

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

SÁRAI ZOLTÁN ISTVÁN

Algebrai görbék
Komplex projektív görbék génusza

SZAKDOLGOZAT

Matematika BSc, Matematikus szakirány

Témavezető:

NÉMETHI ANDRÁS, egyetemi tanár

Geometriai Tanszék



Budapest, 2013.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Némethi András professzor úrnak, hogy még másodévben felkeltette érdeklődésemet az algebrai görbék elmélete iránt, és hogy azóta folyamatosan ellát segítséggel és ösztönzéssel. Köszönöm továbbá a konzultációkat, az iránymutatást és építő megjegyzéseket mellyel jelentős mértékben hozzájárult a szakdolgozat elkészítéséhez. Szintén köszönöm, hogy a témában, a szakdolgozat kereteit meghaladó, további érdekes kutatási területekre hívta fel a figyelmemet.

Szeretném továbbá megköszönni csoporttársaimnak, Benyó Krisztiánnak és Huszár Kristófnak, hogy a segédprogramokkal, formai követelményekkel és egyéb technikai részletekkel kapcsolatos kérdéseimmel bármikor fordulhattam hozzájuk. Elengedhetetlen segítséget nyújtottak.

Előszó

Egy komplex algebrai görbe egy komplex együtthatós kétváltozós- (illetve projektív esetben háromváltozós, homogén) polinom nullhelyeinek halmaza, melyet a valós eset által leírt "görbe vonal" analógiájára neveztek el. Tanulmányozásuk a matematika számos területének eszközeit használja fel: az algebra, a komplex függvénytan, az általános-, differenciál- illetve algebrai topológia módszereit ötvözve vizsgálhatjuk tulajdonságaikat.

Bár e görbék komplex értelemben tényleg egydimenziósak, valós nézőpontból, nem precíz megközelítéssel "felületekként" képzelhetjük el őket. Könnyen belátható, hogy a sima görbék ténylegesen felületeket, azaz 2 dimenziós differenciálható sokaságokat írnak le a komplex síkban, azaz a 4 dimenziós valós térben. A topológiából ismert tény, hogy a kétdimenziós irányítható sokaságokat egyértelműen karakterizálja a génuszuk, és mint látni fogjuk, sima görbék esetén a génusz kiszámolható az őket definiáló polinom ismeretében.

A dolgozat második részében látni fogjuk, hogy tetszőleges szinguláris görbéhez is sokaság (Riemann-felület) rendelhető. Ez a felület a szingularitások rezolúciója, melyből a görbe bizonyos pontok azonosításával visszakapható. A Noether-formulával a definiáló polinomból kiszámíthatjuk a rezolúció génuszát, így a valós számsíkra vett, a tényleges képről nem sokban árulkodó kivételüknél pontosabb képet kaphatunk a görbéink valódi alakjáról.

A dolgozatban szereplő bizonyítások, tételek sok, más témából ismert fogalmat, állítást, tételt felhasználnak, ezeket a dolgozat törzsében általában nem részletezem, de a fontosabbakat a függelékben kimondom. Az első fejezetben csak az algebrai görbék tárgykörébe tartozó alapfogalmakra, segédtételekre térek ki. Azonban, mivel ezek sem kapcsolódnak legszorosabban a témához, a bizonyításokat itt nem részletezem. A hangsúlyosan a görbék topológiai tulajdonságairól, elsősorban a génuszról szóló tételeket természetesen már bizonyítani fogom.

Továbbá, mivel a felhasznált forrásaim angol nyelvűek voltak, sőt magyar nyelven alig fellelhetőek írások a témában, bizonyos fogalmaknál nem feltétlen bevett, elterjedt kifejezéseket használok, itt az egyértelműség kedvéért leírom a fogalom angol nevét is.

A bemutatott bizonyítások – ha másképp nem jelzem – *Frances Kirwan: Complex Algebraic Curves [1]* című művéből származnak, további fő forrásul pedig a *Gerd Fischer: Plane Algebraic Curves [2]* és *Brieskorn & Knörrer: Plane Algebraic Curves [3]* munkák szolgáltak.

1. Általános bevezető, alapfogalmak

1.1. Algebrai görbék a komplex síkon

Legyen $P(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$, azaz egy komplex kétváltozós polinom. Azt mondjuk, hogy $P(x, y)$ -nak nincs többszörös tényezője, ha nem írható fel $P(x, y) = (Q(x, y))^2 R(x, y)$ alakban, ahol $Q(x, y), R(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ és $Q(x, y)$ nem konstans.

1.1.1. Definíció ((affin) algebrai görbe). *Legyen $P(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ melynek nincs többszörös tényezője. Ekkor a $P(x, y)$ által definiált komplex algebrai görbe a $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : P(x, y) = 0\} \subset \mathbb{C}^2$ halmaz.*

A Hilbert-Nullstellensatz tétel következményeként, mely kimondja, hogy két polinom nullhelyeinek halmaza akkor és csak akkor egyezhet meg, ha az irreducibilis faktoraik – esetleg más kitevővel – megegyeznek, valamint a többszörös tényezők kizárása miatt megfogalmazhatjuk a következő tételt:

1.1.2. Tétel. *A $P(x, y)$ és $Q(x, y)$ többszörös tényező nélküli polinomok akkor és csak akkor határozzák meg ugyanazt az algebrai görbét \mathbb{C}^2 -ben, ha egymás skalárszorosai, azaz $P(x, y) = \lambda Q(x, y)$ valamely $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ konstansra.*

Más megközelítés is elképzelhető: a görbéknek kétváltozós polinomok ekvivalenciaosztályai felelnek meg, és két görbe ekvivalens, ha csak skalárszoróval térnek el egymástól. Ekkor megengedjük a többszörös tényezőket a definiáló polinomokban, a megfelelő görbeívekre multiplicitással tekintünk. Ez a megközelítés főleg a görbék metszéspontjainak vizsgálatokor szükséges, a Bézout-tételben és a metszetmultiplicitás definiálásakor így érdemes kezelni objektumainkat.

1.1.3. Definíció (görbe foka). *A $P(x, y)$ által definiált C görbe fokán a P polinom fokát értjük.*

1.1.4. Definíció (irreducibilis görbe). *A C görbe irreducibilis, ha az őt definiáló polinom, $P(x, y)$ az. Ha $P(x, y)$ felbomlik irreducibilis faktorokra, akkor az azok által definiált görbéket nevezzük a C irreducibilis komponenseinek.*

1.1.5. Definíció (szingularitás). *Az $(a, b) \in C$ pontot szingulárisnak nevezzük, ha $\frac{\partial}{\partial x} P(a, b) = 0 = \frac{\partial}{\partial y} P(a, b)$. C szingularitásainak halmazát $Sing(C)$ -vel jelöljük. A C görbét simának mondjuk, ha $Sing(C) = \emptyset$, azaz minden pontja sima (nem szinguláris).*

$P(x, y)$, polinom lévén, tetszőleges (a, b) pontban véges Taylor-sorba fejthető:

$$P(x, y) = \sum_{i, j \geq 0} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} P(a, b) \frac{(x-a)^i (y-b)^j}{i! j!}.$$

1.1.6. Definíció (görbe multiplicitása adott pontban). *A $P(x, y)$ által definiált C görbe multiplicitása az (a, b) pontban az a legkisebb pozitív egész m , melyre $\frac{\partial^m P}{\partial x^i \partial y^j}(a, b) \neq 0$ valamely $i \geq 0, j \geq 0$ esetén, ahol $i + j = m$.*

A fenti m -re a

$$\sum_{i+j=m} \frac{\partial^m P}{\partial x^i \partial y^j}(a, b) \frac{(x-a)^i (y-b)^j}{i!j!} \quad (1.1)$$

polinom homogén m -edfokú, így szétesik m lineáris polinom szorzatára. Az ezen polinomok által definiált egyenesek a C -hez (a, b) -ben húzott érintők. Nyilvánvaló, hogy (a, b) akkor és csak akkor sima, ha $m = 1$, ekkor C -hez egyetlen, a

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a, b)(x-a) + \frac{\partial P}{\partial y}(a, b)(y-b) = 0$$

egyenlet által meghatározott érintő egyenes húzható (a, b) -ben. Egy szinguláris (a, b) pontot *közönségesnek* (*ordinary*) mondunk, ha az (1.1) polinomnak nincs többszörös tényezője, azaz (a, b) -ben m különböző érintő húzható.

1.1.7. Definíció (lokális irreducibilitás). *A C görbe a p pontban lokálisan irreducibilis, ha a p -beli hatványsora nem bontható fel egységektől – azaz invertálható soroktól – különböző formális hatványsorok szorzatára. Ha ez nem teljesül, akkor a faktorok által definiált lokális objektumok a lokális irreducibilis komponensek. Ha $P = FG$, ahol $F, G \in \mathbb{C}\{x, y\}$ és F lokálisan irreducibilis, akkor az F által definiált lokális irreducibilis komponens az $\{(x, y) \in B_p(\varepsilon) : F(x, y) = 0\}$ halmaz, ahol $B_p(\varepsilon)$ a p körüli megfelelően kicsi ε sugarú gömb.*

1.2. Algebrai görbék a projektív síkon

1.2.1. Definíció (komplex projektív tér). *Az n -dimenziós komplex projektív tér (\mathbf{P}^n vagy $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$) a $n+1$ dimenziós komplex vektortér (\mathbb{C}^{n+1}) 1 dimenziós altereinek halmaza.*

Másszóval $\mathbf{P}^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$, azaz

$$\mathbf{P}^n = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] : (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\}$$

és $[x_0 : x_1 : \dots : x_n] = [y_0 : y_1 : \dots : y_n]$ akkor és csak akkor, ha $\exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, melyre $x_j = \lambda y_j$, ($j = 0, \dots, n$).

Megjegyzés: A \mathbb{C}^{n+1} -ről örökölt hányadostopológiával \mathbf{P}^n egy n -dimenziós összefüggő kompakt differenciálható sokaság.

Az algebrai görbék tanulmányozásakor elsősorban \mathbf{P}^2 játszik fontos szerepet.

1.2.2. Definíció (projektív algebrai görbe). Legyen $P(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$ nem konstans, homogén polinom melynek nincs többszörös tényezője. Ekkor a $P(x, y, z)$ által definiált komplex algebrai görbe a $C = \{[x : y : z] \in \mathbf{P}^2 : P(x, y, z) = 0\} \subset \mathbf{P}^2$ halmaz.

Megjegyzés: Egy d -edfokú polinom $P(x, y, z)$ homogén, ha $P(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^d P(x, y, z)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ konstansra. Ez alapján C független az $[x : y : z]$ pontok (x, y, z) koordinátázásától.

Mint az affin görbék esetén, itt is skalárral való szorzástól eltekintve egyértelmű a megfeleltetés a polinomok és az általuk definiált görbék között. Továbbá többszörös tényezővel rendelkező polinomok esetén is tekinthetjük a definiált görbét, melynek komponenseihez a tényezők kitevői multiplicitást rendelnek.

A további definíciók is az affin esettel analóg módon mennek:

1.2.3. Definíció (görbe foka, irreducibilitása). A $P(x, y, z)$ homogén polinom által definiált C görbe fokán a P fokát értjük. A C görbe irreducibilis, ha az őt definiáló polinom, $P(x, y, z)$ az. Ha $P(x, y, z)$ felbomlik irreducibilis faktorokra, akkor az azok által definiált görbéket nevezzük a C irreducibilis komponenseinek.

1.2.4. Definíció (szingularitás). Az $[a : b : c] \in C$ pontot szingulárisnak nevezük, ha $\frac{\partial P}{\partial x}(a, b, c) = \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) = \frac{\partial P}{\partial z}(a, b, c) = 0$. C szingularitásainak halmazát $Sing(C)$ -vel jelöljük. A C görbét simának mondjuk, ha $Sing(C) = \emptyset$, azaz minden pontja sima (nem szinguláris).

1.2.5. Definíció (görbe multiplicitása adott pontban). A $P(x, y, z)$ által definiált C görbe multiplicitása az $[a : b : c]$ pontban az a legkisebb pozitív egész m melyre $\frac{\partial^m}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} P(a, b, c) \neq 0$ valamely $i \geq 0$, $j \geq 0$, $k \geq 0$ esetén, ahol $i + j + k = m$.

1.2.6. Definíció (sima pontbeli érintő). A \mathbf{P}^2 -beli C görbe $[a : b : c]$ sima pontbeli érintője a

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a, b, c)x + \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c)y + \frac{\partial P}{\partial z}(a, b, c)z = 0$$

egyenlet által leírt (projektív) egyenes.

1.3. Az affin és projektív görbék viszonya

Bár az affin- és projektív görbék nem azonosak (hiszen már a befoglaló terük sem egyezik meg), mégis nagyon szoros kapcsolat van közöttük. Véve \mathbf{P}^2 , mint sokaság természetes atlaszát, annak ϕ térképezése diffeomorf módon megfelelteti az $U = \{[x : y : z] : z \neq 0\}$ nyílt halmazt \mathbb{C}^2 -tel, ahol:

$$\phi : U \rightarrow \mathbb{C}^2 \quad \phi[x : y : z] = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right) \quad \text{és inverze} \quad (x, y) \mapsto [x : y : 1].$$

Az U komplementere \mathbf{P}^2 -ben a $z = 0$ egyenlettel leírt projektív egyenes, azaz \mathbf{P}^2 felfogható, mint \mathbb{C}^2 és \mathbf{P}^1 diszjunkt uniója, ez utóbbira, mint a "végtelenben lévő pontok egyenesére" gondolva.

Amennyiben \tilde{C} a $P(x, y, z)$ (nemkonstans, homogén d -edfokú) polinom által definiált projektív görbe, \tilde{C} metszete U -val - a fenti megfeleltetés segítségével - a $P(x, y, 1)$ (kétváltozós, nem homogén) polinom által definiált affin görbe lesz. Ha z nem osztja $P(x, y, z)$ -t, azaz \tilde{C} nem tartalmazza a $z = 0$ egyenest, $P(x, y, 1)$ is d -edfokú. Fordítva, egy d -edfokú $Q(x, y) = \sum_{r+s \leq d} a_{r,s} x^r y^s$ polinom által definiált C affin görbéhez homogenizálással található $\tilde{C} \in \mathbf{P}^2$, melynek U -val vett metszete C . A \tilde{C} -t a következő homogén polinom definiálja:

$$\tilde{Q} = z^d Q\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = \sum_{r+s \leq d} a_{r,s} x^r y^s z^{d-r-s}.$$

Ezen görbe $z = 0$ -val vett metszéspontjait tekinthetjük a C "végtelen távoli pontjainak". Ezzel kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítettünk a "végtelenben lévő egyenest" nem tartalmazó projektív-, illetve az affin algebrai görbék között.

Ez a kapcsolat a görbék esetleges szingularitásai között is érvényesül.

