Polinom idejű approximációs sémák párosítás feladatokra

Szakdolgozat

Tóth Sára Hanna
Matematika BSc
Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:
Madarasi Péter
ELTE Matematikai Intézet,
Operációkutatási Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2021

Köszönetnyilvánítás

Elsősorban szeretném megköszönni a témavezetőmnek, Madarasi Péternek, hogy az első pillanattól kezdve nagyon támogató és segítőkész volt, megismertette velem ezt a témát, a kapcsolódó nyitott kérdéseket, és biztatott, hogy próbáljak saját eredménnyel is előállni. Köszönöm a jó hangulatú konzultációkat, a hasznos tanácsokat és a lelkiismeretes munkát, amellyel hozzájárult a szakdolgozatom elkészüléséhez.

Köszönöm továbbá a családomnak, hogy az életem minden területén maximálisan támogatnak, külön köszönet apukámnak, amiért bármilyen kérdéssel fordulhatok hozzá, és mindig számíthatok a segítségére.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Sok érdekes és gyakorlati jelentőséggel is bíró problémáról ismert, hogy nagyon nehéz. Ez alatt most azt értjük, hogy ezen feladatok egzakt megoldása polinomiális algoritmussal a közeljövőben nem várható, sőt, elképzelhető, hogy egyáltalán nem is lehetséges. A feladatok nehézség szerinti osztályozásával a bonyolultságelmélet foglalkozik. Eldöntési problémáknak nevezzük azokat a feladatokat, melyek egy olyan kérdést tesznek fel, melyre a válasz „igen” vagy „nem”. A bonyolultságelmélet alapfogalmait ezekre a problématípusokra fogalmazhatjuk meg. P-ben vannak azok a feladatok, amelyek eldöntésére létezik az input méretében polinomiális algoritmus. NP-belinek nevezzük azokat az eldöntési problémákat, melyekben az „igen” válaszhoz tartozik egy polinom időben ellenőrizhető bizonyíték és NP-nehéznek azokat, melyekre az összes NP-beli feladat polinom időben visszavezethető. Az NP-nehéz feladatok közül azok, amelyek NP-beliek is az úgynevezett NP-teljes problémák. Ha az NP-nehéz feladatok közül bármelyiket meg tudnánk oldani polinom időben, akkor azzal megoldanánk az összes NP-beli feladatot polinom időben (azaz P=NP), ami nagyon jelentős és nem várt eredményekhez vezetne. [1, 79-84. oldal].

A gyakorlatban előforduló feladatok gyakran nem igennel vagy nemmel megválaszolható eldöntendő kérdések, hanem lehet például a válasz egy valós szám. Ennek speciális esete, amikor a kérdés valaminek a maximuma vagy minimuma bizonyos feltételek mellett, például egy adott munka elvégzéséhez szükséges költség minimalizálása, vagy éppen a nyereségünk maximalizálása. Az ilyen típusú feladatokat optimalizálási problémáknak nevezzük és az eldöntési problémákhoz hasonlóan ezek között is vannak, melyek egzakt megoldása polinom időben reménytelen vállalkozásnak tűnik. (Ez már abból is látszik, hogy sok NP-teljes eldöntési probléma megfogalmazható optimalizálási problémaként is.) Sokszor azonban már az is hasznos lehet, ha az optimális megoldás egy bizonyíthatóan jó közelítését meg tudjuk találni, lehetőség szerint minél gyorsabban. Ezt a célt szolgálják az úgynevezett approximációs (közelítő) algoritmusok, illetve a még erősebbnek mondható polinom idejű approximációs sémák.

A 2. fejezetben összefoglaljuk a közelíthetőség témaköréhez kapcsolódó alapfogalmakat. Definiáljuk az optimalizálási problémákat és a közelítő algoritmusokat, majd vázolunk is néhány módszert ilyen algoritmusok kidolgozására. Bemutatjuk, hogy az optimalizálási problémák igen sokszínűek lehetnek abból a szempontból, hogy mennyire nehéz rájuk közelítő megoldást adni. Ezen különbségek kifejezésére szolgálnak bizonyos bonyolultsági osztályok, melyeket szintén tárgyalunk ebben a fejezetben.

A 3. fejezetben néhány konkrét párosítás feladatot ismertetünk és ezeken keresztül mutatunk példákat a korábban definiált fogalmakra és módszerekre. A maximális feszített párosítás feladatnak egy speciális gráfosztályra való megszorítására ismertetünk egy polinom idejű approximációs sémát, illetve reguláris gráfokon mutatunk a problémára egy közelítő algoritmust is. Ezt követően a maximális 3-dimenziós párosítás feladat approximációs nehézségét tárgyaljuk, melyet a 3.3. részben szereplő új eredményben fogunk felhasználni. Egy polinomiális algoritmust is adunk a teljes 3-dimenziós párosítás feladat megoldására a hipergráfok egy speciális osztályán.

A 3. fejezet fennmaradó része egy új párosítás feladatról, az úgynevezett maximális k-szoros párosításról szól. A feladatról már ismert volt az eldöntési változatának NP-nehézsége, illetve az, hogy a súlyozott változatot már $k = 2$-re sem tudjuk tetszőlegesen közelíteni (feltéve, hogy P≠NP). Ezen dolgozat új eredménye, hogy a súlyozatlan változatról is belátjuk, hogy nem lehet tetszőlegesen közelíteni (ha P≠NP), melyből egy ismertebb feladatra, a maximális d-távolságú párosításra is következik ugyanez. Ezen eredmények ismertetését követően mutatunk egy egyszerű k-közelítő algoritmust és $k = 2$-re egy $3/2$-közelítő algoritmust is a feladatra. A dolgozat végén kitérünk még a feladat egészértékű programozási modelljére és adunk egy felső becslést az úgynevezett egészértékűségi hézagra a $k = 2$ esetben. Végül egy számítógépes programmal megpróbálunk olyan példafeladatot keresni, amelyre az egészértékűségi hézag közel van a felső becslésünkhöz.

2. Optimalizálási problémák, közelíthetőség

Dolgozatomban az optimalizálási problémákkal és azok közelíthetőségével illetve közelíthetetlenségével foglalkozunk, ezért az ehhez kapcsolódó alapfogalmakat ismertetjük ebben a fejezetben. Az eldöntési problémákra vonatkozó bonyolultságelméleti alapfogalmakról tehát, mint a P, NP itt részletesen nem lesz szó, ezekről például [2]-ben olvashatunk.

2.1. Közelítő algoritmusok

Közelítő algoritmusokról optimalizálási problémák esetében beszélhetünk. Egy optimalizálási feladatban minden lehetséges inputhoz (példányhoz) hozzárendeljük a megengedett megoldások halmazát, és minden ilyen megoldáshoz tartozik egy pozitív célfüggvényérték. A feladat az, hogy keressünk egy olyan megengedett megoldást, amelyre ez az érték optimális (maximális vagy minimális). Optimalizálási probléma többek között a minimális költségű feszítőfa, a maximális független csúcshalmaz, a maximális folyam és az utazóügynök feladat [3], csak hogy néhány közismert példát említsünk. Egy optimalizálási problémára akkor mondjuk, hogy NP-ben van, ha minden belőle természetes módon képzett döntési feladat (például létezik-e k-nál nagyobb független csúcshalmaz egy rögzített k-ra) NP-beli, tehát ha valamely inputon a döntési problémára igen a válasz, akkor erre van polinom időben ellenőrizhető bizonyíték. Egy optimalizálási probléma esetében ez a tulajdonság azt jelenti, hogy egy megoldás megengedettsége polinom időben ellenőrizhető és annak súlya polinom időben kiszámolható. A fejezet további részében szereplő definíciók és állítások kimondásához a [4], [5] és [6, 92-93. oldal] forrásokat használjuk. Elsőként definiáljuk precízen az NP optimalizálási problémákat.

2.1. Definíció (NP optimalizálási probléma)**.** *A $\mathcal{P} = (I, MO, w, cél)$ négyes egy NP optimalizálási probléma, ha*

1. *A $\mathcal{P}$ lehetséges példányainak halmaza I, és I polinom időben felismerhető.*
2. *Egy $x \in I$ példányhoz hozzárendeljük a $MO(x)$ megengedett megoldások halmazát. Ezek a megoldások nem túl hosszúak, tehát létezik egy p polinom, hogy minden $y \in MO(x)$-re $|y| \leq p(|x|)$. Továbbá minden x-re és y-ra, ha $|y| \leq p(|x|)$, akkor polinom időben eldönthető, hogy $y \in MO(x)$ teljesül-e.*
3. *Egy $x \in I$ példányhoz és egy x-hez tartozó $y \in MO(x)$ megengedett megoldáshoz a $w(x, y)$ pozitív szám az y súlya. A w függvény értéke polinom időben kiszámolható.*
4. *$cél \in \{max,min\}$.*

Egy NP optimalizálási problémában a feladat az, hogy egy adott x inputra optimális megoldást találjunk, tehát egy olyan y megengedett megoldást, amelyre

$$w(x, y) = cél\,\{w(x, y') : y' \in MO(x)\} =: OPT(x).$$

Például a maximális súlyú párosítás feladat példányai az élsúlyokkal ellátott irányítatlan gráfok; a megengedett megoldások az olyan élhalmazok, melyekre teljesül, hogy semelyik két élnek nincs közös végpontja; egy ilyen élhalmazhoz tartozó súly a benne lévő élek súlyainak összege, és maximális súlyú megoldást keresünk.

2.2. Definíció (NPO osztály)**.** *Az NP optimalizálási problémák halmazát NPO osztálynak nevezzük.*

Az ebben a dolgozatban felmerülő feladatok mind NPO-beliek. Ezek tárgyalásához az egyik legfontosabb alapfogalom a következő:

2.3. Definíció (α-közelítő algoritmus)**.** *Legyen $\mathcal{P} = (I, MO, w, cél)$ egy NPO-beli probléma és A egy algoritmus, amely minden $x \in I$ inputra megad egy $A(x) \in MO(x)$ megengedett megoldást. Az A egy α-közelítő (vagy α-approximációs) algoritmus, ha minden $x \in I$-re A polinomiális $|x|$-ben és*

$$max \left\{ \frac{w(A(x))}{OPT(x)}, \frac{OPT(x)}{w(A(x))} \right\} \leq \alpha$$

teljesül.

Maximalizálási problémák esetében $w(A(x)) \leq \mathrm{OPT}(x)$, ezért ezekre a definícióban szereplő kifejezés $\mathrm{OPT}(x) \leq \alpha \cdot w(A(x))$ alakú. Egy α-közelítő algoritmus maximalizálási feladat esetén tehát olyan megoldást ad, amely súlyának α-szorosa már meghaladja a maximum értékét. Minimalizálási problémára pedig $\alpha \cdot \mathrm{OPT}(x) \geq w(A(x))$, tehát ekkor az algoritmus által adott érték garantáltan kisebb, mint a tényleges minimum α-szorosa.

A definícióból az is következik, hogy α-approximációs algoritmusról $\alpha \geq 1$ számok esetén beszélünk. Minél közelebb van α az 1-hez, annál jobb közelítést garantál az algoritmus.

Bizonyos szakirodalmak ρ-közelítő algoritmus alatt olyan algoritmust értenek, amelyre a fenti jelölésekkel $|OPT(x) - w(A(x))| \leq \rho \cdot \max\{OPT(x), w(A(x))\}$. A kétféle definíció használata általában nem okoz félreértést, hiszen az utóbbi esetben $\rho \leq 1$, míg az előbbiben $\alpha \geq 1$. A definíciók ekvivalensek, ha $\rho = 1 - \frac{1}{\alpha}$ [7]. Ebben a dolgozatban a 2.3. Definíciót használjuk.

Általában nem egyszerű egy algoritmusról bebizonyítani, hogy α-közelítő, hiszen ehhez az optimális eredménnyel kell összehasonlítanunk az algoritmus által adott megoldás értékét, az optimumot viszont jellemzően nem ismerjük és gyakran jól megbecsülni is nehéz. Sok esetben alkalmas becslés lehet például a feladat valamilyen könnyebben kezelhető relaxáltjának az optimumértéke. Ha az optimalizálási problémát egészértékű programozási (IP) feladatként írjuk fel és ezt relaxáljuk – tehát elhagyjuk az egészértékűségi feltételeket –, akkor egy lineáris programozási (LP) feladatot kapunk. Mivel minden IP megoldás LP megoldás is, ezért az LP optimum maximalizálási feladatnál felső, minimalizálási feladatnál alsó becslést ad az IP optimumra. Ezt használja ki az LP-kerekítéses közelítési módszer, melyben a relaxált LP feladat optimális törtértékű megoldását (melynek megtalálására van hatékony algoritmus) valamilyen módon egészértékűvé alakítjuk, és így egy közelítő megoldást kapunk az eredeti feladatra. A minimális lefogó csúcshalmaz feladatban például, ha a relaxált feladat optimális megoldásának minden koordinátáját úgy módosítjuk, hogy az $1/2$-nél kisebbeket 0-ra, a legalább $1/2$ értékűeket 1-re állítjuk, akkor a kapott megoldás egy 2-közelítő lefogó csúcshalmaz lesz. Az LP-kerekítéses módszereknél egy fontos fogalom az úgynevezett egészértékűségi hézag (integrality gap), mely alatt maximalizálási feladatnál az $\frac{\mathrm{OPT}_{\mathrm{LP}}}{\mathrm{OPT}_{\mathrm{IP}}}$ hányadost értjük (minimalizálási feladatnál $\frac{\mathrm{OPT}_{\mathrm{IP}}}{\mathrm{OPT}_{\mathrm{LP}}}$), ahol $\mathrm{OPT}_{\mathrm{IP}}$ az egészértékű optimum, $\mathrm{OPT}_{\mathrm{LP}}$ pedig az LP relaxált optimuma. Mivel ennél a módszernél az algoritmus elemzésekor az egészértékű optimum értékét a feladat relaxáltjának optimumával becsüljük, ezért az egészértékűségi hézagok szuprémuma egy korlátot ad arra, hogy az adott feladatra legjobb esetben milyen közelítés adható LP optimumot használó módszerekkel. Ennek az értéknek különböző becslései tehát az LP-kerekítéses módszerekhez szorosan kapcsolódó kérdések. Az egészértékűségi hézagot a 3.3.3. fejezetben a maximális k-szoros párosítás feladat kapcsán vizsgáljuk.

