Betekintés a Kakeya-problémakörbe

Szakdolgozat

Készítette:

Szepessy Luca

Matematika BSc
Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Maga Balázs

ELTE Matematikai Intézet,
Analízis Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

2021

Köszönetnyilvánítás

Szeretném szívemből megköszönni a témavezetőmnek, *Maga Balázsnak* a szakdolgozatom elkészítéséhez nyújtott hatalmas támogatását, türelmét, odafigyelését és állandó jelenlétét a munkafolyamat során, valamint a tökéletesen nekem való témát; mindezek mellett – de nem utolsósorban – pedig azt, hogy korábbi gyakorlatvezetőmként megszerettette velem az analízist. Iránymutatása, tanácsai és szaktudása nélkül ez a szakdolgozat bizonyára annyit érne, mint a Banach–Tarski-paradoxon a kiválasztási axióma nélkül.

Szeretném továbbá megköszönni a húgomnak, *Szepessy Sárának* a GeoGebra-ábrák elkészítésében nyújtott professzionális segítségét, *Tóth Sárinak* és *Zólomy Kristófnak* pedig a lelki támogatás mellett a gyors választ az összes apró kérdésemre. Emellett természetesen hálás vagyok a családomnak, hogy az egyetemi tanulmányaim során is mindvégig támogattak.

Tartalomjegyzék

Bevezető

1917-ben Sōichi Kakeya japán matematikus tette fel azt a kérdést, hogy vajon mekkora területű a legkisebb olyan síkbeli alakzat, amelyben folytonosan körbeforgatható egy egységszakasz. Ez a kérdés több matematikus fantáziáját is megragadta, így sokszínűbbnél sokszínűbb konstrukciók születtek ilyen halmazokra, melyeket a kérdés felvetője után Kakeya-halmazoknak neveztek el. Egy magyar származású matematikus, Pál Gyula megválaszolta, hogy konvex halmazok körében mi az elérhető legkisebb terület, azonban a témakör legérdekesebb része csak itt kezdődik: vajon mi a legkisebb területű nem konvex Kakeya-halmaz? Kakeya személyesen azt sejtette, hogy a konkáv halmazok körében sem találhatunk jobbat.

Eközben az Oroszországban élő Abram Samoilovitch Besicovitch, az akkoriban az országban dúló polgárháború okozta elszigeteltség miatt a Kakeya-problémáról mit sem tudva, egy integrálással kapcsolatos problémát visszavezetett arra a kérdésre, hogy vajon létezik-e olyan síkbeli Lebesgue-nullmértékű halmaz, mely minden irányban tartalmaz egy egységszakaszt. A problémát meg is oldotta, konstruált egy ilyen halmazt, és 1920-ban publikálta egy orosz folyóiratban. A tiszteletére azon ponthalmazokat, melyek minden irányban tartalmaznak egységszakaszt, Besicovitch-halmazoknak nevezték el.

Besicovitch 1924-es emigrációja után a Kakeya-problémával is megismerkedett. Végül a saját problémájára adott megoldását és Pál Gyula egy szép ötletét ötvözve bebizonyította, hogy Kakeya sejtése téves, olyannyira, hogy nem is létezik legkisebb területű Kakeya-halmaz! A problémakör azonban itt nemhogy nem zárult le, de a gyönyörű eredmény mindenkit folytatásra sarkallt, és a felvetődő kérdésözön a geometriai mértékelmélet fejlődésére is jelentős hatással volt.

Jelen szakdolgozat fókusza a Kakeya-problémakör kiinduló kérdéseinek vizsgálata. Ehhez elengedhetetlen egy geometriai mértékelméleti bevezető, melyben önmagában is tanumányozásra érdemes fogalmakat és eredményeket mutatunk be, azonban kevesebb bizonyítással annak érdekében, hogy a Kakeya-problémakörben minél mélyebbre merülhessünk. A Kakeya-és Besicovitch-halmazok kérdését részletesen körüljárjuk: a klasszikus síkbeli vizsgálódások mellett megnézzük a többdimenziós esetekre vonatkozó eredményeket és egy máig megoldatlan, fontos sejtést, emellett Baire-kategória szempontjából és véges testekben is ránézünk a Besicovitch-halmazokra.

1. Bevezetés a geometriai mértékelméletbe

1.1. Hausdorff-dimenzió

A Hausdorff-dimenzió egy olyan dimenziófogalom, mely a klasszikus intuícióval ellentétben értelmet ad a törtszám értékű dimenzióknak is, ezzel pedig egy sokkal pontosabb osztályozást tesz lehetővé bizonyos ponthalmazok körében. Fontos tulajdonsága, hogy a bizonyos értelemben szép halmazok dimenzióját meghagyja annyinak, amennyit a ”köznapi” fogalom diktál, a bonyolult és részletes halmazokén viszont változtathat, így például fraktálok vizsgálata során rendkívül hasznos és nem mellesleg szép tényeket állít elénk azáltal, hogy mérni is tudjuk majd a különbséget olyan halmazok közt, amik közt eddig csak éreztük.
A Hausdorff-dimenzió egy (X,d) metrikus tér alaphalmazának tetszőleges részhalmazán értelmezhető, így nem szükséges a vizsgálódásaink helyszínét $\mathbb{R}^n$-re szorítani. A Hausdorff-dimenzió fogalmának felépítéséhez először a Hausdorff-előmérték és a Hausdorff-mérték definícióját kell megismerni. Ezek az adott halmaz különböző fedései alapján rendelnek egy számot a halmazhoz, mely során a leglényegesebb szempont a fedőhalmazok átmérője.

1.1. Definíció (Átmérő)**.** *Legyen (X,d) metrikus tér, $U \subseteq X$. Ekkor U átmérője*

$$|U| = \sup\{d(x,y) : x,y \in U\}.$$

1.2. Definíció (δ-fedés)**.** *Legyen (X,d) metrikus tér, $F \subseteq X$. Ekkor F δ-fedése az $(U_i)_{i=1}^{\infty}$ megszámlálható halmazrendszer, ha $\forall i$-re $|U_i| \leq \delta$ és $F \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i$.*

A Hausdorff-dimenzió bevezetéséhez először az s-dimenziós Hausdorff-mérték fogalmát kell bevezetnünk. Ehhez először definiáljuk a következő kifejezést.

1.3. Definíció (Hausdorff-előmérték)**.** *Legyen (X,d) metrikus tér, $F \subseteq X$. Ekkor az F halmaz s-dimenziós Hausdorff-mértéke $\delta > 0$-ra $\mathscr{H}^s_\delta(F) = \inf\left\{\sum\limits_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : (U_i)_{i=1}^{\infty}\, \delta\text{-fedése } F\text{-nek}\right\}$.*

1.4. Megjegyzés. Az elnevezés félrevezető, ugyanis ez valójában nem előmérték a fogalom mértékelméleti értelmében, mert nem additív, viszont külső mérték.

Az s-dimenziós Hausdorff-mértéket úgy fogjuk definiálni az előmértékből, mint a $\mathscr{H}_\delta^s$-ek határhelyzetét $\delta \to 0$ mellett, ezt megelőzően azonban némi magyarázatot fűzünk ezen definícióhoz. Vegyük észre, hogy az n-dimenziós euklideszi térben dolgozva a Hausdorff-előmérték bizonyos értelemben az n-dimenziós Lebesgue-mérték általánosítására hajaz: utóbbiban ugyanis gömbfedésekre szorítkozva az egyes gömbök mértéke a fenti képletben is szereplő átmérő n-edik hatványának konstansszorosa. Ezt az n-et cseréljük le tetszőleges s-re. A δ szerepe a megengedett fedések léptékének korlátozása: akkor lenne szép az elmélet, ha olyan jellegű természetes elvárások teljesülnének, hogy például egy négyzetlap egydimenziós mértéke végtelen. Ha nem lenne megkötés a fedőhalmazok átmérőjére, ez egy véges szám lenne, ugyanakkor ha δ-val nullához tartunk, akkor a $\mathscr{H}_\delta^1$ végtelenhez tart, ezen intuíciónak megfelelve. Kicsit részletesebben számolva, gondoljunk egy d átmérőjű síkbeli négyzetlapra, melyet $k \times k$ kisebb négyzetre osztunk négyzetrácsszerűen. Ha $\frac{d}{k} \leq \delta$, akkor a kis négyzetek egy δ-fedést alkotnak, amiből $\mathscr{H}_\delta^s$ legfeljebb $k^2 \cdot \left(\frac{d}{k}\right)^s$. Ha $s > 2$, akkor k csökkentésével a felső becslés nullához tart, azaz a $k \in \mathbb{N}$-en vett infimum 0, még úgy is, hogy most végig ugyanazon pontok voltak fedve, nem egyre több halmazon kívüli részt hagytunk fedetlenül; ezzel szemben $s < 2$ esetén k-t nem éri meg növelni. A bűvös határ azért épp a 2, mert a négyzet kétdimenziós.

Vizsgáljuk tehát egy F halmazra a $\mathscr{H}_\delta^s(F)$ értékeket $\delta \to 0$ mellett. Ahogy δ csökken, úgy a szóbajöhető fedések közül is egyre több esik ki, így az infimum növekszik, tehát $\lim\limits_{\delta \to 0} \mathscr{H}_\delta^s(F)$ létezik, habár végtelen is lehet.

1.5. Definíció (Hausdorff-mérték)**.** *Legyen (X,d) metrikus tér, $F \subseteq X$. Ekkor*

$$\mathscr{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathscr{H}_\delta^s(F)$$

értéket az F halmaz s-dimenziós Hausdorff-mértékének nevezzük.

Mivel Hausdorff-mérték könnyen beláthatóan σ-szubadditív, így X alaphalmaz $\mathscr{P}(X)$ hatványhalmazán külső mérték.

1.6. Állítás. $\mathscr{H}^s : \mathscr{B}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ *mérték az (X,d) metrikus tér Borel-halmazainak $\mathscr{B}(X)$ σ-algebráján.*

Szerencsére a Hausdorff-dimenzió létezéséhez nem lesz szükséges a Hausdorff-mérték mérték-tulajdonsága, így nem csak a Borel-halmazoknak adhatunk dimenziót, hanem az alaphalmaz minden részhalmazának, amint azt hamarosan látni fogjuk.

Habár vizsgálódásaink egyelőre egy általános (X,d) metrikus térben folynak, a következő állítás fontos tulajdonságát mondja ki speciálisan $\mathbb{R}^n$ részhalmazainak.

1.7. Állítás (Skálázási tulajdonság)**.** *Legyen* $F \subseteq \mathbb{R}^n$*,* $\lambda > 0$*. Ekkor* $\mathscr{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \cdot \mathscr{H}^s(F)$*, ahol* $\lambda F = \{\lambda \cdot x : x \in F\}$.

A bizonyítás nem szorul részletezésre. A skálázási tulajdonság jelentősége abban rejlik, hogy a témakörben gyakran vizsgált fraktálok önhasonló halmazok, azaz valami módon önmaguk kicsinyített másolataiból állnak össze.
$\mathbb{R}^n$-re vonatkozólag továbbá érdemes megemlíteni, hogy az n-dimenziós Hausdorff-mérték és az n-dimenziós Lebesgue-mérték Borel-halmazokon csupán egy n-től függő konstans szorzóban tér el egymástól. Ez arra vezethető vissza, hogy mindkét mérték értéke kiszámítható gömbfedésekkel, emellett a gömbökhöz rendelt mérőszámok az egyes esetekben egy sugárfüggetlen, csak n-től függő szorzóban térnek el. A két mérték közti konstans szorzó éppen egy n-dimenziós, 1 átmérőjű gömb c_n térfogata, pontosabban $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel-halmazra $\lambda^n(B) = c_n \cdot \mathscr{H}^n(B)$, ahol λ^n az n-dimenziós Lebesgue-mértéket jelöli. Apró észrevétel, hogy a [2] könyv itt az összefüggésben ugyanazzal a c_n konstanssal $\lambda^n(B)$-t szorozta meg, következetesen mindig, ám ez minden bizonnyal egy elírás.

Térjünk vissza általános (X,d) metrikus térbe. Könnyen látható, hogy $\delta < 1$ esetén $\mathscr{H}^s_\delta(F)$ monoton csökken adott δ-ra és F-re, ha s növekszik, így ez $\mathscr{H}^s(F)$-re is igaz. Sőt, ha $t > s$, akkor $\sum |U_i|^t \leq \sum \delta^{t-s} \cdot |U_i|^s = \delta^{t-s} \cdot \sum |U_i|^s$, amiből $\mathscr{H}^t_\delta(F) \leq \delta^{t-s} \cdot \mathscr{H}^s_\delta(F)$ következik. Ha most δ-val 0-hoz tartunk, azt láthatjuk, hogy amennyiben $\mathscr{H}^s(F)$ véges, úgy a jobb oldal 0-hoz tart, azaz $\mathscr{H}^t(F) = 0$. Tehát $\mathscr{H}^s(F)$ legfeljebb egy s-re lehet pozitív véges szám, így a monoton csökkenésből következik, hogy az ennél kisebb s-ekre végtelen, az ennél nagyobbakra 0 kell hogy legyen egy rögzített F halmaz esetén. Azt az s értéket, ahol $\mathscr{H}^s(F)$ végtelenről 0-ra ugrik, nevezzük az F halmaz Hausdorff-dimenziójának.

1.8. Definíció (Hausdorff-dimenzió)**.** *Legyen* (X,d) *metrikus tér,* $F \subseteq X$*. Ekkor* F *Hausdorff-dimenziójának a*

$$\dim_H F = \inf\{s : \mathscr{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s : \mathscr{H}^s(F) = \infty\}$$

értéket nevezzük.

1.9. Megjegyzés. Tehát ha $s < \dim_H F$, akkor $\mathscr{H}^s(F) = \infty$; ha $s > \dim_H F$, akkor $\mathscr{H}^s(F) = 0$. Ha pedig s éppen a dimenzióval egyenlő, akkor $\mathscr{H}^s(F)$ bármi nemnegatív lehet, illetve végtelen is.

A későbbiekben különösen fontosak lesznek számunkra az olyan F Borel-halmazok, melyekre $\dim_H F = s$ mellett $0 < \mathscr{H}^s(F) < \infty$ teljesül.

1.10. Definíció (s-halmaz)**.** *Az olyan s Hausdorff-dimenziós Borel-halmazokat, melyeknek s-dimenziós Hausdorff-mértéke pozitív valós szám, s-halmazoknak nevezzük.*

A következő állítás a Hausdorff-dimenzió legfontosabb alaptulajdonságait foglalja össze. A bizonyítás kézenfekvő.

1.11. Állítás. *A Hausdorff-dimenzióra a következők teljesülnek:*

1. *Monotonitás: Ha* $E \subset F$*, akkor* $\dim_H E \leq \dim_H F$.
2. *Nyílt halmazok: Ha* $F \subseteq \mathbb{R}^n$ *nyílt halmaz, akkor* $\dim_H F = n$.
3. *Sima felületek: Ha F egy sima (azaz folytonosan differenciálható), m-dimenziós felület* $\mathbb{R}^n$*-ben, akkor* $\dim_H F = m$.
4. *Megszámlálható stabilitás: Ha* $F_1, F_2, \ldots$ *megszámlálható sok halmaz, akkor* $\dim_H \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) = \sup_i \{\dim_H F_i\}$.
5. *Megszámlálható halmazok: Ha F megszámlálható halmaz, akkor* $\dim_H H = 0$.

Látható, hogy a Hausdorff-dimenzió nagyon sok szép tulajdonsággal rendelkezik, melyek tökéletesen passzolnak egy dimenziófogalommal szemben támasztott elvárásainkhoz is.

1.2. Boxdimenzió

Ebben a fejezetben – ismét a [2] könyvet követve – röviden megismerkedünk egy újabb dimenziófogalommal, a boxdimenzióval, melyet szintén gyakran vizsgálnak fraktálszerű halmazok esetén. Mivel a boxdimenzió fogalma közel áll a Hausdorff-dimenzióéhoz, de gyakran könnyebben számolható, így egy halmaz Hausdorff-dimenziójára is megérheti ennek segítségével becslést keresni. Hátránya, hogy nem rendelkezik annyi szép tulajdonsággal, mint a Hausdorff-dimenzió, sőt mitöbb, nem is minden esetben létezik.
Az általánosság szépsége miatt továbbra is (X,d) metrikus térben fogunk dolgozni. A Hausdorff-dimenzióhoz hasonlóan a boxdimenzió is az adott halmaz valamilyen δ-fedéséből indul ki, azonban most a szempont az lesz, hogy a lehető legkevesebb halmazt használjuk fel a fedés létrehozásához.

1.12. Definíció ($N_\delta(F)$)**.** *Az $F \subset X$ korlátos halmaz esetén jelölje $N_\delta(F)$ az F legkisebb elemszámú δ-fedésében a halmazok számát.*

A precíz definíció kimondása előtt érdemes átgondolni, mit súg az intuíciónk. $N_\delta(F)$ a következőképp becsülhető egy speciális esetben: egy n-dimenziós euklideszi térben egy m-dimenziós kockát ($n \geq m$) körülbelül $\left(\frac{1}{\delta}\right)^m$ db δ oldalhosszúságú kis kockára tudunk felbontani, mely természetesen nem alkot δ-fedést, de rögzített m esetén csak egy konstans szorzó a különbség, illetve a későbbiekben látni fogjuk, hogy a boxdimenzió így is számolható. Az $N_\delta(F) = \left(\frac{1}{\delta}\right)^m$ egyenlőséget m-re, azaz a dimenzióra rendezve a következőt kapjuk: $m = \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$. A precíz definíció ezen intuíció általánosításából fog adódni.