1.3.1. Lemma (Euler-képlet). *Legyen $P(x, y, z)$ egy homogén d -edfokú polinom. Ekkor*

$$x \frac{\partial}{\partial x} P(x, y, z) + y \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, z) + z \frac{\partial}{\partial z} P(x, y, z) = dP(x, y, z).$$

Az egyenlet közvetlenül adódik az $P(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^d P(x, y, z)$ λ -szerinti deriválásából a $\lambda = 1$ helyen, és ennek segítségével könnyen belátható az alábbi fontos lemma:

1.3.2. Lemma (szingularitások viszonyáról). *Legyen $[a : b : c]$ a*

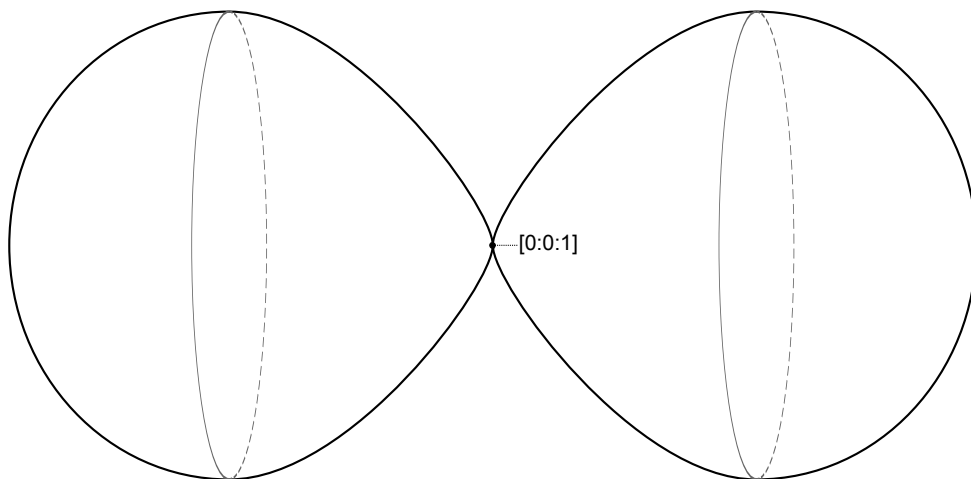
$\tilde{C} = \{[x : y : z] \in \mathbf{P}^2 : P(x, y, z) = 0\}$ *projektív görbe egy pontja. Ha $c \neq 0$ akkor $[a : b : c]$ akkor és csak akkor sima pontja \tilde{C} -nek, ha $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ sima pontja a $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : P(x, y, 1) = 0\}$ affin görbének. Továbbá, a \tilde{C} -hez $[a : b : c]$ -ben húzott projektív érintő metszete az $U = \{[x : y : z] \in \mathbf{P}^2 : z \neq 0\}$ -val azonosított \mathbb{C}^2 -tel a C görbe $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ -beli érintője \mathbb{C}^2 -ban.*

Későbbi bizonyításainkban fontos lesz, hogy mind az affin, mind a projektív görbék a befoglaló térből öröklődően Hausdorffak. További különbség azonban az affin és a projektív eset között, hogy míg egy (komplex) affin görbe, bár zárt, sosem kompakt, egy projektív mindig az, hisz a kompakt \mathbf{P}^2 egy zárt részhalmaza.

1.4. Példák egyszerű görbékre

Mielőtt továbbmennénk, lássunk pár egyszerű példát! A projektív alak most még több esetben hihetetlennek tűnhet, azonban a dolgozat végére ezek is könnyen leellenőrizhető, alátámasztott állításokká válnak majd.

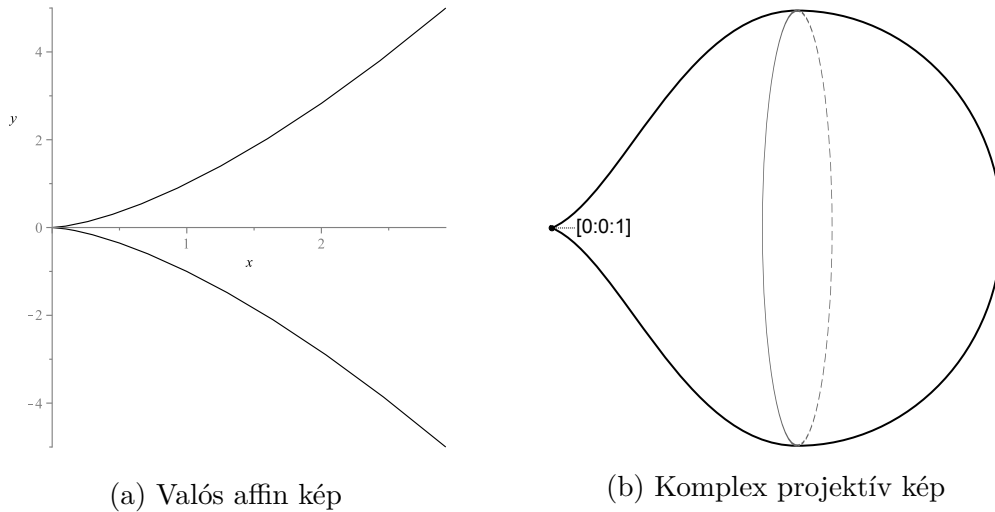
- Egy lineáris polinom affin esetben egy komplex egyenest (azaz valós síkot) definiál. Projektív esetben a létrejövő görbe egy komplex projektív egyenes, ami a kétdimenziós gömbfelülettel, S^2 -vel diffeomorf.
- Egy sima másodfokú (azaz irreducibilis) görbe is egy projektív egyenessel diffeomorf alakzat, azaz szemléletesen egy kétdimenziós gömb.
- Két nem egybeeső egyenes uniója, azaz két (egymástól nem csak skalárszorzóban különböző) polinom szorzata által definiált görbe \mathbf{P}^2 -ben két, egymást egy pontban transzverzálisan metsző gömbfelületet ad. Ezt az 1.1 ábrán igyekszem bemutatni, azonban a metszéspont környezetét kétdimenzióban lerajzolva nem tudjuk jól szemléltetni a valóságot. Ugyanis itt a két görbeiv külön-külön sima, így az ábrán is "ívesre" kéne rajzolni azokat, ugyanakkor a görbeívek transzverzálisan metszik egymást, tehát a metszéspontbeli érintők nem eshetnek egybe (sőt jelen esetben merőlegesek egymásra) ezt pedig valamiféle "csúcsossággal" lehetne érzékeltetni.



1.1. ábra. Az $xy = 0$ egyenlettel definiált projektív görbe stilizált képe

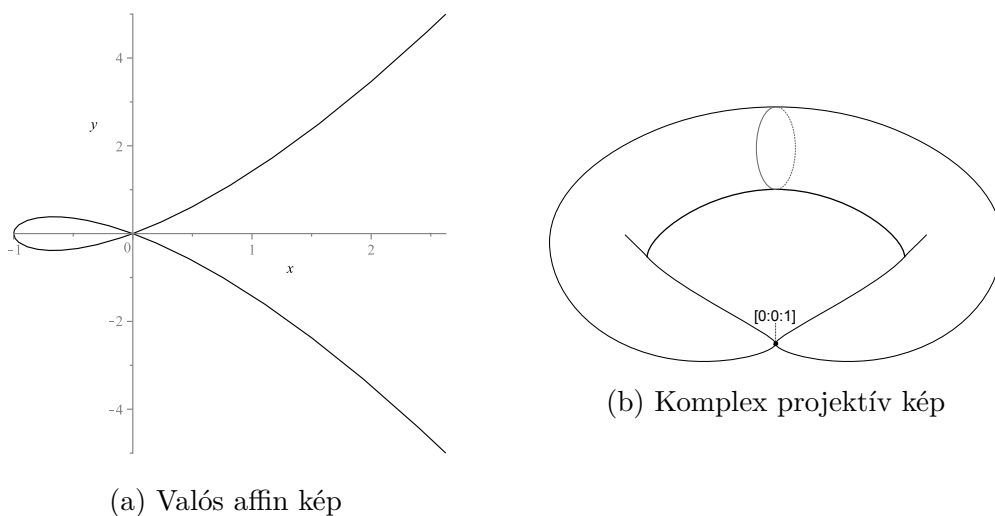
- Egy sima harmadfokú görbe egy tóruszt alkot. Ez a 2.3.1-es fok-génusz formulából rögtön következik.
- Tekintsük a $P(x, y, z) = x^3 - y^2z$ polinom által definiált projektív görbét. Ennek egyetlen szingularitása a $[0 : 0 : 1]$ pont és itt a szingularitások egy nevezetes fajtája, a *cusp* figyelhető meg. Továbbá itt csak egy lokálisan irreducibilis

komponens van. Az 1.2b ábrán a "csúcs" most indokolt (nem csak technikai kényszer, mint korábban), itt a görbe nem látható el sima struktúrával.



1.2. ábra. A $x^3 - y^2z$ polinom által definiált *cuspidális* harmadfokú görbe

- Végül a szingularitások másik leggyakoribb fajtáját, a *közönséges dupla pontot* figyelhetjük meg a $P(x, y, z) = x^3 + x^2z - y^2z$ polinom által definiált, úgynevezett *nodális* görbén. Ebben az esetben is a $[0 : 0 : 1]$ pont az egyetlen szingularitás, azonban itt két lokálisan irreducibilis komponens található, melyek transzverzálisan metszik egymást. Kicsit más megközelítéssel, a görbepont multiplicitásának bevezetésekor tárgyaltak szerint itt a multiplicitás 2 és az érintők különbözőek. A $[0 : 0 : 1]$ pontban megint fennáll az $xy = 0$ esetről leírt ábrázolási nehézség.



1.3. ábra. A $x^3 + x^2z - y^2z$ polinom által definiált *nodális* harmadfokú görbe

1.5. Algebrai görbék metszetéről, Bézout-tétel

A későbbi tételeinkhez alapvető fontosságú lesz két görbe metszéspontjainak a vizsgálata. Ebben a *rezultáns* lesz segítségünkre. Mint ismeretes két egyváltozós polinomnak akkor és csak akkor van nemkonstans közös tényezője (így, mivel \mathbb{C} -beli polinomokat vizsgálunk, gyöke), ha rezultánsuk nulla. Most legyen $P(x, y, z)$ és $Q(x, y, z)$ egy n -ed és egy m -edfokú homogén polinom, melyre $P(1, 0, 0) \neq 0 \neq Q(1, 0, 0)$. Ezt görbék definiáló polinomjait vizsgálva is feltehetjük az általánosság elvesztése nélkül, hisz a projektív sík (3-)tranzitivitása miatt egy tetszőleges, a görbéken nem rajta lévő pontot az $[1 : 0 : 0]$ -ba vihetünk egy projektív transzformációval. Ilyenkor P és Q akkor és csak akkor rendelkezik közös faktorial, ha az x változóban vett rezultánsuk, az $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z)$ y, z változós, legfeljebb nm fokú homogén polinom azonosan nulla. Továbbá P, Q, S polinomokra mind egyváltozóban, mind háromváltozós homogén esetben igaz $\mathcal{R}_{P,QS} = \mathcal{R}_{P,Q}\mathcal{R}_{P,S}$. Ezen ismeretek birtokában, az $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z)$ nullhelyeinek vizsgálatával könnyű belátni, hogy a *projektív síkon bármely két görbének létezik metszéspontja*, és – ha a görbéknek nincs közös komponensük – a metszéspontok száma legfeljebb a két görbe fokának szorzata. Ez utóbbi észrevétel (melyet gyakran a Bézout-tétel gyenge változatának neveznek) pontosítása a Bézout-tétel, mely kimondja, hogy a metszéspontok száma multipllicitással számolva *pontosan* a két görbe fokának szorzatával egyenlő. Ehhez szükséges a *metszetmultipllicitás* definíciója, előbb azonban jöjjön 2 egyszerű, de fontos következménye a gyenge Bézout-tételnek:

1.5.1. Következmény.

- (i) Egy sima görbe \mathbf{P}^2 -ben mindig irreducibilis.
- (ii) A $P(x, y, z)$ által definiált irreducibilis C görbének \mathbf{P}^2 -ben csak véges sok szinguláris pontja lehet.

Az (i) oka, hogy ha a görbénk (definiáló polinomja) felbomlik komponensekre (tényezőkre) akkor azok metszéspontja könnyen ellenőrizhetően szinguláris.

A (ii) indoklása egy fokkal hosszabb: Feltehető, hogy $[1 : 0 : 0] \notin C$. Ekkor a $Q(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}P(x, y, z)$ egy $(n - 1)$ -edfokú homogén polinom, melynek C , így P irreducibilitása miatt nem lehet közös tényezője P vel. Ekkor a gyenge-Bézout miatt C és a Q által definiált D görbe legfeljebb $n(n - 1)$ pontban metszik egymást, és $Sing(C) \subset C \cap D$.

Rátérhetünk a metszetmultipllicitás vizsgálatára. Most célravezetőbb megengedni a definiáló polinomokban a többszörös tényezőket, a definíció helyes marad ebben az esetben is, és a számolásokat könnyebb úgy végezni, ha ezeket is tudjuk kezelni.

1.5.2. Definíció (A metszetmultiplicitás). *A C és D görbék metszetmultiplicitása a $p \in \mathbf{P}^2$ pontban a következő 6 feltételt kielégítő, egyértelmű $I_p(C, D)$ szám:*

- (i) $I_p(C, D) = I_p(D, C)$.
- (ii) $I_p(C, D) = \infty$ ha p a C és D egy közös komponensén fekszik, egyébként $I_p(C, D) \in \mathbb{N}$.
- (iii) $I_p(C, D) = 0$ akkor és csak akkor, ha $p \notin C \cap D$.
- (iv) Két különböző egyenes az egyetlen metszéspontjukban 1 multiplicitással metszi egymást.
- (v) Ha C_1 a $P_1(x, y, z)$, C_2 a $P_2(x, y, z)$ és C a $P = P_1P_2$ által van definiálva, akkor $I_p(C, D) = I_p(C_1, D) + I_p(C_2, D)$.
- (vi) Ha C a $P(x, y, z)$ n -edfokú, D a $Q(x, y, z)$ n -edfokú ($m \geq n$) és E a $PR + Q$ m -edfokú polinom által van definiálva ($R(x, y, z)$ homogén $(m - n)$ -edfokú polinom), akkor $I_p(C, D) = I_p(C, E)$.

A definíció egyértelműsége közvetlenül levezethető a feltételrendszerből, az $I_p(C, D)$ létezéséhez pedig elég egy, a feltételeknek megfelelő kiszámítási módszert megadni:

1.5.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy C és D nem rendelkezik közös komponenssel, és válasszuk a projektív koordinátákat úgy, hogy teljesüljön az alábbi 3 feltétel:*

- (a) $[1 : 0 : 0] \notin C \cup D$.
- (b) $[1 : 0 : 0]$ nem esik egyetlen, a $C \cap D$ két pontját összekötő egyenesre.
- (c) $[1 : 0 : 0]$ nem esik C vagy D p -beli érintőjére bármely $p \in C \cap D$ esetén.

Ekkor tetszőleges $p = [a : b : c] \in C \cap D$ esetén az $I_p(C, D)$ a legnagyobb k egész, melyre $(bz - cy)^k$ osztja az $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z)$ rezultánst.

Megjegyzés: A metszetmultiplicitás lokális tulajdonság, csak a vizsgált pont környezetétől függ. Belátható, hogy ugyanezekkel a feltételekkel definiálható lokális komponensekre, azaz hatványsorok nullhelyeiként definiált objektumokra is.

1.5.4. Megjegyzés. Az általam leírt bizonyítások szinte kizárólag a rezultánsos kiszámítási módot használják, azonban sok más ekvivalens módszer létezik. Ezek helyességének belátásához elég leellenőrizni a metszetmultiplicitás definíciójánál előírt feltételeket. Lássunk pár példát, minden esetben legyen P és Q a két definiáló polinom.

- Tekintsük a kétváltozós komplex formális hatványsorok gyűrűjét, és faktoralizáljuk le a két definiáló polinom p pontbeli sorba fejtése (F , illetve G) által alkotott ideállal. Ennek a modulusnak a komplex dimenziója megadja a metszetmultiplicitást. Azaz képlettel: $I_p(F, G) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{(F,G)}$.
- Legyen a p pont $[a : b : 1]$ alakú, és tegyük fel, hogy adott az egyik polinom (Q) egy lokálisan irreducibilis komponensének (Q_1) lokális parametrizálása, azaz olyan $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvények, melyekre $f(0) = a$, $g(0) = b$ és elég kis t esetén, illetve p környezetében teljesül, hogy $Q_1(x, y, 1) = 0 \iff x = f(t)$ és $y = g(t)$ (ugyanazon t -re). Ekkor a Q_1 lokális görbeív és a P görbe metszetmultiplicitása a p pontban a t -változójú $P(f(t), g(t), 1)$ függvény gyökének multiplicitása a 0-ban.
- Az 1.5.5 tétel segítségével az $(i) - (vi)$ lépések felhasználásával elemien is kiszámolható a metszetmultiplicitás.
- Megfelelően kis ε esetén az $\frac{(F,G)}{|(F,G)|} |_{S_\varepsilon^3} : S_\varepsilon^3 \rightarrow S_1^3$ leképezés (\mathbb{Z} -)foka is a metszetmultiplicitást adja, ahol F, G a P, Q lokális sorba fejtése, S_ε^3 pedig a ε sugarú háromdimenziós gömbfelület.
- A két görbe által lokálisan definiált K_F és K_G csomók (erről részletesebb, bár még mindig nem teljesen precíz leírás a 7.1-es fejezetben található) hurkolódási száma is a metszetmultiplicitással egyenlő.