Egy másik gyakori közelítési módszer a különböző mohó algoritmusok használata. A mohó algoritmusok alapötlete az, hogy minden lépésben a lokálisan legjobbnak tűnő döntést hozza az algoritmus, és ezzel próbál a tényleges optimumhoz minél közelebb kerülni. Vannak feladatok, melyekre a valódi optimumot is garantáltan megtaláljuk mohó algoritmus segítségével. Ismert példa a minimális költségű feszítőfa megtalálására szolgáló Kruskal és Prim algoritmusok [8, 156-162. oldal]. Számos optimalizálási problémára adhatók konstans-közelítő mohó algoritmusok, erre a 3.1.2. fejezetben a feszített párosítás feladat kapcsán példát is láthatunk.

Sűrűn találkozhatunk olyan közelítési módszerekkel is, melyekben az optimális megoldást kisebb részekre bontjuk és ezeket a részeket külön-külön már könnyen tudjuk közelíteni. Jó példa erre a metrikus utazó ügynök feladatra adott $3/2$-közelítő Christofides-féle algoritmus, melyben egy minimális költségű feszítőfából és annak páratlan fokú pontjain vett minimális költségű párosításból kapott Euler-körséta értékét használjuk a minimális költségű Hamilton-kör közelítésére [7, 97. oldal]. Hasonló módszert alkalmazunk a 3.3.2. fejezetben a maximális k-szoros párosítás feladatra adott közelítő algoritmusoknál.

2.2. Bonyolultsági osztályok

Az a tulajdonsága egy problémának, hogy NPO-ban van, még nem sokat árul el a nehézségéről, amint azt például a következő közismert NPO-beli problémák mutatják:

> *Mekkora a maximális párosítás egy súlyozatlan páros gráfban?* Az optimális megoldást polinom időben meg tudjuk találni Kőnig (alternáló utas) algoritmusával. [8, 169. oldal]
>
> *Mekkora a lefogó csúcsok minimális száma egy súlyozatlan, irányítatlan gráfban?* Könnyű mondani egy 2-közelítő algoritmust: veszünk mohón egy tartalmazásra nézve maximális párosítást, és kiválasztjuk a párosításbeli élek mindkét végpontját.

Azonban belátható, hogy ha $\alpha < 1{,}36$-ra létezne a feladatra α-közelítő algoritmus, abból P=NP következne. [9, 301. oldal]

Utazó ügynök feladat: mekkora a minimális súlyú Hamilton-kör egy pozitív élsúlyokkal ellátott irányítatlan gráfban? Könnyű látni, hogy ha erre a feladatra létezne $(1+\varepsilon)$-közelítő algoritmus valamely $\varepsilon > 0$-ra, akkor ennek segítségével Hamilton-kört is tudnánk keresni, tehát egy ilyen algoritmus létezéséből P=NP következne. [7, 94. oldal]

Világos, hogy közelíthetőségi szempontból nagyon másképpen viselkednek ezek a feladatok, így további bonyolultsági osztályokat lehet definiálni az NP optimalizálási problémák nehézségének kifejezésére. A „legnehezebb" NPO-beli feladatok azok, amelyeket NP-nehéz approximálni, tehát ha bármely $\varepsilon > 0$-ra létezne $(1+\varepsilon)$-közelítő algoritmus, abból P=NP következne. Ezeknél könnyebbnek mondhatóak azok a feladatok, amelyekre létezik valamilyen konstans-közelítés:

2.4. Definíció (APX osztály)**.** *Egy $\mathcal{P} \in$ NPO probléma APX-ben van, ha valamely $\alpha > 1$ konstansra létezik α-közelítő algoritmus $\mathcal{P}$-re.*

Bizonyos problémákra tetszőleges $\alpha > 1$-re mondható α-közelítő algoritmus:

2.5. Definíció (PTAS osztály)**.** *Ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik egy $(1+\varepsilon)$-közelítő A_ε algoritmus a $\mathcal{P} \in$ NPO problémára, akkor az algoritmusok ezen családját polinom idejű approximációs sémának nevezzük. Egy $\mathcal{P} \in$ NPO probléma PTAS-ban van, ha létezik polinom idejű approximációs séma $\mathcal{P}$-re.*

Emlékeztetőül megjegyezzük, hogy az α-közelítő algoritmus definíciójában (2.3. Definíció) szerepel, hogy az input méretében polinomiális, tehát a fenti A_ε algoritmusokra is teljesülni fog ez a feltétel. A jobb közelítésért általában futásidővel fizetünk. Egy polinom idejű approximációs séma lépésszáma lehet például $n^{2^{1/\varepsilon}}$, amely ahogy ε csökken, gyorsan kezelhetetlenül nagy lesz, és a való életben használhatatlanná válik. Ennél tehát gyakorlati szempontból jobbak azok az algoritmusok, melyek nemcsak az input méretében, hanem $1/\varepsilon$-ban is polinomiálisak. Ezeket teljesen polinom idejű approximációs sémáknak nevezzük (FPTAS osztály). Egy teljesen polinom idejű approximációs séma lépésszáma lehet például $(1/\varepsilon)^3 \cdot n^2$.

Rögtön látszik, hogy PTAS $\subseteq$ APX $\subseteq$ NPO áll a fent definiált osztályok között. Természetesen felvetődő és nyitott kérdés, hogy az osztályok valódi részhalmazai-e egymásnak. Könnyű bebizonyítani, hogy az utazó ügynök feladat bármilyen konstans közelítéséből

P=NP következne, illetve a következőkben olyan feladatokra is fogunk látni példát, amelyekről belátható, hogy ha létezne rájuk polinom idejű approximációs séma, akkor abból P=NP következne. Ilyenek például a maximális 3-dimenziós párosítás és a maximális 2-szeres párosítás feladatok, melyeket a 3.2. és a 3.3. fejezetekben tárgyalunk. Tehát amennyiben P≠NP, a problémaosztályok között szigorú tartalmazás, PTAS $\subsetneq$ APX $\subsetneq$ NPO áll fent.

2.3. Visszavezetések

Hogyan lehet belátni egy optimalizálási problémáról, hogy a P≠NP feltétel mellett nem létezik rá polinom idejű approximációs séma? A legegyszerűbb és legrégebb óta használt technika az úgynevezett hézagmódszer (gap technique). Ennek a fő ötlete, hogy egy NP-nehéz eldöntési feladatot úgy vezetünk vissza egy optimalizálási problémára, hogy az eldöntési feladat „igen" válaszhoz tartozó példányaiból és „nem" válaszhoz tartozó példányaiból kapott inputok optimumainak különbsége legalább egy előre adott pozitív szám (hézag) legyen. Precízen:

2.6. Tétel. *Legyen $\mathcal{Q}$ egy NP-nehéz eldöntési probléma, $\mathcal{P}$ egy optimalizálási probléma és τ egy polinom időben végrehajtható transzformáció $\mathcal{Q}$ példányainak halmazáról $\mathcal{P}$ példányainak halmazára, amely kielégíti a következő feltételeket $a < b$ adott pozitív számokkal:*

(i) Ha $\mathcal{Q}$-ra a válasz egy x inputon „igen", akkor a hozzá tartozó $\mathcal{P}$-re $OPT(\tau(x)) \leq a$.

(ii) Ha $\mathcal{Q}$-ra a válasz egy x inputon „nem", akkor a hozzá tartozó $\mathcal{P}$-re $OPT(\tau(x)) \geq b$.

Ekkor ha $\alpha < \frac{b}{a}$, akkor a $\mathcal{P}$-re nem létezik α-közelítő algoritmus, csak ha P=NP.

Egy példát láthatunk a hézagmódszerre a [7, 110. oldal]-on, ahol a partíció (partition) nevű eldöntési probléma NP-teljességét felhasználva bizonyítják, hogy a minimális ládapakolás (minimum bin packing) problémára nem létezik polinom idejű approximációs séma, ha P≠NP. Sajnos a legtöbb nehezen közelíthető problémára nem egyszerű a hézagmódszert alkalmazni. Egy másik hasznos eljárás, hogy egy már bizonyítottan NP-nehezen közelíthető optimalizálási problémát vezetünk vissza egy másik optimalizálási problémára. Ehhez olyan visszavezetési módszert kell definiálni, amely megőrzi a közelíthetőséget. Ilyen például a leggyakrabban használt L-visszavezetés:

2.7. Definíció (L-visszavezetés)**.** *Legyenek $\mathcal{P}$ és $\mathcal{Q}$ optimalizálási problémák. Egy L-visszavezetés a $\mathcal{Q}$ problémáról a $\mathcal{P}$ problémára egy (R, S) függvénypár: R függvény $\mathcal{Q}$ példányainak halmazáról $\mathcal{P}$ példányainak halmazára képez, S függvény $\mathcal{P}$ megengedett* *megoldásainak halmazáról $\mathcal{Q}$ példányainak halmazára képez, R és S polinom időben kiszámíthatóak és kielégítik a következőket:*

(i) Ha az x a $\mathcal{Q}$ egy példánya $OPT(x)$ optimális súllyal, akkor $R(x)$ a $\mathcal{P}$ egy olyan példánya, amelynek az $OPT(R(x))$ optimális súlyára $OPT(R(x)) \leq \alpha \cdot OPT(x)$ teljesül, ahol $\alpha > 0$ konstans.

(ii) Ha s az $R(x)$ egy megengedett megoldása, akkor $S(s)$ az x egy olyan megengedett megoldása, amire $|w(S(s)) - OPT(x)| \leq \beta \cdot |w(s) - OPT(R(x))|$ teljesül, ahol $\beta > 0$ konstans, $w(s)$ és $w(S(s))$ az s és $S(s)$ megoldások súlyát jelöli.

A definícióból könnyű számolással kapjuk a következőt:

2.8. Tétel. *Legyenek $\mathcal{P}$ és $\mathcal{Q}$ optimalizálási problémák, és tegyük fel, hogy létezik egy L-visszavezetés $\mathcal{Q}$-ról $\mathcal{P}$-re. Ekkor ha $\mathcal{P}$-re létezik polinom idejű approximációs séma, akkor $\mathcal{Q}$-ra is létezik polinom idejű approximációs séma.*

A tétel állításával ekvivalens, hogy ha $\mathcal{Q}$-ra nem létezik polinom idejű approximációs séma, akkor abból következik, hogy $\mathcal{P}$-re sem. L-visszavezetésre a 3. fejezetben példát is mutatunk. A 3.11. Tétel bizonyításában a maximális 2-szeres párosítás feladatot vezetjük vissza a maximális 3-dimenziós párosítás feladatra, és így belátjuk, hogy a 2-szeres párosítás feladatra nem létezik polinom idejű approximációs séma, ha P≠NP. További közelíthetőségtartó visszavezetésekről [10]-ben olvashatunk összefoglalót, ezeket a visszavezetéseket összefoglaló néven PTAS visszavezetéseknek nevezzük.

Az eldöntési problémákat olyan osztályokba tudjuk sorolni a polinomiális visszavezetések segítségével, mint a P, NP, NP-nehéz vagy NP-teljes. Hasonlóan az NPO-beli problémák között is definiálhatóak osztályok, ekkor a polinomiális visszavezetések szerepét a PTAS visszavezetéseket veszik át. APX-nehéznek nevezzük azokat a feladatokat, amelyekre minden APX-beli probléma visszavezethető PTAS visszavezetéssel és APX-teljesnek nevezzük azon APX-nehéz problémákat, melyek APX-beliek is. Ismert APX-teljes probléma például a 3.2. fejezetben részletesen tárgyalt maximális 3-dimenziós párosítás feladat. Ha bármelyik APX-teljes feladatról bebizonyosodna, hogy PTAS-ban van, abból az összes APX-beli feladatra következne, hogy PTAS-ban van, ebből pedig P=NP is következne.

Ha approximációs bonyolultságról beszélünk, érdemes megemlíteni egy másik szemléletet is, amellyel gyakran találkozhatunk. Ez az úgynevezett szintaktikus megközelítés, amely logikai formulák segítségével definiál olyan problémaosztályokat, mint az SNP (szigorú NP), MAXSNP_0, MAXSNP. A kapcsolódó fogalmakról részletesen a [9, 311-314. oldal] forrásban olvashatunk, a két szemlélet közötti szoros kapcsolatot [11]-ben tárgyalják.

3. Variációk párosítás feladatokra

A következőkben a párosítás feladat néhány módosítását vizsgáljuk. Célunk egyrészt az előző fejezetben bemutatott elméleti háttér kiegészítése és alátámasztása néhány példával, másrészt a 3.3. fejezetben ismertetett maximális k-szoros párosítás feladattal kapcsolatos eredmények előkészítése.

