \chi(v)$ teljesüljön. Azaz $z(u) \neq z(v)$ tetszőleges $uv \in E$ -re, így egy megengedett (a, b) élsúlyozást kaptunk.

Ha pedig $G \notin 3\text{-SZÍN}$, akkor a 7.1-es lemma alapján G -nek nem létezhet megengedett (a, b) élsúlyozása.

Végső soron, ha pedig az egyik, mondjuk $a = 0$, akkor mivel [10]-ben már belátták, hogy $(0, 1)$ -re NP-teljes, ezért a 7.4. megjegyzés alapján a $(0, b)$ párra is NP-teljes. \square

7.6. Megjegyzés. Maga a visszavezetés abban az esetben is működik, hogyha a és b egész és függ G -től, viszont G méretében polinomiális méretűek. Ha a, b nem polinom méretű G méretében, akkor nem világos, hogy átalakítható-e a módszer erre az esetre is.

8. Összefoglalás

Végezetül foglaljuk össze röviden a szakdolgozat tartalmát. Az 1. fejezetben megismerkedtünk az 1-2-3 sejtéssel, és megmutattuk, hogy speciális gráfokon hogyan viselkedik a probléma, majd adtunk is egy érdekes eredményt páros gráfok esetében. A 2. fejezetben áttekintettük az eddigi legfontosabb eredményeket, amelyek közelebb vezethetnek a sejtés bizonyításához. Ezt követően kicsit eltávolodva az eredeti problémától a 3. fejezetben az $\{1, 2, 3\}$ halmazt lecserélve az $\{1, 2\}$ halmazzra megmutattuk, hogy NP-teljes egy tetszőleges gráf megengedett élsúlyozásának létezésének az eldöntése, ezáltal a fő eredményt is felvezetve, amit a 7. fejezetben

tárgyaltunk részletesebben. A 4. fejezetben mutattunk két karakterizációt is a nem 1-2 tulajdonságú páros gráfokra, majd adtunk is egy algoritmus, ami egy tetszőleges páros gráfról polinomiális időben eldönti, hogy 1-2 tulajdonságú-e — amely algoritmus legjobb tudomásunk szerint nem volt megtalálható az irodalomban. Ezt követően az 5. fejezetben még tovább módosítva az alap feladatot, megismerkedtünk új fajta színezési fajtákkal és néhány fontosabb eredménnyel ezeken a területeken. A 6. fejezetben prezentáltunk egy egészértékű modellt az eredeti problémára, amellyel legfeljebb 12 csúcsú gráfokig sikeresen igazoltuk a sejtést. Ugyanakkor itt találkoztunk egy érdekes nyitott problémával, ami egy megkezdett élsúlyozás befejezhetőségét foglalja magába. Végül soron a 7. fejezetben bemutattuk a szakdolgozat fő új eredményét, miszerint tetszőleges G gráfra NP-teljes eldönteni, hogy létezik-e megengedett (a, b) élsúlyozása, ahol a, b nemnegatív racionális különböző számok. Nyitott kérdés marad, hogy akkor is NP-teljes marad-e a probléma, hogyha a, b -t negatívnak, illetve irracionálisnak is választhatjuk.