1.5.5. Tétel. *Legyen C és D két algebrai görbe, p pedig egy tetszőleges pont \mathbb{P}^2 -ben. Ekkor $I_p(C, D) = 1$ akkor és csak akkor, ha p nemszinguláris pontja mind C -nek, mind D -nek, és a két görbe p -beli érintője különbözik.*

Továbbá $I_p(C, D) \geq m_p(C)m_p(D)$, és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a két görbének nincs közös érintője p -ben.

Ezek után kimondhatjuk a fejezet fő tételét:

1.5.6. Tétel (Bézout). *Legyenek C és D n - illetve m -edfokú projektív algebrai görbék, melyeknek nincs közös komponense. Ekkor a fenti multiplicitással számolva pontosan nm metszéspontjuk van, azaz:*

$$\sum_{p \in C \cap D} I_p(C, D) = nm.$$

1.6. Inflexiós pontok

A későbbiekben szükségünk lesz az inflexiós pont fogalmára is, ezt görbék esetén a következőképp definiálhatjuk:

1.6.1. Definíció. Legyen $P(x, y, z)$ homogén d -edfokú polinom. P Hesse polinomja (Hessian) a $\mathcal{H}_P(x, y, z)$ polinom, ahol

$$\mathcal{H}_P(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} \partial_{x,x}P & \partial_{x,y}P & \partial_{x,z}P \\ \partial_{y,x}P & \partial_{y,y}P & \partial_{y,z}P \\ \partial_{z,x}P & \partial_{z,y}P & \partial_{z,z}P \end{pmatrix}$$

ahol például $\partial_{x,y}P = \partial_2\partial_1P$.

1.6.2. Definíció. A $P(x, y, z)$ által definiált C görbe $[a : b : c]$ pontját C inflexiós pontjának nevezzük, ha $\mathcal{H}_P(a, b, c) = 0$

1.6.3. Lemma. Ha $P(x, y, z)$ homogén polinomra $\deg(P) > 1$ akkor

$$z^2\mathcal{H}_P(x, y, z) = (d-1)^2 \det \begin{pmatrix} \partial_{x,x}P & \partial_{x,y}P & \partial_xP \\ \partial_{y,x}P & \partial_{y,y}P & \partial_yP \\ \partial_xP & \partial_yP & dP/(d-1) \end{pmatrix}.$$

Ez közvetlen következménye az 1.3.1-es Euler-képletnek.

Megjegyzések: Mivel a P homogén polinom $d \geq 2$ fokú, és így második deriváltjai homogén $(d-2)$ fokúak, így \mathcal{H}_P homogén $3(d-2)$ fokú.

Ha $\partial_yP(a, b, 1) \neq 0$ az $[a : b : 1] \in C$ pontban, akkor az implicit függvénytétele értelmében $P(x, y, 1)$ y -t lokálisan az x holomorf függvényeként meghatározza. Ekkor egyszerű számolás mutatja, hogy C -nek $[a : b : 1]$ pontosan akkor inflexiós pontja a fenti definíció szerint, ha e függvénynek a az analízisből ismert definíció szerint inflexiós pontja (azaz a második deriváltja a -ban 0). Tehát az itt bevezetett definíció bizonyos értelemben a már ismert fogalom általánosítása.

Továbbá a Bézout-tétel (1.5.6) felhasználásával az inflexiós pontok számáról is van információnk:

1.6.4. Tétel. Legyen C d -edfokú sima projektív görbe. Ekkor a következőket állíthatjuk:

- (i) $d = 1$ esetén (sőt, csak ekkor) C minden pontja inflexiós pont.
- (ii) Ha $d \geq 2$, akkor C -nek legfeljebb $3d(d-2)$ inflexiós pontja van.
- (iii) Ha $d \geq 3$, akkor C -nek van legalább egy inflexiós pontja.

2. Sima görbék topológiája, a fok-génusz formula

Ismeretes, hogy sima, n dimenziós differenciálható sokaságról m dimenziós sokaságba képező leképezés reguláris értékének (azaz olyan értékének, melynek ősképeiben minden pont reguláris, vagyis az adott pontban az érintőtereken indukált leképezés szürjektív) ősképe $(n - m)$ dimenziós differenciálható sokaság.

Definiálja a $P(x, y)$ a C sima affin görbét. Ekkor speciálisan a $P : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ polinomnak a 0 reguláris értéke, így a C egy komplex értelemben egydimenziós, valós értelemben kétdimenziós topologikus, sőt differenciálható sokaság. Egy speciálisabb, de jobban kidolgozott bizonyítás található a következő fejezetben (3.1.2 tétel). A komplex differenciálható struktúra jellegzetességei miatt egy ilyen sokaság mindig irányítható valós értelemben. Ha a projektív esetet tekintjük, ott a fentiek ugyanígy elmondhatók, ráadásul C kompakt, sőt összefüggő is lesz. (Az utolsó állítás bizonyítása is később, a 3.3.8 lemmában található.)

Szintén ismert topológiai tény, hogy egy kétdimenziós irányítható sokaságot az Euler-karakterisztikája, illetve ekvivalens módon a génusza karakterizálja. Hogyha az Euler-karakterisztika (χ) triangulációs definícióját használjuk (ekvivalens módon lehetne definiálni például a homológiacsoportok rangjainak segítségével) akkor

$$\chi = (\text{csúcsok száma}) - (\text{élek száma}) + (\text{lapok száma}),$$

mely nem függ a sokaság felháromszögelésétől. A génuszra, amely szemléletesen "a kétdimenziós gömbre ragasztott fogantyúk száma", fennáll: $g = (2 - \chi)/2$.

Ebben a fejezetben megmutatom, hogy egy sima görbe g génusza csak a definiáló polinom d fokától függ: $g = (d - 1)(d - 2)/2$.

2.1. \mathbf{P}^1 elágazó fedései

Egy lineáris polinom által definiált projektív görbe egy projektív egyenes, így homeomorf a kétdimenziós gömbbel, S^2 -tel, melynek génusza 0, így a formula $d = 1$ esetben helyes.

Legyen most C egy sima projektív görbe \mathbf{P}^2 -ben, melyet az egynél nagyobb fokú $P(x, y, z)$ definiál. Ekkor (esetleg megfelelő projektív transzformáció elvégzése után) feltehető, hogy $[0 : 1 : 0] \notin C$. Ekkor a $\phi : C \rightarrow \mathbf{P}^1$ függvény, ahol $\phi[x : y : z] = [x : z]$ egy jóldefiniált, szürjektív leképezés.

2.1.1. Definíció (elágazási szám, \sim pont (ramification index, \sim point)).

A $\nu_\phi[a : b : c]$ elágazási száma ϕ -nek az $[a : b : c] \in C$ pontban az y -változós $P(a, y, c)$ polinom $y = b$ gyökének multiplicitása. Az $[a : b : c]$ -t ϕ elágazási pontjának nevezük, ha $\nu_\phi[a : b : c] > 1$.

2.1.2. Megjegyzés.

- (i) $\nu_\phi[a : b : c] > 0$ akkor és csak akkor, ha $[a : b : c] \in C$.
- (ii) $\nu_\phi[a : b : c] > 1$ akkor és csak akkor, ha $P(a, b, c) = 0 = \frac{\partial}{\partial y}P(a, b, c)$, azaz ha $[a : b : c] \in C$, és az e pont beli érintő tartalmazza a $[0 : 1 : 0]$ pontot.
- (iii) $\nu_\phi[a : b : c] > 2$ akkor és csak akkor, ha

$$P(a, b, c) = 0 = \frac{\partial}{\partial y}P(a, b, c) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}P(a, b, c),$$

azaz ha $[a : b : c]$ inflexiós pontja C -nek és az e pont beli érintő tartalmazza a $[0 : 1 : 0]$ pontot.

Bizonyítás. (iii) Mivel $[a : b : c] \neq [0 : 1 : 0]$ ezért a vagy c nem 0. Feltehető, hogy $c \neq 0$. Ha $P(a, b, c) = 0 = \frac{\partial}{\partial y}P(a, b, c)$ akkor az 1.6.3 lemma miatt

$$\mathcal{H}_P(a, b, c) = \frac{(d-1)^2}{c^2} \det \begin{pmatrix} \partial_{x,x}P & \partial_{x,y}P & \partial_x P \\ \partial_{y,x}P & \partial_{y,y}P & 0 \\ \partial_x P & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{(d-1)^2}{c^2} (\partial_x P)^2 \partial_{y,y}P.$$

Az Euler képlet (1.3.1 lemma) miatt, hogyha $\frac{\partial}{\partial x}P(a, b, c) = 0$ akkor, mivel $c \neq 0$ és $[a : b : c] \in C$, így $\frac{\partial}{\partial z}P(a, b, c) = 0$, azaz $[a : b : c]$ szinguláris pont, ami ellentmondás. Így $\mathcal{H}_P(a, b, c) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}P(a, b, c) = 0$. \square

2.1.3. Definíció. Legyen R a ϕ elágazási pontjainak halmaza, ekkor a $\phi(R)$ halmazt ϕ kritikus értékeinek (branch locus) nevezzük, és maga a $\phi : C \rightarrow \mathbf{P}^1$ leképezés egy úgynevezett elágazó fedése (branched cover) \mathbf{P}^1 -nek.

2.1.4. Lemma. Tetszőleges $[a : c] \in \mathbf{P}^1$ pont ϕ szerinti inverz képe $\phi^{-1}([a : c])$ pontosan $d - \sum_{p \in \phi^{-1}([a : c])} (\nu_\phi(p) - 1)$ pontot tartalmaz. Speciálisan $\phi^{-1}([a : c])$ akkor és csak akkor áll d pontból, ha egyetlen pontja sem elágazási pont.

Bizonyítás. Egy C beli pont akkor és csak akkor van $\phi^{-1}([a : c])$ -ben, ha $[a : b : c]$ alakú, ahol $b \in \mathbb{C}$ kielégíti a $P(a, b, c) = 0$ egyenletet. Mivel $[0 : 1 : 0] \notin C$ ezért $P(0, 1, 0) \neq 0$, így feltehetjük, hogy $c = 1$. Ekkor $P(a, y, c)$ d -edfokú 1-főegyütthatós komplex polinom, így gyöktényezőkre bomlik: $P(a, y, c) = \prod_{1 \leq i \leq r} (y_i - b_i)^{m_i}$, ahol b_1, \dots, b_r különböző komplex számok és m_1, \dots, m_r olyan pozitív egészek, melyekre $m_1 + \dots + m_r = d$. Így $\phi^{-1}([a : c]) = \{[a : b_i : c] : 1 \leq i \leq r\}$ és $\nu_\phi[a : b_i : c] = m_i$, amiből következik az állítás. \square

2.1.5. Lemma.

(i) ϕ -nek maximum $d(d-1)$ elágazási pontja van.

(ii) Ha $\nu_\phi[a : b : c] \leq 2 \quad \forall [a : b : c] \in C$ esetén, akkor ϕ -nek pontosan $d(d-1)$ elágazási pontja van.

(iii) Megfelelő projektív transzformáció használatával elérhető, hogy $\nu_\phi[a : b : c] \leq 2 \quad \forall [a : b : c] \in C$ pontra.

Bizonyítás. (i) Mivel C sima, így irreducibilis, valamint mivel az elágazási szám bevezetésénél feltettük, hogy $[0 : 1 : 0] \notin C$, így $P(x, y, z)$ -ban az y^d együtthatója nem 0, így az y -szerinti parciális derivált $\partial_y P$ nem azonosan 0, sőt $(d-1)$ -edfokú, ezáltal nem osztható P -vel. Azaz C -nek és a $\partial_y P$ által generált D görbének nincs közös komponense, így, mivel a 2.1.2-es megjegyzés szerint az elágazási pontok halmaza $R = C \cap D$, a Bézout-tétel gyenge változata pont (i)-t mondja ki.

(ii) Most tegyük fel, hogy $\nu_\phi[a : b : c] \leq 2$ minden C -beli pontra. Elég belátnunk, hogy C és D minden metszéspontja 1 multiplicitású, ami az 1.5.5 szerint ekvivalens azzal, hogy mindkét görbének sima pontja, és az ottani érintők különbözőek. Tegyük fel, hogy valamelyik nem teljesül az $[a : b : c]$ metszéspontban. Ekkor tudjuk, hogy $P(a, b, c) = 0 = \partial_y P(a, b, c)$ és a $(\partial_{xy} P(a, b, c), \partial_{yy} P(a, b, c), \partial_{zy} P(a, b, c))$ vektor vagy 0, vagy skalárszorosa a $(\partial_x P(a, b, c), \partial_y P(a, b, c), \partial_z P(a, b, c))$ vektornak. Mindkét esetben $\partial_{yy} P(a, b, c) = 0$ így, ismét a 2.1.2 következményeként, $\nu_\phi[a : b : c] > 2$, ami ellentmondás.

(iii) Az 1.6.4 tételben láttuk, hogy egy görbének csak véges sok inflexiós pontja lehet. Ekkor egy projektív transzformációval elérhető, hogy $[0 : 1 : 0]$ ne fekszen C -n, sem az inflexiós pontokban a görbéhez húzott véges sok érintő egyikén sem, ami a 2.1.2 (iii) megjegyzés szerint ekvivalens az állításunkkal. \square

2.2. A génusz fogalma

Annak ellenére, hogy az Euler karakterisztika és a génusz elég gyakran használt topológiai fogalmak, mégis szeretném külön definiálni őket, főként mivel nagyon sok ekvivalens definíció létezik. Én az itt bevezetett definíciókat fogom használni a tételeim bizonyításához:

Jelölés: Legyen $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ a standard kétdimenziós szimplex, és $\Delta^0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x + y < 1\}$ annak belseje.

2.2.1. Definíció (C felháromszögelése). Legyen C sima görbe \mathbf{P}^2 -ben. C egy felháromszögelése (triangulation) a következőképp adható meg:

- (a) egy véges, nemüres V halmaza C -beli pontoknak (csúcsok/vertices),
- (b) egy véges, nemüres E halmaza e sima leképezéseknek, $e : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow C$ (élek/edges),
- (c) egy véges, nemüres F halmaza f sima leképezéseknek, $f : \Delta \rightarrow C$ (lapok/faces), melyekre teljesülnek a következő feltételek:
- (i) $V = \{e(0) : e \in E\} \cup \{e(1) : e \in E\}$, azaz a csúcsok az élek végpontjai;
- (ii) ha $e \in E$, akkor a megszorítás $e|_{(a,b)}$ egy homeomorfizmus a képre, nem tartalmaz V -beli csúcsot, és nincs közös pontja semelyik másik $\tilde{e} \in E$ él képével;
- (iii) ha $f \in F$, akkor a megszorítás $f|_{\Delta^0}$ egy homeomorfizmus $C \setminus \Gamma$ egy összefüggő K_f komponensére, ahol $\Gamma = \bigcup_{e \in E} e([0, 1])$ az élek képeinek összessége. Továbbá, ha $r : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ és $\sigma_i : [0, 1] \rightarrow \Delta$ ($i = 1, 2, 3$) a következő sima leképezések: $r(t) = 1 - t$, $\sigma_1(t) = (t, 0)$, $\sigma_2(t) = (1 - t, t)$, $\sigma_3(t) = (0, 1 - t)$, akkor vagy $f \circ \sigma_i$ vagy $f \circ \sigma_i \circ r$ egy él $e_i^f \in E$ ($i = 1, 2, 3$);
- (iv) Az $f \mapsto K_f$ leképezés egy bijekció; és
- (v) $\forall e \in E$ élre van pontosan egy $f_e^+ \in F$ amelyre $e = f_e^+ \circ \sigma_i$ valamely $i \in \{1, 2, 3\}$ esetén, és egy $f_e^- \in F$ amelyre $e = f_e^- \circ \sigma_i \circ r$ valamely $i \in \{1, 2, 3\}$ -ra.

Megjegyzés: A V , E , F halmazok végeességét a C kompaktsága miatt tehetjük fel. Az (v) feltétel pedig azt garantálja, hogy a háromszögelésünk "jól legyen irányítva". Továbbá annak ellenére, hogy nem kölcsönösen egyértelműen felelnek meg egymásnak, a leképezésként definiált objektumokat és a képüket megengedett "összemosni", azaz mindig az éppen kényelmes objektumot használni, hisz az egyértelműség nincs előírva.

2.2.2. Definíció (Euler-karakterisztika). Egy háromszögelés χ Euler-karakterisztikája a $\chi = |V| - |E| + |F|$ szám, ahol az $|A|$ az A halmaz elemszámát jelöli.