3.1. A feszített párosítás feladat

Ebben a fejezetben egy polinom idejű approximációs sémát és egy közelítő algoritmust ismertetünk az úgynevezett maximális feszített párosítás feladatra [12]:

3.1. Definíció (maximális feszített párosítás)**.** *Adott $G = (V, E)$ gráfban egy $M \subseteq E$ élhalmaz feszített párosítás (induced matching), ha az M-beli élek függetlenek és $E \setminus M$-ben nincs olyan él, amely M-beli élek végpontjai között fut. Az elnevezés abból ered, hogy M egy olyan párosítás G-ben, amely egyben az M-beli élek végpontjai által feszített részgráf élhalmaza is. A maximális feszített párosítás problémában egy maximális méretű feszített párosítást keresünk.*

3.1.1. Polinom idejű approximációs séma maximum 3-fokú síkgráfokra

A közismert független csúcshalmaz fogalomnak egy általánosítása az úgynevezett k-független csúcshalmaz [12], melyben azt követeljük meg, hogy a benne lévő csúcsok távolsága az inputgráfban k-nál nagyobb legyen ($k = 1$-re tehát a hagyományos független csúcshalmaz fogalmát kapjuk vissza).

3.2. Definíció (maximális k-független csúcshalmaz)**.** *Adott $G = (V, E)$ gráfban egy $S \subseteq V$ csúcshalmaz k-független, ha bármely két S-beli csúcs G-beli távolsága (köztük lévő legrövidebb G-beli út éleinek száma) legalább $k + 1$. A maximális k-független csúcshalmaz problémában a maximális méretű k-független csúcshalmazt keressük.*

A maximális feszített párosítás feladat kapcsán a továbbiakban a maximális 2-független csúcshalmaz feladatra lesz szükségünk. Először [13] alapján megmutatjuk, hogy a maximális feszített párosítás feladat visszavezethető a maximális 2-független csúcshalmaz feladatra. Ehhez a következő definíció szükséges:

3.3. Definíció (élgráf)**.** *A $G = (V, E)$ gráfnak $L(G)$ élgráfja, ha $L(G)$ minden csúcsa a G egy-egy élét reprezentálja, és két csúcs között akkor fut él $L(G)$-ben, ha a megfelelő két élnek G-ben van közös végpontja.*

A visszavezetés módját az alábbi egyszerű állításban fogalmazhatjuk meg:

3.1. Állítás. *A $G = (V, E)$ gráfban egy $M \subseteq E$ élhalmaz akkor és csak akkor feszített párosítás, ha az M-beli élekhez tartozó csúcsok $L(G)$-ben egy 2-független csúcshalmazt alkotnak.*

Bizonyítás. Ha két él független G-ben, akkor $L(G)$-ben a hozzájuk tartozó csúcsok között nem fut él (tehát nincs közöttük 1-hosszú út), és ha két élnek nincs közös élszomszédja G-ben, akkor $L(G)$-ben a hozzájuk tartozó csúcsoknak nincs közös csúcsszomszédja (tehát nincs közöttük 2-hosszú út). Mivel M-ben ez a két tulajdonság minden élpárra teljesül, ezért $L(G)$-ben az M-beli élekhez tartozó bármely két csúcsra igaz lesz, hogy nincs közöttük sem 1-hosszú, sem 2-hosszú út $L(G)$-ben, tehát 2-független csúcshalmazt alkotnak.

Fordítva is igaz: ha két csúcs között nincs él $L(G)$-ben, akkor G-ben a hozzájuk tartozó két él független, és ha két csúcsra teljesül $L(G)$-ben, hogy nincs olyan harmadik csúcs, ami mindkettőnek a szomszédja lenne, akkor G-ben a megfelelő két élhez nincs olyan harmadik él, amivel mindkettőnek van közös csúcsa. Tehát ha az M-beli éleknek megfelelő csúcsok 2-független halmazt alkotnak $L(G)$-ben, akkor M feszített párosítás G-ben. □

A fejezet további részében a [12] forrást követjük. Először egy lineáris idejű egzakt algoritmust vázolunk a maximális k-független csúcshalmaz megtalálására a síkgráfok egy speciális osztályán, az úgynevezett h-külsíkgráfokon (h-outerplanar). Ennek felhasználásával adható egy polinom idejű approximációs séma a maximális 2-független csúcshalmaz feladatra síkbarajzolható gráfokon, mely a 3.1. Állításban megfogalmazott visszavezetés miatt a feszített párosítás feladatra is egy polinom idejű approximációs séma, ha az input egy legfeljebb 3-fokú síkgráf.

3.4. Definíció (h-külsíkgráf)**.** *Egy G síkbarajzolható gráf 1-külsíkgráf (1-outerplanar) vagy külsíkgráf (outerplanar), ha G-nek van olyan síkbarajzolása, amelynél G összes csúcsa a végtelen tartomány határára esik. Egy külsíkgráf lerajzolása alatt ezt a síkbarajzolást értjük. Egy G síkbarajzolható gráf h-külsíkráf (h-outerplanar), ha G-nek van olyan síkbarajzolása, amelynél ha kitöröljük G-ből a végtelen tartományba eső csúcsokat, akkor egy $(h-1)$-külsíkgráf lerajzolását kapjuk.*

Egy egyszerűbb felépítésű n csúcsú 1-külsíkgráfot úgy érdemes elképzelni, mint egy n-szög és annak esetleg néhány egymást nem metsző átlója, erre példát láthatunk az 1. ábrán.

Egy általános 1-külsíkgráf állhat több ilyen sokszögből is, amelyeket akár utak is összeköthetnek egymással, vagy közös csúcsaik is lehetnek (a definíció teljesüléséhez szükséges feltételek mellett). Egy egyszerűbb h-külsíkgráf csúcsait h rétegbe oszthatjuk, amelyet egymás belsejébe rajzolt sokszögekként képzelhetünk el. Egyéb élek egy rétegen belül, vagy szomszédos rétegek között, egymást nem metszve futhatnak. Természetesen ennél bonyolultabb felépítésűek is lehetnek, állhatnak több hasonló (akár egymással összeköttetésben lévő) réteges részből.

3.2. Állítás. *Ha adott egy G lerajzolt h-külsíkgráf, akkor a maximális 2-független csúcshalmaz G-ben $O(3^h \cdot n)$ időben megtalálható, ahol n a csúcsok száma.*

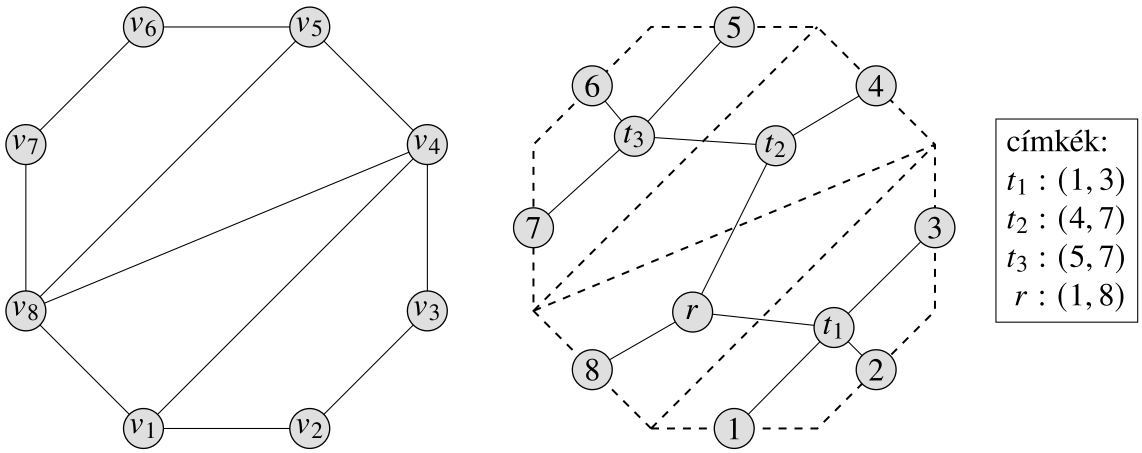
Baker [14]-ben egy dinamikus programozási algoritmust ad a maximális független csúcshalmaz megkeresésére h-külsíkgráfokban, mely kis módosításokkal a maximális k-független csúcshalmazt is megtalálja. A módosítást [12] tartalmazza, ebben a szerzők Baker algoritmusát vázlatosan ismertetik, melyet a következőkben itt is megteszünk. Az algoritmus alapötletének vázolása érdekében a $h = 1$ esetet mutatjuk be részletesebben.

Legyen G 2-összefüggő 1-külsíkgráf. Definiáljuk a $T(G)$ fát a következőképpen: G végtelen tartományát határoló éleihez tartozzon $T(G)$-ben egy-egy levél, korlátos tartományaihoz (lapjaihoz) pedig egy-egy nem-levél csúcs. Az u és v csúcsok $T(G)$-ben legyenek összekötve, ha

- u és v két olyan korlátos tartományhoz tartoznak, melyeknek van közös éle, vagy
- u és v közül az egyik egy korlátos tartományhoz, a másik ugyanezen lap egy végtelen tartományt határoló éléhez tartozik.

Ha G nem 2-összefüggő, akkor először G minden elvágó éle helyett vegyünk be egy-egy párhuzamos élpárt, és erre hajtsuk végre a fenti eljárást. Ezzel egy erdőt fogunk kapni. Ebbe az erdőbe vegyünk be éleket a különböző komponensek olyan csúcsai közé, amelyek elvágó pontban találkozó lapokhoz tartoznak azzal az egy feltétellel, hogy ne alakuljon ki kör a gráfban. Így nem 2-összefüggő gráfokra is megkapjuk a $T(G)$ fát.

A $T(G)$ egy tetszőleges r csúcsát nevezzük ki gyökérnek és az r tetszőleges szomszédját az ő „legbaloldalibb” gyerekének. Ez a két választás megadja a $T(G)$ síkbarajzolt fa leveleinek egy sorbarendezését: járjuk be egy r-ből indított mélységi kereséssel a fát úgy, hogy mindig a legbaloldalibb felfedezetlen csúcs felé lépünk (ahol azt, hogy ez melyik, értelemszerűen meghatározza az r legbaloldalibb gyerekének választása, a gráf lerajzolása és egy rögzített körüljárási irány), a levelek elérési sorrendje megadja a sorbarendezést. Ezt úgy is elképzelhetjük, mintha körberajzoltuk volna a fát (minden élen mindkét irányba



1. ábra. Példa egy G 1-külsíkgráfra (bal oldal) és a hozzá tartozó $T(G)$ fára a csúcsokhoz tartozó címkékkel (jobb oldal). A példában az r gyökér „legbaloldalibb” gyereke a t_1 csúcs.

pontosan egyszer végighaladva), majd a körvonalon a gyökértől a legbaloldalibb gyereke felé indulva pozitív körüljárás szerint végigmennénk és feljegyeznénk a levelek érintésének sorrendjét. A $T(G)$ leveleinek ez a sorbarendezése egyben a G végtelen tartományához tartozó éleinek egy rendezését adja (hiszen ezeket feleltettük meg a leveleknek). Könnyen látszik, hogy ez a végtelen tartományt határoló éleknek a tartomány határán vett pozitív körüljárás szerinti sorrendje (valamely tetszőleges éltől kezdve). Kapjon a sorbarendezés alapján minden $T(G)$-beli levél (és ezzel a hozzájuk tartozó G-beli élek) egy sorszámot. Minden v csúcs $T(G)$-ben kapjon egy (i, j) címkét, ahol a v levél-leszármazottjai között előforduló legkisebb sorszám i, a legnagyobb j (l leszármazottja v-nek, ha a $T(G)$ fában egyértelmű l-r út tartalmazza v-t). Az (i, j) címkéjű v csúcs a G-nek egy részgráfját reprezentálja, méghozzá azon G-beli külső élek végpontjai által feszített részgráfot, amelyeknek a sorszáma s, ahol $i \leq s \leq j$. Az 1. ábrán egy példán keresztül szemléltetjük a konstrukciót.

Legyen v a $T(G)$ egy (i, j) címkéjű csúcsa. A v által reprezentált részgráf azon élei, amelyek egyben a G-nek külső élei, egy utat határoznak meg, amelynek a két végén i és j élek vannak. Jelöljük ezen út végpontjait i_1-gyel (az i élen fekvőt) és j_2-vel (a j élen fekvőt). Minden ilyen v csúcshoz rendeljünk hozzá egy táblázatot, amelyben számontartjuk a v által reprezentált részgráf azon maximális k-független csúcshalmazait, amelyek az i_1-től pontosan d_1, a j_2-től pontosan d_2 a távolságra vannak, minden (d_1, d_2) párra, ahol $d_1 = 0, 1, \ldots, k$, $d_2 = 0, 1, \ldots, k$. (Ha valamelyik végponttól k-nál messzebb lenne, akkor a végpont is bevehető lenne, tehát ekkor nem lenne maximális.)

A $T(G)$ leveleire könnyen felírható ez a táblázat, és ha egy csúcs gyerekeire ismerjük a táblázatokat, akkor a csúcsra is fel tudjuk írni a [14]-ben leírt módon (melyet itt nem részletezünk). A gyökér által reprezentált részgráf maga G, így dinamikus programozással a levelektől a gyökér felé haladva $\mathrm{O}((k+1)\cdot n)$ időben megtaláljuk a maximális k-független csúcshalmazt 1-külsíkgráfokban.

Baker [14]-ben h-külsíkgráfokra is általánosítja az algoritmust (h pozitív egész), melyben a $h = 1$ esetben használt fa helyett fáknak egy családját definiálja, egy-egy fát a gráf minden rétegéhez. Az alapgondolat ugyanaz, mint az 1-külsíkgráfos esetben, a rekurzió azonban még bonyolultabb. A futásidő h-külsíkgráfokban k-független csúcshalmazra $\mathrm{O}((k+1)^h \cdot n)$.