1.13. Definíció (Alsó boxdimenzió)**.** *Legyen (X,d) metrikus tér, $F \subset X$ nemüres, korlátos halmaz. A*

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

kifejezést az F halmaz alsó boxdimenziójának nevezzük.

1.14. Definíció (Felső boxdimenzió)**.** *Legyen (X,d) metrikus tér, $F \subset X$ nemüres, korlátos halmaz. A*

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

kifejezést az F halmaz felső boxdimenziójának nevezzük.

1.15. Definíció (Boxdimenzió)**.** *Legyen (X,d) metrikus tér, $F \subset X$ nemüres, korlátos halmaz. Ha $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F$, azaz*

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

létezik, akkor ezt az F halmaz boxdimenziójának vagy Minkowski-dimenziójának nevezzük, és $\dim_B F$-fel jelöljük.

1.16. Megjegyzés. A fenti definíciókban a logaritmus alapját tetszőleges, de a kifejezésen belül egységes $a > 0, a \neq 1$ számnak választhatjuk.

Az alsó és felső boxdimenzió tulajdonságait külön is szokás tárgyalni, mivel gyakran hasznos információkat hordoznak az általánosabb esetről, azaz arról, amikor a sima boxdimenzió nem értelmes.

1.17. Példa. Konstruálhatunk olyan F halmazt, melynek az alsó és a felső boxdimenziója nem egyezik meg. Vegyük a $[0,1]$ intervallumon az $\frac{1}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$ alakú pontokat mint segédpontokat, és azon k-kra, melyekre k eleme egy bizonyos sorozatnak, azaz valamely i-re $k = a_i$, helyezzünk el az $\left[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right]$ intervallumon 2^k darab pontot egyenletesen. Az így lehelyezett pontokat tesszük F-be, a segédpontokat nem. Legyen (a_i) sorozat egy kellően gyorsan növő sorozat, melyet később rekurzívan megadunk. Vizsgáljuk meg $N_\delta(F)$ nagyságrendjét δ-hoz képest, ahogy δ nullához tart. Legyen valamely $i \in \mathbb{N}$-re $\delta = \frac{1}{2^{a_i+1} \cdot 2^{a_i}}$. Ekkor a $\left[\frac{1}{2^{a_i+1}}, \frac{1}{2^{a_i}}\right]$ intervallum δ-fedéséhez legalább 2^{a_i} darab halmaz szükséges. Így $N_\delta(F) > 2^{a_i}$, amiből $\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} > \frac{a_i}{a_i + a_i + 1}$, azaz

$$\limsup_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \lim_{i \to \infty} \frac{a_i}{2a_i + 1} = \frac{1}{2},$$

vagyis $\overline{\dim}_B F \geq \frac{1}{2}$.

Legyen most $\delta = \frac{1}{2^{a_i+1}}$. Ekkor F δ-fedéséhez a $\left[\frac{1}{2^{a_i+1}}, \frac{1}{2^{a_i}}\right]$ intervallum fedésére elég egy halmaz, valamint a $\left[0, \frac{1}{2^{a_i+1}}\right]$ intervallum fedéséhez is. Az F ennél nagyobb elemeinek száma $\sum_{j=0}^{i-1} 2^{a_j}$, így azok ennyi halmazzal mindenképp lefedhetők. Ebből

$$N_\delta(F) \leq 2 + \left(\sum_{j=0}^{i-1} 2^{a_j} \right).$$

Ha az (a_i) sorozatot úgy konstruáljuk meg, hogy $2+\left(\sum_{j=0}^{i-1} 2^{a_j}\right) \leq a_i$ teljesüljön $\forall i > 0$-ra, akkor

$$\liminf_{\delta\to 0} \frac{\log_2 N_\delta(F)}{-\log_2 \delta} \leq \lim_{i\to\infty} \frac{\log_2 a_i}{a_i+1} = 0,$$

vagyis $\underline{\dim}_B F = 0$.

A példa alapötlete egyébként egyszerűen elmondva annyiból áll, hogy a $[0,1]$ intervallumon az $\frac{1}{2^k}, k \in \mathbb{N}$ alakú osztópontokkal részintervallumokat jelölünk ki, és ezen intervallumsorozatból végtelen sokat telepakolunk nagyon sűrűn pontokkal, de úgy, hogy a következő "besűrített" rész mindig sokkal rövidebb legyen, mint az előző, és sokkal több pontot is tartalmazzon. Ekkor, ahogy δ-k mentén tartunk 0-hoz, egy konkrét "besűrített" intervallum nagyon sokáig lefedhető egy fedőhalmazzal, aztán már csak kettővel, hárommal, majd egy idő után δ annyira pici lesz, hogy a sűrűn elhelyezkedő pontok mindegyikének saját fedőhalmazra van szüksége. Innentől kezdve ahogy δ még tovább csökken, úgy még több fedőhalmazra ezen halmazrészlethez nem lesz szükség, viszont $\frac{1}{\delta}$ nagyságrendjéhez képest ez a fix szám szinte elhanyagolhatóan picivé szelídül. Ha a konstrukciót megfelelő számokkal állítjuk be, akkor $\frac{1}{\delta}$ nagyságrendjéhez képest $\delta \to 0$ esetén néha minden "besűrített" intervallum nagyságrendileg pici számú fedőhalmazt igényel, néha pedig van egy, ami nagyon sokat kér. Így a $\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$ kifejezés $\liminf$-je és $\limsup$-ja nem lesz egyenlő.

1.18. Megjegyzés. Ha a Hausdorff-előmértékek definíciójában szereplő fedéseknél csak a pontosan δ-átmérőjű halmazokat engednénk meg, akkor az ebből definíció szerint számolt dimenzió éppen a boxdimenzió lenne.

A boxdimenziónak $\mathbb{R}^n$-ben számos egyéb ekvivalens alakja van, melyeket néha könnyebb használni. Ezek mind azon alapulnak, hogy $N_\delta(F)$ helyett valami mást számolunk meg.

1.19. Definíció (δ-koordinátázású kocka)**.** *$\mathbb{R}^n$-ben $\delta > 0$-ra δ-koordinátázású kockáknak nevezzük az $[m_1 \cdot \delta, (m_1+1)\cdot\delta] \times ... \times [m_n \cdot \delta, (m_n+1)\cdot\delta]$ alakú halmazokat, ahol m_1, m_2, ..., m_n egész számok.*

1.20. Állítás. *Legyen $F \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz. Tegyük fel, hogy*

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta}$$

létezik, ahol $N'_\delta(F)$ tetszőleges a következők közül:

1. *F legkisebb elemszámú olyan U fedésének elemszáma, ahol U elemei zárt, δ-sugarú gömbök*
2. *F legkisebb elemszámú olyan U fedésének elemszáma, ahol U elemei δ oldalhosszúságú n-dimenziós kockák*
3. *Azon δ-koordinátázású kockák száma, melyek F-be belemetszenek*
4. *A legnagyobb elemszámú olyan U halmaz elemszáma, melynek elemei olyan diszjunkt, δ-sugarú gömbök, melyek középpontja F-nek eleme*

Ekkor $\dim_B F = \lim\limits_{\delta \to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta}$.

1.21. Megjegyzés. A fenti állítás az (1) és (4) pontokkal általános (X,d) metrikus térben is igaz.

A boxdimenzió megnevezést egyébként a (3) pont motiválja, hiszen $\mathbb{R}^n$-ben adott δ-ra a δ-koordinátázású kockák ”dobozokra” osztják a teret, és nekünk azt kell megszámolni, hogy ezekből a ”dobozokból” hányba metsz bele a halmazunk. A magyarra boxdimenzióként fordított kifejezés az angol szakirodalomban ”box-counting dimension”, mely talán még kifejezőbb. A (3) pont érdekessége továbbá, hogy bár ez az ekvivalens definíció elméleti szinten nem olyan szép, mint az eredeti, viszont lehetővé teszi a boxdimenzió viszonylag egyszerű számítógépes approximálását.

A fogalom mélyebb megismeréséhez említés szintjén nézzük meg a boxdimenzió néhány, néhol elsőre meglepő alaptulajdonságát.

1.22. Állítás.

1. *Ha $F \subset \mathbb{R}^n$ egy m-dimenziós sima felület, akkor* $\dim_B F = m$.
2. *Az alsó és felső boxdimenzió monoton, azaz (X,d) metrikus térben $E \subset F \subset X$ korlátos halmaz esetén $\underline{\dim}_B E \leq \underline{\dim}_B F$ és $\overline{\dim}_B E \leq \overline{\dim}_B F$. Így a boxdimenzió is monoton.*
3. *A felső boxdimenzió végesen stabil, azaz (X,d) metrikus térben $E,F \subset X$ korlátos halmaz esetén $\overline{\dim}_B(E \cup F) = \max\{\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F\}$. Emiatt a boxdimenzió is végesen stabil, de az alsó boxdimenzió nem.*

A Hausdorff-dimenzió szép, egyszerűbb kezelhetőséget biztosító tulajdonságai közül láthatóan a boxdimenzió csak jóval kevesebbel rendelkezik. A következő állítás a két dimenziófogalom kapcsolatának egy alapvető tulajdonságát mutatja be.

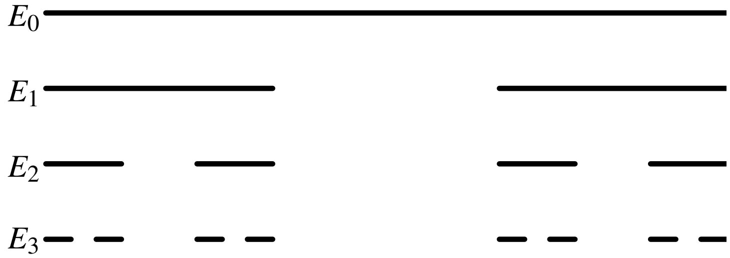
1.23. Állítás. *Legyen* (X,d) *metrikus tér,* $F \subset X$ *korlátos halmaz. Ekkor* $\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F$.

Fontos megjegyezni, hogy általában $\dim_H F = \underline{\dim}_B F$ nem teljesül, így a boxdimenzió fogalma már csak ezért is biztosan nem ekvivalens a Hausdorff-dimenzióéval. Például, a $[0,1]$ intervallumba eső racionális számok halmaza megszámlálható, így 0 a Hausdorff-dimenziója, viszont bármilyen kicsi δ-fedést is alkalmazunk, azon δ-koordinátázású kockák száma, melyek a halmazba belemetszenek, $\lceil \frac{1}{\delta} \rceil$, így az 1.20 Állítás szerint a halmaz boxdimenziója 1.
A Hausdorff-dimenzió és a boxdimenzió mellett számos egyéb fraktáldimenzió létezik, melyekkel mi most nem foglalkozunk, ám – az érdeklődők kedvéért jegyezzük meg – a [2] könyv 3. fejezete igen.

1.3. Módszerek a Hausdorff-dimenzió becslésére

Ebben a részben a [2] könyv 4. fejezetét követve bemutatunk néhány, könnyen használható becslési módszert, melyek egyszerűbb esetekben működnek, ha $\mathbb{R}^n$-beli fraktálok Hausdorff-dimenzióját szeretnénk közelíteni. Különböző módszerek vonatkoznak az alsó és felső becslésekre, melyek szerencsés, letisztultabb esetekben éppen egyenlőek lesznek, így alkalmasak a Hausdorff-dimenzió pontos meghatározására. Általában felső becslést találni könnyebb, ugyanis konkrét fedések egy megfelelő sorozatából ez természetesen adódni fog.
A leggyakrabban bemutatott, egyszerű és érdekes tulajdonságokkal rendelkező fraktál a triadikus Cantor-halmaz, melyet a következőképp kapunk: vesszük a $[0,1]$ zárt intervallumot, és kivágjuk a középső harmadát, azaz $\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$-hez jutunk; ezután a keletkezett intervallumok mindegyikének hasonlóan kivágjuk a középső harmadát, és ezt folytatjuk a végtelenségig.

1.24. Definíció (Triadikus Cantor-halmaz)**.** *Legyen* $E_0 = [0,1]$*, és* $\forall k \in \mathbb{N}$*-re* $E_k = \frac{E_{k-1}}{3} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{E_{k-1}}{3}\right)$. *Ekkor* $F = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} E_k$*-t triadikus Cantor-halmaznak nevezzük.*



1. ábra. A triadikus Cantor-halmaz

1.25. Állítás. *Tegyük fel, hogy (X,d) metrikus térben $F \subset X$ lefedhető n_k db, legfeljebb δ_k átmérőjű halmazzal, ahol $k \to \infty$ esetén $\delta_k \to 0$. Ekkor*

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{\log n_k}{-\log \delta_k}.$$

Továbbá, ha $n_k \cdot \delta_k^s$ korlátos sorozat $k \to \infty$ esetén, akkor $\mathscr{H}^s(F) < \infty$.

Bizonyítás: Az eddig nem tárgyalt egyenlőtlenség triviálisan következik a definícióból.
A második részhez vegyük észre azt az alapvetést, hogy $\mathscr{H}^s_{\delta_k}(F) \leq n_k \cdot \delta_k^s$, ami a feltevés szerint korlátos, ahogy $k \to \infty$, így $\mathscr{H}^s_{\delta_k}(F)$ is véges $\mathscr{H}^s(F)$ számhoz konvergál. □

1.26. Következmény. *Mivel a triadikus Cantor-halmaz természetes módon $\forall k \in \mathbb{N}$-re lefedhető 2^k db 3^{-k} hosszúságú intervallummal, így $\dim_H F \leq \frac{\log 2}{\log 3}$.*

Az ellenkező irányú becslést egy másik tétel fogja szolgáltatni, melyhez előbb a tömegeloszlás fogalmát kell megismernünk.

1.27. Definíció (Tömegeloszlás)**.** *Legyen (X,d) metrikus tér, $F \subseteq X$, $\mu : \mathscr{B}(X) \to [0,\infty)$ pedig olyan véges Borel-mérték, melynek a tartója F-beli. Ekkor μ-t tömegeloszlásnak nevezzük.*

1.28. Tétel (Tömegeloszlási elv)**.** *Legyen (X,d) metrikus tér, $F \subseteq X$, μ pedig egy tömegeloszlás F-en, és tegyük fel, hogy s-re létezik olyan $c > 0$ és $\delta > 0$, amire $\mu(U) \leq c|U|^s$ minden olyan $U \subset X$-ra, melyre $|U| \leq \delta$. Ekkor $\mathscr{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$, valamint $s \leq \dim_H F$.*

Bizonyítás: Legyen (U_i) F egy δ'-fedése, ahol $\delta' \leq \delta$. Ekkor:

$$0 < \mu(F) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_i) \leq c \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$$

Ha a fedéseken infimumot veszünk, azt kapjuk, hogy $\mathscr{H}^s_{\delta'}(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$ $\forall \delta' \leq \delta$-ra, így δ'-vel nullához tartva $\mathscr{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$. □

Azaz, ha létezik a feltételeknek megfelelő μ tömegeloszlás adott s-re, akkor az s-dimenziós Hausdorff-mérték nem 0. A következő lemma azt mondja ki, hogy $\mathbb{R}^n$-ben "szép" halmazokra ez fordítva is igaz.

1.29. Lemma (Frostman-lemma)**.** *Legyen F egy $\mathbb{R}^n$-beli Borel-halmaz, $s > 0$. Ekkor a következő két állítás ekvivalens:*

1. $\mathscr{H}^s(F) > 0$
2. *Létezik olyan μ Borel-mérték és $c > 0$, melyre $\mu(F) > 0$, és $\mu(B(x,r)) \leq cr^s$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$-ra.*

A lemma elnevezés egyébként megtévesztő, ugyanis a Frostman-lemma egy komoly tétel, melynek bizonyítása korántsem triviális.

Visszatérve a tömegeloszlási elvhez, ezen alapul az a módszer, mellyel kaphatunk egy alsó becslést egy halmaz Hausdorff-dimenziójára: ha sikerül találnunk egy, a feltételeknek megfelelő μ tömegeloszlást adott s-re, akkor s-nél nagyobb vagy egyenlő lesz a dimenzió. Folytassuk tehát a példánkat a triadikus Cantor-halmazra.

1.30. Következmény. $\dim_H F \geq \frac{\log 2}{\log 3}$*, ahol F a triadikus Cantor-halmaz.*

Bizonyítás: Legyen μ a természetes tömegeloszlás, azaz a rekurzív konstrukcióban mind a 2^k db 3^{-k} hosszú intervallum mértéke E_k-ban legyen 2^{-k}, ez pedig a triadikus Cantor-halmaz minden Borel-részhalmazának meghatározza a mértékét, hiszen az E_k alkotóintervallumai egy bázisát adják a Cantor-halmaznak. Legyen $U \subset F$ tetszőleges olyan halmaz, melyre $|U| < 1$, azaz a tételben a μ-re vonatkozó feltételeknél $\delta < 1$-et választunk. Legyen $k \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $3^{-(k+1)} \leq |U| < 3^{-k}$. Ekkor U legfeljebb egy intervallumába metszhet bele E_k-nak, így:

$$\mu(U) \leq 2^{-k} = (3^{-k})^{\frac{\log 2}{\log 3}} \leq (3|U|)^{\frac{\log 2}{\log 3}}$$

Tehát μ teljesíti a feltételeket a tömegelosztási elvben, így $\mathscr{H}^{\frac{\log 2}{\log 3}}(F) > 0$ és $\dim_H F \geq \frac{\log 2}{\log 3}$ teljesül.