Megjegyzés: A következő részben látni fogjuk, hogy minden sima $C \subset \mathbf{P}^2$ görbének van felháromszögelése. A topológiából ismert tétel, hogy az Euler-karakterisztika nem függ a háromszögeléstől, csak a tér (jelen esetben C) tulajdonságaitól, így beszélhetünk a görbe $\chi(C)$ Euler-karakterisztikájáról. Továbbá az Euler-karakterisztika topológiai invariáns, hiszen egy homeomorfizmus két görbe között átviszi a háromszögelést.

2.2.3. Definíció (Génusz). A C sima projektív görbe génusza a $g = (2 - \chi)/2$ szám.

Ezen segédeszközök birtokában belevághatunk a fok-génusz formula bizonyításába.

2.3. A fok-génusz formula

2.3.1. Tétel (A fok-génusz formula). *Egy d -edfokú síma \mathbf{P}^2 -beli görbe χ Euler-karakterisztikájára, és g génuszára teljesül:*

$$\chi = d(3 - d) \text{ és } g = (d - 1)(d - 2)/2.$$

A definíciók alapján a tétel közvetlen következménye a következő tételnek:

2.3.2. Tétel. *Legyen C síma projektív görbe, $\deg(C) = d$. Ha $r \in \mathbb{Z}^+$ és $r \geq 3$ akkor C -nek van egy felháromszögelése $rd - d(d - 1)$ csúccsal, $3(r - 2)d$ éllel és $2(r - 2)d$ lappal.*

Ennek bizonyításához szükségünk lesz két lemmára:

2.3.3. Lemma. *Legyen $\{p_1, \dots, p_r\}$ tetszőleges $r \geq 3$ elemű ponthalmaz \mathbf{P}^1 -ben. Ekkor \mathbf{P}^1 -nek létezik egy felháromszögelése p_1, \dots, p_r csúcsokkal, $3r - 6$ éllel és $2r - 4$ lappal.*

Bizonyítás. r -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk.

Az $r = 3$ eset triviális, felhasználva, hogy $\mathbf{P}^1 \simeq S^2$. Három tetszőleges pontot például a geodetikussal összekötve egy megfelelő háromszögelést kapunk.

Ha $r > 3$, indukciós lépésként feltehetjük, hogy már van egy háromszögelésünk p_1, \dots, p_{r-1} csúcsokkal, $3r - 9$ éllel és $2r - 6$ lappal. Két eset lehetséges p_r helyzetét tekintve: valamelyik lap belsejében, illetve az egyik élen fekszik.

Ha $p_r \in f(\Delta^0)$ valamely f -re, akkor az $f^{-1}(p_r)$ -t a Δ csúcsaival összekötő szakaszok f általi képét megrajzolva megkapjuk az új háromszögelést, melynek eggyel több csúcsa és 3-mal több éle van, valamint egyik lapját 3 részre osztottuk, ami pont megfelel az állításnak.

Ha $p_r \in e(t)$ valamely e és t esetén, akkor e -t két éllel helyettesítve, valamint a fentihez hasonló módon az illeszkedő két lap 1 - 1 csúcsába behúzott 1 - 1 éllel ismét egy új háromszögelést kapunk, ahol 1 új csúcs szerepel, 1 élet eltöröltünk, de 4 új keletkezett, valamint 2 lapot 2 - 2 felé osztva összesen 2-vel növeltük a lapok számát. \square

2.3.4. Lemma. *Legyen $C = \{[x : y : z] \in \mathbf{P}^2 : P(x, y, z) = 0\}$ síma projektív görbe, mely nem tartalmazza a $[0 : 1 : 0]$ pontot, és legyen $\phi : C \rightarrow \mathbf{P}^1$ a $\phi[x : y : z] = [x : z]$ elágazó fedés. Tegyük fel, hogy (V, E, F) egy háromszögelése*

\mathbf{P}^1 -nek, amire $\phi(R) \subseteq V$ azaz minden kritikus érték csúcs. Ekkor van egy $(\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{F})$ háromszögelése C nek, amire

$$\tilde{V} = \phi^{-1}(V), \quad \tilde{E} = \{\tilde{e} : [0, 1] \rightarrow C : \tilde{e} \text{ folytonos, } \phi \circ \tilde{e} \in E\}$$

$$\text{és } \tilde{F} = \{\tilde{f} : \Delta \rightarrow C : \tilde{f} \text{ folytonos, } \phi \circ \tilde{f} \in F\}.$$

Továbbá a korábbi $\nu_\phi(p)$, valamint $\deg(C) = d$ jelöléssel fennáll

$$|\tilde{V}| = d|V| - \sum_{p \in R} (\nu_\phi(p) - 1), \quad |\tilde{E}| = d|E|, \quad |\tilde{F}| = d|F|.$$

Bizonyítás. Ellenőrizni fogjuk, hogy a fenti objektumok kielégítik a háromszögelés definícióját (2.2.1), valamint hogy az egyenlőségek fennállnak. Ehhez a fedésekre vonatkozó topológiai ismereteink lesznek segítségünkre, például az F.2.3 lemma. Ha $f \in F$, $p \in C$ és $\phi(p) = f(t)$ valamely, a csúcsoktól különböző t -re, akkor létezik egy egyértelmű folytonos leképezés $\tilde{f} : \Delta \rightarrow C$ hogy $\phi \circ \tilde{f} = f$ és $\tilde{f}(t) = p$. A 2.1.4 lemma értelmében $\phi^{-1}\{f(t)\}$ pontosan d pontból áll, hiszen $f(t)$ nem kritikus érték, mivel t nem csúcs. Így pontosan d darab folytonos $\tilde{f} : \Delta \rightarrow C$ leképezés létezik, melyre $\phi \circ \tilde{f} = f$, vagyis $|\tilde{F}| = d|F|$.

Azt is leszűrhetjük, hogy

$$\begin{aligned} C - \phi^{-1}(V) &= \phi^{-1}\{f(t) : f \in F, t \in \Delta \setminus \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}\} \\ &= \{\tilde{f}(t) : \tilde{f} \in \tilde{F}, t \in \Delta \setminus \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}\}. \end{aligned}$$

Speciálisan $G = \bigcup_{\tilde{f} \in \tilde{F}} \tilde{f}(\Delta)$ tartalmazza $C - \phi^{-1}(V)$ -t, és mivel $\phi^{-1}(V)$ véges a 2.1.4 lemma szerint, így G sűrű is C -ben. De Δ kompakt, így \tilde{f} folytonosságából adódóan $\tilde{f}(\Delta)$ is az, tehát G is, azaz G zárt, így $G = C$. Ebből következik, hogy $\phi^{-1}(V) = \{\tilde{f}(t) : \tilde{f} \in \tilde{F}, t \in \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}\}$. Ha $\tilde{f} \in \tilde{F}$, akkor $\phi \circ \tilde{f} \in F$, így vagy $\phi \circ \tilde{f} \circ \sigma_i \in E$ vagy $\phi \circ \tilde{f} \circ \sigma_i \circ r \in E$, ahol $i = 1, 2, 3$ és σ_i valamint r a 2.2.1 (iii) pontjában definiált leképezések. Ennek értelmében ha $\tilde{f} \in \tilde{F}$ akkor \tilde{E} definíciója miatt $\tilde{f} \circ \sigma_i \in \tilde{E}$ vagy $\tilde{f} \circ \sigma_i \circ r \in \tilde{E}$. Ezzel egyrészt igazoltuk a 2.2.1 (iii) feltételének második részét, másrészt ebből következik, hogy ha $t \in \{(0, 1), (1, 0), (0, 0)\}$ akkor $\tilde{f}(t) \in \{\tilde{e}(0) : \tilde{e} \in \tilde{E}\} \cup \{\tilde{e}(1) : \tilde{e} \in \tilde{E}\}$, azaz $\phi^{-1}(V) = \{\tilde{e}(0) : \tilde{e} \in \tilde{E}\} \cup \{\tilde{e}(1) : \tilde{e} \in \tilde{E}\}$, azaz a 2.2.1 (i) pontja teljesül.

A leképezés-felemelési lemma (F.2.2, F.2.3) értelmében, ha $e \in E$, $p \in C$ és $\phi(p) = e(t)$ valamely $t \in (0, 1) \subset \mathbb{R}$ esetén, akkor egyértelműen létezik olyan $\tilde{e} : [0, 1] \rightarrow C$ folytonos leképezés, melyre $\phi \circ \tilde{e} = e$ és $\tilde{e}(t) = p$, továbbá $\tilde{e}|_{(0,1)}$ homeomorfizmus a képére. A 2.2.1 (ii) feltételének második fele (az, hogy az "élek nem metszik egymást") a \tilde{e} egyértelműségéből következik. Továbbá, a 2.1.4 lemma miatt, ha $t \in (0, 1)$ akkor $e(t)$ -nek pontosan d ősképe van ϕ szerint, hisz $e(t)$ nem

kritikus érték, vagyis pontosan d darab $\tilde{e} : [0, 1] \rightarrow C$ leképezés van, melyre $\phi \circ \tilde{e} = e$. Így $|\tilde{E}| = d|E|$.

Az eddigiekből az is következik, hogy

$$\phi^{-1}\{e(t) : e \in E, t \in (0, 1)\} = \{\tilde{e}(t) : \tilde{e} \in \tilde{E}, t \in (0, 1)\},$$

így ha $\Gamma = \bigcup_{e \in E} e([0, 1]) = V \cup \{e(t) : e \in E, t \in (0, 1)\}$ és $\tilde{\Gamma} = \bigcup_{\tilde{e} \in \tilde{E}} \tilde{e}([0, 1])$, akkor $\phi^{-1}(\Gamma) = \phi^{-1}(V) \cup \{\tilde{e}(t) : \tilde{e} \in \tilde{E}, t \in (0, 1)\} = \tilde{\Gamma}$. Az F.2.2 lemma miatt ha $\tilde{f} \in \tilde{F}$ akkor az $\tilde{f}|_{\Delta^0}$ megszorítás egy homeomorfizmus a képre, ami egy összefüggő komponense $\phi^{-1}(f(\Delta^0))$ -nek, ahol $\phi \circ \tilde{f} = f$. Mivel $f(\Delta^0)$ egy összefüggő komponense a $\mathbf{P}^1 \setminus \Gamma$ halmaznak, így $\tilde{f}(\Delta^0)$ egy összefüggő komponense $\phi^{-1}(\mathbf{P}^1 \setminus \Gamma) = C \setminus \phi^{-1}(\Gamma) = C \setminus \tilde{\Gamma}$ -nak. Ezzel igazoltuk a (iii) feltétel első részét is. A (iv) feltétel teljesülése kijön az eredeti egyértelmű hozzárendelés valamint az adott p mellett az \tilde{f} egyértelműségéből, az (v)-höz pedig csak jól kell választanunk az össképek közül. Mivel $\phi(R) \subseteq V$ így a $|\tilde{V}| = d|V| - \sum_{p \in R} (\nu_\phi(p) - 1)$ állítás közvetlenül következik a 2.1.4 lemmából. \square

Ezen ismeretek birtokában rátérhetünk a 2.3.2 tétel bizonyítására:

A 2.3.2 tétel bizonyítása. Legyen $P(x, y, z)$ d -edfokú homogén polinom, amely a síma C görbét definiálja. A 2.1.5 lemma szerint egy megfelelő projektív transzformációval elérhető, hogy $[0 : 1 : 0] \notin C$, így a ϕ leképezés, ahol $\phi[x : y : z] = [x : z]$ jól értelmezett, és minden pontban $\nu_\phi[a : b : c] \leq 2$. Ugyanezen lemma szerint ekkor pontosan $d(d-1)$ elágazási pont van, $|R| = d(d-1)$.

A 2.3.3 lemma alapján $r \geq 3$, $r \geq d(d-1)$ esetén választhatjuk \mathbf{P}^1 -nek egy olyan (V, E, F) felháromszögelését, ahol $V \supseteq \phi(R)$, $|V| = r$, $|E| = 3r - 6$, $|F| = 2r - 4$. Ekkor a 2.3.3 lemma alapján C -nek van egy $(\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{F})$ háromszögelése, ahol $|\tilde{E}| = d|E| = 3(r-2)d$, $|\tilde{F}| = d|F| = 2(r-2)d$ és $|\tilde{V}| = d|V| - \sum_{p \in R} (\nu_\phi(p) - 1)$. Mivel $|R| = d(d-1)$ és $\forall p \in R$ esetén $\nu_\phi(p) = 2$, így $|\tilde{V}| = dr - d(d-1)$. \square

3. A szingularitások rezolúciója (Resolution of singularities)

Most, hogy a sima görbék génuszát már ki tudjuk számolni, így sematikus képet kaphatunk alakjukról, szeretnénk valahogy a szinguláris görbét is megvizsgálni. Ez, mint várható, jóval nehezebb feladat. Ebben a szakaszban egy C projektív görbéhez egy \tilde{C} kompakt Riemann felületet, az úgynevezett *szingularitások rezolúcióját* fogjuk rendelni. Megköveteljük, hogy létezzen egy $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ szürjektív leképezés, amire nézve $\pi^{-1}(\text{Sing}(C))$ egy véges ponthalmaz \tilde{C} -ben, és ezen halmaz komplementerére megszorítva π egy holomorf bijekciót ad C nemszinguláris részével (a Riemann-felületek alfejezetben tárgyalt definíció szerint). Ezt elég nagy kerülővel, nagyon absztrakt módon fogjuk tenni: először az összes, \mathbb{C} nyílt részhalmazáról \mathbb{C} -be képző meromorf függvényhez rendelünk Riemann-felületet, majd belátjuk, hogy a felület, amit bármely olyan $y(x)$ függvényhez rendeltünk mely a C -t definiáló $P(x, y, z)$ polinomra kielégíti a $P(x, y(x), 1) = 0$ relációt megfelel a fenti követelményeknek.

A kifejtésre kerülő fent felvázolt konstrukció Kirwan könyvéből származik [1]. Egy más megközelítésű bizonyítás olvasható Fischer könyvének [2] 9. fejezetében.

3.1. Riemann-felületek

Mivel Riemann-felületet szeretnénk rendelni az algebrai görbékhez, nem árt segítséggül gyorsan áttekinteni a témakör alapismereteit.

3.1.1. Definíció (felület). *A kétdimenziós topologikus sokaságokat felületeknek nevezzük. Azaz egy felület egy S Hausdorff topologikus tér, amely lokálisan homeomorf \mathbb{C} -vel (vagy ekvivalens módon \mathbb{R}^2 -tel).*

A „lokálisan homeomorf” kifejezést a következőképp kell érteni: tetszőleges $x \in S$ pontnak $\exists U$ nyílt környezete amely homeomorf \mathbb{C}^2 egy V nyílt részhalmazával. A $\phi : U \rightarrow V$ homeomorfizmust (oda-vissza folytonos invertálható leképezést) egy *térképezésnek* nevezzük. S egy Φ atlasza térképezéseknek egy olyan halmaza, melyek értelmezési tartományai együtt lefedik S -et, azaz $\Phi = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ ahol $S = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$. A Φ atlaszra a

$$\phi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}|_{\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

leképezéseket *áttérés-függvényeknek* nevezzük. Mivel az értelmezési tartomány egyértelmű, a megszorítást gyakran elhagyhatjuk a jelölésből. Az atlaszt *holomorf*nak

nevezzük, ha az áttérés-függvényei (melyek $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvények) holomorfak, azaz komplex értelemben deriválhatóak.

3.1.2. Tétel.

- (i) Ha C a $P(x, y)$ által definiált affin algebrai görbe \mathbb{C}^2 -ben, akkor $C \setminus \text{Sing}(C)$ -nek van holomorf atlasza.
- (ii) Ha C a $P(x, y, z)$ által definiált projektív algebrai görbe \mathbf{P}^2 -ben, akkor $C \setminus \text{Sing}(C)$ -nek van holomorf atlasza.