3.3. Állítás. *A maximális 2-független csúcshalmaz feladatra létezik polinom idejű approximációs séma, ha az inputgráf síkbarajzolható.*

Bizonyítás. Tetszőleges G síkbarajzolható gráfhoz mindig létezik p pozitív egész, amelyre G p-külsíkgráf, hiszen G végtelen tartományához tartozó csúcsokat kitörölve, majd ezt ismételve előbb-utóbb minden maradék csúcs a külső tartományhoz fog tartozni. A 3.2. Állításban szereplő algoritmus azonban csak akkor hatékony, ha a rétegek h száma egy n-től nem függő konstans.

A G síkbarajzolható inputgráf csúcsait rendezzük a fenti módon rétegekbe: a G végtelen tartományához tartozó csúcsai alkossák az 1. réteget és ha már definiáltuk az első $i-1$ réteget, akkor az i-edik réteghez azok a csúcsok tartozzanak, amelyek a végtelen tartományba esnek, ha kitöröljük G-ből az $1, \ldots, i-1$ rétegeket. Az i-edik réteghez tartozó csúcsok halmazát jelöljük V_i-vel. Legyen U^* a maximális méretű 2-független csúcshalmaz G-ben és legyen h egy páros konstans.

Vegyük az alábbi két függvényt, amelyek az $\left\{r \in \mathbb{N} : 1 \leq r \leq \frac{h}{2} + 1\right\}$ halmazról $\mathbb{N}$ részhalmazaira képeznek:

$$N_1(r) = \{i \in \mathbb{N} : i \equiv 2r - 1 \bmod h + 2\}$$
$$N_2(r) = \{i + 1 \in \mathbb{N} : i \equiv 2r - 1 \bmod h + 2\}$$

Látszik, hogy $N_1 = \bigcup_{1 \leq r \leq h/2+1} N_1(r)$-ben a páratlan, $N_2 = \bigcup_{1 \leq r \leq h/2+1} N_2(r)$-ben a páros számok vannak, tehát az $N_1 \cup N_2$ a természetes számok egy partíciója, illetve minden r-re $N_2(r) = \{i + 1 : i \in N_1(r)\}$. Ezekből

$$\sum_{r=1}^{h/2+1} \sum_{i \in N_1(r)} |(V_i \cup V_{i+1}) \cap U^*| = |U^*|.$$

Tehát biztosan létezik olyan r', amire $1 \leq r' \leq \frac{h}{2} + 1$ és

$$\sum_{i \in N_1(r')} |(V_i \cup V_{i+1}) \cap U^*| \leq \frac{|U^*|}{\frac{h}{2} + 1} = \frac{2|U^*|}{h+2}. \tag{1}$$

Jelöljük W_i-vel G azon csúcsainak halmazát, amelyek az $(i-h)$-adiktól az $(i-1)$-edik rétegekbe esnek, pontosabban $W_i = \bigcup_{\max\{0,i-h\} \leq j < i} V_j$. Bármely W_i által feszített gráf h-külsíkgráf.

Valamely konkrét r-re (ahol $1 \leq r \leq \frac{h}{2} + 1$) az $N_1(r)$ elemei a $2r - 1$ maradékosztályba eső számok mod $h+2$, tehát ha minden $i \in N_1(r)$-re megjelöljük a G i-edik és $i+1$-edik rétegét, akkor az összes réteget végignézve azt fogjuk látni, hogy vannak egymással szomszédos megjelölt rétegpárok, és ezeket h darab jelöletlen réteg választja el egymástól. Ezekben a jelöletlen csúcshalmazokban fogjuk megoldani egzaktul a maximális 2-független csúcshalmaz feladatot. A W_i halmazt úgy definiáltuk, hogy a jelöletlen rétegek a W_i-beli csúcsokból állnak minden $i \in N_1(r)$-re.

Hajtsuk végre minden r-re, amire $1 \leq r \leq \frac{h}{2} + 1$ a következőt: keressük meg minden $i \in N_1(r)$-re W_i által feszített gráfban a maximális 2-független csúcshalmazt lineáris időben a 3.2. Állításban vázolt algoritmus segítségével (mivel a gráfok diszjunkt h-külsíkgráfok, ezért az uniójuk is h-külsíkgráf, így az algoritmus egyszeri futtatása a gráfok uniójára elegendő). Legyen U_i az így kapott optimális 2-független csúcshalmaz W_i által feszített gráfon, ekkor az algoritmus az

$$U(r) = \bigcup_{i \in N_1(r)} U_i$$

halmazt adja meg. Ez megengedett 2-független csúcshalmaz G-ben, hiszen tetszőleges $i, j \in N_1(r)$-re a W_i-beli csúcsok távolsága a W_j-beliektől G-ben legalább 3. (Az őket tartalmazó jelöletlen rétegeket ugyanis legalább két rétegnyi jelölt csúcs választja el egymástól.)

Legyen U a maximális méretű csúcshalmaz az $U(r)$ halmazok közül ($1 \leq r \leq \frac{h}{2} + 1$) és jelöljük r''-vel a maximális méretű halmazhoz tartozó r értéket. Az U választása miatt az (1) feltételnek megfelelő r'-re $|U| = |U(r'')| \geq |U(r')|$, tehát

$$\sum_{i \in N_1(r'')} |U_i| \geq \sum_{i \in N_1(r')} |U_i|.$$

A $|W_i \cap U^*|$ minden i-re megengedett 2-független csúcshalmaz, ezért $|W_i \cap U^*| \leq |U_i|$ minden i-re fennáll, amiből

$$|U| = \sum_{i \in N_1(r'')} |U_i| \geq \sum_{i \in N_1(r')} |U_i| \geq \sum_{i \in N_1(r')} |W_i \cap U^*| =$$

$$= |U^*| - \sum_{i \in N_1(r')} |(V_i \cup V_{i+1}) \cap U^*| \geq$$

$$\geq |U^*| - \frac{2|U^*|}{h+2} = \frac{h}{h+2}|U^*|,$$

ahol az utolsó egyenlőtelenség (1)-ből következik. Ekkor

$$\frac{|U^*|}{|U|} \leq \frac{h+2}{h} = 1 + \frac{2}{h}.$$

Tehát ez az eljárás egy polinom idejű approximációs séma a maximális 2-független csúcshalmaz feladatra síkgráfokon. □

3.1. Következmény. *A maximális feszített párosítás feladatra létezik polinom idejű approximációs séma, ha az inputgráf síkbarajzolható és a maximális fokszáma 3.*

Bizonyítás. Ha G síkbarajzolható és G-ben a maximális fokszám 3, akkor az $L(G)$ élgráf síkbarajzolható. A 3.3. Állítás alapján tehát létezik polinom idejű approximációs séma az $L(G)$-beli maximális 2-független csúcshalmaz közelítésére. A 3.1. Állítás alapján az így kapott megoldás a G-beli maximális feszített párosítást is ugyanolyan jól közelíti, tehát ezzel erre a feladatra is adtunk egy polinom idejű approximációs sémát. □

3.1.2. Közelítő algoritmus reguláris gráfokra

Vegyük a következő egyszerű mohó algoritmust a maximális feszített párosítás feladatra: minden lépésben beválasztunk egy tetszőleges $e = uv$ élt M-be, majd kitöröljük a gráf élhalmazából e-t, valamint az összes élt, ami $N(u)$-beli vagy $N(v)$-beli csúcsra illeszkedik; a csúcshalmazból pedig kitöröljük az $N(u)$-beli és $N(v)$-beli csúcsokat (ahol $N(x)$ jelöli az x csúcs szomszédainak halmazát). Addig ismételjük ezt, amíg van él a gráfban.

Világos, hogy a mohó algoritmus által adott M élhalmaz egy megengedett megoldás, hiszen egy 1 élből álló halmaz biztosan feszített párosítás, és ahogy egy e élt beveszünk M-be, rögtön kitöröljük az összes többi olyan élt, amire teljesülne, hogy van közös csúcs- vagy élszomszédja e-vel. Így a további lépésekben bevett élek nem fogják sérteni a megengedettséget.

Nevezzük MinMohó (MinGreedy) algoritmusnak azt a feszített párosítást kereső mohó algoritmust, amely minden lépésben azt az $e = uv$ élt választja, amire u minimális fokszámú, a v pedig az u szomszédai között minimális fokszámú. Ha az inputgráf nem összefüggő, akkor komponensenként végezzük az algoritmust. Az alábbiakban belátjuk, hogy a MinMohó algoritmus nagy n-re egy lényegében $(d-1)$-közelítő feszített párosítást ad d-reguláris gráfokon. Ehhez a [13] és [15] forrásokat használjuk.

3.4. Állítás. *Egy $G = (V, E)$ n-csúcsú d-reguláris gráfon ($d \geq 3$) futtatott MinMohó algoritmus által adott M feszített párosításra $|M| \geq \frac{d(n-2)}{2(2d-1)(d-1)}$.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy G összefüggő. (Ha nem az, akkor minden komponensre elmondható a következő gondolatmenet.) Legyen $\alpha = (2d-1)(d-1)$. Az első él kiválasztása előtt minden fokszám d, ezért az első lépésben törölt élek száma legfeljebb

$$1 + 2(d-1) + 2(d-1)^2 = 2d(d-1) + 1 = \alpha + d.$$

A második lépéstől kezdve az algoritmus során végig igaz lesz, hogy van d-nél kisebb, de 0-nál nagyobb fokú csúcs a gráfban, hiszen G összefüggőségéből következik, hogy él- és csúcstörlésekkel nem alakulhat ki d-reguláris komponens (ha pedig minden fokszám 0, akkor leáll az algoritmus). Tehát lépésenként legfeljebb

$$1 + (d-1) + (d-2) + (d-1)^2 + (d-2)(d-1) = (2d-1)(d-1) = \alpha$$

élt törlünk. Az algoritmus minden lépésénél a lehető legtöbb él törlését feltételezve az első él bevétele után $\frac{dn}{2} - \alpha - d$ él marad, majd minden él bevételénél α élt törlünk, amiből:

$$|M| \geq 1 + \frac{\frac{dn}{2} - \alpha - d}{\alpha} = \frac{d(n-2)}{2\alpha} = \frac{d(n-2)}{2(2d-1)(d-1)},$$

amit igazolnunk kellett. □

3.5. Állítás. *Ha egy $G = (V, E)$ n csúcsú gráfban a minimális fokszám δ, a maximális fokszám Δ, akkor a G-beli M^* maximális feszített párosításra $|M^*| \leq \frac{\Delta n}{2(\Delta+\delta-1)}$.*

Bizonyítás. Legyen $R = V(G) \setminus V(M^*)$. Minden $v \in V(M^*)$ legalább $\delta - 1$ darab R-beli csúccsal szomszédos (hiszen $V(M^*)$-ban nem lehet az M^*-beli párjukon kívül más szomszédjuk) és minden $v \in R$ legfeljebb Δ darab $V(M^*)$-beli csúccsal szomszédos. Ebből egy felső és egy alsó becslést kapunk $V(M)$ és R között futó élek $|E_{V(M),R}|$ számára: $2|M^*|(\delta - 1) \leq |E_{V(M),R}| \leq (n - 2|M^*|)\Delta$, amit átrendezve:

$$|M^*| \leq \frac{\Delta n}{2(\Delta + \delta - 1)}$$

és ez volt az állításunk. □

3.2. Következmény. *A MinMohó algoritmus egy* $\left(\frac{n}{n-2}(d-1)\right)$*-közelítést ad a* d*-reguláris gráfokon vett maximális feszített párosítás feladatra.*

Bizonyítás. A 3.5. állítása d-reguláris gráfokra:

$$|M^*| \leq \frac{dn}{2(2d-1)}$$

melyet a 3.4 eredményével együtt felhasználva:

$$\frac{|M^*|}{|M|} \leq \frac{\frac{dn}{2(2d-1)}}{\frac{d(n-2)}{2(2d-1)(d-1)}} = \frac{n}{n-2}(d-1)$$

következik. □

Ha $n \to \infty$, akkor $\frac{n}{n-2} \to 1$, tehát nagy n-re a MinMohó algoritmus lényegében $(d-1)$-közelítő megoldást ad.

3.2. A 3-dimenziós párosítás feladat

Egy páros gráfban maximális méretű párosítást keresni könnyen tudunk polinom időben, sőt, még a jóval általánosabb élsúlyozott esetre is ismert polinomiális algoritmus, akár általános gráfokon is [16]. A feladat viszont jóval nehezebbé válik, ha 2 helyett 3 csúcsosztályt veszünk, és hagyományos élek (2-uniform hiperélek) helyett 3-uniform hiperélek vannak.

3.5. Definíció (maximális 3-dimenziós párosítás)**.** *Adottak* X, Y, Z *diszjunkt csúcshalmazok és* $\mathcal{H} \subseteq X \times Y \times Z$ *hiperélek halmaza (azaz egy 3-osztályú 3-uniform hipergráf). Az* $F \subseteq \mathcal{H}$ *halmazt 3-dimenziós párosításnak nevezzük, ha bármely két* $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in F$ *hiperélre* $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$ *és* $z_1 \neq z_2$ *teljesül. A maximális 3-dimenziós párosítás problémában a maximális számú hiperélből álló 3-dimenziós párosítást keressük.*

3.2.1. Közelítés nehézsége

A maximális 3-dimenziós párosítás eldöntési változata nevezetes NP-teljes feladat: egyike Karp 21 NP-teljes problémájának [17]. Optimalizálási feladatként is jól ismert, hogy a feladat APX-teljes [18].