$\square$

Ezzel tehát beláttuk, hogy a triadikus Cantor-halmaz Hausdorff-dimenziója $\frac{\log 2}{\log 3}$.

1.31. Megjegyzés. Általában egy metrikus térben Cantor-halmaznak nevezünk minden olyan halmazt, ami homeomorf a triadikus Cantor-halmazzal. Nem nehéz igazolni, hogy ezek a kompakt, üres belsejű, izolált pont nélküli halmazok.

A tömegelosztások és a Hausdorff-dimenzió kapcsolatát behatóbban a potenciálelmélet tárgyalja. Ez a témakör többek között hasznos eredményeket rejt a Hausdorff-dimenzió becslésére, ám mi most nem ilyen irányba folytatjuk utunkat. A téma iránt érdeklődők a [2] könyv 4.3 részében olvashatnak az említettekről bővebben.

1.4. Reguláris és irreguláris halmazok

Ebben a fejezetben a [2] könyv 5. fejezetét követve megismerkedünk egy olyan, érdekes és a későbbiekben hasznos halmaztulajdonsággal, mely a Hausdorff-dimenzió segítségével kitüntet és osztályoz bizonyos halmazokat, amiknek ezáltal jobban megismerhetjük a felépítését. Példaként egy későbbiekben is releváns 1-halmazt is megvizsgálunk, melyet részletesebben tárgyalunk, mint a fent említett forrás.

Először definiáljuk egy pont egy s-halmazra vett sűrűségét. Ezalatt még sokmindent érthetnénk, mi most azonban egy olyan definíciót szeretnénk, mely a dimenziónak megfelelő Hausdorff-mérték szerint jellemzi a pont helyzetét a halmazhoz viszonyítva.

1.32. Definíció (Alsó és felső sűrűség)**.** *Legyen F egy s-halmaz, $x \in \mathbb{R}^n$. Ekkor az F halmaz x pontbeli alsó sűrűsége*

$$\underline{D}^s(F,x) = \liminf_{r \to 0} \frac{\mathscr{H}^s(F \cap B_r(x))}{(2r)^s},$$

felső sűrűsége pedig

$$\overline{D}^s(F,x) = \limsup_{r \to 0} \frac{\mathscr{H}^s(F \cap B_r(x))}{(2r)^s}.$$

1.33. Definíció (Pontbeli sűrűség)**.** *Legyen F egy s-halmaz, $x \in \mathbb{R}^n$. Ha $\underline{D}^s(F,x) = \overline{D}^s(F,x)$, akkor ezt a közös értéket az F halmaz x pontbeli sűrűségének nevezzük, és $D^s(F,x)$-szel jelöljük.*

Ez a definíció szemléletesen annyit tesz, hogy megvizsgálja, hogy a kiszemelt x pontunk körül egy adott r-sugarú gömbben mennyi az F halmaz elemeinek mértékének aránya a teljes gömb mértékéhez képest, majd megnézi, mi a helyzet, ha x-nek csak egyre kisebb környezetét vesszük figyelembe, azaz ha r-rel 0-hoz tartunk. Mivel a limesz természetesen nem feltétlenül létezik minden esetben, így sűrűségről is csak feltételekhez kötve beszélhetünk. A következő állítás alapvető, így fontos tényeket tisztáz a sűrűség fogalmával kapcsolatban.

1.34. Állítás. *Legyen $F \subset \mathbb{R}^n$ s-halmaz. Ekkor:*

1. $\underline{D}^s(F,x) = \overline{D}^s(F,x) = 0$ *$\mathscr{H}^s$-m.m. $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$-re.*

2. $\frac{1}{2^s} \leq \overline{D}^s(F,x) \leq 1$ *$\mathscr{H}^s$-m.m. $x \in F$-re.*

Megtudtuk tehát, hogy a halmazon kívüli pontok sűrűsége a halmazra nézve majdnem mindig 0, a halmaz pontjainak sűrűsége pedig majdnem mindig pozitív. A részletes bizonyítás hosszú, a [3] könyvben elolvasható. Egyébként az állítás nem váratlan, így van ez mértékelméletben a Lebesgue-mérték szerinti sűrűség esetében is, ott Lebesgue sűrűségi tétele garantált hasonló tulajdonságot. A kettő közötti kapcsolat világos, hiszen $\mathbb{R}^n$-ben az n-dimenziós Lebesgue-és Hausdorff-mérték csak konstans szorzóban tér el egymástól, így n-halmazok esetén a kétféle sűrűség azonos. Érezhető, hogy egy halmaz szerkezetét x körül akkor tudjuk csak valamelyest elképzelni a sűrűsége alapján, ha az 1 vagy 0. Minket azonban főleg a halmazunk pontjainak sűrűsége érdekel, melyek közül a 0 sűrűségűek az előbbi állítás szerint nullmértékű halmazt alkotnak, tehát igen kevesen vannak.

1.35. Definíció (Reguláris pont)**.** *Legyen F egy s-halmaz, $x \in \mathbb{R}^n$. F valamely x pontját regulárisnak nevezzük, ha $\underline{D}^s(F,x) = \overline{D}^s(F,x) = 1$.*

1.36. Definíció (Irreguláris pont)**.** *Legyen F egy s-halmaz, $x \in \mathbb{R}^n$. F valamely x pontját irregulárisnak nevezzük, ha nem reguláris.*

A pontok regularitásának, illetve irregularitásának definiálása után már beszélhetünk a megfelelő halmazok regularitásáról, irregularitásáról is. Azonban a pontokkal ellentétben egy halmazra már nem feltétlen igaz, hogy a két kategória egyikébe biztosan beleesik.

1.37. Definíció (Reguláris halmaz)**.** *Legyen F egy s-halmaz. Ekkor F-et regulárisnak nevezzük, ha $\mathcal{H}^s$ szerint majdnem minden pontja reguláris.*

1.38. Definíció (Irreguláris halmaz)**.** *Legyen F egy s-halmaz. Ekkor F-et irregulárisnak nevezzük, ha $\mathcal{H}^s$ szerint majdnem minden pontja irreguláris.*

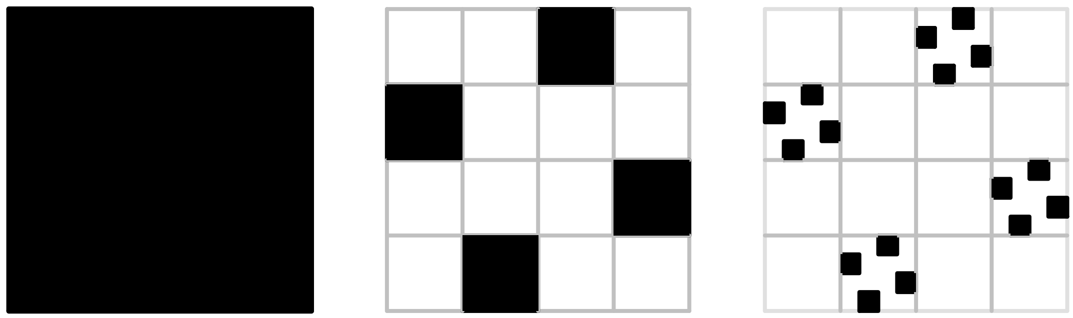
A reguláris jelző szemléletesen azon s-halmazokat hivatott összegyűjteni, amiknek a szerkezete átláthatóbb, egyszerűbb, maga a halmaz ”tömörebb”. Az irreguláris címke pedig azokat illeti, amelyek szerkezete mindenhol egyaránt bonyolult, speciális, nem ”tömör”. A következő tételt érdekes és értékes tényként, bizonyítás nélkül mutatjuk be.

1.39. Tétel. *Legyen $F \subset \mathbb{R}^2$ s-halmaz. Ekkor, ha s nem egész szám, akkor F irreguláris.*

Ez a tétel erősíti bennünk azt a szemléletet, miszerint az irreguláris halmazok családja gyűjti a bonyolult szerkezetű halmazokat, ugyanis az olyan letisztult és egyszerű halmazokról, mint például a sima görbék vagy a megszámlálható halmazok, tudjuk, hogy egész a Hausdorff-dimenziójuk. Most pedig bemutatunk egy példát egy olyan irreguláris 1-halmazra, mely a későbbiekben is hasznos lesz számunkra, és melynek irregularitásáról a fenti tétel nem állít semmit.

1.40. Példa. Legyen $E_0 \subset \mathbb{R}^2$ a $[0,1]^2$ egységnégyzet. Legyen $E_1 \subset E_0$ a középső ábra szerinti négy kis négyzet, majd $E_2 \subset E_1$ azon 16 kis négyzet uniója, melyek úgy keletkeznek, hogy E_1 kis négyzeteit kicseréljük a teljes E_1 $\frac{1}{4}$-szeresre kicsinyített változataival. Ekkor $F = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ egy önhasonló 1-halmaz lesz, mely irreguláris.

1.41. Megjegyzés. Az angol szakirodalom erre a halmazra ”Cantor dust” néven szokott hivatkozni. Mivel magyar elnevezésével nem találkoztam, így én Cantor-mozaiknak fogom hívni.



2. ábra. A Cantor-mozaik konstrukciója

Bizonyítás:

I. F Hausdorff-dimenziója 1, sőt, $\mathscr{H}^1(F)$ pozitív véges szám.

Ez a tömegelosztási elvvel ugyanúgy könnyedén igazolható, mint a triadikus Cantor-halmaz Hausdorff-dimenziója: a felső becslés abból adódik, hogy a halmaz $k > 0$-ra lefedhető 4^k db, legfeljebb $\frac{1}{4^{k-1}}$ átmérőjű kisebb halmazzal, az alsó pedig a tömegelosztási elv alkalmazásából adódik. Szintén ebből adódik, hogy $\mathscr{H}^1(F)$ pozitív véges.

II: F Borel-halmaz.

Nyilvánvaló, hiszen E_i-k zártak, így Borel-halmazok, a σ-algebrák pedig zártak a komplementerképzésre és a megszámlálható unióra, így a megszámlálható metszetre is, hiszen $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c$, ahol A^c az A halmaz komplementerét jelöli.

III. F irreguláris.

Az irregularitás ellenőrzéséhez F pontjainak sűrűségére fogunk adni egy 1-nél kisebb felső becslést. Vizsgáljuk a $\lim\limits_{r\to 0} \frac{\mathscr{H}^s(F\cap B_r(x))}{(2r)^s}$ limeszt az $r = \frac{1}{4^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$ sorozat mentén. Legyen $x \in F$ tetszőleges. Ekkor $B_r(x)$ r-sugarú, x középpontú körlap pontosan egy kis négyzetébe metsz bele E_n-nek, ennélfogva $F \cap B_r(x)$ lefedhető 1 db $\frac{\sqrt{2}}{4^n}$ átmérőjű halmazzal, vagy legfeljebb 4 db $\frac{\sqrt{2}}{4^{n+1}}$ átmérőjűvel, esetleg legfeljebb 4^k db $\frac{\sqrt{2}}{4^{n+k}}$ átmérőjűvel. Mivel $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{4^{n+k}} = 0$, és

$4^k \cdot (\frac{\sqrt{2}}{4^{n+k}})^1 = \frac{\sqrt{2}}{4^n}$, így $\mathscr{H}^1(F \cap B_r(x)) \leq \frac{\sqrt{2}}{4^n}$. Ebből $\lim\limits_{r \to 0} \frac{\mathscr{H}^1(F \cap B_r(x))}{(2r)^1} \leq \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\frac{\sqrt{2}}{4^n}}{\frac{2}{4^n}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, amennyiben az első limesz létezik. Tehát F egyetlen pontja sem lehet reguláris, vagyis mind irreguláris, így F, azaz a Cantor-mozaik, egy irreguláris halmaz.

$\square$

1.42. Megjegyzés. A fenti Cantor-mozaikról belátható, hogy Cantor-halmaz.

2. A Baire-féle kategóriatétel

2.1. Alapfogalmak és alapvető tételek

A korábbiakban már többféle kicsiség-fogalommal találkoztunk: egy halmaz kicsinek számított, ha a számossága véges, esetleg megszámlálható volt; netán ha adott mértéktérben nulla volt a mértéke, vagy ha valamilyen fraktáldimenziója jóval kisebb volt az őt magába foglaló tér dimenziójánál. Ebben a témakörben a halmazméret egy újabb megközelítésével találkozunk, azonban itt a skálázás primitívebb a mértékénél vagy a fraktáldimenzióénál: csak kicsi és nem kicsi halmazokat különböztetünk meg. Ezen fejezetben a [9] könyv 10.2-es részét fogjuk követni, kiegészítve néhány saját bizonyítással.

2.1. Definíció (Sűrű halmaz)**.** *Legyen (X,d) metrikus tér. Ekkor $H \subseteq X$ sűrű X-ben, ha $\forall x \in X$-re és $\forall \delta > 0$-ra $B(x,\delta) \cap H$ nemüres halmaz.*

2.2. Definíció (Sehol sem sűrű halmaz)**.** *Legyen (X,d) metrikus tér. Ekkor $H \subseteq X$ sehol sem sűrű halmaz X-ben, ha minden $G \subseteq X$ nemüres nyílt halmaz tartalmaz olyan $G' \subseteq G$ nemüres nyílt halmazt, melyre $G' \cap H$ üres halmaz.*

A kiindulási alap az, hogy a sehol sem sűrű halmazokat mindenképp kicsi halmaznak tekintjük. Továbbá – a nullmértékűséggel valamelyest analóg módon – szeretnénk, hogy ilyenek megszámlálható unióját is még kicsiként kezelhessük.

2.3. Definíció (Első kategóriájú halmaz)**.** *Egy (X,d) teljes metrikus térben a $H \subseteq X$ halmazt első kategóriájúnak nevezünk, ha előáll sehol sem sűrű halmazok megszámlálható uniójaként.*

Az első kategóriájú halmazok töltik be tehát a kis halmazok szerepét. Azt, hogy ezek valóban kicsi halmazok, a hamarosan tárgyalásra kerülő Baire-féle kategóriatétel biztosítja. Könnyen látható tény, hogy első kategóriájú halmazok megszámlálható uniója is első kategóriájú. Ez valamelyest erősíti a kicsiség-érzetet velük kapcsolatban: ilyen halmazokból még végtelen sok is kicsi. Itt érdemes gondolni a σ-ideál fogalmára is: egy halmaz részhalmazainak egy családja σ-ideál, ha benne van az üres halmaz, zárt megszámlálható unióra, valamint ”alulról zárt”, azaz ha benne van egy halmaz, akkor annak minden részhalmaza is. A σ-ideál fogalma egy gyűjtőfogalom több kicsiség fogalomra: a nullmértékű halmazok is σ-ideált alkotnak, és most már látjuk, hogy az első kategóriájúak is. Fontos megjegyezni, hogy az első kategóriájú halmazok már lehetnek sűrűek X-ben: például a racionális számok $\mathbb{R}$-ben a szokásos metrikával sűrűek és első kategóriájúak; viszont az $\mathbb{R}$-ben első kategóriájú halmazok intervallumot már nem tartalmazhatnak.

2.4. Definíció (Második kategóriájú halmaz)**.** *Egy (X,d) teljes metrikus térben a $H \subseteq X$ halmazt második kategóriájúnak nevezzük, ha nem első kategóriájú.*

A második kategóriájú halmazok a ”nem kicsi” halmazok. Ezen méret szerinti osztályozás esetében egyébként a kicsiség teljes mértékben az X alaphalmazhoz viszonyítva értendő. Például, a természetes számok $\mathbb{R}$-ben első kategóriájúak, $\mathbb{N}$-ben azonban második kategóriájúak.
Habár definíció szerint az alaphalmaz minden részhalmaza első vagy második kategóriájú, bevezethetünk még egy címkét, mely az eddigi rendszer szerint nagynak minősülő halmazokat illeti.

2.5. Definíció (Reziduális halmaz)**.** *Egy (X,d) teljes metrikus térben a $H \subseteq X$ halmazt reziduálisnak nevezzük, ha a komplementere első kategóriájú.*

Például az irracionális számok $\mathbb{R}$-ben reziduális halmazt alkotnak, de a $[0;1]$ intervallum – bár második kategóriájú – nem reziduális, hiszen ő és a komplementere is tartalmaz intervallumot. $\mathbb{N}$-ben csak $\mathbb{N}$ reziduális.
A következő tétel a témakör alaptétele. Ez biztosítja számunkra, hogy az első kategóriájú halmazok valóban kicsik, pontosabban, hogy a sehol sem sűrű halmazok megszámlálható uniójának a komplementere is még sűrű, azaz bizonyos értelemben nagy.

2.6. Tétel (Baire-féle kategóriatétel)**.** *Legyen (X,d) teljes metrikus tér, $S \subset X$ pedig egy első kategóriájú halmaz ebben a térben. Ekkor $X \setminus S$ sűrű X-ben.*

Bizonyítás: Legyen $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, ahol $\forall n$-re S_n sehol sem sűrű X-ben. Legyen $\tilde{S} = X \setminus S$. Vegyünk egy tetszőleges $B_0(x_0, r_0)$ nyílt gömböt, erről szeretnénk belátni, hogy tartalmaz $\tilde{S}$-beli pontot. Ehhez rekurzíve konstruáljuk nyílt gömbök (B_n) sorozatát, rendre x_n középponttal és r_n sugárral. Legyen B_1 olyan, hogy $r_1 < 1$, valamint $\overline{B}_1 \subset (B_0 \setminus \overline{S}_1)$, ahol $\overline{B}_1$ és $\overline{S}_1$ a B_1 és S_1 halmazok lezártjai.