Bizonyítás. Csak a(ii) állítást bizonyítom, (i) teljesen analóg. Tegyük fel, hogy $[a : b : c] \in C \setminus \text{Sing}(C)$, azaz $P(a, b, c) = 0$ és mondjuk $\frac{\partial}{\partial y} P(a, b, c) \neq 0$. Ekkor az 1.3.1-es Euler-képlet alapján, ha $a = c = 0$ akkor $b = 0$, de $[0 : 0 : 0] \notin \mathbf{P}^2$, így feltehető, hogy $c \neq 0$. Ekkor a P homogenitásából adódóan $\frac{\partial}{\partial y} P(a/c, b/c, 1) = c^{-(d-1)} \frac{\partial}{\partial y} P(a, b, c) \neq 0$, ahol $d = \deg(P)$. Ekkor az implicit-függvénytétel (F.1.2) alapján a/c -nek létezik egy V , b/c -nek pedig egy W környezete \mathbb{C} -ben és egy holomorf $g : V \rightarrow W$ függvény, hogy $x \in V$ és $y \in W$ esetén $P(x, y, 1) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$. V -t és W -t elég kicsire választva elérhető, hogy $U = \{[x : y : 1] : x \in V, y \in W\}$ az $[a : b : c]$ pont egy nyílt környezete legyen $C \setminus \text{Sing}(C)$ -ben. Ekkor a $\phi : U \rightarrow V$, $\phi[x : y : z] = x/z$ függvény egy homeomorfizmus a $w \mapsto [w : g(w) : 1]$ inverzzel. Ez a gondolatmenet hasonlóképp megy a többi esetre is (másik parciális derivált nem nulla, illetve a koordináták közül másikról tesszük fel, hogy $\neq 0$). Minden esetben a megfelelő ϕ a következők egyike: x/y , y/x , y/z , z/x , z/y , és az inverz a megfelelő g -vel a következő alakot ölti: $w \mapsto [w : 1 : g(w)]$, $[1 : w : g(w)]$, $[g(w) : w : 1]$, $[1 : g(w) : w]$, $[g(w) : 1 : w]$. Ekkor az áttérés-függvények a következők: $w \mapsto w$, $1/w$, $g(w)$, $1/g(w)$, $w/g(w)$ vagy $g(w)/w$, ahol g holomorf, és a nevező az adott halmazon sehol sem tűnik el. Tehát az atlasz holomorf. \square

Megjegyzés: Ezzel speciálisan azt is beláttuk, hogy egy sima görbének van holomorf atlasza, azaz egy holomorf felület.

A holomorf atlasz segítségével definiálhatjuk a felületen értelmezett holomorf leképezéseket is.

3.1.3. Definíció (holomorf leképezések). *Legyen Φ egy holomorf atlasza az S felületnek. Ekkor egy folytonos $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ leképezés holomorf az $x \in S$ pontban a Φ atlaszra nézve, ha létezik Φ -ben egy térképezés $\phi : U \rightarrow V$ melyre $x \in U$ és az $f \circ \phi^{-1} : V \rightarrow \mathbb{C}$ függvény holomorf a $\phi(x)$ pontban a szokásos komplex függvénytani értelemben.*

Az f holomorf Φ -re nézve, ha minden pontban az. Az áttérés-függvények holomorfítása alapján ez pontosan akkor teljesül, ha $f \circ \phi_\alpha^{-1} : V_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf a Φ atlasz minden $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ térképe esetén.

Legyen S és T két felület a Φ és Ψ holomorf atlaszokkal. A folytonos $f : S \rightarrow T$ leképezést holomorfnek nevezzük, ha a $\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(W_\beta)) \rightarrow Z_\beta$ függvény holomorf Φ minden $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ és Ψ minden $\psi_\beta : W_\beta \rightarrow Z_\beta$ térképezése esetén.

Ugyanílyen módon definiálhatók a felületek közötti meromorf függvények is. Triviális továbbá, hogy holomorf leképezések (értelmes) kompozíciója holomorf, meromorfaké meromorf lesz.

3.1.4. Definíció (kompatibilis atlaszok). A Φ és Ψ holomorf atlaszokat S -en kompatibilisnek mondjuk, ha az S indentitásfüggvénye holomorf, mint az S_Φ -ből az S_Ψ -be képező-, valamint az ellenkező irányú leképezés is, ahol S_Φ az S alaphalmaz ellátva a Φ atlassszal.

Megjegyzés: Könnyedén ellenőrizhető, hogy a kompatibilitás ekvivalencia-reláció. Továbbá kompatibilis atlaszok esetén ugyanazon függvények holomorfak a felületen, sőt, fordítva is igaz, adott holomorf függvények esetén a szóba jöhető atlaszok kompatibilisek.

3.1.5. Definíció (Riemann-felület). Egy Riemann-felület egy (S, \mathcal{H}) pár, ahol S egy felület, és \mathcal{H} az S -en értelmezett holomorf atlaszok egy ekvivalenciaosztálya.

Hacsak egy felülethez, mint alaphalmazhoz nem rendeltünk több atlaszosztályt, akkor az (S, \mathcal{H}) jelölés helyett gyakran csak S -et írunk. A definícióból látható, hogy Riemann-felület nyílt részhalmaza, így minden összefüggő komponense, is Riemann-felület.

Legyenek (S, \mathcal{H}) és (T, \mathcal{F}) Riemann felületek és az $f : S \rightarrow T$ leképezés folytonos. Az f -et holomorf leképezésnek mondjuk (S, \mathcal{H}) és (T, \mathcal{F}) között, ha van olyan $\Phi \in \mathcal{H}$ és $\Psi \in \mathcal{F}$ atlaszok, amire nézve holomorf (illetve ezzel ekvivalens módon, ha minden ilyen atlaszpárra nézve az). Az S és T Riemann-felületeket biholomorfnek mondjuk, ha $\exists f : S \rightarrow T$ holomorf bijekció, melynek inverze is holomorf.

A későbbiekben szükségünk lesz az alábbi lemmára:

3.1.6. Lemma. A \mathbf{P}^1 -et, mint $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ -t tekintve standard atlaszával, tetszőleges $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ holomorf leképezés racionális törtfüggvény. Azaz $\forall g : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ meromorf függvény valójában racionális törtfüggvény.

Bizonyítás. Az f megszorítása \mathbb{C} -re, valamint a $z \mapsto f(\frac{1}{z})$ függvények meromorfak a komplex számsíkon ($\frac{1}{0}$ -t értelmezzük ∞ -nek). Meromorf függvény pólusai nem torlódhatnak sehová, így \mathbf{P}^1 kompaktságából adódóan f -nek csak véges sok pólusa lehet, legyenek ezek a_1, \dots, a_k . Minden pólusban f Laurent-sorba fejthető, jelöljük ezeket $f(z) = \sum_{n \geq -m_j} c_n^{(j)}(z - a_j)^n$ -vel, és nézzük a $g(z) = \sum_{j=1}^k \sum_{n=-m_j}^{-1} c_n^j(z - a_j)^n$ függvényt. Ez egy racionális törtfüggvény, így meromorf \mathbb{C} -n, és holomorfan kiterjed mint $\mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ függvény ($g(\infty) = 0$).

Az $f - g$ függvénynek a konstrukció alapján nincs pólusa \mathbb{C} -ben, így egészfüggvény, tehát 0-beli Taylor-sora előállítja az egész komplex számsíkon: $f(z) - g(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$. Ekkor az $f - g$ függvény ∞ -beli Laurent-sora a $w = \frac{1}{z}$ térképezéssel a $\sum_{n \geq 0} c_n w^{-n}$ alakot ölti, mely csak akkor definiál meromorf függvényt, ha egy küszöbindex után $\forall n$ -re $c_n = 0$, különben lényeges szingularitása van. Ezáltal $f - g$ egy polinom, így f egy polinom és egy racionális törtfüggvény összege, így maga is racionális törtfüggvény. \square

3.2. Az univerzális Riemann-felület

Tekintsük most a (\mathbb{C} -n, vagy egy nyílt részhalmazán értelmezett) meromorf függvényeket úgy, hogy azok az adott halmazon mindenhol értelmezve vannak, és $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ -be képeznek. A pólusokon kívül legyenek holomorfak, a pólusokban pedig a szokásos módon Laurent-sorba fejthetőek, melynek legfeljebb véges sok negatív indexű tagja van. Nevezzük az f és g , $0 \in \mathbb{C}$ egy nyílt környezetén értelmezett meromorf függvények (f, g) rendezett párját *párnak*, ha f nem konstans 0 egy tetszőleges környezetében, valamint a $t \mapsto (f(t), g(t))$ hozzárendelés injektív 0 közelében. A szintén 0 egy környezetén értelmezett ρ holomorf függvény *átparaméterezés*, ha $\rho(0) = 0$ és $\rho'(0) \neq 0$. Az $(f, g) \sim (\tilde{f}, \tilde{g})$, azaz a két pár *ekvivalens* ha $\exists \rho$ átparaméterezés, hogy $\tilde{f} = f \circ \rho$ és $\tilde{g} = g \circ \rho$ a 0 egy környezetében. Ez ténylegesen ekvivalencia-reláció a párok halmazán, a tranzitivitás és a reflexivitás triviális, a szimmetrikusságot pedig az inverzfüggvény-tétel (F.1.1) garantálja. Az (f, g) pár ekvivalenciaosztályát *meromorf elemnek (meromorphic element)* nevezzük, és $\langle f, g \rangle$ -vel jelöljük.

Jelölje \mathcal{M} a meromorf elemek halmazát. Belátjuk, hogy ez a halmaz ellátható egy olyan topológiával és atlisszal, mellyel végtelen sok kompakt komponensből álló Riemann-felületet alkot. A későbbiekben egy-egy ilyen komponens lesz az egy-egy adott meromorf függvényhez rendelt Riemann-felület.

Megjegyzés: Legyen (f, g) egy rögzített pár. Ha f holomorf a 0-ban, jelöljük

c_0 -lal az $f(0)$ értéket, és m -mel az $f(t) - c_0$ függvény 0-beli gyökének multiplicitását. Ekkor f felírható az $f(t) = c_0 + t^m h(t)$ alakban, ahol $h(t)$ holomorf, és $h(0) \neq 0$. Ezen feltételek miatt h -nak lokálisan értelmezhető az (egyik) m -edik gyöke, a $k(t)$ holomorf függvény. Ekkor a $\rho(t) = tk(t)$ függvény egy átparaméterezés, amelyre $f(t) = c_0 + \rho(t)^m$. Így $\langle f, g \rangle = \langle c_0 + t^m, g \circ \rho^{-1}(t) \rangle$. Hasonlóképp, ha f -nek 0-ban m -edrendű pólusa van, akkor előáll $f(t) = t^{-m} h(t)$ alakban, ahol a h függvény holomorf és 0 egy környezetében nem tűnik el, így holomorfan értelmezhető az $1/h(t)$ m -edik gyöke, melyet t -vel beszorozva kapjuk a ρ átparaméterezést. Ekkor $f(t) = \rho(t)^{-m}$, így $\langle f, g \rangle = \langle t^{-m}, g \circ \rho^{-1}(t) \rangle$. Ezzel beláttuk, hogy tetszőleges meromorf elem reprezentálható az $\langle a + t^m, g(t) \rangle$ vagy a $\langle t^{-m}, g(t) \rangle$ alakban. Amennyiben $m = 1$, a meromorf elemet g a -beli csúrájának (*germ*) nevezzük, $m > 1$ esetén pedig az \mathcal{M} megfelelő komponensének *elágazási pontjának* (*branch point*) mondjuk.

Legyen (f, g) egy pár, és $r > 0$ megfelelően kicsi, hogy f és g meromorfan értelmezve legyen a $B_0(r)$ nyílt körlapon, valamint a $t \mapsto (f(t), g(t))$ hozzárendelés injektív legyen itt. Ekkor $(f(t_0 + t), g(t_0 + t))$ is egy pár $\forall t_0 \in B_0(r)$ -re. Legyen $U(f, g, r) := \{ \langle f(t_0 + t), g(t_0 + t) \rangle : t_0 \in B_0(r) \} \subseteq \mathcal{M}$. Az ilyen halmazok fogják alkotni a topológiánk bázisát:

3.2.1. Lemma. *Létezik topológia \mathcal{M} -en, ahol pontosan azok a halmazok nyíltak, melyek előállnak a fenti $U(f, g, r)$ alakú halmazok uniójaként.*

Bizonyítás. A topológia definíciójának tulajdonságait kell ellenőriznünk. Az üres halmaz nyílt, hisz előáll 0 darab báziselem uniójaként. \mathcal{M} nyílt, hisz az összes (f, g) párra megalkotott összes $U(f, g, r)$ uniója kiadja. Így előálló halmazok uniója triviálisan nyílt, így csak a (véges, így indukciós okokból a kételemű) metszetet nyíltságát szükséges ellenőrizni. Ehhez elegendő belátni, hogy amennyiben $\langle f, g \rangle \in U(f_1, g_1, r_1) \cap U(f_2, g_2, r_2)$ akkor létezik olyan $r > 0$, amelyre $U(f, g, r) \subseteq U(f_1, g_1, r_1) \cap U(f_2, g_2, r_2)$, hisz ekkor a metszet minden pontjához találunk öt tartalmazó nyílt halmazt, amely benne van a metszetben. Tehát tegyük fel, hogy $\langle f(t), g(t) \rangle = \langle f_1(t_1 + t), g_1(t_1 + t) \rangle = \langle f_2(t_2 + t), g_2(t_2 + t) \rangle$ valamely $t_1 \in B_0(r_1)$ és $t_2 \in B_0(r_2)$ értékekre. Ekkor léteznek a ρ_1 és ρ_2 átparaméterezések, melyekre

$$f_1(t_1 + \rho_1(t)) = f(t) = f_2(t_2 + \rho_2(t)) \text{ és } g_1(t_1 + \rho_1(t)) = g(t) = g_2(t_2 + \rho_2(t))$$

minden $t \in B_0(s)$ -re, ahol $s \leq \min(r_1, r_2)$. Az átparaméterezés definíciójából adódóan létezik egy olyan $0 < r \leq s$ melyre mind ρ_1 mind ρ_2 holomorf a $B_0(r)$ halmazon, és a deriváltjuk nem tűnik el itt, továbbá $\rho_1(B_0(r)) \subseteq B_0(r_1 - |t_1|)$ és

$\rho_2(B_0(r)) \subseteq B_0(r_2 - |t_2|)$. Ekkor rögzített $t_0 \in B_0(r)$ esetén a $\sigma = \rho_1(t + t_0) - \rho_1(t_0)$ egy átparaméterezés melyre

$$\begin{aligned} \langle f(t + t_0), g(t + t_0) \rangle &= \langle f_1(t_1 + \rho_1(t + t_0)), g_1(t_1 + \rho_1(t + t_0)) \rangle \\ &= \langle f_1(t_1 + \rho_1(t_0) + \sigma(t)), g_1(t_1 + \rho_1(t_0) + \sigma(t)) \rangle \\ &= \langle f_1((t_1 + \rho_1(t_0)) + t), g_1((t_1 + \rho_1(t_0)) + t) \rangle \end{aligned}$$

ami $U(f_1, g_1, r_1)$ -ben fekszik, hiszen $|t_1 + \rho_1(t_0)| < r_1$. Így $U(f, g, r) \subseteq U(f_1, g_1, r_1)$ és hasonlóan $U(f, g, r) \subseteq U(f_2, g_2, r_2)$. \square

Most térjünk rá az atlasz keresésére. Legyen \mathcal{A} az (f, g, r) rendezett hármasok halmaza, ahol (f, g) egy pár és $r > 0$ megfelelően kicsi, hogy f és g meromorfan értelmezve legyen és a $B_0(r)$ nyílt körlapon, valamint a $t \mapsto (f(t), g(t))$ hozzárendelés injektív legyen itt.

3.2.2. Lemma. *Ha $(f, g, r) \in \mathcal{A}$ akkor a*

$$t_0 \mapsto \langle f(t_0 + t), g(t_0 + t) \rangle : B_0(r) \longrightarrow U(f, g, r)$$

leképezés egy homeomorfizmus.

Bizonyítás. A leképezés szürjektivitása az $U(f, g, r)$ definíciójából nyilvánvaló. Az injektivitás következik abból, hogy ha $\langle f(t_0 + t), g(t_0 + t) \rangle = \langle f(t_1 + t), g(t_1 + t) \rangle$ akkor a $t = 0$ választással az $f(t_0) = f(t_1)$ és $g(t_0) = g(t_1)$ így a t_0 és t_1 pontokat a $t \mapsto (f(t), g(t))$ injektív hozzárendelés ugyan oda képezi, tehát $t_0 = t_1$. A kétirányú folytonosság pedig a topológia definiálásából következik, egy $B_a(\varepsilon)$ körlap képe az $U(f(a + t), g(a + t), \varepsilon)$ nyílt halmaz, így nyílt ösképe nyílt mindkét irányban. \square

Ha $\alpha = (f, g, r) \in \mathcal{A}$, akkor legyen $U_\alpha = U(f, g, r)$ és $V_\alpha = B_0(r)$. Ilyen jelölés mellett legyen a fenti homeomorfizmus inverze a $\phi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha$.