Az alábbiakban vázolt eredmények [19]-ben olvashatók, melyben egy konkrét konstansra bizonyítják, hogy ennél jobb közelítést csak P=NP esetén remélhetünk. Ehhez Håstad alábbi (3.7) tételét használják fel, mely a következő optimalizálási problémára vonatkozik:

3.6. Definíció (Ek-MAX-E3-LIN-2)**.** *Adott I lineáris egyenletrendszer, melyben az egyenletek $\mathbb{Z}_2$ felett vannak értelmezve, minden egyenletben pontosan 3 változó szerepel és minden változó pontosan k egyenletben fordul elő (az egyenletek tehát $x + y + z = j$, $j \in \{0, 1\}$ alakúak). Az Ek-MAX-E3-LIN-2 optimalizálási problémában a cél minden φ behelyettesítés felett maximalizálni a $\frac{sat(\varphi)}{|I|}$ értéket, ahol $sat(\varphi)$ az egyenletek száma, amelyeket φ kielégít.*

3.7. Tétel (Håstad)**.** *Minden $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$-hez létezik $k(\varepsilon)$ pozitív egész, hogy minden $k \geq k(\varepsilon)$-ra a következő eldöntési probléma NP-nehéz: teljesül-e az Ek-MAX-E3-LIN-2 egy adott I példányára, hogy a maximálisan kielégíthető egyenleteinek száma $(1 - \varepsilon) \cdot |I|$ és $(\frac{1}{2} + \varepsilon) \cdot |I|$ közé esik.*

Az E$[k, k, k]$-MAX-E3-LIN-2 az Ek-MAX-E3-LIN-2 feladat azon megszorítása, melynek a példányaiban minden változó pontosan k-szor szerepel az első, k-szor a második és k-szor a harmadik helyen. (Az $x + y + z = j$, $j \in \{0, 1\}$ egyenletben az első változó x, a második y, a harmadik z.) Az Ek-MAX-E3-LIN-2 egy I_0 példányát könnyen átalakíthatjuk E$[k, k, k]$-MAX-E3-LIN-2 egy I példányává az optimum megváltozása nélkül a következő módon: I_0 minden $x + y + z = j$ egyenletéhez vegyük be I-be az $x + y + z = j$, $y + z + x = j$ és $z + x + y = j$ egyenleteket. Tehát a 3.7. Tétel használható E$[k, k, k]$-MAX-E3-LIN-2 feladatra is.

A szerzők [19]-ben az E$[k, k, k]$-MAX-E3-LIN-2 feladatot visszavezetik a maximális független csúcshalmaz feladatra és a 3.7. Tétel felhasználásával bebizonyítják a következő eredményt:

3.8. Tétel. *A maximális független csúcshalmaz feladatot már maximum 3-fokú gráfokra megszorítva is NP-nehéz α-approximálni, ha $\alpha < \frac{95}{94}$.*

A bizonyítást megvizsgálva adódik az észrevétel, hogy a visszavezetéssel kapott gráf még speciálisabb: 3-élszínezhető és 3-reguláris, tehát a 3.8. Tétel bizonyításából automatikusan következik az az erősebb állítás, hogy a maximális független csúcshalmaz feladatot 3-reguláris 3-élszínezhető gráfokra is NP-nehéz α-approximálni, ha $\alpha < \frac{95}{94}$. Ebből pedig egyből adódik a maximális 3-dimenziós párosítás feladat közelíthetetlensége is a következő módon: legyen $G = (V, E)$ gráf és definiáljuk $G' = (E, V')$ duális hipergráfot, melynek a csúcshalmaza E, hiperéleinek halmaza V', minden $v \in V$-hez tartozik egy $v' \in V'$ hiperél, mely az összes rá illeszkedő $e \in E$ élt tartalmazza. Ekkor a következők teljesülnek G'-re:

> Ha G 3-reguláris, akkor G' 3-uniform, tehát minden hiperél pontosan 3 csúcsot tartalmaz.
>
> Ha G 3-élszínezhető, tehát az élei kiszínezhetők 3 színnel úgy, hogy semelyik csúcsra nem illeszkedik két azonos színű él, akkor G' csúcsai kiszínezhetőek 3 színnel úgy, hogy egy hiperélen belül nincs két azonos színű csúcs.

Beoszthatjuk tehát G' csúcsait X, Y, Z diszjunkt halmazokba úgy, hogy minden hiperél minden halmazból pontosan egy csúcsot tartalmazzon. Ha tehát G 3-reguláris és 3-élszínezhető, akkor a hozzá tartozó G' duális hipergráf a maximális 3-dimenziós párosítás feladat egy példánya és egy független csúcshalmaz G-ben megfelel egy ugyanakkora G'-beli 3-dimenziós párosításnak (hiszen ha G-ben két csúcs között nem fut él, akkor a megfelelő két hiperélnek nincs közös csúcsa G'-ben). A 3.8. Tétel-beli küszöb tehát a maximális 3-dimenziós párosítás feladatra is érvényes, sőt mivel G-ben egy élre 2 csúcs illeszkedik, ezért G' 2-reguláris (minden csúcs pontosan 2 hiperélben van benne), tehát:

3.9. Tétel. *A maximális 3-dimenziós párosítás feladatot már 2-reguláris példányokra megszorítva is NP-nehéz α-approximálni, ha $\alpha < \frac{95}{94}$.*

Ezt az eredményt fogjuk felhasználni a 3. fejezetben tárgyalt maximális k-szoros párosítás feladat nehézségének bizonyításához.

3.2.2. Polinomiális algoritmus a teljes 3-dimenziós párosítás feladatra 2-reguláris példányokon

Bár a maximális méretű 3-dimenziós párosítást megtalálni NP-nehéz, azt viszont – meglepő módon – polinom időben el tudjuk dönteni, hogy létezik-e teljes 3-dimenziós párosítás, ha az input 2-reguláris. Ez egy közismert állítás, amelyet most be is bizonyítunk.

3.6. Állítás. *Adottak X, Y, Z diszjunkt csúcshalmazok, $n = |X| = |Y| = |Z|$ és $\mathcal{H} \subseteq X \times Y \times Z$ hiperélek halmaza úgy, hogy minden $u \in X \cup Y \cup Z$ csúcs pontosan 2 hiperélben van benne (azaz adott egy 2-reguláris 3-osztályú 3-uniform hipergráf). Ha létezik $F \subseteq \mathcal{H}$ 3-dimenziós párosítás, amelyre $|F| = n$ (teljes 3-dimenziós párosítás), akkor létezik polinomiális algoritmus, amely megadja F-et.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy ha F teljes 3-dimenziós párosítás, akkor a 2-regularitás miatt $\mathcal{H} \setminus F$ hiperélhalmaz is minden csúcsot pontosan 1-szer fed le, tehát ez is egy teljes 3-dimenziós párosítás.

Legyen G a duális hipergráf, amely a 2-regularitás miatt egy hagyományos gráf (2-uniform hipergráf): minden csúcs megfelel az eredeti hipergráf egy hiperélének, és az eredeti hipergráf minden csúcsához tartozik egy él, $u \in X \cup Y \cup Z$ él két végpontja az u-ra illeszkedő két hiperél. A G gráf egy n méretű független csúcshalmaza felel meg egy teljes 3-dimenziós párosításnak.

Mivel feltettük, hogy létezik teljes 3-dimenziós párosítás, ezért a G $2n$ csúcsú gráfban van egy $U \subset V(G)$ n-elemű független csúcshalmaz, sőt, az első megállapítás miatt $V(G) \setminus U$ is független. A G tehát egy $2n$ csúcsú páros gráf, amelynek mindkét csúcsosztálya n csúcsból áll.

Tudjuk, hogy G páros, ezért a G egy szélességi bejárása után kapott erdőnek a szintjeit felváltva színezve megkapjuk a G két színosztályát. Mivel az eredeti hipergráfban legfeljebb n db független hiperélt tudunk kiválasztani, ezért G-ben sem lesz n-nél nagyobb független csúcshalmaz. Az eljárással kapott mindkét színosztály tehát pontosan n csúcsból fog állni és bármelyik közülük megfelel egy teljes 3-dimenziós párosításnak. □

Beláttuk tehát, hogy ha van teljes 3-dimenziós párosítás, akkor azt a fenti algoritmus megtalálja. Ebből következik, hogy ha egy tetszőleges 2-reguláris példányon hajtjuk végre a fenti lépéseket, azaz a duálisának a szélességi erdőjét szintenként felváltva színezzük, és azt tapasztaljuk, hogy nem két n csúcsú független csúcshalmazt kaptunk, akkor ebben a példányban nem volt teljes 3-dimenziós párosítás. Ebből adódik:

3.3. Következmény. *Polinom időben eldönthető, hogy egy 2-reguláris 3-osztályú 3-uniform hipergráfban létezik-e teljes 3-dimenziós párosítás.*

3.3. A k-szoros párosítás feladat

Dolgozatom hátralevő részében az úgynevezett maximális k-szoros párosítás feladattal fogunk foglalkozni, mely [20]-ban a d-távolságú párosítás (d-distance matching) feladat kapcsán merül fel. A feladat a [21]-ben tárgyalt szimultán hozzárendelési feladat (simultaneous assignment problem) egy speciális esete.

3.10. Definíció (maximális k-szoros párosítás)**.** *Adott egy $G = (S, T; E)$ páros gráf és S-nek $S_1, S_2, \ldots, S_k$ részhalmazai, melyekre $S_1 \cup \ldots \cup S_k = S$. A G éleinek egy M részhalmazát k-szoros párosításnak nevezzük, ha M halmazt megszorítva az (S_i, T) csúcshalmazokra párosítást kapunk minden $i = 1, 2, \ldots, k$-ra. A maximális k-szoros párosítás feladatban a maximális méretű k-szoros párosítást keressük. A maximális súlyú k-szoros párosítás* *feladatban adott egy $w : E \to \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény, és azt az M k-szoros párosítást keressük, amelynek az összsúlya, azaz $w(M) = \sum_{e\in M} w_e$ maximális.*

Már $k = 2$-re is NP-teljes az az eldöntési feladat, hogy van-e S csúcshalmazt fedő k-szoros párosítás. Ennek bizonyításához a 3-dimenziós párosítás feladatot kell visszavezetni a k-szoros párosítás feladatra, mely visszavezetés [20]-ban elolvasható.

Szintén ismert a maximális k-szoros párosítás feladatról, hogy a súlyozott változatát – melyben 1 és 2 súlyok is vannak – már $k = 2$ esetben is NP-nehéz α-approximálni, ha $\alpha < \frac{760}{759}$. Ennek a bizonyítását a [21] tartalmazza, és a 3.13. Tételben mi is bemutatjuk. A súlyozatlan változat a súlyozottnak egy speciális esete (amikor $w \equiv 1$), ezért ez egy könnyebb feladat. Emiatt a súlyozott változat nehézségéből nem következik a súlyozatlan változat nehézsége. Nyitott kérdés volt tehát, hogy létezik-e polinom idejű approximációs séma a maximális 2-szeres párosítás feladat súlyozatlan változatára. Ennek a dolgozatnak fő eredményeként a 3.11. Tételben bebizonyítjuk, hogy a válasz nem, konkrétabban ha $\alpha < \frac{950}{949}$, akkor a súlyozatlan változat egy α-közelítéséből P=NP következne. Mivel a maximális d-távolságú párosítás feladatra visszavezethető a 2-szeres párosítás feladat, ezért a 3.11. Tételből ennek a közelíthetetlensége is következik. A visszavezetést a 3.7. Állítás bizonyításában mutatjuk be.

A 3.3.2. fejezetben két egyszerű közelítő algoritmust mutatunk (egy k-közelítést minden k-ra, illetve egy $3/2$-közelítést $k = 2$-re), melyek szintén saját eredmények.

Ezt követően felírjuk a feladat egészértékű programozási modelljét, adunk egy felső becslést az egészértékűségi hézagra és egy C++ programmal keresünk minél nagyobb egészértékűségi hézaggal rendelkező példányokat.

3.3.1. Közelíthetetlenségi eredmények

Az alábbi tételben belátjuk, hogy a maximális 2-szeres párosítás feladatra nem létezik polinom idejű approximációs séma (ha P≠NP).

3.11. Tétel. *A maximális 2-szeres párosítás feladatot NP-nehéz α-approximálni, ha $\alpha < \frac{950}{949}$.*

Bizonyítás. A tétel igazolásához a 2. fejezetben tárgyalt 3.9. Tételt használjuk fel, mely a maximális 3-dimenziós párosítás feladat közelíthetetlenségéről szól 2-reguláris példányokon. Ezt a feladatot vezetjük vissza a 2-szeres párosítás feladatra egy L-visszavezetéssel.

Vegyük egy 2-reguláris 3-osztályú 3-uniform hipergráf hiperéleinek $\mathcal{H}$ halmazát háromszor, legyenek ezek $\mathcal{H}_X, \mathcal{H}_Y, \mathcal{H}_Z$. Egy $e \in \mathcal{H}$ hiperél három változata legyen $e^{(X)} \in \mathcal{H}_X$,

$e^{(Y)} \in \mathcal{H}_Y$ és $e^{(Z)} \in \mathcal{H}_Z$. Tekintsük a következő példányát a 2-szeres párosítás feladatnak: $G = (S, T; E)$ páros gráfra $S = \mathcal{H}_X \cup Y \cup \mathcal{H}_Z$ és $T = X \cup \mathcal{H}_Y \cup Z$. Minden $e \in \mathcal{H}$-ra legyen $e^{(X)}e^{(Y)}$ és $e^{(Y)}e^{(Z)} \in E(G)$, illetve minden $u \in U$ csúcsot, ahol $U \in \{X, Y, Z\}$ kössük össze az őt tartalmazó két hiperél $\mathcal{H}_U$-beli változatával. Legyen $S_1 = \mathcal{H}_X \cup Y$, $S_2 = Y \cup \mathcal{H}_Z$. Egy $e = (x, y, z) \in \mathcal{H}$-ra legyen $K_e = \{e^{(X)}e^{(Y)}, e^{(Z)}e^{(Y)}, xe^{(X)}, ye^{(Y)}, ze^{(Z)}\}$ élekből álló halmaz. A konstrukciót a 2a. és a 2c. ábra szemlélteti.