Ezt folytassuk rekurzívan, azaz B_{n+1} legyen olyan, hogy $r_{n+1} < \frac{1}{n+1}$, valamint $\overline{B}_{n+1} \subset (B_n \setminus \overline{S}_{n+1})$. Ez azért lehetséges, mivel egyrészt S_{n+1} sehol sem sűrűsége miatt $\overline{S}_{n+1}$ is sehol sem sűrű, így $B_n \setminus \overline{S}_{n+1}$ nem üres, így választhatunk belőle egy x_{n+1}-et; másrészt mivel $\overline{S}_{n+1}$ zárt, így $B_n \setminus \overline{S}_{n+1}$ nyílt, ezért x_{n+1}-nek van olyan pici r_{n+1} sugarú környezete, ami $B_n \setminus \overline{S}_{n+1}$-beli.
A kapott (x_n) sorozat Cauchy-sorozat, mivelhogy $\forall n,m \geq N$-re $d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x_N) + d(x_m,x_N) < 2 \cdot \frac{2}{N} = \frac{4}{N}$, hiszen x_n, x_m és x_N is egy legfeljebb $\frac{1}{N}$-sugarú nyílt gömbben vannak. Mivel teljes metrikus térben vagyunk, így ennek a sorozatnak létezik egy $x \in X$ határértéke. Gondoljuk meg, hogy egyrészt ez az x mindenképp $\tilde{S}$-beli, másrészt mivel $\forall n$-re $x_{n+1} \in \overline{B}_n$, és $(\overline{B}_n)$ csökkenő halmazsorozat, így $x \in (\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n) \subset B_0$. A kettőt összevetve azt kapjuk, hogy $x \in (B_0 \cap \tilde{S})$, és ezt szerettük volna belátni. $\square$

2.7. Megjegyzés. A Baire-féle kategóriát azért teljes metrikus térre szorítkozva szokás definiálni, mert itt igaz a kategóriatétel, ami az első kategóriájú halmazok kicsiségét bizonyítja. Nem teljes metrikus térben ezen definíciók félrevezetőek lehetnek, például $\mathbb{Q}$-ban a szokásos metrikával $\mathbb{Q}$, azaz a teljes tér első kategóriájú lenne.

2.8. Megjegyzés. Vannak olyan topologikus terek, melyekben teljesül a Baire-féle kategóriatétel következtetése, ezeket Baire-tereknek nevezik. Érdekesség, hogy a Baire-terek közt olyan is van, amely nem is metrizálható.

Hasonlóan a mértékterekhez, teljes metrikus terekben is figyelmet fordítunk azon tulajdonságokra, melyek a tér alaphalmazának szinte minden pontjára jellemzőek, kivéve egy kicsi halmazt.

2.9. Definíció (Tipikus tulajdonság)**.** *Legyen (X,d) teljes metrikus tér. Az olyan tulajdonságokat, melyek egy első kategóriájú halmazt leszámítva X minden pontját jellemzik, azaz egy reziduális halmaz bír ezzel a tulajdonsággal, tipikus vagy generikus tulajdonságnak nevezzük.*

A Baire-féle kategóriatétel tehát azt mondja ki, hogy teljes metrikus térben a tipikus halmaz sűrű az alaphalmazban.

A következő két tételt csak érdekességként mutatjuk be, a bizonyításuk nagyon hasonlít a következő néhány, számunkra jelentősebb tétel bizonyítására, valamint az első bizonyítása elolvasható a [9] könyvben.

2.10. Megjegyzés. Jelölje $C[a,b]$ az $[a,b]$ intervallumon folytonos függvényeket, és $f,g \in C[a,b]$-re legyen $d_{\sup}(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\}$. Ekkor $d_{\sup}$ metrika $C[a,b]$-n, mellyel $C[a,b]$ teljes metrikus teret alkot. Ezt a teljes metrikus teret $\mathscr{C}[a,b]$ jelöli.

2.11. Tétel. *A tipikus $\mathscr{C}[a,b]$-beli függvény sehol sem monoton, azaz nincs olyan $I \subset [a,b]$ nyílt intervallum, melyen monoton.*

2.12. Tétel. *A tipikus $\mathscr{C}[a,b]$-beli függvény sehol sem differenciálható, azaz nincs olyan $x \in [a,b]$ pont, ahol létezik és véges legalább az egyik féloldali derivált.*

Ezen két tétel, de főleg az utóbbi, igen meglepő lehet elsőre: ilyen folytonos függvény ritkán jön velünk szembe a matematikai kalandozásaink során, sőt, elméletben konstruálni se olyan könnyű egy ilyen értelemben sehol sem differenciálható, folytonos függvényt – ehhez képest kiderült, hogy márpedig egy tipikus folytonos függvény ilyen! További kis érdekesség, hogy az első olyan folytonos függvényt, amelynek még végtelen féloldali deriváltjai sem léteznek, éppen Besicovitch adta 1922-ben. A téma iránt érdeklődők ennek részletesebben utánaolvashatnak a [8] szakdolgozatban.

2.2. Kompakt halmazok tere

A későbbiekben a síkbeli kompakt halmazok terére lesz szükségünk, így folytassuk vizsgálódásainkat ebben az irányban. Innentől kezdve a definíciók után elhagyjuk a [9] forrást, a bizonyítások az ott megemlített feladatokra, illetve az azokkal kapcsolatban felmerülő, bizonyításra szoruló kérdésekre adott megoldásaim.

Mindezekhez elsőként szükségünk van egy távolságfogalomra egy metrikus tér alaphalmazának részhalmazai közt.

2.13. Definíció (Pont és halmaz távolsága)**.** *Legyen (X,d) metrikus tér. Ekkor egy $a \in X$ pont és $B \subseteq X$ nemüres halmaz $d(a,B)$ távolsága alatt az $\inf_{b \in B} d(a,b)$ értéket értjük.*

2.14. Definíció (Hausdorff-metrika)**.** *Legyen (X,d) metrikus tér, $H_1, H_2 \subseteq X$ nemüres halmazok. Ekkor H_1 és H_2 Hausdorff-metrika szerinti $d_H(H_1,H_2)$ távolsága*

$$d_H(H_1,H_2) = \max\{\sup_{h_1 \in H_1} d(h_1,H_2); \sup_{h_2 \in H_2} d(h_2,H_1)\}.$$

Könnyen belátható, hogy ez valóban metrika. A Hausdorff-metrika a két halmaz közt előforduló legnagyobb pont-halmaz távolságot definiálja a két halmaz távolságának.

2.15. Definíció ($\mathbb{R}^n$-beli kompakt halmazok)**.** *Jelölje $K(\mathbb{R}^n) = \{K \subset \mathbb{R}^n : K \text{ kompakt}\}$ az $\mathbb{R}^n$-beli kompakt halmazok halmazát.*

2.16. Definíció ($\mathbb{R}^n$-beli kompakt halmazok tere)**.** *Jelölje $\mathscr{K}(\mathbb{R}^n) = (K(\mathbb{R}^n), d_H)$ az $\mathbb{R}^n$-beli kompakt halmazok terét a Hausdorff-metrikával.*

2.17. Állítás. *$\mathscr{K}(\mathbb{R}^n)$ teljes metrikus tér.*

Bizonyítás: A Heine-Borel tétel szerint $\mathbb{R}^n$-ben a kompaktság ekvivalens azzal, hogy a halmaz korlátos és zárt. Legyen (H_k) egy Cauchy-sorozat $K(\mathbb{R}^2)$-ben. Erről szeretnénk belátni, hogy konvergens. Legyen (A_k) az a halmazsorozat, melyre $A_k = \overline{\bigcup_{i=k}^{\infty} H_i}$. Mivel (H_k) Cauchy-sorozat volt a d_H metrika szerint, azaz $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists N$, hogy $\forall n_1, n_2 \geq N$-re $d_H(H_{n_1}, H_{n_2}) < \varepsilon$, ezért ha H_N-hez hozzávesszük az összes olyan pontot, mely legfeljebb ε távolságra van tőle, akkor a kapott $H_{N,\varepsilon}$ halmaz tartalmazni fogja $\forall m \geq N$-re H_m-et. Így $A_m \subset H_{N,\varepsilon}$ $\forall m \geq N$-re, $\forall \varepsilon$-ra alkalmas N-nel. $H_{N,\varepsilon}$ $\forall \varepsilon$-ra és a hozzátartozó N-re korlátos és zárt, így $\forall m$-re A_m is korlátos, valamint definíció szerint zárt, így (A_k) kompakt halmazok csökkenő sorozata, tehát konvergens, és a határértéke, A, kompakt. Mivel $N \leq n_1, n_2$-re $d_H(H_{n_1}, H_{n_2}) < \varepsilon$, így $d_H(A_N, H_m) \leq \varepsilon$ is teljesülni fog elég nagy m-re (A_k) definíciója miatt, valamint (A_k) konvergenciája miatt $d_H(A_i, A) < \varepsilon$ elég nagy i-re, így a háromszög-egyenlőtlenség szerint elég nagy m-re $d_H(H_m, A) < 2 \cdot \varepsilon$ is teljesül. Ebből pedig $\lim_{m \to \infty} H_m = A$ következik. □

Az $\mathbb{R}^n$-beli kompakt halmazok $\mathscr{K}(\mathbb{R}^n)$ terének tipikus halmazai rengeteg szép és érdekes tulajdonsággal rendelkeznek. Ahhoz persze, hogy egyáltalán beszélhessünk tipikus tulajdonságokról, szükséges volt belátni, hogy a tér teljes. Belátható például, hogy a tipikus $\mathscr{K}(\mathbb{R}^n)$-beli halmaz 1.31 Megjegyzésben definiált Cantor-halmaz, csak irracionális koordinátájú pontokat tartalmaz és nincsenek izolált pontjai, de ezek még csak a kevésbé fontos és meglepő tulajdonságai.

2.18. Állítás. *A tipikus $K \in \mathscr{K}(\mathbb{R}^n)$ n-dimenziós Lebesgue-mértéke* 0.

Bizonyítás: Azt kell megmutatnunk, hogy a nemnulla Lebesgue-mértékű kompakt halmazok $\mathscr{K}_+$ halmaza előáll $\mathscr{K}(\mathbb{R}^n)$-ben sehol sem sűrű halmazok megszámlálható uniójaként. Ez úgy is bizonyítható, ha azt mutatjuk meg, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$-re a (nemüres) kompakt halmazok egy általunk választott nyílt, sűrű részhalmazán a halmazok Lebesgue-mértéke $< \frac{1}{n}$. Ekkor ezen halmazok komplementerei egyenként sehol sem sűrűek lesznek a következő lemma miatt, uniójuk pedig tartalmazza $\mathscr{K}_+$-t.

2.19. Lemma. *Metrikus térben sűrű, nyílt halmaz komplementere sehol sem sűrű.*

Bizonyítás: Legyen (X,d) teljes metrikus tér, $H \subset X$ nemüres, nyílt, sűrű halmaz, $H^c = X \setminus H$, mely definíció szerint zárt. Legyen $x \in H^c$, valamint $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor $B(x,\varepsilon)$ H sűrűsége miatt tartalmaz $h \in H$ elemet. Ha h-nak minden környezetében lenne H^c-beli elem, az azt jelentené, hogy van egy H^c-beli sorozat, mely h-hoz tart, ez viszont ellentmondana H^c zártságának. Így h-nak van olyan kis környezete, melybe nem metsz bele H^c, ezzel a sehol sem sűrűséget beláttuk. □

Térjünk vissza az állítás bizonyításához. Vegyük $\mathscr{K}(\mathbb{R}^n)$ alaphalmazának véges elemeit. Könnyen látható, hogy ezek $\mathscr{K}(\mathbb{R}^n)$ alaphalmazában sűrűn helyezkednek el, Lebesgue-mértékük pedig 0. Az is egyértelmű, hogy ezeknek van olyan pici, nyílt környezete, melyben minden elem Lebesgue-mértéke $< \frac{1}{n}$. Így a véges halmazok, kiegészítve ezen nyílt környezeteikkel nyílt, és továbbra is sehol sem sűrű halmazt alkotnak, ahol a Lebesgue-mérték $< \frac{1}{n}$, ezzel pedig az állítást beláttuk.

□

Ha egy $\mathbb{R}^n$-beli B Borel-halmaz Lebesgue-mértéke 0, akkor $\mathscr{H}^n(B)$ is 0, azaz $\dim_H B \le n$. Emiatt a következő állítás egy erősebb tényt mond ki az előzőnél.

2.20. Állítás. *A tipikus* $K \in \mathscr{K}(\mathbb{R}^n)$ *Hausdorff-dimenziója* 0.

Bizonyítás: Azt fogjuk megmutatni, hogy azon $\mathscr{K}(\mathbb{R}^n)$-beli K halmazok halmaza, melyekre rögzített $m,k,t \in \mathbb{N}^+$-ra $\mathscr{H}^{\frac{1}{m}}_{\frac{1}{t}}(K) > \frac{1}{k}$ teljesül, sehol sem sűrű $S_{m,k,t}$ halmazt alkotnak $\mathscr{K}(\mathbb{R}^n)$ alaphalmazában. Ekkor ezek uniója minden (m,k,t) pozitív egészekből álló hármasra egy megszámlálható unió, mely tartalmazza a pozitív Hausdorff-dimenziójú kompakt halmazokat.
Rögzítsünk le egy (m,k,t) hármast. Legyen $K \in \mathscr{K}(\mathbb{R}^n)$ tetszőleges. Ekkor ehhez tetszőlegesen

közel található véges elemszámú H halmaz. Erre nyilvánvalóan teljesül, hogy $\mathscr{H}_{\frac{1}{t}}^{\frac{1}{m}}(H) \leq \frac{1}{k}$. Ha választunk egy olyan kicsi $\varepsilon > 0$-t, melyre teljesül, hogy $\varepsilon < \frac{1}{2t}$, valamint $|H| \cdot \varepsilon^{\frac{1}{m}} \leq \frac{1}{k}$, akkor $B(H, \varepsilon)$ minden H' elemére teljesülni fog, hogy $\mathscr{H}_{\frac{1}{t}}^{\frac{1}{m}}(H') \leq \frac{1}{k}$. Így $K \in \mathscr{K}(\mathbb{R}^n)$ bármilyen nyílt környezetében van olyan $H \in \mathscr{K}(\mathbb{R}^n)$, melynek van olyan kicsi nyílt környezete, amelybe $S_{m,k,t}$ nem metsz bele, ezzel pedig beláttuk, hogy minden (m, k, t) pozitív egészekből álló hármasra $S_{m,k,t}$ sehol sem sűrű $\mathscr{K}(\mathbb{R}^n)$-ben. $\square$

Azaz beláttuk, hogy a kompakt halmazok terében a tipikus halmazok önmagukban kicsik. A későbbiekben ezen állításokra érdemes lesz visszaemlékezni.

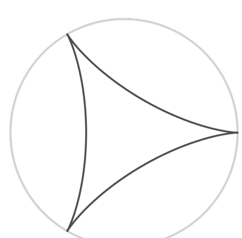
3. A Kakeya-problémakör

3.1. Kakeya-halmazok

Ebben a fejezetben néhány érdekes kérdést járunk körbe a [10] forrást követve, melyek azt vizsgálják, hogy mi a legkisebb olyan halmaz, amely tartalmaz minden irányban egységszakaszokat, néha bizonyos egyéb feltételeknek megfelelően. A ”legkisebb” fogalmát természetesen sokféleképpen lehet definiálni, így a problémakör is színesebb lesz.

3.1. Kérdés (Kakeya)**.** Mi a legkisebb területű síkbeli halmaz, amelyben folytonosan körbe lehet forgatni egy egységhosszú szakaszt?

A természetes első gondolata mindenkinek egy $\frac{1}{2}$ sugarú kör, melynek területe $\frac{\pi}{4}$, azonban a probléma attól lesz érdekes, hogy ennél sokkal, de sokkal jobb megoldás is van. Sajnos, ha egy kör mentén visszük körbe a szakasz felezőpontját, úgy, hogy a szakasz érintő maradjon végig, akkor is ennyi lesz a terület, akármekkora is a körünk. A következő természetes gondolat egy negyedkör, melynek sugara 1, azonban a területe ennek is $\frac{\pi}{4}$, viszont innen már nem olyan nagy ugrás az 1 magasságú szabályos háromszög gondolata, melynek területe $\frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\pi}{4}$. A magyar származású, Dániában letelepedő matematikus, Pál Gyula bizonyította, hogy a konvex halmazok körében nem létezik ennél jobb megoldás. A nem konvex halmazok körében azonban maga Kakeya is talált egy jobb konstrukciót: az úgynevezett háromcsúcsú hipocikloist. Ezt úgy kapjuk, hogy egy nagy, R-sugarú kör kerületén belülről csúszásmentesen végiggördítünk egy $r = \frac{R}{3}$ sugarú kisebb kört, és ez utóbbin végigkövetjük egy előre rögzített pont nyomvonalát.



3. ábra. Háromcsúcsú hipociklois

[6] szerint bizonyított, hogy ezen alakzat minden érintőjének az alakzat belsejébe eső része

ugyanolyan hosszú. Ha ezt a hosszt 1-nek választjuk, amihez $R = \frac{3}{4}$ szükséges, akkor a hipociklois által határolt alakzat területe $\frac{\pi}{8}$; és Kakeya eredeti sejtése szerint ez az elérhető legjobb.