3.2.3. Tétel. *\mathcal{M} egy Riemann-felület a $\Phi = \{\phi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ holomorf atlisszal.*

Két állítást kell belátnunk: Egyrészt, hogy \mathcal{M} Hausdorff, valamint hogy az atlasz áttérésfüggvényei holomorfak.

Bizonyítás. (\mathcal{M} Hausdorff) Tegyük fel, hogy $\langle f, g \rangle$ és $\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle$ meromorf elemek, melyeknek nincs egymástól diszjunkt környezetük \mathcal{M} -ben. Be kell látnunk, hogy ekkor a két elem megegyezik. A korábbi megjegyzés alapján feltehető, hogy az f

függvény $a + t^m$ vagy t^{-m} , \tilde{f} pedig $b + t^n$ vagy t^{-n} alakú ($a, b \in \mathbb{C}$, $m, n \in \mathbb{Z}^+$). Elég nagy k pozitív egész számra $U(f, g, 1/k)$ és $U(\tilde{f}, \tilde{g}, 1/k)$ környezetei a két rögzített elemnek, így a feltevés szerint van közös elemük: $\langle f(s_k + t), g(s_k + t) \rangle = \langle \tilde{f}(t_k + t), \tilde{g}(t_k + t) \rangle$ valamely $s_k, t_k \in B_0(1/k)$ számokra. Speciálisan $f(s_k) = \tilde{f}(t_k)$ valamint $g(s_k) = \tilde{g}(t_k)$, amiből $k \rightarrow \infty$ esetén következik, hogy $f(0) = \tilde{f}(0)$. Így csak az $f(t) = a + t^m$, $\tilde{f}(t) = a + t^n$ valamint az $f(t) = t^{-m}$ és $\tilde{f}(t) = t^{-n}$ párosítások lehetségesek, ezen formulákba behelyettesítve következik továbbá, hogy $(s_k)^m = (t_k)^n$.

Ha bármely k -ra s_k vagy t_k nulla, akkor $\langle f, g \rangle = \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle$ teljesül, és ezt akartuk belátni, így most tegyük fel, hogy a sorozatok egyik tagja sem 0. Ekkor legyen σ_k az s_k tetszőleges n -edik gyöke. Ekkor $1 = \frac{(s_k)^m}{(t_k)^n} = \left(\frac{\sigma_k}{t_k}\right)^n$, így $\frac{(\sigma_k)^m}{t_k}$ n -edik egységgyök minden k -ra. Mivel ilyenből n darab van, kell lennie legalább egynek (jelöljük ω -val) ami végtelen sok k esetén előfordul. Ezen k pozitív egészekre a $g(t^n) = \tilde{g}(\omega^{-1}t^m)$ egyenlőség fennáll a $t = \sigma_k$ pontsorozat mentén, mely $k \rightarrow \infty$ esetén 0-hoz torlódik. Ekkor az unicitási tétel (F.1.4) értelmében $g(t^n) = \tilde{g}(\omega^{-1}t^m)$ a 0 egy teljes környezetében. Továbbá $f(t^n) = \tilde{f}(\omega^{-1}t^m)$ is teljesül, hisz mindkét oldal vagy $a + t^{mn}$ vagy t^{-mn} .

Mivel a $t \mapsto (f(t), g(t))$ hozzárendelés injektív 0 közelében, a $t \mapsto (f(t^n), g(t^n))$ pontosan n ponthoz rendeli ugyanazt a képet. Hasonló módon a $t \mapsto (\tilde{f}(\omega^{-1}t^m), \tilde{g}(\omega^{-1}t^m))$ hozzárendelés m ponthoz rendeli ugyanazt a képet. Azonban beláttuk, hogy ez a két leképezés megegyezik, így $m = n$. Ebben az esetben $g(t) = \tilde{g}(\omega^{-1}t)$ és $f(t) = \tilde{f}(\omega^{-1}t)$ így a $\rho(t) = \omega^{-1}t$ paramétercserével $(f, g) = (\tilde{f}(\rho(t)), \tilde{g}(\rho(t)))$, azaz $\langle f, g \rangle = \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle$. \square

Bizonyítás. (az áttérésfüggvények holomorfak) Legyen $\alpha = (f_1, g_1, r_1)$ és $\beta = (f_2, g_2, r_2)$ tetszőleges \mathcal{A} -beli elemek, be szeretnénk látni, hogy ekkor $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ holomorf $\phi(U_\alpha \cap U_\beta)$ minden pontjában. Legyen u egy pont a metszetről, azaz $u = \langle f_1(t_1 + t), g_1(t_1 + t) \rangle = \langle f_2(t_2 + t), g_2(t_2 + t) \rangle$ ahol $t_1 = \phi_\alpha(u)$ és $t_2 = \phi_\beta(u)$ rögzített értékek. Ekkor a meromorf elemek egyenlősége miatt létezik egy ρ átparaméterezés, amire 0 megfelelően kis környezetében $f_1(t_1 + t) = f_2(t_2 + \rho(t))$ és $g_1(t_1 + t) = g_2(t_2 + \rho(t))$.

Vegyünk egy t_0 -t $t_1 = \phi_\alpha(u)$ kis környezetében, és σ legyen a következő függvény: $\sigma(t) = \rho(t_0 - t_1 + t) - \rho(t_0 - t_1)$, amire $\sigma(0) = 0$ és $\sigma'(0) = \rho'(t_0 - t_1)$ teljesül. Mivel $\rho'(0) \neq 0$ és a ρ' függvény folytonos, ezért elég kis $|t_0 - t_1|$ érték esetén $\sigma'(0) \neq 0$,

így σ átparaméterező függvény. Ekkor

$$\begin{aligned}
\phi_\alpha^{-1}(t_0) &= \langle f_1(t_0 + t), g_1(t_0 + t) \rangle \\
&= \langle f_1(t_1 + (t_0 - t_1 + t)), g_1(t_1 + (t_0 - t_1 + t)) \rangle \\
&= \langle f_2(t_2 + \rho(t_0 - t_1 + t)), g_2(t_2 + \rho(t_0 - t_1 + t)) \rangle \\
&= \langle f_2(t_2 + \rho(t_0 - t_1) + \sigma(t)), g_2(t_2 + \rho(t_0 - t_1) + \sigma(t)) \rangle \\
&= \langle f_2(t_2 + \rho(t_0 - t_1) + t), g_2(t_2 + \rho(t_0 - t_1) + t) \rangle .
\end{aligned}$$

Ezek szerint $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(t_0) = t_2 + \rho(t_0 - t_1)$ minden t_1 -hez elég közeli t_0 -ra. Mivel ρ holomorf a 0 közelében, így a $\phi_\beta \circ \phi_\alpha$ áttérésvégvény holomorf $t_1 = \phi_\alpha(u)$ egy környezetében. \square

Tehát beláttuk, hogy \mathcal{M} Riemann-felület. Mint minden topologikus tér, ez is előáll az összefüggő komponenseinek diszjunkt uniójaként, melyek nyíltak \mathcal{M} -ben, így maguk is Riemann-felületek.

3.2.4. Megjegyzés. A $\psi(\langle f, g \rangle) = f(0)$ és $\chi(\langle f, g \rangle) = g(0)$, $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ függvények meromorfak \mathcal{M} -en. Ehhez elég belátni, hogy minden térképezés inverzével vett kompozíciójuk meromorf. Ez $\alpha = (f, g, r) \in \mathcal{A}$ esetén

$$\psi \circ \phi_\alpha^{-1}(t_0) = \psi(\langle f(t_0 + t), g(t_0 + t) \rangle) = f(t_0),$$

és mivel f meromorf a $V_\alpha = B_0(r)$ halmazon, így a kompozíció is az. Az érvelés ugyanígy működik χ -re is.

3.2.5. Definíció. Ha f egy $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ pont egy környezetén értelmezett meromorf függvény, akkor az f -hez tartozó Riemann-felület az az összefüggő komponense \mathcal{M} -nek, mely $a \in \mathbb{C}$ esetén az $\langle a + t, f(a + t) \rangle$, $a = \infty$ esetben pedig $\langle t^{-1}, f(t^{-1}) \rangle$ meromorf elemet tartalmazza. Ezt az elemet (a korábbi hasonló definícióval kicsit inkonzisztensen) szintén az f függvény a -beli csírájának (germ) hívjuk és általában $[f]_a$ -val jelöljük

Most már minden rendelkezésünkre áll, hogy adott görbéhez mutassunk egy, a fejezet bevezetőjében leírt feltételeknek megfelelő Riemann-felületet. Ez \mathcal{M} egy nyílt részhalmaza, sőt irreducibilis definiáló polinom esetén egy összefüggő komponense lesz.

3.3. A szingularitások rezolúciója

3.3.1. Definíció. Legyen $P(x, y, z)$ a C görbét definiáló irreducibilis homogén polinom, melyre $\deg P = d > 0$. A C -hez (illetve $P(x, y, z)$ -hez) tartozó Riemann-felület, \tilde{C} az a nyílt részhalmaza \mathcal{M} -nek melyet a $P(f(t), g(t), 1) = 0$ egyenletet 0

egy környezetében kielégítő $\langle f, g \rangle$ elemek alkotnak. Definiáljuk a $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ leképezést a

$$\pi(\langle f, g \rangle) = \begin{cases} [f(0), g(0), 1] & \text{ha } f \text{ és } g \text{ holomorf } 0 \text{ körül,} \\ [\tilde{f}(0), \tilde{g}(0), 0] & \text{egyébként} \end{cases}$$

hozzárendeléssel, ahol, ha n az f és g nulla beli pólusának rendje közül a nagyobbik, akkor $\tilde{f}(t) = t^n f(t)$ és $\tilde{g}(t) = t^n g(t)$

3.3.2. Tétel. \tilde{C} egy kompakt, összefüggő Riemann-felület. A π leképezés folytonos és szürjektív, továbbá $\pi^{-1}(\text{Sing}(C))$ véges, és π megszorítása, a

$$\pi|_{\dots} : \tilde{C} \setminus \pi^{-1}(\text{Sing}(C)) \rightarrow C \setminus \text{Sing}(C)$$

egy holomorf bijekció.

Megjegyzés: A görbe irreducibilitása csak a \tilde{C} összefüggőségéhez szükséges (valójában ez elégséges is). A tételt állításonként külön lemmákban fogom bizonyítani.

3.3.3. Lemma. (folytonosság, holomorfitás) $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ folytonos és a megszorítása, a $\pi|_{\dots} : \tilde{C} \setminus \pi^{-1}(\text{Sing}(C)) \rightarrow C \setminus \text{Sing}(C)$ holomorf.

Bizonyítás. Ha f_0 és g_0 holomorf 0 közelében, a $pr : \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{P}^2$ leképezés pedig a projektív síkot definiáló $pr(x, y, z) = [x : y : z]$ folytonos leképezés, akkor π lokálisan előáll a pr és az $\langle f, g \rangle \mapsto (f(0), g(0), 1) = (\psi(\langle f, g \rangle), \chi(\langle f, g \rangle), 1)$ $\tilde{C} \rightarrow \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ leképezés kompozíciójaként. Mivel a ψ és χ függvények holomorfak $\langle f_0, g_0 \rangle$ környezetében (3.2.4 megjegyzés holomorf függvények esetén), így ekkor a második leképezés is folytonos lesz $\langle f_0, g_0 \rangle$ -ban. Ha f_0 -nak 0 -ban pólusa van, melynek rendje nem kisebb mint g_0 -é, akkor $\langle f_0, g_0 \rangle$ egy környezetében π előáll mint pr és az $\langle f, g \rangle \mapsto (1, \frac{g(0)}{f(0)}, \frac{1}{f(0)})$ kompozíciója. Ebben az esetben a χ/ψ és $1/\psi$ függvények holomorfak $\langle f_0, g_0 \rangle$ körül, így π folytonos $\langle f_0, g_0 \rangle$ -ban. Analóg érvelés adható, ha g_0 pólusának rendje a nagyobb.

A holomorfitás bizonyításához vegyünk egy $\alpha = (f, g, r) \in \mathcal{A}$ hármast. Ekkor a $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ leképezés inverze a $t_0 \mapsto \langle f(t_0 + t), g(t_0 + t) \rangle$ a $V_\alpha = B_0(r)$ körlemezen, a $C \setminus \text{Sing}(C)$ atlaszának egy ψ_β holomorf térképezése pedig a 3.1.2 tétel szerint az $[x : y : z]$ ponthoz valamely két koordináta hányadosát rendeli. Ezek alapján $\psi_\beta \circ \pi \circ \phi_\alpha^{-1}$ az $f, g, f/g, g/f, 1/f$ illetve $1/g$ függvények valamelyike, melyek mind meromorfak, azaz ahol \mathbb{C} -be képező függvényként értelmezve vannak, ott holomorfak, és pont ez szükséges a Riemann-felületek között értelmezett leképezés holomorfitásához. \square

3.3.4. Lemma. (bijekció) $A \pi$ megszorítása a $\tilde{C} \setminus \pi^{-1}(\text{Sing}(C))$ halmazra bijekció $C \setminus \text{Sing}(C)$ -re.

Bizonyítás. Legyen $[a : b : c]$ nonsinguláris pontja C -nek, és tegyük fel, hogy $c \neq 0$. Ekkor feltehető, hogy $c = 1$. Ekkor az Euler-képletből (1.3.1) következően vagy $\frac{\partial}{\partial x}P$ vagy $\frac{\partial}{\partial y}P$ nem nulla, különben $[a : b : 1]$ szinguláris pont lenne. Feltehető tehát, hogy $\frac{\partial}{\partial y}P(a, b, 1) \neq 0$. Ekkor az implicitfüggvény-tétel (F.1.2) értelmében létezik a -nak olyan U és b -nek olyan V környezete, és egy $h : U \rightarrow V$ holomorf függvény, hogy $P(x, y, 1) = 0 \iff y = h(x)$. Tehát ha f és g tetszőleges holomorf függvények 0 közelében, melyekre $f(0) = a$, $g(0) = b$ valamint $P(f(t), g(t), 1) = 0$ minden elég kicsi t -re, akkor fenn kell hogy álljon a $g(t) = h(f(t))$ reláció. Ekkor, ha (f, g) egy pár, akkor a $t \mapsto (f(t), g(t)) = (f(t), h(f(t)))$ hozzárendelés injektivitása miatt f -nek is injektívnek kell lennie és így a $\rho(t) = f(t) - a$ egy átparaméterezés. Így $\langle f(t), g(t) \rangle = \langle a + \rho(t), h(a + \rho(t)) \rangle = \langle a + t, h(a + t) \rangle$. Tehát $\pi(\langle f(t), g(t) \rangle) = [a : b : 1]$, és mivel tetszőleges, a feltételeknek megfelelő függvényekből kiindulva ugyanúgy $\langle a + t, h(a + t) \rangle$ -t kapunk, ezért ez az egyetlen meromorf elem, aminek a képe az adott pont.

A $c = 0$ eset hasonlóan kezelhető, az implicitfüggvény-tételt $P(x, 1, z)$ -re vagy $P(1, y, z)$ -re kell alkalmazni, és az f és g függvények helyett az f/g és $1/g$ vagy g/f és $1/f$ függvényeket kell venni. \square

3.3.5. Lemma. $A \pi : \tilde{C} \rightarrow C$ leképezés szürjektív.

Bizonyítás. Rögzítsük az $[a : b : c] \in C$ pontot, ekkor be kell látnunk, hogy $\pi^{-1}([a : b : c])$ nem üres. Feltehetjük, hogy $[0 : 1 : 0] \notin C$ így $\partial_y P$ nem azonosan nulla, így a C irreducibilitását felhasználva a Bézout-tétel (1.5.6) szerint C -nek csak véges sok olyan pontja van, ahol $\partial_y P = 0$.