Hivatkozások

- [1] Karoński, M., Łuczak, T., & Thomason, A. (2004). *Edge weights and vertex colours*. Journal of Combinatorial Theory Series B, 91(1), 151-157.
- [2] Addario-Berry, L., Aldred, R. E., Dalal, K., & Reed, B. A. (2005). *Vertex colouring edge partitions*. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 94(2), 237-244.
- [3] Duan, Y., Lu, H., & Yu, Q. (2012). *L-factors and adjacent vertex-distinguishing edge-weighting*. East Asian Journal on Applied Mathematics, 2(2), 83-93.
- [4] Przybyło, J. (2021). *The 1–2–3 Conjecture almost holds for regular graphs*. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 147, 183-200.
- [5] Addario-Berry, L., Dalal, K., McDiarmid, C., Reed, B. A., & Thomason, A. (2007). *Vertex-colouring edge-weightings*. Combinatorica, 27(1), 1-12.
- [6] Addario-Berry, L., Dalal, K., & Reed, B. A. (2008). *Degree constrained sub-graphs*. Discrete Applied Mathematics, 156(7), 1168-1174.
- [7] Wang, T., & Yu, Q. (2008). *On vertex-coloring 13-edge-weighting*. Frontiers of Mathematics in China, 3(4), 581-587.
- [8] Kalkowski, M., Karoński, M., & Pfender, F. (2010). *Vertex-coloring edge-weightings: towards the 1-2-3-conjecture*. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 100(3), 347-349.
- [9] Zhong, L. (2019). *The 1-2-3-conjecture holds for dense graphs*. Journal of Graph Theory, 90(4), 561-564.
- [10] Dudek, A., & Wajc, D. (2011). *On the complexity of vertex-coloring edge-weightings*. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 13(3), 45-50.
- [11] Thomassen, C., Wu, Y., & Zhang, C. Q. (2016). *The 3-flow conjecture, factors modulo k, and the 1-2-3-conjecture*. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 121, 308-325.
- [12] Skowronek-Kaziów, J. (2012). *Multiplicative vertex-colouring weightings of graphs*. Information Processing Letters, 112(5), 191-194.
- [13] Dehghan, A., Sadeghi, M. R., & Ahadi, A. (2013). *Algorithmic complexity of proper labeling problems*. Theoretical Computer Science, 495, 25-36.
- [14] Seamone, B. (2012). *The 1-2-3 conjecture and related problems: a survey*. arXiv preprint arXiv:1211.5122.

- [15] Gyóri, E., & Palmer, C. (2009). *A new type of edge-derived vertex coloring*. *Discrete mathematics*, 309(22), 6344-6352.
- [16] Zhang, Z., Liu, L., & Wang, J. (2002). *Adjacent strong edge coloring of graphs*. *Applied mathematics letters*, 15(5), 623-626.
- [17] Hatami, H. (2005). *$\Delta+300$ is a bound on the adjacent vertex distinguishing edge chromatic number*. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 95(2), 246-256.
- [18] Balister, P. N., Gyóri, E., Lehel, J., & Schelp, R. H. (2007). *Adjacent vertex distinguishing edge-colorings*. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 21(1), 237-250.
- [19] Czerwiński, S., Grytczuk, J., & Żelazny, W. (2009). *Lucky labelings of graphs*. *Information Processing Letters*, 109(18), 1078-1081.
- [20] Ahadi, A., Dehghan, A., Kazemi, M., & Mollaahmadi, E. (2012). *Computation of lucky number of planar graphs is NP-hard*. *Information processing letters*, 112(4), 109-112.
- [21] Akbari, S., Ghanbari, M., Manaviyat, R., & Zare, S. (2013). *On the lucky choice number of graphs*. *Graphs and combinatorics*, 29(2), 157-163.
- [22] Bartnicki, T., Bosek, B., Czerwiński, S., Grytczuk, J., Matecki, G., & Żelazny, W. (2014). *Additive coloring of planar graphs*. *Graphs and Combinatorics*, 30(5), 1087-1098.
- [23] Przybyło, J., & Woźniak, M. (2010). *On a 1, 2 conjecture*. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 12(1), 101-108.
- [24] Kalkowski, M.(2009). *A note on the 1,2-conjecture*. Preprint, private communication,
- [25] Chartrand, G., Erdős, P., & Oellermann, O. R. (1988). *How to define an irregular graph*. *The College Mathematics Journal*, 19(1), 36-42.
- [26] Chartrand, G., Jacobson, M. S., Lehel, J., Oellermann, O. R., Ruiz, S., & Saba, F. (1988). *Irregular networks*. *Congr. Numer*, 64(197-210), 250th.
- [27] Aigner, M., & Triesch, E. (1990). *Irregular assignments of trees and forests*. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 3(4), 439-449.
- [28] Faudree, R. J., & Lehel, J. (1987). *Bound on the irregularity strength of regular graphs*. In *Colloq Math Soc Janos Bolyai* (Vol. 52, pp. 247-256).
- [29] Nierhoff, T. (2000). *A tight bound on the irregularity strength of graphs*. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 13(3), 313-323.

- [30] Dezső, B., Jüttner, A.& Kovács, P. (2011). *LEMON – an Open Source C++ Graph Template Library*. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 264(5), 23-45.
- [31] IBM (2017) *IBM ILOG CPLEX 12.7 User's Manual* (IBM ILOG CPLEX Division, Incline Village, NV).
- [32] <https://hpc.iig.elte.hu>