3.2. Definíció (Kakeya-halmaz)**.** *Kakeya-halmazoknak nevezzük az olyan $K \subseteq \mathbb{R}^2$ halmazokat, melyekben folytonosan körbeforgatható egy egységszakasz úgy, hogy π-szögű forgatás után a szakasz a kiinduló pozícióba ér vissza.*

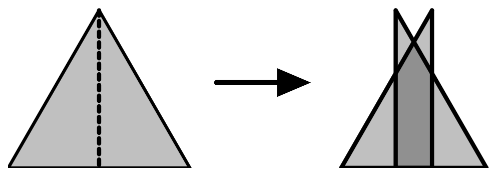
3.3. Megjegyzés. Egy egységszakasz helyzetét a síkon leírhatjuk a középpontja koordinátáival, valamint az általa meghatározott egyenes irányszögével. Így egy egységszakasz körbeforgatása, mely valójában egy mozgatás, precízen egy $[0,1] \to \mathbb{R}^2 \times [0,2\pi]$ függvény, ahol a 0-t azonosítjuk a 2π-vel, a körbeforgatás pedig folytonos, ha az őt leíró függvény mindkét változójában folytonos – figyelembe véve, hogy a 0 azonos a 2π-vel, így például az $\frac{1}{10}$ és a $(2\pi - \frac{1}{10})$ szögek különbségének abszolútértéke $\frac{2}{10}$.

3.4. Sejtés (Kakeya, 1. verzió)**.** Minden Kakeya-halmaz területe $\geq \frac{\pi}{8}$, és a háromcsúcsú hipociklois az egyetlen Kakeya-halmaz, melynek területe pontosan $\frac{\pi}{8}$.

Azonban erről a sejtésről kiderült, hogy nagyon távol áll az igazságtól. Nemcsakhogy nem $\frac{\pi}{8}$ az elérhető legkisebb terület, de egyenesen nem is létezik minimális területű Kakeya-halmaz!

3.5. Tétel (Besicovitch)**.** *Minden $\varepsilon > 0$-ra létezik $K_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$ Kakeya-halmaz, melynek területe $\leq \varepsilon$.*

Most nem Besicovitch eredeti konstrukcióját fogjuk bemutatni, hanem Perronét, mely egyszerűbb, de szinte ugyanazokat az ötleteket használja.
Először is, csináljunk egy olyan konstrukciót, melyben 180° helyett csak 60°-kal forgatunk, de így tetszőlegesen kicsi területet elérhetünk. Ekkor három ilyet megfelelően egymás mellé téve már csak az átmenetet kell majd megoldani.
Vegyünk egy 1 magasságú szabályos háromszöget, és vágjuk ketté az egyik magasságvonala mentén. Ezután a keletkezett két darabot toljuk egymás felé úgy, hogy minél nagyobb területen fedjék egymást.

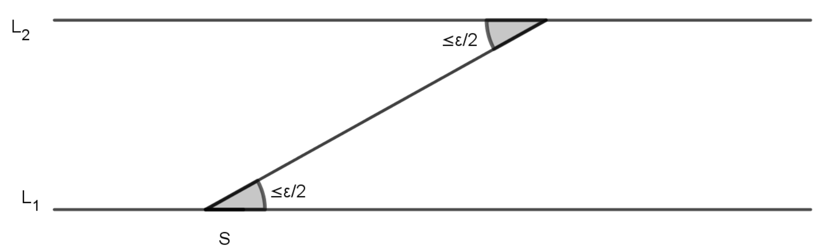


4. ábra. A háromszög átalakítása

Ekkor az eredeti háromszögben a kiválasztott magasságvonalhoz tartozó 60°-os szög által meghatározott minden irányban tartalmaz egységszakaszt a kapott új alakzat, azonban nem folytonosan egymásbaforgathatóan. Ezen a problémán azonban segít Pál Gyula szép ötlete.

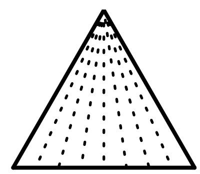
3.6. Lemma (Pál)**.** *Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Legyenek L_1 és L_2 párhuzamos egyenesek, és legyen S egy egységszakasz L_1-en. Ekkor S-t folytonosan mozgatva átvihetjük L_2-re úgy, hogy az S által használt terület $\leq \varepsilon$ legyen.*

Bizonyítás: Először forgassuk el S-t L_2 irányában elég kicsi szöggel ahhoz, hogy az S által "súrolt" terület $\frac{\varepsilon}{2}$ legyen. Ezután a saját maga által meghatározott irány mentén toljuk el S-t addig a pontig, amíg először hozzá nem ér L_2-höz. Ezen folyamat alatt a súrolt terület 0. Végül forgassuk rá S-t L_2-re az első lépéshez hasonlóan. Ez a lépés $\frac{\varepsilon}{2}$ felhasznált területet igényel, így összesen ε területre volt szükségünk a művelet végrehajtásához.



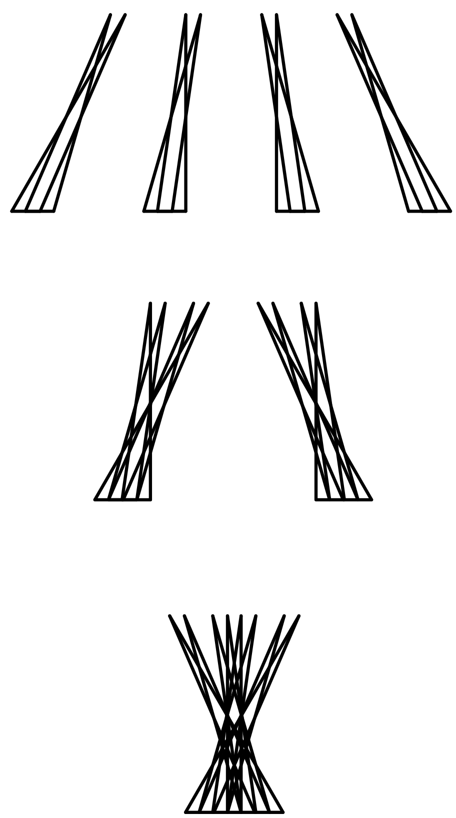
5. ábra. Pál-féle összekötés

A fenti ötletet továbbvihetjük: ha tetszőleges $\varepsilon > 0$-nál kisebb területű Kakeya-halmazt szeretnénk konstruálni, ahhoz választanunk kell egy elég nagy k-t, és 2^k db kis háromszögre felbontani az eredetit az ábra szerint.



6. ábra. A háromszög feldarabolása

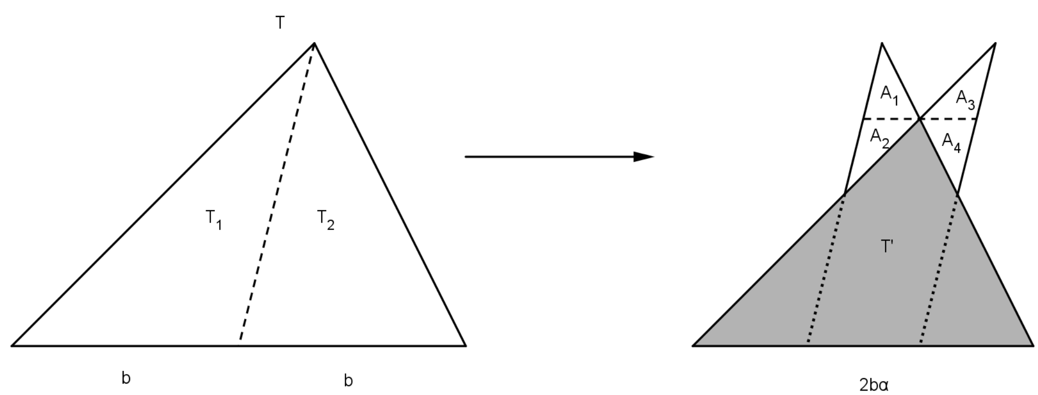
Ezután $k-1$ lépést kell végrehajtanunk, ahol az i-edikben 2 db, 2^i db kisháromszöget tartalmazó alakzatot egyesítünk az ábra szerint.



7. ábra. A Perron-fa konstrukció

Hosszú, ámde annál értékesebb eredményre vezető számolás biztosítja, hogy így valóban tetszőlegesen kicsi területű Kakeya-halmazt kaphatunk.

3.7. Lemma. *Legyen T egy háromszög, melyet kettévágunk az egyik súlyvonala mentén egy T_1 és egy T_2 háromszöggé az ábra szerint. Jelölje b T_1 és T_2 azon, egyforma hosszú oldalainak hosszát, melyek T-ben együtt alkottak egy oldalt. Rögzítsünk egy tetszőleges $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ paramétert, és toljuk T_2-t balra $2 \cdot b \cdot (1-\alpha)$-val, hogy a keletkező alakzat alapja $2b - 2b(1-\alpha) = 2b \cdot \alpha$ legyen. Ekkor a kapott új alakzat területe $(\alpha^2 + 2 \cdot (1-\alpha)^2) \cdot \lambda^2(T)$, ahol $\lambda^2(T)$ a T háromszög területét jelöli.*



8. ábra. T kettévágása

Bizonyítás: T háromszög kettévágása után, az ábra jelöléseit használva, megállapíthatjuk, hogy T' és T hasonló háromszögek, az oldalaik aránya pedig éppen α, így $\lambda^2(T') = \alpha^2 \cdot \lambda^2(T)$. A második ábrán szaggatottal jelölt szakasz párhuzamos T alapjával, így A_1 és A_4 hasonló T_2-höz, A_2 és A_3 hasonló T_1-hez, a hasonlóság aránya pedig mind a négy esetben $1-\alpha$, hiszen a szaggatott szakasz hossza annyi, amennyivel T_2-t eltoltuk: $2 \cdot (1-\alpha) \cdot b$. Így tehát:

$$\lambda^2(A_1) = \lambda^2(A_4) = (1-\alpha)^2 \cdot \lambda^2(T_2) = \frac{1}{2} \cdot (1-\alpha)^2 \cdot \lambda^2(T)$$

$$\lambda^2(A_2) = \lambda^2(A_3) = (1-\alpha)^2 \cdot \lambda^2(T_1) = \frac{1}{2} \cdot (1-\alpha)^2 \cdot \lambda^2(T)$$

Így a teljes új alakzat területe:

$$\lambda^2(T') + \lambda^2(A_1) + \lambda^2(A_2) + \lambda^2(A_3) + \lambda^2(A_4) = \alpha^2 \cdot \lambda^2(T) + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (1-\alpha)^2 \cdot \lambda^2(T)\right) =$$
$$= (\alpha^2 + 2 \cdot (1-\alpha)^2) \cdot \lambda^2(T)$$

$\square$

3.5 tétel bizonyítása: Rögzítsünk le egy $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ és egy $k \in \mathbb{N}$ paramétert, melyek értékét a bizonyítás végén választjuk majd meg. Legyen T egy szabályos háromszög. Vágjuk szét T-t 2^k db kisháromszögre úgy, hogy T egyik oldalát, melyre alapként fogunk hivatkozni, felosztjuk 2^k egyenlő részre, és az osztópontokat összekötjük T azon csúcsával, mely nem illeszkedik az alapra. Jelölje az így kapott kisháromszögeket $T_1, T_2, ..., T_{2^k}$, a T alapjából örökölt oldaluk hosszát pedig b. Állítsuk ezeket párba, és egyesítsük őket a korábbiak szerint: minden $1 \leq i \leq 2^{k-1}$-re T_{2i}-t toljuk el balra $2b \cdot (1-\alpha)$-val, T_{2i-1}-re. Az így kapott 2^{k-1} darab alakzatot jelölje $S_i^{(1)}$. Minden ilyen $S_i^{(1)}$ három részből áll: a ”szívét” alkotó háromszög, mely hasonló $T_{2i-1} \cup T_{2i}$-hez, legyen $T_i^{(1)}$, a ”fülei”-t alkotó két háromszög pedig $E_{2i-1}^{(1)}$ és $E_{2i}^{(1)}$. Az előbbi 3.7 lemma alapján tudjuk, hogy

$$\lambda^2(S_i^{(1)}) = (\alpha^2 + 2 \cdot (1-\alpha)^2) \cdot \lambda^2(T_{2i-1} \cup T_{2i}).$$

Most pedig ezt az egyesítési folyamatot fogjuk iterálni. Először minden $1 \leq j \leq 2^{k-2}$-re $S_{2j}^{(1)}$-t toljuk el $S_{2j-1}^{(1)}$-re úgy, hogy $T_{2j-1}^{(1)}$ és $T_{2j}^{(1)}$ (egyenlő hosszú) alapjainak átfedése az alapok összegének $(1-\alpha)$-szorosa legyen. Az így kapott $S_j^{(2)}$ alakzat a régi ”fül”-részekből, az új ”fül”-részekből és az új ”szívből” áll. A lemma számolása szerint a régi ”fülek” területe $2 \cdot (1-\alpha)^2 \cdot \lambda^2(T_{4j-3} \cup T_{4j-2} \cup T_{4j-1} \cup T_{4j})$, az új ”fülek” és ”szív” összterülete pedig $(\alpha^2 + 2 \cdot (1-\alpha)^2) \cdot \lambda^2(T_{2j}^{(1)})$. Mivel $\lambda^2(T_{2j}^{(1)}) = \alpha^2 \cdot \lambda^2(T_{4j-3} \cup T_{4j-2} \cup T_{4j-1} \cup T_{4j})$, így az említett összterület:
$(\alpha^4 + 2 \cdot \alpha^2 \cdot (1-\alpha)^2) \cdot \lambda^2(T_{4j-3} \cup T_{4j-2} \cup T_{4j-1} \cup T_{4j})$. Tehát

$$\lambda^2(S_j^{(2)}) = (\alpha^4 + 2 \cdot \alpha^2 \cdot (1-\alpha)^2 + 2 \cdot (1-\alpha)^2) \cdot \lambda^2(T_{4j-3} \cup T_{4j-2} \cup T_{4j-1} \cup T_{4j}).$$

Szummázzuk j szerint $S_j^{(2)}$-k területét:

$$\sum_{j=1}^{2^{k-2}} \lambda^2(S_j^{(2)}) \leq (\alpha^4 + 2 \cdot \alpha^2 \cdot (1-\alpha)^2 + 2 \cdot (1-\alpha)^2) \cdot \lambda^2(T)$$

Azért nem állíthatunk egyenlőséget, mert előfordulhat átfedés a régi és az új ”fülek” közt. Ez eddig az iterációnak csak az első két lépése volt, de eszerint már könnyen felírhatjuk, mi a helyzet az r-edik után. Az $(r-1)$-edik iterációban kapott $T_j^{(r-1)}$ ”szívekre” alkalmazzuk a lemmát. Ezek területe $\alpha^{2r-2} \cdot \lambda^2(T_{j \cdot 2^r+1} \cup ... \cup T_{(j+1) \cdot 2^r})$, így az új $T_j^{(r)}$ ”szívek” területe $\alpha^{2r} \cdot \lambda^2(T_{j \cdot 2^r+1} \cup ... \cup T_{(j+1) \cdot 2^r})$, az új ”fülek” területe pedig $2\cdot\alpha^{2r-2}\cdot(1-\alpha)^2\cdot\lambda^2(T_{j\cdot 2^r+1}\cup\ldots\cup T_{(j+1)\cdot 2^r})$. A korábbiakhoz hasonlóan ezekből felírhatjuk, hogy

$$\sum_{j=1}^{2^{k-r}}\lambda^2(S_j^{(r)})\leq\left(\alpha^{2r}+2\cdot(1-\alpha)^2\cdot\sum_{m=0}^{r-1}\alpha^{2m}\right)\cdot\lambda^2(T).$$

A k-adik iteráció után kapott $S:=S_1^{(k)}$ alakzat már az összes kiinduló kisháromszög eltoltját tartalmazza, így kész vagyunk. Nézzük meg, mit mondhatunk el S területéről.

$$\begin{aligned}\lambda^2(S)&\leq\left(\alpha^{2k}+2\cdot(1-\alpha)^2\cdot\sum_{m=0}^{k-1}\alpha^{2m}\right)\cdot\lambda^2(T)\\&\leq\left(\alpha^{2k}+2\cdot(1-\alpha)^2\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\alpha^{2m}\right)\cdot\lambda^2(T)\\&=\left(\alpha^{2k}+\frac{2\cdot(1-\alpha)^2}{1-\alpha^2}\right)\cdot\lambda^2(T)\\&=\left(\alpha^{2k}+\frac{2\cdot(1-\alpha)}{1+\alpha}\right)\cdot\lambda^2(T)\\&\leq\Big(\alpha^{2k}+2\cdot(1-\alpha)\Big)\cdot\lambda^2(T)\end{aligned}$$

Most már csak α-t és k-t kell megfelelően megválasztanunk. $\alpha<1$ legyen olyan közel 1-hez, hogy $2\cdot(1-\alpha)\cdot\lambda^2(T)\leq\frac{\varepsilon}{16}$ teljesüljön. Ezután k-t válasszuk elég nagynak ahhoz, hogy $\alpha^{2k}\cdot\lambda^2(T)\leq\frac{\varepsilon}{16}$ is teljesüljön. Így $\lambda^2(S)\leq\frac{\varepsilon}{8}$. Ezzel még nem vagyunk kész, hiszen hiányzik a folytonosan forgatáshoz szükséges összeköttetés a kisháromszögek közt. Ehhez szükségünk van 2^k-1 db összeköttetésre, melyet Pál lemmája szerint valósítunk meg. Minden ilyenhez olyan forgatási szöget választunk, mellyel a használt terület $\leq\frac{\varepsilon}{2^{k+3}}$. Így az ezek által felhasznált terület $\leq(2^k-1)\cdot\frac{\varepsilon}{2^{k+3}}\leq\frac{\varepsilon}{8}$. Jelölje az így kapott alakzatot S', ekkor $\lambda^2(S')\leq\frac{\varepsilon}{4}$. Még mindig nem vagyunk kész, hiszen még szükségünk lesz S' két elforgatott másolatára, és három új Pál-féle összeköttetésre. Ezen összeköttetések mindegyike $\leq\frac{\varepsilon}{12}$ területet használjon, így a kapott K_ε Kakeya-halmaz területe $\leq 3\cdot\frac{\varepsilon}{12}+3\cdot\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon$, ahogy szerettük volna. □

A következő kérdés, hogy rendben, tetszőlegesen kicsi, de pozitív területű Kakeya-halmazt tudtunk konstruálni – de vajon 0 területű, azaz 0 Lebesgue-mértékű létezik-e? A válasz sajnos, de nem meglepően az, hogy nem. Ennek bizonyítását itt nem mutatjuk be, de az intuíció a világos:

ahogy forgatjuk a szakaszt, az mindenképp ”végigsöpör” legalább egy nagyon kicsiny, de pozitív területű részén a síknak.