Először tegyük fel, hogy $c \neq 0$, így $c = 1$ választható. Ekkor $\exists \varepsilon > 0$, melyre minden $x \in \dot{B}_a(\varepsilon)$ esetén (azaz, ha $0 < |a - x| \leq \varepsilon$) $\nexists y \in \mathbb{C}$, melyre $[x : y : 1] \in C$ és $\partial_y P(x, y, 1) = 0$. Legyen $B_a^\pm(\varepsilon)$ a $B_a(\varepsilon) \setminus [a, a \pm \varepsilon]$ felvágott nyílt körlemez. Mivel ez egyszeresen összefüggő, az F.2.2 lemma szerint a holomorf $\phi : C \rightarrow \mathbf{P}^1$, $\phi([x : y : z]) = [x : z]$ hozzárendeléssel definiált leképezés, illetve ekvivalens módon a $\phi([x : y : 1]) = x$ leképezés a $\phi^{-1}(B_a^\pm(\varepsilon))$ összefüggő komponenseire megszorítva egy homeomorfizmus $B_a^\pm(\varepsilon)$ -ra, és pontosan d ilyen összefüggő komponens, így d homeomorfizmus van.

Vegyük a ϕ megszorítását a $\phi^{-1}(B_a^\pm(\varepsilon))$ j -edik komponensére. Ezen leképezés inverze ekkor $x \mapsto [x, f_j^\pm(x), 1]$ alakú, ahol $P(x, f_j^\pm(x), 1) = 0 \forall x \in B_a^\pm(\varepsilon)$ esetén, továbbá az inverzfüggvény-tétel (F.1.1) szerint holomorf. Valamint $i \neq j$ esetén $f_j^\pm(x) \neq f_i^\pm(x)$ hiszen $[x, f_i^\pm(x), 1]$ és $[x, f_j^\pm(x), 1]$ különböző komponensben fekszenek. Mivel C kompakt, minden f_j^\pm korlátos $B_a^\pm(\varepsilon)$ -n és $x \rightarrow a$ esetén csak olyan y

határértékekkel rendelkezhet, melyekre $[a, y, 1] \in C$. Mivel b is egy ilyen érték, azaz $[a : b : 1]$ eleme a $\phi^{-1}(B_a^\pm(\varepsilon))$ lezártjának, így feltehető, hogy b az $f_1^\pm(x)$ határértéke $x \rightarrow a$ esetén.

Mivel $B_a^+(\varepsilon) \cap B_a^-(\varepsilon)$ két összefüggő komponensre oszlik (az alsó- és felső félkör- lapon) ezért (esetlegesen az $f_2^+, f_3^+, \dots, f_d^+$ és $f_1^-, f_2^-, \dots, f_d^-$ sorrendek átrendezése, a függvények átindexelése után) teljesül, hogy ha $1 \leq j \leq d$ akkor f_j^+ az alsó félkör- lapon megegyezik f_j^- vel, a felső félkör lapon pedig $f_{\sigma(j)}^-$ -vel. Itt a σ az $\{1, 2, \dots, d\}$ halmaz egy permutációja, melyről feltehető, hogy valamely $m \leq d$ számra teljesíti a $\sigma(1) = m$ és $2 \leq i \leq m$ esetén a $\sigma(i) = i - 1$ feltételeket. (Ez "mohón" megtalálható, az f_1^+ -től indulva sorban indexeljük a megfelelően illeszkedő függvényeket, amíg be nem zárul a ciklus.)

Ezen f_j^\pm függvények segítségével definiálható a következő jól értelmezett, holomorf g függvény:

$$g : \{t \in \mathbb{C} : 0 < |t| < \varepsilon^{1/m}\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$g(t) = \begin{cases} f_j^+(a + t^m) & \text{ha } (2j - 2)\pi/m < \arg(t) < 2j\pi/m, \\ f_j^-(a + t^m) & \text{ha } (2j - 1)\pi/m < \arg(t) < (2j + 1)\pi/m \end{cases}$$

ahol $\arg(z) \in [0, 2\pi)$ és $j = 1, \dots, m$. Mivel g korlátos, a 0 ban csak megszüntethető szingularitása lehet, és mivel $t \rightarrow 0$ esetén (legalábbis bizonyos irányból) b a határ- érték, így kiterjeszthető (az ugyancsak g -vel jelölt) $B_0(\varepsilon^{1/m})$ halmazon értelmezett holomorf függvénnyé, melyre $g(0) = b$.

Ezen g függvényre $P(a + t^m, g(t), 1) = 0 \forall t \in B_0(\varepsilon^{1/m})$ esetén, továbbá a $t \mapsto (a + t^m, g(t))$ hozzárendelés injektív itt az f_j^\pm függvények különbözősége miatt. Így $\langle a + t^m, g(t) \rangle \in \tilde{C}$ és $\pi(\langle a + t^m, g(t) \rangle) = [a : b : 1]$.

Most legyen $c = 0$, akkor $a \neq 0$, mivel $[0 : 1 : 0] \notin C$, azaz $a = 1$. Ekkor $\exists \varepsilon > 0$, hogy $x \in \mathbb{C}$, $|x| > 1/\varepsilon$ esetén nincs olyan $y \in \mathbb{C}$, melyre $[x : y : 1] \in C$ és $\partial_y P(x, y, 1) = 0$. Legyen \mathbb{R}^\pm a pozitív, illetve negatív valós féltengely, és vezessük be a következő jelölést: $B_\infty^\pm(\varepsilon) := \{x \in \mathbb{C} : |x| > 1/\varepsilon, x \notin \mathbb{R}^\pm\}$. Ekkor a helyett ∞ - re, erre a "körlapra", és $a + t^m$ helyett t^{-m} -re alkalmazva az előző gondolatmenetet kapjuk, hogy π a $\langle t^{-m}, g(t) \rangle \in \tilde{C}$ ponthoz a $[a : b : c] = [1, b, 0]$ pontot rendeli. \square

3.3.6. Megjegyzés. Legyen ψ a korábban már definiált $\langle f, g \rangle \mapsto f(0)$ \tilde{C} -on értelmezett meromorfe leképezés. Valamint vegyük az előző lemmában szereplő permutációt, és írjuk fel diszjunkt ciklusokra bontva: $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_l$, ahol σ_j egy $m_j \geq 0$ hosszú ciklus, $m_1 + \dots + m_l = d$. Ekkor az előző lemma bizonyítása mutatja, hogy $a \in \mathbb{C}$ esetén $\exists g_1, \dots, g_l$ holomorfe függvények 0 körül, és $\langle a + t^{m_j}, g_j(t) \rangle \in \tilde{C}$ elemek, melyekre $\psi^{-1}(a) = \{\langle a + t^{m_j}, g_j(t) \rangle : 1 \leq j \leq l\}$. A bizonyítást alaposabban megfigyelve az is látható, hogy ezen $(a + t^{m_j}, g_j(t))$ párok a görbe $x = a$ koordinátájú pontjaiban a lokális irreducibilis komponenseket parametrizálják, azaz

l az ilyen lokális irreducibilis komponensek száma. Továbbá ψ az $\langle a + t^{m_j}, g_j(t) \rangle$ pontban m_j multiplicitással veszi fel az a értéket, így tetszőleges $a \in \mathbb{C}$ esetén a ψ leképezés multiplicitással számolva pontosan d -szer veszi fel a -t. Hasonlóan megmutatható, hogy ez az $a = \infty$ esetre is teljesül.

Ezzel a jelöléssel teljesül, hogy $P(a + t^{m_j}, g_j(t), 1) = 0$ a 0 környezetében, azaz ha $(x - a)^{1/m_j}$ tetszőleges m_j -edik gyöke $(x - a)$ -nak, akkor a -hoz elég közeli x -ekre $y = g_j((x - a)^{1/m_j})$ kielégíti a $P(x, y, 1) = 0$ feltételt. Sőt, ha $|x - a|$ elég kicsi, de nem nulla, akkor a 3.3.5 lemma bizonyítása alapján a d darab $y_j = g_j(e^{2\pi i s/m_j} (x - a)^{1/m_j})$ szám ($1 \leq j \leq l$ és $1 \leq s \leq m_j$) ténylegesen különböző, hiszen az $[x, y_j, 1]$ pontok $\phi^{-1}(B_a^\pm(\varepsilon))$ más összefüggőségi komponensében vannak. Mivel $P(x, y, z)$ d -edfokú polinom, ezért $\forall y$ -ra, és a -hoz elég közel $\forall x$ -re a P a

$$P(x, y, 1) = K \prod_{1 \leq j \leq l} \prod_{1 \leq s \leq m_j} (y - g_j(e^{2\pi i s/m_j} (x - a)^{1/m_j}))$$

alakban írható valamilyen K konstanssal.

Most rátérhetünk a \tilde{C} kompaktságának bizonyítására. Ehhez elegendő a 3.3.6 megjegyzés értelmében a következő látszólag általánosabb lemmát belátni:

3.3.7. Lemma. *Legyen $\Phi : S \rightarrow \mathbf{P}^1$ meromorf függvény egy S Riemann-felületen, amely minden $a \in \mathbf{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ értéket multiplicitással számolva pontosan d -szer vesz fel. Ekkor S kompakt.*

Bizonyítás. Elég belátni, hogy minden \mathbf{P}^1 -beli pont nyílt környezetének ösképe részhalmaza egy S -beli kompakt halmaznak. Hisz ekkor az összes környezet nyílt fedése a kompakt \mathbf{P}^1 -nek, tehát kiválasztható belőle véges részfedés, és a részfedés halmazaihoz tartozó kompakt halmazok (véges) uniója kiadja S -t, ami ezáltal kompakt.

Legyen $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, és az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $a \neq \infty$ (ez az eset ugyanezen bizonyítás $1/\Phi$ -re való alkalmazásával belátható). Legyen $\Phi^{-1}(a) = \{s_1, \dots, s_l\}$ ahol a Φ leképezés az a értéket s_j -ben m_j multiplicitással veszi fel, $m_1 + \dots + m_l = d$. Legyen a $\phi_j : U_j \rightarrow V_j$ leképezés S holomorf térképezése s_j körül, méghozzá olyan, hogy $\phi_j(s_j) = 0$ és U_1, \dots, U_l diszjunktak. Ekkor a 0 körül értelmezett holomorf $f_j(z) = \Phi(\phi_j^{-1}(z)) - a$ függvénynek m_j multiplicitású nullhelye van 0 -ban.

Válasszunk $\varepsilon_j > 0$ -t úgy, hogy a $\overline{B_0(\varepsilon_j)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \varepsilon_j\}$ zárt körlap V_j -ben legyen. Ekkor a gyökök folytonos függése (F.1.3) értelmében $\exists \delta_j > 0$ melyre $|a' - a| < \delta_j$ esetén az $f_j(z) - a' + a = \Phi(\phi_j^{-1}(z)) - a'$ függvénynek legalább m_j gyökhelye van a $B_0(\varepsilon_j)$ nyílt körlapon. Legyen

$$W_a = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \min\{\delta_1, \dots, \delta_l\}\} \quad \text{és} \quad S_a = \bigcup_{1 \leq j \leq l} \phi_j^{-1}(\overline{B_0(\varepsilon_j)}).$$

Ekkor S_a kompakt mert a ϕ_j -k homeomorfizmusok, és a zárt körlap kompakt.

Ha $a' \in W_a$ akkor Φ az a' értéket multiplicitással számolva legalább m_j -szer veszi fel a $\phi^{-1}(B_0(\varepsilon_j)) \subseteq U_j$ nyílt halmazon. Mivel az U_j -k diszjunktak, és az m_j -k összege d , így Φ az a' értéket multiplicitással számolva legalább d -szer veszi fel S_a -ban, így $\Phi^{-1}(a') \subseteq S_a$. Mivel ez tetszőleges $a' \in W_a$ esetén fennáll, ezért $\Phi^{-1}(W_a) \subseteq S_a$, azaz az a pont nyílt környezete belefoglalható egy S -beli kompakt halmazba. \square

3.3.8. Lemma. \tilde{C} és C összefüggő.

Bizonyítás. Elég a \tilde{C} -ra vonatkozó állítást belátni, hisz összefüggő halmaz folytonos képe összefüggő. Legyen A a \tilde{C} egy összefüggő komponense, be szeretnénk látni, hogy $A = \tilde{C}$. Tegyük fel továbbra is, hogy $[0 : 1 : 0] \notin C$, és legyen a $\phi([x : y : z]) = [x : z]$ leképezés, $a \in \mathbf{P}$ esetén a $B_a^\pm(\varepsilon)$ halmazok, az f_j^\pm függvények, és a σ permutáció a 3.3.5 lemmában látott módon definiálva. Ekkor a $\phi^{-1}(B_a^\pm(\varepsilon))$ d összefüggő komponensének mindegyike vagy benne van A -ban, vagy diszjunkt tőle, így feltehetjük, hogy valamely $e \in \{1, \dots, d\}$ számra $f_j^\pm(x) \in A \iff j \in \{1, \dots, e\}$. Ekkor nyilván σ megszorítható az $\{1, \dots, e\}$ halmaz permutációjává. Ekkor azt kell belátnunk, hogy tetszőleges a választással $e = d$.

A 3.3.6 megjegyzésben leírt módon a $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_l$ permutáció m_1, \dots, m_l hosszú ciklusok szorzata, és $a \neq \infty$ esetén definiálhatók a g_j (0 környezetében) holomorf függvények és a K nemnulla konstans, melyekre $\forall y$ -ra, és a -hoz elég közel $\forall x$ -re

$$P(x, y, 1) = K \prod_{1 \leq j \leq l} \prod_{1 \leq s \leq m_j} (y - g_j(e^{2\pi i s/m_j}(x - a)^{1/m_j}))$$

($a = \infty$ esetén x és z szerepét felcseréljük). Feltehető, hogy a σ megszorítása a $\{1, \dots, e\}$ halmazra a $\sigma_1 \dots \sigma_k$ ciklusok szorzata valamely $k \leq l$ számra és $m_1 + \dots + m_k = e$.

Tekintsük most a

$$Q(x, y) = K \prod_{1 \leq j \leq k} \prod_{1 \leq s \leq m_j} (y - g_j(e^{2\pi i s/m_j}(x - a)^{1/m_j}))$$

függvényt, ami egy e -edfokú polinom az y változóban, melynek az együtthatói a $e^{2\pi i s/m_j}(x - a)^{1/m_j}$ kifejezésekre felírt a körül konvergens hatványsorok. Továbbá a kifejezések permutálásának hatására a belső produktumok kifejtésével létrejövő formális hatványsorok változatlanok maradnak. Tehát ezen "belső" formális hatványsorok kifejezhetők az elemi szimmetrikus polinomokkal, azaz (előjelektől eltekintve) a

$$\prod_{1 \leq s \leq m_j} (y - e^{2\pi i s/m_j}(x - a)^{1/m_j}) = y^{m_j} - (x - a)$$

polinom együtthatóival. Tehát a belső hatványsorok tényleges, $(x - a)$ -változós a körül holomorf függvényekhez konvergáló hatványsorok. Ekkor a $Q(x, y)$ olyan

y -változós polinom, melynek együtthatói ilyen tulajdonságú hatványsorok. Látszólag $Q(x, y)$ függ a megválasztásától, de ha figyelembe vesszük, hogy $x \in B_a^\pm(\varepsilon)$ esetén

$$A \cap \phi^{-1}(\{x\}) = \{[x, g_j(e^{2\pi is/m_j}(x-a)^{1/m_j}), 1] : 1 \leq j \leq k, 1 \leq s \leq m_j\},$$

akkor látható, hogy a helyett $a' \in B_a^\pm(\varepsilon)$ választással $Q(x, y)$ nem változik, így \mathbb{C} (út)összefüggőségéből adódóan ez valójában nincs így, $Q(x, y)$ független az $a \in \mathbb{C}$ ponttól. Ezáltal $Q(x, y)$ az y változóban olyan polinom, melynek együtthatói x -változós holomorf függvények.

Az $a = \infty$ esetet hasonlóan vizsgálva azt találjuk, hogy az y hatványainak együtthatói kiterjednek meromorf függvényekké $\mathbf{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ -re, melyeknek egyetlen pólusa a ∞ -ben van. Korábban, a 3.1.6 lemmában megmutattuk, hogy a \mathbf{P}^1 -en értelmezett meromorf függvények racionálisak, így, ha csak ∞ -ben van pólusuk akkor polinomok. Tehát $Q(x, y)$ egy polinom az x és y változóban.