Tegyük fel, hogy létezik α-közelítő algoritmus a 2-szeres párosítás feladatra és legyen M egy α-közelítő megoldás G-ben. A továbbiakban belátjuk, hogy ennek felhasználásával tudunk mutatni egy $(\frac{1}{10/\alpha - 9})$-közelítő 3-dimenziós párosítást az eredeti hipergráfban, feltéve, hogy $\alpha < \frac{10}{9}$.

Hajtsuk végre M-en a következőt: minden $e \in \mathcal{H}$-ra, ha $|K_e \cap M| < 3$, akkor töröljük ki M-ből a K_e-beli éleket és vegyük be az $e^{(X)}e^{(Y)}$ és az $e^{(Y)}e^{(Z)}$ éleket. A módosítások során M megengedett marad és $|M|$ nem csökken, tehát M továbbra is α-közelítő. A végső M-re az is teljesül, hogy minden $e = (x, y, z) \in \mathcal{H}$-ra vagy $|K_e \cap M| = 2$, ekkor $K_e \cap M = \{e^{(X)}e^{(Y)}, e^{(Y)}e^{(Z)}\}$ vagy $|K_e \cap M| = 3$ és ekkor $K_e \cap M = \{xe^{(X)}, ye^{(Y)}, ze^{(Z)}\}$.

Készítsük el az F 3-dimenziós párosítást M-ből úgy, hogy legyen $e \in F$ pontosan akkor, ha $|K_e \cap M| = 3$. Az F ekkor megengedett 3-dimenziós párosítás, hiszen $e_1, e_2 \in \mathcal{H}$ hiperélekre $K_{e_1} \cap M = \{x_1e_1^{(X)}, y_1e_1^{(Y)}, z_1e_1^{(Z)}\}$ és $K_{e_2} \cap M = \{x_2e_2^{(X)}, y_2e_2^{(Y)}, z_2e_2^{(Z)}\}$ egyidejűleg csak akkor teljesülhet, ha $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ és $z_1 \neq z_2$ (mert M-ben ezen csúcsok fokszáma legfeljebb 1).

A fentiek alapján bármely G-beli M 2-szeres párosításhoz tudunk konstruálni egy F 3-dimenziós párosítást, melyre fennáll, hogy

$$|M| = 3|F| + 2 \cdot (2|Z| - |F|) = |F| + 4|Z|,$$

hiszen az F-beli hiperélekhez 3, a $\mathcal{H} \setminus F$-beliekhez 2 él tartozik M-ben. Ezt az M^* maximális 2-szeres párosításra és a hozzá tartozó F'-re alkalmazva $|M^*| = |F'| + 4|Z| \leq |F^*| + 4|Z|$ (ahol F^* a maximális 3-dimenziós párosítás). Fordítva is igaz: bármely F 3-dimenziós párosításhoz készíthető egy M 2-szeres párosítás, amelyre szintén fennáll a fenti összefüggés, tehát $|M^*| \geq |F^*| + 4|Z|$, amiből

$$|M^*| = |F^*| + 4|Z|$$

következik. Ezekből pedig az α-közelítő M-re és a hozzá tartozó F-re, valamint az optimális M^*-ra és F^*-ra

$$|M^*| - |M| = |F^*| - |F|. \quad (2)$$

Mohón választva független hiperéleket legalább $\frac{|\mathcal{H}|}{4}$ élt ki tudunk választani, tehát $|F^*| \geq \frac{|\mathcal{H}|}{4} = \frac{|Z|}{2}$. Mivel M-ben minden S-beli csúcs foka legfeljebb 1 lehet és $|S| = 2|\mathcal{H}| + |Z| = 5|Z|$, ezért $|M^*| \leq 5|Z|$. Összefoglalva tehát

$$|M^*| \leq 5|Z| \leq 10|F^*|. \tag{3}$$

Vizsgáljuk az $\frac{|F|}{|F^*|}$ hányadost:

$$\frac{|F|}{|F^*|} = \frac{|F^*| - (|M^*| - |M|)}{|F^*|} = 1 - \frac{|M^*| - |M|}{|F^*|} \geq$$

$$\geq 1 - 10\frac{|M^*| - |M|}{|M^*|} = 1 - 10\left(1 - \frac{|M|}{|M^*|}\right) = 1 - 10\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{10}{\alpha} - 9$$

ahol az első egyenlőség (2)-ből, az egyenlőtlenség (3)-ből következik. Ha $\alpha < \frac{10}{9}$, akkor $\frac{|F^*|}{|F|} \leq \frac{1}{10/\alpha - 9}$, tehát ha lenne egy α-közelítő algoritmusunk a 2-szeres párosítás feladatra, annak segítségével könnyen tudnánk mutatni egy $(\frac{1}{10/\alpha-9})$-közelítő 3-dimenziós párosítást. Mivel a 3.9. Tétel szerint a 2-reguláris 3-dimenziós párosítás feladatot NP-nehéz β-approximálni ha $\beta < \frac{95}{94}$, ezért a 2-szeres párosítás feladatot is biztosan NP-nehéz α-approximálni, ha $(\frac{1}{10/\alpha-9}) < \frac{95}{94}$. Ezt átrendezve megkaphatjuk, hogy a 2-szeres párosítás feladatot NP-nehéz α-approximálni, ha $\alpha < \frac{950}{949}$. □

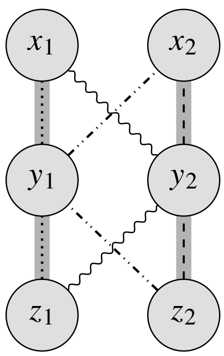
A bizonyításban használt visszavezetés egy L-visszavezetés, hiszen a 2.7. Definíció-beli (i) feltétel (3) miatt, (ii) feltétel pedig (2) miatt teljesül.

A 2-szeres párosítás feladathoz szorosan kapcsolódik a következő ismert probléma [20]:

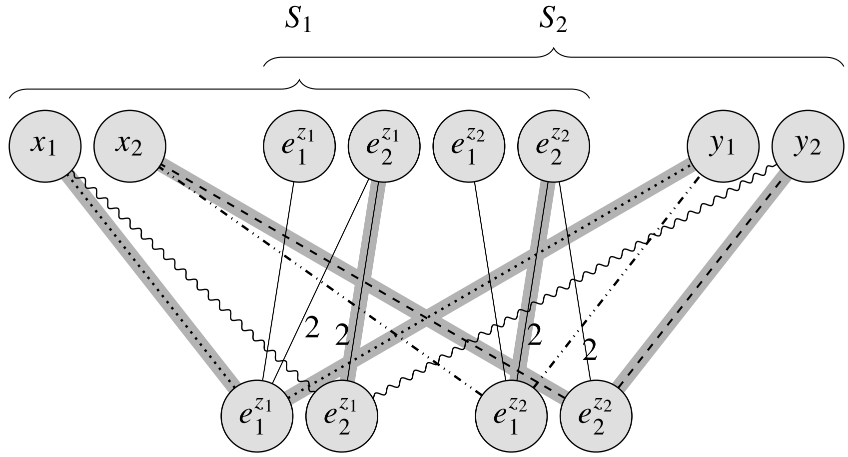
3.12. Definíció (maximális d-távolságú párosítás)**.** *Adott egy $G = (S, T; E)$ páros gráf, melyre $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ és egy $d \in \mathbb{Z}_+$ szám. Egy $M \subseteq E$ élhalmazt d-távolságú párosításnak (d-distance matching) nevezünk, ha az S-beli csúcsok foka M-ben legfeljebb 1, és minden $t \in T$-re, ha $s_it, s_jt \in M$, akkor $|i - j| \geq d$. A maximális d-távolságú párosítás problémában a maximális méretű d-távolságú párosítást keressük.*

A 3.11. Tétel felhasználásával könnyen beláthatjuk a maximális d-távolságú párosítás közelítésének nehézségére vonatkozó alábbi eredményt is. A bizonyításban bemutatott visszavezetést a [20] tartalmazza.

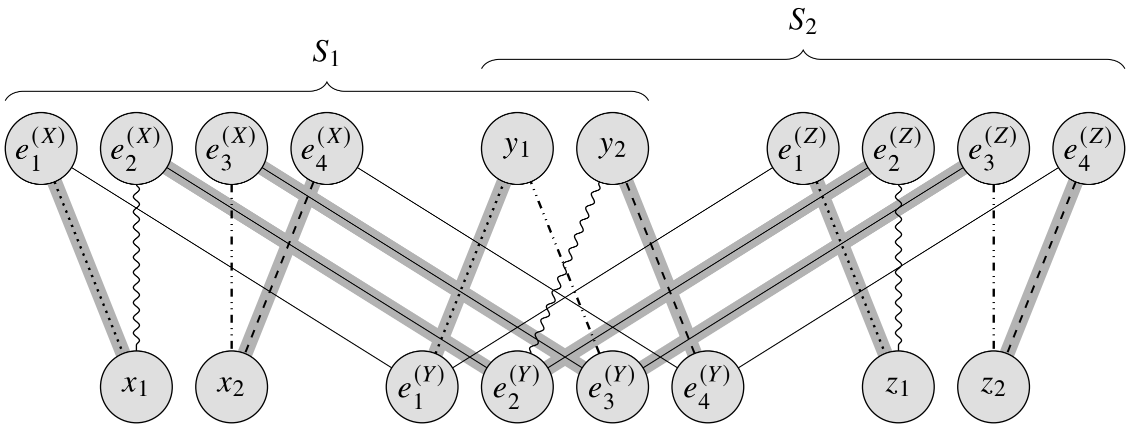
3.7. Állítás. *A maximális d-távolságú párosítás feladatot NP-nehéz α-approximálni, ha $\alpha < \frac{950}{949}$.*



(a) Egy 3-dimenziós párosítás feladat.



(b) Az (a)-hoz tartozó súlyozott 2-szeres párosítás feladat. A jelöletlen élek súlya 1.



(c) Az (a)-hoz tartozó 2-szeres párosítás feladat.

2. ábra. A 3.13. Tétel és a 3.11. Tétel bizonyításának szemléltetése. Minden hiperélhez egyedi stílusú vonal tartozik. Az (a) ábrán kiemelt 3-dimenziós párosításhoz tartozó megengedett megoldásokat a (b) és (c) ábrán is kiemelés jelzi.

Bizonyítás. Vezessük vissza a 2-szeres párosítás feladatot a d-távolságú párosítás feladatra. Legyen G a 2-szeres párosítás feladat egy példánya, tehát $G = (S, T; E)$ páros gráf, $S_1, S_2 \subseteq S$, $S_1 \cup S_2 = S$. Rendezzük sorba az S csúcsait úgy, hogy a sorrendben először az összes $S_1 \setminus S_2$-beli, majd az összes $S_1 \cap S_2$-beli és végül az összes $S_2 \setminus S_1$-beli csúcs szerepeljen (a felsorolt 3 halmazon belül a csúcsok sorrendje tetszőleges lehet). Vegyünk még hozzá S-hez $|S_1 \setminus S_2| + |S_2 \setminus S_1|$ darab izolált csúcsot, és ezeket is illesszük be a sorrendbe: $|S_2 \setminus S_1|$ darabot az első $S_1 \cap S_2$-beli csúcs elé és $|S_1 \setminus S_2|$ darabot az utolsó $S_1 \cap S_2$-beli csúcs után. Nevezzük az S halmaz így kapott kibővítését S'-nek és legyen $G' = (S', T; E)$.

Vegyük észre, hogy egyrészt S'-ben $S_1 \setminus S_2$ és $S_2 \setminus S_1$ halmazok között a sorbarendezés szerint $|S|$ darab csúcs van, tehát egy $S_1 \setminus S_2$-beli és egy $S_2 \setminus S_1$-beli csúcs távolsága (indexeik különbsége) legalább $|S| + 1$. Másrészt az $S_1 \cap S_2$ halmaz mindkét oldalán pontosan $|S_1 \setminus S_2| + |S_2 \setminus S_1|$ csúcs van, tehát egy $S_1 \cap S_2$-beli csúcs az S' egy tetszőleges csúcsától legfeljebb $|S| - 1$ távolságra lehet. Tehát az $s_i, s_j \in S'$ csúcsokra $|i - j| \geq |S|$ pontosan akkor teljesül, ha s_i és s_j közül az egyik $S_1 \setminus S_2$-ben, a másik $S_2 \setminus S_1$-ben van. Ezek alapján ha M egy G'-beli $|S|$-távolságú párosítás, akkor ha egy $t \in T$-re $s_i t, s_j t \in M$, akkor s_i és s_j közül az egyik $S_1 \setminus S_2$-ben, a másik $S_2 \setminus S_1$-ben van, tehát M egy 2-szeres párosítás G-ben. Fordítva is teljesül: ha M egy G-beli 2-szeres párosítás és $s_i t, s_j t \in M$, akkor s_i és s_j G'-beli távolsága legalább $|S|$, tehát M egy $|S|$-távolságú párosítás.