3.2. Besicovitch-halmazok

Viszont felmerülnek további érdekes kérdések: mi a helyzet akkor, ha elhagyjuk azt a feltételt, hogy folytonosan körbe lehessen forgatni a szakaszt, és csak annyit követelünk meg, hogy a halmazunk minden irányban tartalmazzon egy egységszakaszt? Ez a problémakör Abram Samoilovitch Besicovitch orosz származású matematikus nevéhez fűződik, és igen szép eredményeket rejt.

3.8. Definíció (Besicovitch-halmaz)**.** *Egy $B \subseteq \mathbb{R}^2$ halmazt Besicovitch-halmaznak nevezünk, ha minden irányban, azaz minden irányszöghöz tartozóan tartalmaz egy* 1 *hosszúságú szakaszt.*

Mivel minden Kakeya-halmaz egyben Besicovitch-halmaz is, így tetszőlegesen kicsi, de pozitív területű Besicovitch-halmazt tudunk konstruálni. De vajon engedtünk-e eleget a feltételeinkből ahhoz, hogy 0 területűt is tudjunk? Erre ad választ a következő tétel.

3.9. Tétel (Besicovitch)**.** *Létezik* 0 *területű Besicovitch-halmaz.*

Bizonyítás: A már megismert ötleteket fogjuk továbbvinni. Először tekintsük a következő lemmát, mely azt mondja ki, hogy a Kakeya-halmazoknál megismert Perron-fa konstrukció tetszőlegesen közel tud maradni a kiinduló háromszöghöz.

3.10. Lemma. *Legyen T egy háromszög, U pedig olyan nyílt halmaz, melyre $T \subset U$ teljesül. Ekkor létezik olyan, tetszőlegesen kicsi pozitív területű S halmaz, melyet úgy kapunk, hogy T-t felvágjuk kisebb háromszögekre, majd ezek közül néhányat eltolunk, és amelyre teljesül, hogy $S \subset U$.*

Bizonyítás (3.10 Lemma): Ha egy olyan H háromszögön hajtjuk végre a Perron-fa konstrukciót, melynek alapja a hosszú, akkor minden kisháromszög legfeljebb a távolságra lesz a művelet végén a kiindulási helyétől. Mivel U nyílt halmaz, így tudunk venni egy olyan $\varepsilon > 0$-t, melyre teljesül, hogy minden olyan pont, mely legfeljebb ε távolságra van T-től, benne van az U-ban. Ossszuk fel T-t $\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ db kisháromszögre a szokásos módon, azaz egy csúcs és a szemközti oldal bizonyos pontjainak összekötésével, úgy, hogy mindegyik kisháromszög alapja $\leq \varepsilon$ legyen. Ezután mindegyik kisháromszögön egymástól függetlenül hajtsuk végre a Perron-fa konstruálást, úgy, hogy az összterület kellően kicsi legyen. Ekkor minden pont legfeljebb ε távolságra került T háromszögtől, így $S \subset U$. $\square$

Folytassuk a tétel bizonyítását. Rögzítsünk egy 1 magasságú T szabályos háromszöget, és U_1 legyen olyan nyílt halmaz, melyre $T \subset U_1$, és $\lambda^2(U_1) \leq 2 \cdot \lambda^2(T)$. A lemma szerint ekkor létezik $S_1 \subset U_1$, melyre $\lambda^2(S_1) \leq \frac{1}{2}$, és továbbra is minden irányban tartalmaz egységszakaszt. Most vegyünk egy olyan $U_2 \subset U_1$ nyílt halmazt, melyre $S_1 \subset U_2 \subset U_1$ és $\lambda^2(U_2) \leq 2 \cdot \lambda^2(S_1)$ teljesül, és alkalmazzuk újra a lemmát egy legfeljebb $\frac{1}{4}$ területű S_2 létrehozásához. Ezt pontosabban úgy tehetjük meg, hogy a lemmát az S_1-et alkotó kisebb háromszögekre alkalmazzuk. A továbbiakban ezt iteráljuk. Így kapunk egy (S_i) halmazsorozatot, melynek elemeire $\lambda^2(S_i) \leq 2^{-i}$, illetve egy (U_i) csökkenő halmazsorozatot, melynek minden eleme nyílt, és $\forall i \in \mathbb{N}^+$-re $\lambda^2(U_i) \leq 2 \cdot \lambda^2(S_{i-1}) \leq 2^{-i}$. Legyen

$$B = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i.$$

Ekkor B nullmértékű lesz.

Be kell látnunk még, hogy minden irányban tartalmazni fog egy egységszakaszt is. Mivel $\forall i$-re $S_i \subset U_{i+1} \subset U_i$, ezért $S_i \subset \overline{U}_i$ teljesül, valamint $\overline{U}_{i+1} \subset U_i$ is feltehető, ahol $\overline{U}_i$ az U_i halmaz lezártját jelenti. Így $\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{U}_i$ kompakt halmazok egy olyan csökkenő sorozata, melynek minden tagja tartalmaz tetszőleges α-ra α irányszögű $E_{(i,\alpha)}$ egységszakaszt. $\overline{U}_i$-k kompaktsága miatt rögzített α-ra $(E_{(i,\alpha)})$ szakaszsorozat egy részsorozata konvergál egy E_α α-szögű egységszakaszhoz. Ha lenne olyan i, melyre U_i nem tartalmazná E_α-t, abból az is következne, hogy $\overline{U}_{i-1}$ sem tartalmazza, ám ez ellentmondás lenne. $\square$

Most, hogy bebizonyítottuk ezt a meglepő eredményt, egy pillanatra úgy érezhetjük, hogy ennél – 0 területnél – jobbat már nem tudunk csinálni. Azonban gondolkodjunk csak el: néhány darab pontnak és egy egyenesnek is 0 a területe, mégis azt érezzük, hogy az egyenes egyértelműen ”nagyobb”. És itt jönnek be a képbe a korábban bevezetett dimenziófogalmak. Ehhez először vezessük be a 2-nél több dimenziós Besicovitch-halmaz fogalmát.

3.11. Definíció (Besicovitch-halmaz $\mathbb{R}^n$-ben)**.** *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Ekkor B Besicovitch-halmaz, ha minden irányban tartalmaz egy egységszakaszt.*

A következő megjegyzés rögtön és frappánsan tisztázza is az $\mathbb{R}^n$-beli Besicovitch-halmazokkal kapcsolatban elsőként felmerülő kérdést.

3.12. Megjegyzés. Ha $B \subset \mathbb{R}^2$ egy kétdimenziós, 0 Lebesgue-mértékű Besicovitch-halmaz, akkor $B \times [0,1]^{n-2} \subset \mathbb{R}^n$ a Fubini-tétel miatt egy n-dimenziós Lebesgue-mérték szerint nullmértékű $\mathbb{R}^n$-beli Besicovitch-halmaz. Így a síkbeli 0 területű Besicovitch létezésének bizonyításával az $\mathbb{R}^n$-beli nullmértékű Besicovitch-halmaz létezését is bizonyítottuk.

3.13. Megjegyzés. A szakirodalomban a Besicovitch-halmaz definíciójába gyakran beleértik a kompaktság és nullmértékűség feltételét is. Ekkor az a nagy kérdés, hogy létezik-e Besicovitch-halmaz.

Térjünk vissza arra a kérdésre, hogy tudjuk-e még valamilyen értelemben csökkenteni egy $\mathbb{R}^n$-beli Besicovitch-halmaz méretét. A szempont most a Hausdorff-dimenzió lesz, a nagy sejtés pedig a következő.

3.14. Sejtés (Kakeya, 2. verzió)**.** Minden $B \subset \mathbb{R}^n$ Besicovitch-halmazra $\dim_H B = n$.

A sejtés igazságtartalmával a következő fejezetben foglalkozunk.

3.3. Egyeneses Besicovitch-halmazok és a dualitás elve

A Besicovitch-halmazok problémájához hasonló kérdést vet fel, hogy vajon mi a helyzet akkor, ha szakaszok helyett egyenesek tartalmazását követeljük meg minden irányban. Ez a feladat érezhetően rokonságban áll az eredetivel, de vajon mennyire egyeznek meg a szakaszos és az egyeneses Besicovitch-halmazok méretre vonatkozó tulajdonságai? Mint a későbbiekben bizonyítani fogjuk, ilyenből is konstruálható nullmértékű, ami erősíti azt az intuíciót, hogy az egyeneses Besicovich-halmazokra átfogalmazott Kakeya-sejtés ekvivalens a sztenderd formával. Ez az ekvivalencia általánosan nem igazolt, két dimenzióban azonban igen: Keleti Tamás bebizonyította ([5]), hogy ha $A \subseteq \mathbb{R}^2$ szakaszok egy halmaza, $B \subseteq \mathbb{R}^2$ pedig az A-beli szakaszok meghosszabbításával kapott egyenesek halmaza, akkor A és B Hausdorff-dimenziója megegyezik. Erre az eredményre hivatkozva tehát a szakaszos Besicovitch-halmazokra vonatkozó Davies-tétel, mely a Kakeya-sejtés kétdimenziós esetét állítja és igazolja, következik abból, hogy $\mathbb{R}^2$-ben minden egyeneses Besicovitch-halmaz Hausdorff-dimenziója 2. Mivel ez utóbbi eredmény az úgynevezett dualitási módszerrel elegánsan igazolható, valamint a fentebb említett nullmértékű egyeneses Besicovitch-halmaz konstrukciója szintén erre a módszerre támaszkodik, így Davies eredeti bizonyítása helyett inkább ezt mutatom be a továbbiakban. Ebben a részben kezdetben a [2] könyv 12. fejezetére fogok támaszkodni, ám egy ponton valamelyest el kell hogy térjek tőle, ugyanis az ottani Proposition 12.1 a) részének bizonyítása hibás, a további részek pedig ennek igazságára épülnek. Az eltérés a szerző egy másik, [3] könyvének 7.3 alfejezetét veszi alapul.

A dualitási módszer a sík pontjainak egy halmazához a sík egyeneseinek egy halmazát rendeli hozzá, és rendkívül hasznos tud lenni, amikor bizonyos tulajdonságú halmazokat szeretnénk gyártani. Nézzük hát meg, mi is pontosan ez a jól kitalált hozzárendelés.

3.15. Definíció ($L(a,b)$)**.** *Tetszőleges* $(a;b) \in \mathbb{R}^2$*-re jelölje* $L(a,b) \subset \mathbb{R}^2$ *az* $y = a + bx$ *egyenest.*

Így, hogy egy egy pontból álló halmazhoz már hozzárendeltünk egy egyenest, definiálhatjuk egy halmaz egyeneshalmazát úgy, mint a benne található pontokhoz rendelt egyenesek halmaza.

3.16. Definíció (Duális egyeneshalmaz)**.** *Tetszőleges* $F \subset \mathbb{R}^2$*-re legyen* $L(F) = \bigcup_{(a,b)\in F} L(a,b)$ F *egyeneshalmaza.*

Jelölje L_c az $x = c$ egyenest. Ekkor $L_c \cap L(a,b) = (c; a + b \cdot c) = (c; \langle (a;b);(1;c) \rangle)$, ahol $\langle \cdot;\cdot \rangle$ a szokásos skalárszorzatot jelöli. Hasonlóan, $L_c \cap L(F) = \{(c; \langle (a;b);(1;c) \rangle) : (a;b) \in F\}$. Két vektor skaláris szorzata természetesen egy szám, de geometriailag interpretálhatjuk úgy egy $(a;b)$ vektor $(1;c)$ vektorral vett skaláris szorzatát, mintha $(a;b)$-t rávetítettük volna az $(1;c)$ irányú egyenesre, és megnyújtottuk volna $|(1;c)| = \sqrt{(1+c^2)}$-szeresére. Valójában persze csak annyi történik, hogy ha ezt a folyamatot végrehajtjuk, akkor a kapott vektor hossza éppen a skaláris szorzat eredménye.

3.17. Definíció ($proj_\theta F$)**.** $F \subset \mathbb{R}^2$ *esetén* $proj_\theta F$ *az* F *halmaz vetülete a* θ *irányszögű egyenesre.*

Az előbbi interpretációból könnyen látható, hogy $L_c \cap L(F)$ geometriailag hasonló $proj_\theta F$-hez $c = tan\theta$ esetén, hiszen $L_c \cap L(F)$ azon, egy egyenesen levő pontok halmaza, mely elemeinek első koordinátája egységesen c, a második pedig, mely a $(c;0)$ ponttól való távolságot jelzi, $\langle (a;b);(1;c) \rangle$ alakú, ahol $(a;b) \in F$; $proj_\theta F$ pedig azon pontok halmaza, melyek egy fix, origón átmenő egyenesen vannak, és az origótól vett távolságuk $\langle (a;b);(1;c) \rangle$ $\forall (a;b) \in F$-re. Emiatt nyilvánvalóan $\dim_H (L(F) \cap L_c) = \dim_H (proj_\theta F)$ is teljesül, valamint az, hogy $\lambda(L(F) \cap L_c) = 0$ akkor és csak akkor, ha $\lambda(proj_\theta F) = 0$, ahol λ az egydimenziós Lebesgue-mértéket jelöli.

3.18. Megjegyzés. Az y-tengelyre történő vetítésnek is van interpretációja: $L(a,b)$ egyenes meredeksége éppen $b = proj_{\frac{\pi}{2}}(a;b)$, így tetszőleges $F \subset \mathbb{R}^2$ egyeneshalmazának meredekséghalmaza $proj_{\frac{\pi}{2}} F$.

Mielőtt jobban belemélyednénk az egyeneshalmazok vizsgálatába, nézzük meg, milyen hatással van a vetítés a Hausdorff-dimenzióra. A következő, későbbiekben is szükséges tétel rögtön meg is válaszolja ezt nekünk, azonban a bizonyításától, mely potenciálelméleti megfontolásokon alapul, most inkább eltekintünk.

3.19. Tétel (Vetítési tétel)**.** *Legyen $F \subset \mathbb{R}^2$ Borel-halmaz. Ekkor λ-m.m. $\theta \in [0,\pi)$-re*

$$\dim_H (proj_\theta F) = \min\{\dim_H F, 1\}.$$

Kanyarodjunk vissza az $L(F)$ egyeneshalmazokhoz. Ha F fraktál, akkor $L(F)$ is gyakran fraktál-szerkezetű, habár elég sűrű, a szó köznapi értelmében. Érdekesség, hogy ha F Borel-halmaz, az még nem jelenti azt, hogy $L(F)$ is az; csak abban az esetben biztos, ha F kompakt. Hogy a célunk felé is közelítsünk, nézzük meg, milyen összefüggést állapíthatunk meg F és $L(F)$ Hausdorff-dimenziója között. Ehhez előbb néhány új fogalomra és egy lemmára lesz szükségünk.

3.20. Definíció (G_δ-halmaz)**.** *Topologikus térben G_δ-halmaznak nevezzük az olyan halmazokat, melyek előállnak nyílt halmazok megszámlálható metszeteként.*

3.21. Megjegyzés. A definíció alapján nyilvánvaló, hogy minden $B \subset \mathbb{R}^n$ G_δ-halmaz egyben Borel-halmaz is.

3.22. Lemma. *Ha F nyílt halmaz, akkor $L(F)$ is nyílt. Ha F egy G_δ-halmaz, akkor $L(F)$ is.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy F nyílt halmaz. Legyen $e \subset L(F)$ egy tetszőleges, $L(F)$-beli egyenes. Legyen $x \in F$ az e-t meghatározó pont, és $\varepsilon > 0$ olyan, hogy $B(x,\varepsilon) \subset F$. Jelölje x koordinátáit $(a;b)$. Mivel az $(a-\varepsilon;b)$, $(a+\varepsilon;b)$ végpontokkal rendelkező nyílt szakasz minden pontja F-beli, így $L(F)$-nek eleme az összes olyan, e-vel párhuzamos egyenes, melynek metszete az y-tengellyel ε-nál közelebb van $e \cap y$-hoz. (Egy $L(F)$-beli egyenes nem lehet párhuzamos az y tengellyel.) Ebből következik, hogy e tetszőleges pontjának létezik olyan ε'-sugarú nyílt környezete, mely $L(F)$-nek részhalmaza. Tehát ha F nyílt, akkor $L(F)$ is.
Tegyük most fel, hogy F egy G_δ-halmaz. Legyen (U_i) nyílt halmazok egy olyan sorozata, melyeknek megszámlálható metszete éppen F. Beláttuk, hogy ekkor $\forall i \in \mathbb{N}^+$-ra $L(U_i)$ is nyílt. Mivel $L(F)$ egyenesei bijekcióban állnak F pontjaival, így $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} L(U_i) = L(F)$. Tehát $L(F)$ előáll nyílt halmazok megszámlálható metszeteként, így G_δ-halmaz. □

3.23. Állítás. *Legyen $F \subset \mathbb{R}^2$ Borel-halmaz, $L(F)$ pedig az egyeneshalmaza. Ekkor:*

1. *ha F egy G_δ-halmaz, akkor* $\dim_H L(F) \geq \min\{2, 1+\dim_H F\}$
2. *ha F egy 1-halmaz, akkor $\lambda^2(L(F)) = 0$ akkor és csak akkor, ha F irreguláris halmaz.*

Bizonyítás:

1. A vetítési tétel szerint $\dim_H(proj_\theta F) = \min\{1, \dim_H F\}$ majdnem minden θ-ra teljesül, így $\dim_H(L(F) \cap L_c) = \dim_H(proj_\theta F) = \min\{1, \dim_H F\}$ λ-m.m. $-\infty < c < \infty$-re. A következő, technikai jellegű állítás intuitíve nem váratlan, bizonyítása megtalálható a [2] könyv 97-98. oldalán.

   3.24. Állítás. *Legyen $F \subset \mathbb{R}^2$ Borel-halmaz. Ekkor λ-m.m. $c \in \mathbb{R}$-re* $\dim_H(F \cap L_c) \leq \max\{0, \dim_H F - 1\}$.

   Mivel F G_δ-halmaz, így $L(F)$ a 3.22 Lemma szerint Borel-halmaz, tehát alkalmazhatjuk rá az állítást: eszerint $\dim_H(L(F) \cap L_c)$ legfeljebb $\dim_H(L(F)) - 1$, ha az nagyobb mint 0. Az eddigieket összerakva tehát azt kapjuk, hogy $\dim_H(L(F) \cap L_c) < 1$ esetén $dim_H F = \dim_H(L(F) \cap L_c) \leq \dim_H(L(F)) - 1$, azaz $\dim_H(L(F)) \geq 1 + \dim_H F$, egyébként pedig $\dim_H(L(F)) = 2$.

2. Legyen F egy 1-halmaz. A következő állítás bizonyítása igen hosszú, az érdeklődők összerakhatják a [2] és [3] könyvek 6. fejezetei alapján.

   3.25. Állítás. *Legyen $F \subset \mathbb{R}^2$ 1-halmaz. Ekkor F pontosan akkor irreguláris, ha $\lambda(proj_\theta F) = 0$ majdnem minden $\theta \in [0,\pi)$-re.*

   Ebből azt kapjuk, hogy F pontosan akkor irreguláris, ha $\lambda(L(F) \cap L_c) = 0$ majdnem minden c-re, ami pedig a Fubini-tétel révén azzal ekvivalens, hogy $\lambda^2(L(F)) = 0$.

   □

Ezen állítással már minden eszköz a kezünkben van a célunk eléréséhez, azaz azon síkbeli nullmértékű halmazhoz, mely minden irányban tartalmaz egyenest.

3.26. Tétel. *Létezik $H \subset \mathbb{R}^2$ Lebesgue-nullmértékű halmaz, mely minden irányban tartalmaz egyenest.*

Bizonyítás: Legyen $F \subset \mathbb{R}^2$ az 1.40 Példabeli Cantor-mozaik. Erről már beláttuk, hogy irreguláris 1-halmaz. Az előbbi 3.23 Állítás második része szerint ekkor $\lambda^2(L(F)) = 0$. Továbbá megállapíthatjuk, hogy $[0,1] \subset proj_{\frac{\pi}{2}} F$, így $L(F)$ definíciója szerint $L(F)$ tartalmaz 0 és $\frac{\pi}{4}$ között minden irányszöghöz tartozó egyenest. Ha vesszük még ezen halmaz $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{4}$ és $\frac{3\pi}{4}$ szöggel vett elforgatottját is, és ezeket összeuniózzuk, akkor a kapott H halmaz egyrészt minden irányban tartalmazni fog egy egyenest, másrészt továbbra is Lebesgue-nullmértékű, azaz nulla területű lesz. □

Most, hogy ezt a célt is teljesítettük, elgondolkodhatunk, hogy vajon a vizsgált halmaztípus Hausdorff-dimenziója csökkenthető-e. A 3.14 Sejtés alapján azt várjuk, hogy ez már nem választható kicsinek a megkövetelt tulajdonságok mellett, de ez a sejtés egyelőre nem igazolt általánosan. Azonban, mint már említettük, az a szerencse ért bennünket, hogy a kétdimenziós esetet már bebizonyították, így ebben az irányban folytatjuk a vizsgálódásainkat.
Először belátunk egy nagyon hasznos lemmát, mely a problémát a Borel-halmazokra, sőt, valójában azok egy részhalmazára, a G_δ-halmazokra szűkíti.

3.27. Lemma. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges halmaz. Ekkor létezik olyan $G \subset \mathbb{R}^n$ G_δ-halmaz, melyre $H \subset G$ és $\mathscr{H}^s(H) = \mathscr{H}^s(G)$.*

Bizonyítás: Legyen rögzített, tetszőleges $\rho > 0$-ra $(U_{i,j})_{j=1,\ldots}$ ρ-fedések egy olyan sorozata, melyre $\lim\limits_{j\to\infty}\sum\limits_i |U_{i,j}|^s = \mathscr{H}^s_\rho(H)$. Ebből konstruáljunk úgy egy $(U'_{i,j})_{j=1,\ldots}$ $(\rho + \frac{2}{j})$-fedést $\forall j$-re, hogy $\bigcup\limits_i U'_{i,j}$ nyílt halmaz legyen. Ezt megtehetjük úgy, hogy $\bigcup\limits_i U_{i,j}$-hez hozzáveszünk minden olyan pontot, mely távolsága a halmaztól $< \frac{1}{j}$. Legyen $V_{(\rho)} = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty}\bigcup\limits_i U'_{i,j}$. Ekkor egyrészt $\mathscr{H}^s_\rho(H) = \mathscr{H}^s_\rho(V_{(\rho)})$, mindkét irányú egyenlőtlenség nyilvánvaló. Másrészt pedig $V_{(\rho)}$-k G_δ-halmazok, hiszen nyílt halmazok metszeteiként definiáltuk őket. Most ρ-val tartsunk nullához az $\frac{1}{k}$ sorozat mentén. Legyen eszerint $G = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} V_{(\frac{1}{k})}$. Világos, hogy $H \subset G$. Ekkor $\mathscr{H}^s(H) = \lim\limits_{k\to\infty}\mathscr{H}^s_{\frac{1}{k}}(H) = \lim\limits_{k\to\infty}\mathscr{H}^s_{\frac{1}{k}}(G_{(\frac{1}{k})}) \geq \lim\limits_{k\to\infty}\mathscr{H}^s_{\frac{1}{k}}(G) = \mathscr{H}^s(G)$, azaz $\mathscr{H}^s(H) \geq \mathscr{H}^s(G)$. A fordított egyenlőtlenség következik abból, hogy $H \subset G$, így $\mathscr{H}^s(H) = \mathscr{H}^s(G)$. Továbbá G egy G_δ-halmaz, hiszen G_δ-halmazok megszámlálható metszete könnyen láthatóan szintén G_δ-halmaz, ezzel a lemmát beláttuk.

□

3.28. Következmény. *A Hausdorff-dimenzió monotonitása miatt a 3.14 Kakeya-sejtés ekvivalens a Borel-halmazokra való megszorításával.*

Ezen fontos következmény mellett Davies tételének bizonyításához felhasználjuk még Keleti Tamás korábban már említett tételét, melyet az [5] cikkben igazol.

3.29. Tétel (Keleti)**.** *Legyen $A \subseteq \mathbb{R}^2$ szakaszok egy halmaza, $B \subseteq \mathbb{R}^2$ pedig az A-beli szakaszok meghosszabbításával kapott egyenesek halmaza. Ekkor A és B Hausdorff-dimenziója megegyezik.*

Ezennel pedig elérkeztünk ahhoz a ponthoz, hogy a Kakeya-sejtés kétdimenziós esetét be tudjuk bizonyítani.

3.30. Tétel (Davies)**.** *Minden síkbeli Besicovitch-halmaz Hausdorff-dimenziója* 2.

Bizonyítás: Legyen H egy síkbeli Besicovitch-halmaz. A 3.29 Tétel szerint feltehető, hogy H minden irányban tartalmaz egy egyenest, a 3.28 Következmény szerint pedig az, hogy H egy G_δ-halmaz. Legyen

$$F = \{(a;b) : L(a,b) \subset H\}.$$

Ekkor $proj_{\frac{\pi}{2}} F$ az egész y-tengely, hiszen $\forall b \in \mathbb{R}$-re B tartalmaz b meredekségű egyenest, így létezik $a \in \mathbb{R}$, melyre $(a;b) \in F$.

F-ről belátjuk, hogy G_δ-halmaz: $F = \bigcap_{r=1}^{\infty} \{(a;b) : (L(a,b) \cap B(0,r)) \subset (H \cap B(0,r))\}$, ahol $H \cap B(0,r)$ $\forall r$-re G_δ-halmaz. Legyen r rögzített, $(G_{r,i})$ pedig az a nyílt halmazokból álló halmazsorozat, melyeknek a metszeteként előáll $H \cap B(0,r)$. Ha egy $(a;b) \in \mathbb{R}^2$-re $(L(a,b) \cap B(0,r)) \subset G_{r,i}$ $\forall i$-re, akkor külön-külön minden i-re $(L(a,b) \cap B(0,r))$ egy kis környezete is, így $\forall G_{r,i}$-hez $F_{r,i} = \{(a;b) : L(a,b) \cap B(0,r) \subset G_{r,i}\}$ is nyílt, így $F_r = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_{r,i}$ G_δ-halmaz. Mivel pedig G_δ-halmazok megszámlálható metszete is G_δ-halmaz, így F is az.

A 3.19 Vetítési tétel szerint a vetítés nem növelheti a dimenziót, így egyrészt $\dim_H F \geq 1$, mivel $\dim(proj_{\frac{\pi}{2}} F) = 1$, másrészt emiatt a 3.23 Állítás első része szerint $\dim_H L(F) = 2$. Ehhez felhasználtuk, hogy F G_δ tulajdonsága és a 3.22 Lemma szerint $L(F)$ G_δ-halmaz, ugyanis a 3.23 Állítás első része emiatt alkalmazható. Végül pedig, mivelhogy $L(F) \subset H$, ezért $\dim_H H = 2$. $\square$

3.31. Megjegyzés. Természetesen azt is megkaptuk, hogy minden síkbeli egyeneses Besicovitch-halmaz Hausdorff-dimenziója 2.

A 3.14 Kakeya-sejtés 2-nél több dimenzióra máig megoldatlan, azonban születtek olyan eredmények, melyek talán értékesek a megoldáshoz vezető úton. Például a következő tétel heurisztikusan azt támasztja alá, hogy a sejtés igaz.

3.32. Tétel. *Legyen $B \subset \mathbb{R}^n$ Besicovitch-halmaz, $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan $B' \subset \mathbb{R}^n$ Besicovitch-halmaz, melyre $\dim_H B = \dim_H B'$, és B' minden irányban tartalmaz egy olyan egységszakaszt, melynek középpontja az origó körüli ε-sugarú gömbben van.*

Ha valaki be tudná bizonyítani, hogy nem csak tetszőlegesen közel lehet vinni a szakaszokat az origóhoz, hanem elérhető, hogy mindegyiknek a középpontja pontosan az origó legyen, azzal a sejtés bizonyítva lenne. Emellett számos alsó becslés létezik a Besicovitch-halmazok mindenféle fraktáldimenziójára és ezek viszonyára, ám a kérdést továbbra is nyitva hagyják, így van remény az n-nél kevesebb Hausdorff-dimenziós $\mathbb{R}^n$-beli Besicovitch-halmaz létezésére.

További nyitott kérdésekhez vezet, ha az eddig vizsgált egyeneses Besicovitch-halmaz fogalmát még tovább általánosítjuk. Nézzünk ehhez néhány, az általánosság szépségére szolgáló definíciót.

Legyen $G(n,k) = \{L \subseteq \mathbb{R}^n : L \text{ lineáris altér}, \dim L = k\}$, azaz jelöljük $G(n,k)$-val az $\mathbb{R}^n$-beli k-dimenziós lineáris alterek osztályát.

3.33. Definíció ((n,k)-Besicovitch-halmaz)**.** *Egy $H \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazt (n,k)-Besicovitch-halmaznak vagy $B(n,k)$-halmaznak nevezünk, ha $\forall L \in G(n,k)$-ra $\exists x \in \mathbb{R}^n$, hogy $L + x \in H$.*

Ez nem jelent mást, mint hogy a halmaz az n-dimenziós tér minden k-dimenziós alterének tartalmazza egy eltoltját. Mivelhogy az egyenes egy egydimenziós lineáris altér, így a $B(n,1)$-halmaz definíciója éppen az $\mathbb{R}^n$-beli egyeneses Besicovitch-halmaz definíciójával ekvivalens.

A 3.26 Tétel alapján tudjuk, hogy létezik λ^2-nullmértékű $(2,1)$-Besicovitch-halmaz. Ebből a 3.12 Megjegyzés szerint az is következik, hogy λ^n-nullmértékű $(n,1)$-Besicovitch-halmaz is létezik $n > 2$-re. De vajon mi a helyzet, ha az egyenesnél nagyobb lineáris altér tartalmazását szeretnénk megkövetelni? Erre teljes választ egyelőre nem ismerünk, részeredményeket és sejtéseket azonban igen.

3.34. Sejtés. $k \geq 2$-re nem létezik λ^n-nullmértékű (n,k)-Besicovitch-halmaz.

A sejtés megoldása felé egy részeredmény Jean Bourgain belga matematikus alábbi tétele.

3.35. Tétel (Bourgain)**.** *Ha egy (n,k) párra $2^{k-1} + k \geq n$ és $k \geq 2$ teljesül, akkor nem létezik λ^n-nullmértékű (n,k)-Besicovitch-halmaz.*

Ez a tétel behatárolja, hogy egy λ^n-nullmértékű (n,k)-Besicovitch-halmaz esetében k legfeljebb mekkora lehet n-hez képest. Ezen a feltételen Richard Oberlin javított a doktori disszertációjában ([7]).

3.36. Tétel (Oberlin)**.** *Ha egy (n,k) párra $(1+\sqrt{2})^{k-1} + k > n$ és $k \geq 2$ teljesül, akkor nem létezik λ^n-nullmértékű (n,k)-Besicovitch-halmaz.*

3.4. Besicovitch-halmazok Baire-kategória szempontjából

A Besicovitch-halmazokat megvizsgálhatjuk Baire-kategóriák szempontjából is, és ezt meg is tesszük, ugyanis szép eredményre fogunk jutni. Ebben a fejezetben a témavezetőm jegyzetét fogom követni, melyet Elekes Márton geometriai mértékelmélet óráján készített.

A következő definíció látszólag egy nagyon speciális halmazcsaládot tüntet ki, ám jobban belegondolva látni fogjuk, hogy a téma szempontjából nem végeztünk olyan erős megszorítást a kompakt Besicovitch-halmazokon.

3.37. Definíció. *Legyen* $\mathscr{K}'(\mathbb{R}\times[0,1]) = \{K \in \mathscr{K}(\mathbb{R}\times[0,1]) : \forall\alpha \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$*-ra K-ban van olyan* α *irányszögű szakasz, ami* 0*-tól* 1*-ig felmegy*$\}$ *metrikus tér a Hausdorff-metrikával.*

Amennyiben létezik olyan $K \in \mathscr{K}'(\mathbb{R}\times[0,1])$, melyre $\lambda^2(K) = 0$ teljesül, akkor két ilyen megfelelően forgatva együtt egy kompakt, λ^2-nullmértékű Besicovitch-halmazt ad. Továbbá, ha adott egy síkbeli *kompakt* Besicovitch-halmaz, akkor az megfelelően kicsinyítve és az $\mathbb{R}\times[0,1]$ sávba eltolva továbbra is egy kompakt Besicovitch-halmaz lesz, mely pontosan akkor nullmértékű, ha a kiinduló halmaz is az volt. Ha az így kapott halmaz megfelelő irányú tartalmazott szakaszait meghosszabbítjuk, úgy, hogy a halmaz $\mathscr{K}'(\mathbb{R}\times[0,1])$-beli legyen, akkor ezzel nem csökkentettünk a Lebesgue-mértékén, viszont egy olyan család elemévé tettük a halmazunkat, ahol a jellemző viselkedés a következő tétel szerint a Lebesgue-nullmértékűség.

A tétel kimondása előtt érdemes visszagondolni a 2.18 Állításra, mely szerint a tipikus $\mathbb{R}^n$-beli kompakt halmaz Lebesgue-nullmértékű.

3.38. Tétel. *A tipikus* $K' \in \mathscr{K}'(\mathbb{R}\times[0,1])$*-re* $\lambda^2(K') = 0$.

A tétel bizonyítása Tom Körnertől származik.

Bizonyítás: Ahhoz, hogy tipikus tulajdonságról beszélhessünk, előbb be kell látnunk, hogy az általunk definiált tér teljes metrikus tér. Mivel $\mathscr{K}'(\mathbb{R}\times[0,1])$ halmaz részhalmaza a 2.15 Definícióbeli $\mathscr{K}(\mathbb{R}\times[0,1])$ teljes metrikus térnek, így már csak a teljességet kell belátnunk.