A G'-ben vett $|S|$-távolságú párosítások és a G-beli 2-szeres párosítások tehát pontosan ugyanazok az élhalmazok. Ha létezne α-közelítő algoritmus a maximális d-távolságú párosítás feladatra valamely $\alpha < \frac{950}{949}$-re, akkor az egyben egy α-approximáció lenne a maximális 2-szeres párosítás feladatra, amely a 3.11. Tétel miatt nem lehetséges (feltéve, hogy P≠NP). □

Ha a feladat súlyozott változatát vizsgáljuk, akkor az approximációs nehézséget már $\alpha < \frac{760}{759}$ esetben is tudjuk bizonyítani [21].

3.13. Tétel. *A maximális súlyú 2-szeres párosítás feladatot NP-nehéz α-approximálni, ha $\alpha < \frac{760}{759}$ és az élsúlyok között* 1*-es és* 2*-es is szerepel.*

Bizonyítás. A 2-reguláris 3-dimenziós párosítás feladat példányaiban a z-re illeszkedő két hiperélt nevezzük e_1^z-nek és e_2^z-nek minden $z \in Z$-re. Legyen a $G = (S, T; E)$ páros gráfra $S = X \cup \mathcal{H} \cup Y$, $T = \mathcal{H}$. Minden $s \in S \cap (X \cup Y)$-ra fusson egy 1-súlyú él s és az őt tartalmazó két T-beli hiperél között; szintén 1-súlyú éllel minden $z \in Z$-re kössük össze az $e_1^z \in S$ csúcsot $e_1^z \in T$-vel; valamint minden $z \in Z$-re vezessen $e_2^z \in S$-ből és $e_1^z \in T$-be és $e_2^z \in T$-be egy-egy 2-súlyú él. Legyen $S_1 = S \setminus Y$ és $S_2 = S \setminus X$.

Tegyük fel, hogy létezik α-közelítő algoritmus ($\alpha < \frac{8}{7}$) a maximális súlyú 2-szeres párosítás feladatra és legyen M egy α-közelítő megoldás. Minden $z \in Z$-re hajtsuk végre M-en a következő módosításokat:

1) ha $e_1^z \in T$ és $e_2^z \in T$ is 2-fokú M-ben, akkor cseréljük le az e_2^z-re illeszkedő két élt az $e_2^z e_2^z$ élre

2) ha $e_1^z \in T$ és $e_2^z \in T$ közül pontosan az egyik a 2-fokú M-ben, akkor a másikat kössük össze $e_2^z \in S$-sel és töröljük a többi rá illeszkedő élt

3) ha $e_1^z \in T$ és $e_2^z \in T$ közül egyik sem 2-fokú M-ben, akkor vegyük be $e_1^z e_1^z$ és $e_2^z e_2^z$ éleket M-be és töröljük a többi rájuk illeszkedő élt

A módosítások során M megengedett marad és $w(M)$ nem csökken, tehát M továbbra is α-közelítő. A végső M-re továbbá az is teljesül, hogy minden $z \in Z$-re $e_1^z \in T$ és $e_2^z \in T$ közül az egyikre egy 2-súlyú él illeszkedik, a másiknak pedig vagy két $S \cap (X \cup Y)$-beli, vagy egy $S \cap \mathcal{H}$-beli szomszédja van.

Készítsük el az F 3-dimenziós párosítást M-ből: legyen $(x, y, z) \in F$ pontosan akkor, ha valamely $i = 1, 2$-re $xe_i^z \in M$ és $ye_i^z \in M$. Az F ekkor megengedett 3-dimenziós párosítás, hiszen M-ben az 1)-es módosítások miatt e_1^z és e_2^z közül legfeljebb az egyik lehet 2-fokú, a $t \in T$ pontok fokszáma pedig legfeljebb 1 lehet M-ben.

Ezek alapján bármely M G-beli 2-szeres párosításhoz elkészíthető az F 3-dimenziós párosítás, melyekre $w(M) = 2|Z| + 2|F| + (|Z| - |F|) = 3|Z| + |F|$ teljesül (hiszen M-ben a T-beli csúcsok felére, azaz $|Z|$ db csúcsra 2-súlyú él illeszkedik, T másik felében pedig pontosan $|F|$ db csúcsnak 2 a foka és $|Z| - |F|$ csúcsnak 1) és fordítva: bármely F-hez lehet konstruálni olyan M-et, melyek között ugyanez fennáll. Ebből tehát az α-közelítő M-re és a hozzá tartozó F-re

$$w(M) = 3|Z| + |F|$$

teljesül. Legyen F^* a maximális 3-dimenziós párosítás, M^* pedig a maximális súlyú 2-szeres párosítás G-ben. A fentiek miatt M^*-ra és F^*-ra is igaz, hogy

$$w(M^*) = 3|Z| + |F^*|.$$

Ezekből pedig

$$w(M^*) - w(M) = |F^*| - |F| \tag{4}$$

következik. Mivel M-ben a T-beli csúcsokra illeszkedő élek összsúlya legfeljebb 2 lehet, ezért $w(M^*) \leq 2|\mathcal{H}|$, a 3-dimenziós párosítás feladatban pedig $|F^*| \geq \frac{|\mathcal{H}|}{4}$, tehát

$$w(M^*) \leq 2|\mathcal{H}| \leq 8|F^*|. \tag{5}$$

A (4) és (5) felhasználásával a 3.11. Tétel bizonyításához hasonlóan vizsgálhatjuk az $\frac{|F|}{|F^*|}$ hányadost:

$$\frac{|F|}{|F^*|} = 1 - \frac{w(M^*) - w(M)}{|F^*|} \geq 1 - 8\frac{w(M^*) - w(M)}{w(M^*)} = \frac{8}{\alpha} - 7$$

Ebből $\frac{|F^*|}{|F|} \leq \frac{1}{8/\alpha - 7}$ (ha $\alpha < \frac{8}{7}$), tehát ha lenne egy α-közelítő algoritmusunk a maximális súlyú 2-szeres párosítás feladatra, annak segítségével könnyen tudnánk mutatni egy $(\frac{1}{8/\alpha-7})$-közelítő 3-dimenziós párosítást. Mivel a 2-reguláris 3-dimenziós párosítás feladatot NP-nehéz β-approximálni ha $\beta < \frac{95}{94}$, ezért a maximális súlyú 2-szeres párosítás feladatot is biztosan NP-nehéz α-approximálni, ha $(\frac{1}{8/\alpha-7}) < \frac{95}{94}$. Ezt átrendezve megkaphatjuk, hogy a maximális súlyú 2-szeres párosítás feladatot NP-nehéz α-approximálni, ha $\alpha < \frac{760}{759}$. □

Ez a bizonyítás kisebb módosításokkal úgy is elmondható, hogy a 2-es súlyok helyett $(2-\varepsilon)$ súlyokat használunk, ahol ε kicsi pozitív szám. A gondolatmenet annyiban módosul, hogy amikor az 1) lépést hajtjuk végre, akkor $w(M)$ érték csökkenni fog, méghozzá minden lépésben ε-nal. A módosítások után tehát $(2-\varepsilon)|Z| + 2|F| + |Z| - |F| = (3-\varepsilon)|Z| + |F|$ lesz az M-beli élek összértéke. Viszont mivel 1) legfeljebb $|F|$-szer történhet meg, ezért az α-közelítő M-re és a hozzá tartozó F-re

$$w(M) - \varepsilon \cdot |F| \leq (3-\varepsilon)|Z| + |F|,$$

az optimális M^*-ra és F^*-ra pedig felírhatjuk, hogy

$$(3-\varepsilon)|Z| + |F^*| \leq w(M^*),$$

melyekből

$$|F^*| - |F| \leq w(M^*) - w(M) + \varepsilon \cdot |F|.$$

Az $\frac{|F|}{|F^*|}$ becslése tehát:

$$\frac{|F|}{|F^*|} \geq \frac{|F^*| - (w(M^*) - w(M) + \varepsilon \cdot |F|)}{|F^*|} = 1 - \frac{w(M^*) - w(M)}{|F^*|} - \varepsilon \cdot \frac{|F|}{|F^*|} \geq$$

$$\geq 1 - 8\frac{w(M^*) - w(M)}{w(M^*)} - \varepsilon \cdot \frac{|F|}{|F^*|} = \frac{8}{\alpha} - 7 - \varepsilon \cdot \frac{|F|}{|F^*|}$$

Tehát $\frac{|F^*|}{|F|} \leq \frac{1+\varepsilon}{8/\alpha-7}$ (ha $\alpha < \frac{8}{7}$). Ha lenne egy α-közelítő algoritmusunk az 1 és $(2-\varepsilon)$ súlyokkal súlyozott 2-szeres párosítás feladatra, akkor rögtön tudnánk mutatni egy $(\frac{1+\varepsilon}{8/\alpha-7})$-közelítő 3-dimenziós párosítást. Ebből az előzőhöz hasonló gondolatmenettel következik, hogy a feladatot NP-nehéz α-approximálni, ha $\alpha < \frac{760}{94\cdot\varepsilon+759}$. Ennek csak legfeljebb akkora ε-ra van értelme, amire még a jobb oldal > 1, amiből $\varepsilon < \frac{1}{94}$ következik. Minél kisebb tehát ε, annál nagyobb α-ra tudjuk belátni, hogy az 1 és $(2-\varepsilon)$ súlyokkal ellátott 2-szeres párosítás feladatot NP-nehéz α-approximálni.

Azonban azt is beláttuk, hogy már a súlyozatlan esetet is nehéz α-approximálni, ha $\alpha < \frac{950}{949}$, ezért ha $\frac{1}{1+\varepsilon} \cdot \frac{760}{759} < \frac{950}{949}$, tehát $\varepsilon > \frac{1}{470}$, akkor a súlyozatlan esetből származó becslés jobb lesz, mint a $(2-\varepsilon)$-os bizonyításból származó.

Összefoglalva tehát beláttuk, hogy a (súlyozott vagy súlyozatlan) maximális 2-szeres párosítás feladatot NP-nehéz α-approximálni, ha $\alpha < \frac{950}{949}$ és ha a súlyozott változatot nézzük, ahol a súlyok között 1 és $(2-\varepsilon)$ is előfordul $0 \leq \varepsilon < \frac{1}{470}$-re, akkor ennél jobbat is mondhatunk: a feladatot már akkor is NP-nehéz α-approximálni, ha $\alpha < \frac{760}{94 \cdot \varepsilon + 759}$.

3.3.2. Közelítő algoritmusok

A $G = (S, T; E)$ páros gráfban egy $U \subseteq S$ csúcshalmazra jelöljük $(U, T)_G$-vel az $U \cup T$ csúcshalmaz által feszített részgráfot.

Legyen $G = (S, T; E)$ páros gráf, $w : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény. Az $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k$, ahol $S_1, S_2, \ldots, S_k \subseteq S$. Minden $i = 1, 2, \ldots, k$-ra $M_i \subseteq E$ legyen egy maximális súlyú párosítás az $(S_i, T)_G$ gráfon, M pedig legyen $M_1, M_2 \ldots, M_k$ közül a maximális súlyú.

3.8. Állítás. *Az M ekkor egy k-közelítő súlyozott k-szoros párosítás G-ben.*

Bizonyítás. Az M megengedett k-szoros párosítás, hiszen M-et az (S_i, T) csúcshalmazokra megszorítva párosítást kapunk minden $i = 1, \ldots, k$-ra. Jelöljük M^*-gal a maximális súlyú k-szoros párosítást. Az M^*-ra felírhatjuk, hogy $M^* = M'_1 \cup M'_2 \cup \ldots \cup M'_k$, ahol $M'_i \subseteq E$ egy $(S_i, T)_G$ részgráfon vett párosítás. Minden $i = 1, 2, \ldots, k$-ra $w(M'_i)$ érték felülről becsülhető $w(M_i)$-vel (hiszen M_i a maximális súlyú párosítás $(S_i, T)_G$ gráfon), amiből

$$w(M^*) \leq w(M_1) + w(M_2) + \ldots + w(M_k) \leq k \cdot w(M).$$

□

Ha $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$, $T = \{t\}$, minden $i = 1, 2, \ldots, k$-ra $s_i \in S_i$, de $s_i \notin S_j$ ha $j \neq i$, minden s_i szomszédos t-vel, valamint $w \equiv 1$, akkor a fenti eljárással kapott $w(M) = 1$, az optimális M^*-ra pedig $w(M^*) = k$, tehát ekkor a fenti becslés pontos.

Ha $k = 2$, akkor jobbat is tudunk mutatni. Legyen $M_1 \subseteq E$ egy maximális súlyú párosítás az $(S_1, T)_G$ gráfban, $M_2 \subseteq E$ pedig egy maximális súlyú párosítás az $(S_2, T)_G$ gráfban. Vegyünk egy-egy maximális súlyú párosítást az $(S_1 \setminus S_2, T)_G$ és $(S_2 \setminus S_1, T)_G$ gráfokon, jelölje ezeket rendre M_{12} és M_{21}. Legyen az $M \subseteq E$ a maximális súlyú élhalmaz M_1, M_2 és $(M_{12} \cup M_{21})$ közül.