3.39. Lemma. $\mathscr{K}'(\mathbb{R}\times[0,1])$ *teljes.*

Bizonyítás (lemma): Mivel $\mathscr{K}(\mathbb{R}\times[0,1])$ teljes, így elég azt belátni, hogy $\mathscr{K}'(\mathbb{R}\times[0,1])$ ebben zárt. Legyen (K_n) egy $\mathscr{K}'(\mathbb{R}\times[0,1])$-beli konvergens sorozat. Ekkor a határértéke mindenképp $\mathscr{K}(\mathbb{R}\times[0,1])$-beli, jelölje ezt K. Erről kell belátnunk, hogy tartalmazza a megfelelő szakaszokat. Legyen $\alpha \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ tetszőleges. Jelöljön L_n $\forall n$-re egy K_n-beli α-szögű szakaszt. A K_n halmazok konvergenciája miatt az L_n szakaszok alsó végpontjaiból választható konvergens részsorozat, hiszen maga a sorozat korlátos, a rögzített szög miatt pedig ezek egy $L \subset K$ teljes hosszú, α-szögű szakaszhoz konvergálnak. Emiatt $K \in \mathscr{K}'(\mathbb{R} \times [0,1])$. □

Így, hogy beláttuk $(\mathscr{K}'(\mathbb{R} \times [0,1]),\ d_H)$ teljességét, már beszélhetünk benne tipikus tulajdonságokról.

3.40. Lemma. *Legyen* $0 \leq a < b \leq 1$ *tetszőleges. Ekkor a tipikus* $K \in \mathscr{K}'(\mathbb{R} \times [0,1])$*-re*

$$\lambda^2(K \cap (\mathbb{R} \times [a,b])) \leq 2 \cdot (b-a)^2.$$

Bizonyítás (lemma): Ha be tudjuk látni, hogy a kivételes halmaz sehol sem sűrű $\mathscr{K}'(\mathbb{R} \times [0,1])$-ben, készen vagyunk. Ehhez azt szeretnénk, hogy $\forall K \in \mathscr{K}'(\mathbb{R} \times [0,1])$-ra és $\forall \varepsilon > 0$-ra teljesüljön, hogy $\exists \varepsilon', K'$, melyre $B(K', \varepsilon') \subset B(K, \varepsilon)$, és minden $B(K', \varepsilon')$-beli halmazra igaz a lemmabeli egyenlőtlenség.

A konstrukció előkészítéséhez vegyünk egy α irányszögű, teljes hosszú szakaszt K-ból. Gondoljuk meg, hogy ha elég kicsi β szöggel forgatjuk el az a magasságú pontja körül, akkor a kapott szakaszt teljes hosszúságúvá kiegészített szakasz K $\frac{\varepsilon}{2}$-sugarú környezetében marad. Sőt, nem csak a kapott szakasz, de a forgatás során megjelenő tetszőleges szakasz teljes hosszúságúvá tett verziója, így az ilyenek uniója is ebben a környezetben marad. Nevezzük ezt az uniót homokóra-alakzatnak. Vegyük észre, hogy elég véges sok teljes hosszú szakaszt vennünk K-ból ahhoz, hogy a fent leírt módon belőlük keletkezett homokóra-alakzatok K^* uniójában a $\frac{\pi}{4}$ és $-\frac{\pi}{4}$ irányszögek közti minden szöghöz K^* tartalmazzon teljes hosszú szakaszt. A forgatási szögeket természetesen választhatjuk úgy, hogy K^*-ban egy irányszöghöz csak egy szakasz tartozzon. K^* benne van K $\frac{\varepsilon}{2}$-sugarú nyílt környezetében. Ha K^*-hoz alkalmasan hozzáveszünk véges sok pontot, akkor elérhetjük, hogy a kapott K' alakzat $\frac{\varepsilon}{2}$-sugarú nyílt környezetébe kerüljön K, továbbra is K $\frac{\varepsilon}{2}$-sugarú nyílt környezetében maradva. Így $K' \in B(K, \varepsilon)$ teljesül. Vizsgáljuk meg $K^* \cap (\mathbb{R} \times [a,b])$ Lebesgue-mértékét. Ha a K^*-ot alkotó véges sok homokóra-alakzatot összetolnánk úgy, hogy az a magasságú pontjaik egybeessenek, akkor a kapott alakzat $\mathbb{R} \times [a,b]$-be eső része egy egyenlőszárú, derékszögű, $(b-a)$ magasságú háromszög lenne, melynek területe $(b-a)^2$, így K^* területe is legfeljebb ennyi. Tehát – mivel K^* és K' Lebesgue-mértéke megegyezik – K' megfelelő lesz számunkra.

Szükségünk van még egy megfelelő ε'-re. Ilyen létezik, hiszen a mértékfolytonosság miatt a $(b-a)^2$ területű K' halmazhoz közeli halmazok Lebesgue-mértéke közel lesz $(b-a)^2$-hez, azaz létezik olyan kicsi ε', melynél közelebb levő halmazok területe legfeljebb $2\cdot(b-a)^2$. Fontos, hogy $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}$-t válasszunk. Így $B(K',\varepsilon') \subset B(K,\varepsilon)$ teljesül.
Ezzel beláttuk, hogy a kivételes halmaz sehol sem sűrű, tehát első kategóriájú, így a tipikus $K \in \mathscr{K}'(\mathbb{R}\times[0,1])$-re teljesül a lemmabeli egyenlőtlenség. $\square$

Ezen lemmával már készen vagyunk: bontsuk fel a $[0,1]$ intervallumot egyenletesen n részre. Minden részre igaz, hogy a tipikus $K \in \mathscr{K}'(\mathbb{R}\times[0,1])$ általa meghatározott sávba eső részének Lebesgue-mértéke $\leq \frac{2}{n^2}$. A kivételes halmaz minden sávra első kategóriájú, ilyenek véges uniója pedig szintén első kategóriájú, így a tipikus $K \in \mathscr{K}'(\mathbb{R}\times[0,1])$-re $\lambda^2(K) \leq n\cdot\frac{2}{n^2} = \frac{2}{n}$. A kivételes halmaz $\forall n$-re is első kategóriájú, és ilyenek megszámlálható uniója is első kategóriájú, így a tipikus $K \in \mathscr{K}'(\mathbb{R}\times[0,1])$-re minden $n \in \mathbb{N}$-re igaz az egyenlőtlenség, azaz $\lambda^2(K) = 0$. $\square$

Ezzel a bizonyítással egyrészt egy nem konstruktív módon is megkaptuk, hogy létezik kompakt, nullmértékű, síkbeli Besicovitch-halmaz. Másrészt ennél jóval többet is megtudtuk: nevezetesen azt a tényt, hogy nemcsak hogy létezik ilyen halmaz, de alkalmas alaptérben egyenesen tipikus a nullmértékű Besicovitch jellegű viselkedés.

3.5. Kakeya-sejtés véges testekben

Ebben a fejezetben, már inkább csak mese jelleggel, az érdekesség kedvéért, megismerjük, hogy hogyan fogalmazható meg a Besicovitch-halmazok problémája olyan struktúrákban, melyeknek az alaphalmaza véges. A továbbiakban ismét a [10] forrást, valamint az [1] cikket fogjuk követni.
A test egy olyan, jól ismert algebrai struktúra, melyben az összeadás és a szorzás mint két különböző művelet értelmezve van, és ezekre néhány nagyon fontos alaptulajdonság is teljesül.

3.41. Definíció (Test). $(\mathbb{F},\oplus,\odot)$ *test, ha* $\oplus$ *és* $\odot$ *olyan, különböző kétváltozós műveletek, melyek kommutatívak és asszociatívak* $\mathbb{F}$ *elemein, valamint:*

1. $\exists 0 \in \mathbb{F}$, *melyre* $\forall a \in \mathbb{F}$-*re* $a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$
2. $\forall a \in \mathbb{F}$-*re* $\exists b \in \mathbb{F}$, *hogy* $a \oplus b = 0$

3. $\exists 1 \in \mathbb{F}$, *melyre* $\forall a \in \mathbb{F}$*-re* $a \odot 1 = 1 \odot a = a$

4. $\forall a \in \mathbb{F}$, $a \neq 0$*-ra* $\exists b \in \mathbb{F}$, *hogy* $a \odot b = 1$

5. $\forall a, b, c \in \mathbb{F}$*-re* $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$

Mindenki által ismert test például a valós számok halmaza a szokásos összeadásra és szorzásra, azonban ennél jóval kisebb elemszámú struktúrák is testet alkotnak. A legegyszerűbb, szintén közismert példák erre a prímszámok maradékosztályai, ellátva a $mod p$ összeadással és szorzással, melyekben egyszerű számelméleti megfontolások miatt minden elemnek létezik inverze a szorzásra, így testet alkotnak. Ismert tény továbbá, hogy egy véges test elemszáma csak prímhatvány lehet, valamint, hogy minden prímhatványra létezik (izomorfia erejéig pontosan egy) véges test. Jelölje a q elemű véges testet $\mathbb{F}_q$. Jelölje továbbá $\mathbb{F}_q^n$ az $\mathbb{F}_q$-beli n-dimenziós vektorok halmazát, azaz legyen $\mathbb{F}_q^n = \mathbb{F}_q \times ... \times \mathbb{F}_q$ n-tényezős Descartes-szorzat. Fontos megjegyezni, hogy ez a koordinátánkénti összeadásra és szorzásra nem alkot testet. Efölött már tudunk definiálni egy geometriát – ez teljesen analóg azzal, hogy $\mathbb{R}$ test, és $\mathbb{R}^n$ felett tudunk geometriát csinálni. Például az egyenes definíciója a következő:

3.42. Definíció (Egyenes $\mathbb{F}_q^n$-ben)**.** *$\mathbb{F}_q^n$-ben az $m \in \mathbb{F}_q^n$ irányban $b \in \mathbb{F}_q^n$-en átmenő egyenes*

$$\mathfrak{l}_{m,b} = \{b + t \cdot m : t \in \mathbb{F}_q\} \subseteq \mathbb{F}_q^n,$$

ahol $t \cdot m$ az m vektor t skalárral vett koordinátánkénti szorzatát jelenti.

Ez a definíció az $\mathbb{R}^n$-beli egyenesek leírásával analóg, az értelmét viszont az adja, hogy a megszokott tulajdonságokkal rendelkezik: bármely két $\mathbb{F}_q^n$-beli pont egyértelműen meghatároz egy egyenest, és bármely két egyenes metszete legfeljebb egy pont. Ezek könnyen beláthatóak a test-axiómák felhasználásával.

Így, hogy már beszélhetünk iránnyal rendelkező egyenesekről, már semmi nem állíthat meg minket abban, hogy az egyeneses Besicovitch-halmaz fogalmát kiterjesszük az $\mathbb{F}_q^n$ véges testek feletti terekre is.

3.43. Definíció (Besicovitch-halmaz $\mathbb{F}_q^n$-ban)**.** *$B \subseteq \mathbb{F}_q^n$ halmazt $\mathbb{F}_q^n$-beli Besicovitch-halmaznak nevezzük, ha minden irányban tartalmaz egyenest, azaz $\forall m \in \mathbb{F}_q^n$-re $\exists b \in \mathbb{F}_q^n$ úgy, hogy $\mathfrak{l}_{m,b} \subseteq B$.*

Mivel diszkrét térben nem tudunk folytonosságról beszélni, így folytonos forgatásról sem, tehát Kakeya-halmazt semmiképp sem fogunk tudni definiálni. Viszont a Besicovitch-halmazok létezése nem csak az azok megismerésével kapcsolatos új célokat tűzi ki elénk, de reményt ad arra, hogy a 3.14 Kakeya-sejtés megoldásához is közelebb kerüljünk ezáltal, például a következő heurisztika gondolatával. Megtehetjük, hogy valamilyen p prímszámra a $[0,1]$ intervallumot felosztjuk p egyenlő részre, ebből adódóan pedig a $[0,1]^n$ téglát p^n részre, minden kistégla közepébe teszünk egy pontot, és ezt a p^n darab pontot megfeleltetjük a p^n elemű $\mathbb{F}_p^n$-nek. Jelölje az így kapott $\mathbb{R}^n$-beli halmazt S_p. Mivel az egyeneseket az $\mathbb{R}^n$-beli egyenesekkel analóg módon definiáltuk, esetleg reménykedhetünk benne, hogy minél nagyobb p prímet választunk, annál jobban fog hasonlítani egy $\mathbb{F}_p^n$-beli Besicovitch-halmaz egy $\mathbb{R}^n$-belire. Ez a remény arra is épít, hogy ha $\mathbb{F}_p$-re úgy gondolunk, mint a $\{0,1,...,p-1\}$ számok által alkotott testre a modulo p összeadással és szorzással, és az előbb említett sorrendben ”helyezzük el” az elemeket a $[0,1]^n$ kocka mind az n darab koordinátatengelye mentén, akkor az $\mathbb{F}_p^n$-beli egyenesek által definiált S_p-beli ponthalmazok $[0,1]^n$-beli egyeneseket rajzolnak ki – persze oly módon, hogy ha egy egyenes ”kimegy” a kocka egy falán, akkor ”visszajön” a vele ”szemköztin”.
Az általunk definiált $[0,1]^n$-beli p^n elemű S_p ponthalmaz boxdimenziójával kapcsolatban tudunk állítani valamit: az 1.20 Állítás 3. pontja szerint $\dim_B S_p = \lim_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(S_p)}{-\log\delta}$, ahol $N'_{\frac{1}{p}}(S_p)$ jelen esetben p^n. Ebből fakad az a remény, hogy hátha igaz lesz tetszőleges $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Besicovitch-halmazra, hogy

$$\dim_B B = \lim_{p\to\infty} \frac{\log N'_{\frac{1}{p}}(B_p)}{\log p} \geq \lim_{p\to\infty} \frac{\log c_n \cdot p^n}{\log p} = \lim_{p\to\infty} \left(\frac{\log c_n}{\log p} + \frac{\log p^n}{\log p} \right) = n,$$

ahol $B_p \subseteq \mathbb{F}_p^n$ $\mathbb{F}_p^n$-beli Besicovitch-halmaz. Ezen remény igazsága részben a következő sejtésen múlik.

3.44. Sejtés (Kakeya-sejtés véges testekben)**.** Minden $n \in \mathbb{N}$-re létezik c_n konstans, hogy tetszőleges $q \in \mathbb{N}$-re és $B_q \subseteq \mathbb{F}_q^n$ Besicovitch-halmazra $|B_q| \geq c_n \cdot q^n$.

Ezt a sejtést 1999-ben Thomas Wolff fogalmazta meg. Fontos hangsúlyozni, hogy ennek igazsága nem jelenti közvetlenül az eredeti Kakeya-sejtés igazságát, csupán egy heurisztikát láttunk az előbb, melynek az egyik építőköve lehetne. Azonban a sejtés önmagában is egy szép állítás,

mely hasonlóan az eredeti Kakeya-sejtéssel, rögzített n-re bizonyos értelemben egységes méretbeli minimumot határoz meg a Besicovitch-halmazokra.
A sejtés legszebb része viszont mégiscsak az, hogy 2008-ban egy Zeev Dvir nevű matematikus bebizonyította.

3.45. Tétel (Dvir)**.** *Minden $n,q \in \mathbb{N}$-re és minden $B \subseteq \mathbb{F}_q^n$ Besicovitch-halmazra*

$$|B| \geq \binom{q+n-1}{n} \geq \frac{1}{n!} \cdot q^n.$$

Így a 3.44 Sejtés $c_n = \frac{1}{n!}$ választással igaz.

A tétel bizonyítását és annak elméleti előkészítését az érdeklődők elolvashatják az [1] cikkben. Meglepő tény, hogy bár az eredeti Kakeya-sejtés máig megoldatlan, a véges testekre vonatkozó Kakeya-sejtés nemcsakhogy bizonyított, de a bizonyítás elemi, és mindössze néhány oldal. Dvir ezen eredményét egyébként később három társával együtt felülmúlta, belátták ugyanis, hogy
$c_n \approx \frac{1}{2^n}$-nek is választható.

Hivatkozások

[1] Z. Dvir, J. Amer (2009), *On the size of Kakeya sets in finite fields*, Math. Soc., 22:1093-1097.
https://arxiv.org/pdf/0803.2336.pdf

[2] K. Falconer (1990), *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley & Sons, 25-87, 161-164.

[3] K. Falconer (1985), *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press, 102-104.

[4] J. M. Fraser, E. J. Olson, J. C. Robinson (2017), *Some results in support of the Kakeya Conjecture*, Real Analysis Exchange. 42. 253-268.
https://arxiv.org/pdf/1407.6689.pdf

[5] T. Keleti (2014), *Are lines much bigger than segments?*, Proc. Amer. Math. Soc. 144, 1535-1541.
https://arxiv.org/pdf/1409.5992.pdf

[6] M. Laczkovich (1998), *A Kakeya-probléma*, Természet Világa, III. különszám, 74-76.

[7] R. Oberlin (2007), *The* (d,k) *Kakeya problem and estimates for the X-ray transform*, Dissertation, University of Wisconsin–Madison.
https://www.math.fsu.edu/ roberlin/papers/roberlinthesis.pdf

[8] J. Thim (2003), *Continous Nowhere Differentiable Functions*, Master's Thesis, Luleå University of Technology.

[9] B. S. Thomson, J. B. Bruckner, A. M. Bruckner (2008), *Real Analysis*, ClassicalRealAnalysis.com, xiv 656 pp, 5-6, 680-686.

[10] Y. Widgerson (2017), *The Kakeya Conjecture*, Mathcamp 2017, Lecture Notes.
http://web.stanford.edu/ yuvalwig/math/teaching/KakeyaNotes.pdf