3.9. Állítás. *Az M ekkor egy $3/2$-közelítő súlyozott 2-szeres párosítás G-ben.*

Bizonyítás. Az M megengedett, hiszen M_1, M_2 és $(M_{12} \cup M_{21})$ élhalmazokra is teljesül, hogy megszorítva őket az (S_1, T) és az (S_2, T) csúcshalmazokra párosításokat kapunk. Jelöljük az optimális 2-szeres párosítást M^*-gal. Az M^* felírható, mint egy $(S_1, T)_G$ gráfon vett párosítás és egy $(S_2 \setminus S_1, T)_G$ gráfon vett párosítás uniója, amiből

$$w(M^*) \leq w(M_1) + w(M_{21}),$$

hiszen M_1 és M_{21} a maximális súlyúak ezeken a részgráfokon. Hasonlóan: M^* egy $(S_2, T)_G$ gráfon és egy $(S_1 \setminus S_2, T)_G$ gráfon vett párosítás uniója, tehát

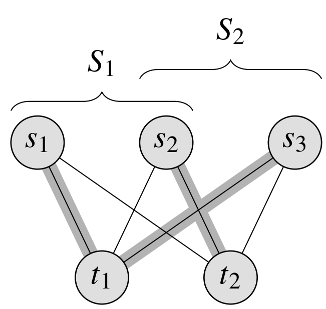
$$w(M^*) \leq w(M_2) + w(M_{12}).$$

A fenti két megállapításból pedig $2w(M^*) \leq w(M_1)+w(M_2)+w(M_{12})+w(M_{21}) \leq 3w(M)$, tehát

$$w(M^*) \leq \frac{3}{2} w(M).$$

□

Ha $S = \{s_1, s_2, s_3\}$, $S_1 = \{s_1, s_2\}$, $S_2 = \{s_2, s_3\}$, $T = \{t_1, t_2\}$ és $G = (S, T; E)$ a 3. ábrán látható teljes páros gráf, $w \equiv 1$, akkor a fenti eljárással kapott $w(M) = 2$, az optimális $w(M^*) = 3$, tehát ekkor a fenti becslés pontos.



3. ábra. Példa egy 2-szeres párosítás feladatra, amelyben a $3/2$-közelítő algoritmus pontos, tehát az optimum $2/3$-át találja meg. A maximális 2-szeres párosítást kiemelés jelzi.

3.3.3. Egészértékűségi hézag

Írjuk fel a súlyozott k-szoros párosítás problémát mint egészértékű programozási (IP) feladat. Tartozzon minden $e \in E$ élhez egy $x_e \in \mathbb{Z}_+$ változó. A természetes modell:

$$\max \sum_{e \in E} w_e x_e$$

$$x \in \mathbb{Z}_+^E$$

$$\sum_{\substack{e=ts \in E \\ s \in S_i}} x_e \leq 1 \quad \forall t \in T \ \ \forall i \in \{1, \ldots, k\}$$

$$\sum_{e=ts \in E} x_e \leq 1 \quad \forall s \in S$$

Jelöljük $\mathrm{OPT_{IP}}$-vel az optimális egészértékű megoldás értékét és $\mathrm{OPT_{LP}}$-vel az egészértékűségi feltétel elhagyásával kapott lineáris programozási feladat (LP relaxált) optimális megoldásának értékét. Egészértékűségi hézagnak (integrality gap) nevezzük az $\frac{\mathrm{OPT_{LP}}}{\mathrm{OPT_{IP}}}$ hányadost. Az alábbi állításban erre adunk egy felső becslést.

3.10. Állítás. *A súlyozott 2-szeres párosítás probléma bármely példányára felírt IP feladatra és annak LP relaxáltjára* $\frac{OPT_{LP}}{OPT_{IP}} \leq \frac{3}{2}$.

Bizonyítás. Az állítás abból az egyszerű megállapításból következik, hogy egy páros gráfban vett maximális súlyú párosítás feladat IP modelljére és annak LP relaxáltjára $\mathrm{OPT_{IP}} = \mathrm{OPT_{LP}}$. Ez azért igaz, mert egy páros gráf incidenciamátrixa teljesen unimoduláris, és a maximális súlyú párosításra felírt LP feladat jobb oldala is egész, ezért az erős bázismegoldások egészek lesznek [22, 149. oldal].

A súlyozott 2-szeres párosítás feladat relaxáltjának egy optimális megoldása előáll mint az $(S_1, T)_G$ gráfon és az $(S_2 \setminus S_1, T)_G$ gráfon vett relaxált maximális súlyú párosítás feladatok egy-egy megoldásának uniója. Ezen LP feladatok optimális értékei az első megállapítás alapján megegyeznek az IP optimumokkal. Ebből a 3.9. Állításban használt jelölésekkel és gondolatmenettel:

$$\mathrm{OPT_{LP}} \leq w(M_1) + w(M_{21}),$$

valamint hasonlóan:

$$\mathrm{OPT_{LP}} \leq w(M_2) + w(M_{12}).$$

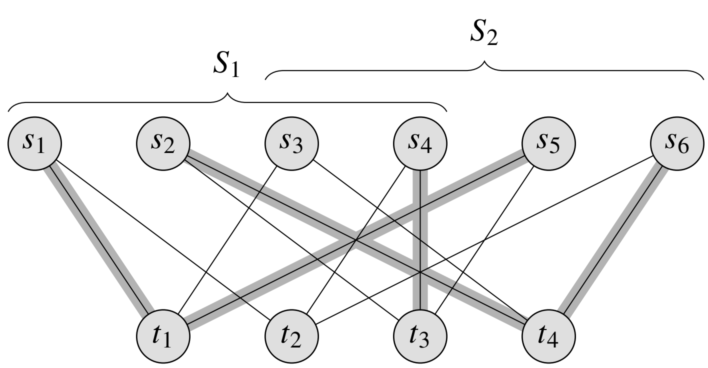
Ezekből pedig $2\mathrm{OPT}_{\mathrm{LP}} \leq 3w(M) \leq 3\mathrm{OPT}_{\mathrm{IP}}$, hiszen M egy megengedett IP megoldás. Tehát

$$\frac{\mathrm{OPT}_{\mathrm{LP}}}{\mathrm{OPT}_{\mathrm{IP}}} \leq \frac{3}{2}$$

és ezt állítottuk. $\square$

Nem tudjuk, hogy ez a felső becslés pontos-e, tehát hogy van-e olyan példánya a maximális 2-szeres párosítás feladatnak, amelyre az LP optimum és az IP optimum hányadosa pontosan $3/2$. Természetesen adódik a kérdés, hogy mi az a legkisebb szám, amit a 3.10. Állításban a $3/2$ helyére írhatunk. Mivel $\mathrm{OPT}_{\mathrm{LP}} \geq \mathrm{OPT}_{\mathrm{IP}}$ (hiszen minden IP megoldás LP megoldás is), ezért a felső becslés biztosan legalább 1. Ennek javításához egy programmal kerestük a feladatnak olyan példányát, melyre az egészértékűségi hézag minél nagyobb.

A C++ nyelven írt program alapötlete az volt, hogy egy adott $G = (S, T; E)$ páros gráfra végignéztük az S csúcsainak összes lehetséges beosztását az S_1 és S_2 halmazokba (ahol $S_1, S_2 \subseteq S$, $S_1 \cup S_2 = S$), minden beosztásra megoldottuk a IP és a relaxált LP feladatot $w \equiv 1$ súlyfüggvénnyel, majd az optimumok hányadosaként megkaptuk az adott példányhoz tartozó egészértékűségi hézagot. A gráfok implementálásához a LEMON könyvtárat [23] használtuk, a lineáris és egészértékű programozási feladatokat a CPLEX optimalizáló szoftvercsomag [24] segítségével oldottuk meg. Ezt lefuttattuk izomorfia erejéig az összes $G = (S, T; E)$ páros gráfra, melyre $|S| \leq 7$, $|T| \leq 5$ és maximumot kerestünk a kapott egészértékűségi hézagok között. A program futását párhuzamosítással gyorsítottuk. A maximális értékhez tartozó példány a 4. ábrán látható, az egészértékűségi hézag értéke erre $6/5$, mely eredmény megegyezik az eddig ismert legnagyobb korláttal [20]. A program forráskódja elérhető a [25] linken.



4. ábra. Példa a $6/5$ nagyságú egészértékűségi hézagra. Az optimális LP megoldás az $x \equiv 1/2$, az optimális IP megoldást az ábrán kiemelés jelöli.

3.3.4. Nyitott kérdések

Zárásként felsorolunk néhány nyitott kérdést a maximális k-szoros párosítás feladattal kapcsolatban, melyekkel a továbbiakban érdemes lehet foglalkozni.

A 3.3.3. fejezetben már említett megoldandó feladat az egészértékűségi hézag pontosabb becslése, melyről jelenleg annyit tudunk, hogy az összes példány felett vett maximális értéke $6/5$ és $3/2$ között van. Legjobban persze annak örülnénk, ha egy pontos felső becslést tudnánk mondani rá.

Gondolkozhatunk a fentieknél jobb közelítő algoritmusokon. Esetleg $k \geq 3$-ra is lehetne k-nál jobb közelítést mondani, hasonló ötlettel például, mint amit a 2-szeres párosítás feladatra adott $3/2$-közelítő algoritmusnál használtunk. Természetesen lehetséges, hogy teljesen más megközelítést érdemes használni jobb approximációs algoritmusok kidolgozására. Az is elképzelhető, hogy a 3.11. Tételt javítva, a jelenleg ismernél nagyobb konstansra is belátható, hogy kisebb α-ra nincs α-közelítő algoritmus (csak ha P=NP).

Érdekes lehet a gráfoknak különböző speciális osztályait vizsgálni és ezek között olyat keresni, melyre – akár csak néhány konkrét k értékre – hatékonyan meg tudjuk oldani a maximális k-szoros párosítás feladatot. Mi a helyzet például, ha a gráf egy fa?

Foglalkozhatunk a feladat általánosításaival is. Megkövetelhetjük például, hogy az (S_i, T) csúcshalmazokra megszorítva az élhalmazunk ne egy klasszikus párosítás legyen, hanem minden csúcson valami adott b fokszámkorlátnak tegyen eleget (ekkor $b = 1$-re visszakapjuk az eredeti feladatunkat). Egy másik általánosítás lehet, hogy a T halmazon is veszünk T_i részhalmazokat és minden (S_i, T_i) csúcshalmazra megszorítva követeljük meg, hogy párosítást kapjunk (ekkor ha $T = T_1 = \ldots = T_k$, akkor visszakapjuk a k-szoros párosítás feladatot).

Hivatkozások

[1] Katona Gyula, Recski András, Szabó Csaba. A számítástudomány alapjai. Typotex, 2002.

[2] Lovász László. Algoritmusok bonyolultsága. Tankönyvkiadó, 1990.

[3] András Frank. Connections in combinatorial optimization. Oxford University Press, 2011.

[4] Pierluigi Crescenzi, Viggo Kann, Riccardo Silvestri, Luca Trevisan. Structure in Approximation Classes. *SIAM Journal on Computing*, 1999, 28.5: 1759-1782.

[5] Petra Schuurman, Gerhard J. Woeginger. Approximation Schemes – A Tutorial. Technical Report Report Woe-65, Graz University of Technology, 2001.

[6] Király Zoltán. Algoritmuselmélet. Typotex, 2014.

[7] Giorgio Ausiello, Alberto Marchetti-Spaccamela, Pierluigi Crescenzi, Giorgio Gambosi, Marco Protasi, Viggo Kann. Complexity and Approximation. Springer, 2012.

[8] Ivanyos Gábor, Rónyai Lajos, Szabó Réka. Algoritmusok. Typotex, 1998.

[9] Christos H. Papadimitriou. Computational Complexity. Addison-Wesley, 1994.

[10] Viggo Kann. On the Approximability of NP-complete Optimization Problems. 1992. PhD Thesis, Royal Institute of Technology.

[11] Sanjeev Khanna, Rajeev Motwani, Madhu Sudan, Umesh Virkumar. On Syntactic versus Computational Views of Approximability. *SIAM Journal on Computing*, 1998, 28.1:164–191.

[12] William Duckworth, Nicholas C. Wormald, Michele Zito. A PTAS for the sparsest 2-spanner of 4-connected planar triangulations. *Journal of Discrete Algorithms*, 2003, 1.1: 67-76.

[13] William Duckworth, David F. Manlove, Michele Zito. On the Approximability of the Maximum Induced Matching Problem. *Journal of Discrete Algorithms*, 2005, 3.1: 79-91

[14] Brenda S. Baker. Approximation Algorithms for NP-Complete Problems on Planar Graph. *Journal of the ACM (JACM)*, 1994, 41.1: 153-180.

[15] Michele Zito. Induced Matchings in Regular Graphs and Trees. *International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1999, 89-101.

[16] Jack Edmonds. Paths, trees, and flowers. *Canadian Journal of mathematics*, 1965, 17: 449-467.

[17] Richard M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. *Complexity of Computer Computations*. Springer, 1972. 85-103.

[18] Viggo Kann. Maximum bounded 3-dimensional matching is MAX SNP-complete. *Information Processing Letters*, 1991, 37.1: 27-35.

[19] Miroslav Chlebík, Janka Chlebíková. Complexity of approximating bounded variants of optimization problems. *Theoretical Computer Science*, 2006, 354.3: 320-338.

[20] Péter Madarasi. Matchings under distance constraints I. Technical Report TR-2021-02, Egerváry Research Group, 2021.

[21] Péter Madarasi. The Simultaneous Assignment Problem. arXiv:2105.09439, 2021.

[22] Frank András, Király Tamás. Operációkutatás. Typotex, 2013.

[23] Balázs Dezső, Alpár Jüttner, Péter Kovács. LEMON – an open source C++ graph template library. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 2011, 264.5: 23-45.

[24] IBM ILOG CPLEX Optimization Studio CPLEX User's Manual. 2017.

[25] `https://lemon.cs.elte.hu/repos/ketszeresParositas`