Ugyanez az érvelés mutatja, hogy a

$$P(x, y, 1) = K \prod_{1 \leq j \leq l} \prod_{1 \leq s \leq m_j} (y - g_j(e^{2\pi is/m_j}(x-a)^{1/m_j}))$$

szintén egy kétváltozós (x, y) polinom és így $Q(x, y)$ osztja $P(x, y, 1)$ -et a polinomyűrűben. Ekkor a Q homogenizáltja, a $z^e Q(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$ nemkonstans polinom osztja az irreducibilis $P(x, y, z)$ -t, tehát csak konstans szorzóban térnek el. Ekkor $Q(x, y)$ és $P(x, y, 1)$ is csak konstans szorzóban térnek el, tehát $k = l$ és $e = d$ teljesül, azaz $A = \tilde{C}$. \square

3.3.9. Megjegyzés. Belátható, hogy \mathcal{M} minden összefüggő komponense valójában egy-egy C projektív görbéhez tartozó \tilde{C} szingularitások rezolúciója. Továbbá az is megmutatható, hogy *minden* kompakt Riemann-felület előáll szingularitások rezolúciójaként. Az első állítás bizonyításának egy vázlata fellelhető Kirwan könyvében [1], részletesebben pedig például a Jones-műben [5].

4. A Puiseux parametrizálás

Ebben a szakaszban a görbék szinguláris pont körüli viselkedését fogjuk vizsgálni. Az egyszerűség kedvéért legyen a $P(x, y, z)$ által definiált C görbe egy szinguláris pontja a $[0 : 0 : 1]$. Ekkor a $P(x, y, 1)$ polinom változói között szeretnénk kapcsolatot teremteni. Be fogjuk látni, hogy 0 közelében $P(x, y, 1) = 0$ akkor teljesül, ha y formálisan felírható, mint egy megfelelő hatványsor melynek változója x valamilyen gyöke. Mint már korábban is láttuk, ez sima pontban az implicit függvénytétel értelmében egyszerűen megtehető, $\partial_y p \neq 0$ esetén y az x holomorf függvénye lesz. Nézzük most az általánosabb esetet. A parametrizálás létezését már ebben az esetben is látuk a 3.3.5 lemmában, azonban most egy Newtontól eredő módszerrel – konstruktívan, sőt algoritmikusan – lokálisan parametrizálni fogjuk a $P(x, y, 1) = 0$ egyenletet.

Legyen $P(x, y, 1) = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha, \beta} x^\alpha y^\beta$ és legyen P tartója a

$$\Delta(P) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 : c_{\alpha, \beta} \neq 0\}.$$

Ekkor találhatóak olyan μ és ν pozitív racionális számok, melyekre a tartó az $x + \mu y = \nu$ egyenestől "jobbra és felfele" van, azaz $P(x, y, 1) = \sum_{\alpha + \mu\beta \geq \nu} c_{\alpha, \beta} x^\alpha y^\beta$. Ha a tartónak van legalább két pontja ezen az egyenesen, akkor az $y = tx^\mu$ helyettesítés után a $P(x, tx^\mu, 1) = x^\nu f(t) + \sum_{\alpha + \mu\beta > \nu} c_{\alpha, \beta} t^\beta x^{\alpha + \mu\beta}$ egyenlőséget kapjuk, ahol $f(t) = \sum_{\alpha + \mu\beta = \nu} c_{\alpha, \beta} t^\beta$. Ekkor az $f(t)$ egy nemnulla gyökét kiválasztva a bizonyos szempontból legkisebb tagokat kinulláztuk. Ezen fog alapulni az iterációs eljárás a parametrizálás megkeresésére.

4.0.10. Definíció (Newton poligon). *Jelöljük Γ^+ -szal a következő halmast: $\Gamma^+ = \text{Conv}(\bigcup_{(\alpha, \beta) \in \Delta(P)} ((\alpha, \beta) + (\mathbb{R}^+)^2))$, azaz azon pontok konvex burkát, melyeknek mindkét koordinátája nem kisebb valamely tartó beli pont koordinátáinál. Ekkor, mivel P polinom, Γ^+ határa egy függőleges és egy vízszintes félegyenesből, és véges sok szakaszból fog állni. Ezen véges sok szakasz unióját nevezzük a P Newton-poligonjának, és jelöljük Γ -val.*

Mivel $[0 : 0 : 1] \in C$, így $(0, 0) \notin \Delta(P)$ és $\notin \Gamma$. Továbbá feltehető (projektív transzformációval elérhető) hogy $P(x, y, z)$ -t nem osztja x , és ekkor $\exists \beta$ amelyre $(0, \beta) \in \Delta(P)$. Ha a Newton poligon egy pontú, akkor az a fenti feltételekkel egy $(0, \beta_0)$ pont, azaz $P(x, y, 1) = y^{\beta_0} Q(x, y)$ ahol $Q(0, 0) \neq 0$, és ekkor a $(0, 0)$ közelében a $P(x, y, 1) = 0$ megoldásait az $y = 0$ pontok adják.

Egyébként a legmeredekebb szakasz a Newton-poligonban a kezdőszakasz, azaz a $(0, \beta_0)$ -ből induló (ahol β_0 a legkisebb pozitív egész, melyre y^{β_0} együtthatója a

$c_{0,\beta_0} \neq 0$). Legyen ennek meredeksége $-1/\mu_0$, ahol μ_0 egy pozitív racionális szám: $\mu_0 = \frac{p_0}{q_0}$, ahol p_0 és q_0 pozitív relatív prím egészek. Továbbá a $\nu_0 = \beta_0\mu_0$ jelölés mellett $P(x, y, 1) = \sum_{\alpha+\mu_0\beta \geq \nu_0} c_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$ teljesül. Továbbá $(0, \beta_0)$ -on kívül van legalább még egy (α, β) pont, amire $\alpha + \mu_0\beta = \nu_0$. Ekkor vegyük az $f_0(t) = \sum_{\alpha+\mu_0\beta=\nu_0} c_{\alpha,\beta} t^\beta$ polinomot, melynek így létezik nemnulla gyöke, legyen egy ilyen t_0 . Ez esetben $y_0 = t_0 x^{\mu_0}$ adja az első közelítő megoldást a $P(x, y, 1) = 0$ egyenletre.

Helyettesítsünk $x = x_1^{q_0}$ -t és $y = x_1^{\mu_0}(t_0 + y_1) = x_1^{p_0}(t_0 + y_1)$ -et P -be, ekkor

$$P(x_1^{q_0}, x_1^{p_0}(t_0 + y_1), 1) = \sum_{\alpha+\mu_0\beta \geq \nu_0} c_{\alpha\beta} x_1^{q_0\alpha+p_0\beta} (t_0 + y_1)^\beta = x_1^{q_0\nu_0} P_1(x_1, y_1),$$

ahol $P_1(x_1, y_1) = \sum_{q_0\alpha+p_0\beta \geq q_0\nu_0} c_{\alpha\beta} x_1^{q_0\alpha+p_0\beta-q_0\nu_0} (t_0 + y_1)^\beta$ egy polinom x_1 és y_1 változóiban, mely nem osztható x_1 -gyel.

4.0.11. Megjegyzés. Legyen β_0 mintájára β_1 a legkisebb $P_1(x_1, y_1)$ -ben előforduló y_1 -hatvány-, azaz ekvivalens módon a $P_1(0, y_1) = \sum_{\alpha+\mu_0\beta=\nu_0} c_{\alpha\beta} (t_0 + y_1)^\beta$ polinomban szereplő legkisebb y_1 hatvány kitevője. Mivel $\mu_0\beta_0 = \nu_0$ így β_0 -nál nagyobb kitevő nem szerepel a $(t_0 + y_1)$ -hatványokban, továbbá tudjuk, hogy $c_{0,\beta_0} \neq 0$, így a $P_1(0, y_1)$ polinomban az $y_1^{\beta_0}$ monom megjelenik. Ezáltal $\beta_1 \leq \beta_0$, és egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha $P_1(0, y_1)$ az $y_1^{\beta_0}$ skalárszorosa. Ekkor a $c_{0,\beta_0}(t_0 + y_1)^{\beta_0}$ kifejtéséből származó $c_{0,\beta_0}\beta_0 t_0 y_1^{\beta_0-1}$ monomot csak a $c_{\alpha,\beta_0-1}(t_0 + y_1)^{\beta_0-1}$ -ből származó $c_{\alpha,\beta_0-1} y_1^{\beta_0-1}$ monom nullázhatja ki, ahol $\alpha + \mu_0(\beta_0 - 1) = \nu_0 = \mu_0\beta_0$, így $\mu_0 = \alpha$. Tehát μ_0 egész, vagyis $q_0 = 1$.

Ezek után előlről elindítjuk az eljárást, $P(x, y, 1)$ helyett $P_1(x_1, y_1)$ -re, és folytatjuk, "amíg szükséges" (általában nem áll le az iteráció, ekkor hatványsort kapunk parametrizációként). Így nyerünk egy pozitív racionális számokból álló $\mu_0 = \frac{p_0}{q_0}$, $\mu_1 = \frac{p_1}{q_1}$, ... sorozatot, egy t_0, t_1, \dots komplex számsorozatot, és a $P(x, y, 1) = 0$ egyenlet közelítő megoldásainak egy sorozatát: $(x, y), (x_1, y_1), \dots$. Utóbbiakat az $x = x_1^{1/q_0}$, $x_1 = x_2^{1/q_1}$, ... és az $y = x^{\mu_0}(t_0 + y_1)$, $y_1 = x_1^{\mu_1}(t_1 + y_2)$, ... feltételek kötik össze. Be szeretnénk látni, hogy az

$$\begin{aligned} y &= t_0 x^{\mu_0} + t_1 x_1^{\mu_1} x^{\mu_0} + t_2 x_2^{\mu_2} x_1^{\mu_1} x^{\mu_0} + \dots \\ &= t_0 x^{\mu_0} + t_1 x^{\mu_0+\mu_1/q_0} + t_2 x^{\mu_0+\mu_1/q_0+\mu_2/q_0q_1} + \dots \end{aligned}$$

egy valódi megoldás $(0, 0)$ közelében. Ezt a sort hívjuk a $P(x, y, z)$ által definiált C görbe $[0 : 0 : 1]$ -beli *Puiseux-parametrizálásnak*, vagy *-kifejtésnek* (*Puiseux expansion*).

A 4.0.11 megjegyzés szerint $q_i = 1$, kivéve, ha $\beta_{i-1} > \beta_i$ ahol $\beta_0 \geq \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots$ pozitív egészek csökkenő sorozata. Így csak véges sok i -re lehet $q_i > 1$. Ezen q_i -k

szorzatát jelölje n , ekkor a Puiseux-kifejtés felírható, mint egy $x^{1/n}$ változójú formális hatványsor: $y = \sum_{r \geq 1} a_r x^{r/n}$.

Szükséges lenne, hogy ez a hatványsor kis x -ekre konvergáljon, és ténylegesen megoldása legyen a $P(x, y, 1) = 0$ egyenletnek.

4.0.12. Tétel. *Bármely $y = \sum_{r \geq 1} a_r x^{r/n}$ Puiseux-kifejtése a $P(x, y, z)$ által definiált C görbének a $[0 : 0 : 1]$ pont közelében egy $x^{1/n}$ változós hatványsor, amely 0-hoz elég közeli x -ekre konvergál, és kielégíti a $P(x, \sum_{r \geq 1} a_r x^{r/n}, 1) = 0$ egyenletet.*

Bizonyítás. A 3.3.6 megjegyzés alapján léteznek a g_1, \dots, g_l a 0 közelében értelmezett holomorf függvények, az m_1, \dots, m_l pozitív egészek, melyekre $m_1 + \dots + m_l = d$ és a K nemnulla konstans, melyekre $\forall y$ -ra, és a -hoz elég közel $\forall x$ -re

$$P(x, y, 1) = K \prod_{1 \leq j \leq l} \prod_{1 \leq s \leq m_j} (y - g_j(e^{2\pi i s/m_j} (x - a)^{1/m_j})).$$

A $g_j(t)$ függvényt holomorf lévén hatványsorba fejthetjük a 0 körül: $g_j(t) = \sum_{r \geq 0} a_r^{(j)} t^r$. Legyen N az m_1, \dots, m_l és n legkisebb közös többszöröse. Ekkor mind a

$$g_j(e^{2\pi i s/m_j} (x - a)^{1/m_j}) = \sum_{r \geq 0} a_r^{(j)} e^{2\pi i r s/m_j} (x - a)^{r/m_j} \text{ sor, mind a } \sum_{r \geq 1} a_r x^{r/n}$$

Puiseux-kifejtés tekinthető a $C\{x^{1/N}\}$, azaz az $x^{1/N}$ -változós formális hatványsorok gyűrűjének elemeiként. Ez a gyűrű egy integritási tartomány, tehát ha $Q(y)$ egy y -változós polinom, melynek együtthatói $C\{x^{1/N}\}$ -beli elemek, és amely kifejezhető $Q(y) = K(y - c_1)(y - c_2) \dots (y - c_d)$ alakban ($K \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ és $c_1, \dots, c_d \in C\{x^{1/N}\}$), továbbá $\exists c \in C\{x^{1/N}\}$ melyre $Q(c) = 0$, akkor $c = c_j$ valamely $j \in \{1, 2, \dots, d\}$ indexre. Ezek szerint elegendő belátnunk, hogy – mint formális $x^{1/N}$ -változós hatványsor – a Puiseux-kifejtés kielégíti a $P(x, \sum_{r \geq 1} a_r x^{r/n}, 1) = 0$ egyenletet, hisz ekkor megegyezik valamely $\sum_{r \geq 0} a_r^{(j)} e^{2\pi i r s/m_j} (x - a)^{r/m_j}$ sorral, amely a g_j holomorf függvény hatványsorba fejtett alakja (megfelelő helyettesítés után), így konvergens.

A Puiseux-kifejtés megkonstruálásából következik, hogy a legkisebb hatványa $x^{1/N}$ -nek a $P(x, \sum_{r=1}^M a_r x^{r/n}, 1)$ polinomban legalább $p_0 \beta_0 + p_1 \beta_1 + \dots + p_M \beta_M$, ami, mivel minden p_j és β_j pozitív egész, végtelenhez tart $M \rightarrow \infty$ esetén. Ezáltal a $P(x, \sum_{r \geq 1} a_r x^{r/n}, 1)$ formális hatványsorban minden együttható 0, így maga a sor 0, ahogy vártuk. \square

4.0.13. Megjegyzés. Az előző tétel bizonyításából látszik, hogy C minden Puiseux-kifejtése $[0 : 0 : 1]$ -ben valójában a 3.3.6 megjegyzés szerinti valamely g_j függvény a megfelelő változóra felírva, azaz $y = g_j(e^{2\pi i s/m_j} (x - a)^{1/m_j})$ alakú, ahol $g_j(t) = \sum_{r \geq 0} a_r^{(j)} t^r$ a 0 környezetében ($1 \leq j \leq l$, m_1, \dots, m_l pozitív egészek, melyekre

$m_1 + \dots + m_l = d$, és itt speciálisan $a_0^{(j)} = 0$). Sőt, megfordítva is igaz, ha $a_0^{(j)} = 0$, akkor a konstrukció során a megfelelő választásokkal az $y = g_j(e^{2\pi is/m_j}(x-a)^{1/m_j})$ kifejtést kapjuk. Így a C görbe a $[0 : 0 : 1]$ körül előáll, mint

$$\bigcup_{1 \leq j \leq l, a_0^{(j)} = 0} \bigcup_{1 \leq s \leq m_j} \{[x : y : 1] \in \mathbf{P}^2 : y = g_j(e^{2\pi is/m_j}(x-a)^{1/m_j})\}.$$

Az eddigiekkel összevetve tehát a görbe lokálisan előáll a $(0, 0)$ -t tartalmazó lokális irreducibilis komponensek uniójaként.

4.0.14. Megjegyzés. Legyen π a szingularitások rezolúciójánál bevezetett $\tilde{C} \rightarrow C$ leképezés. Ekkor a 3.3.6 megjegyzés alapján

$$\pi^{-1}\{[0 : 0 : 1]\} = \{< t^{m_j}, g_j(t) > : 1 \leq j \leq l, g_j(0) = 0\},$$

ahol a C egy Puiseux-kifejtését a $[0 : 0 : 1]$ -ben az $y = g_j(e^{2\pi is/m_j}(x-a)^{1/m_j})$ képlet adja ($1 \leq j \leq l$, $1 \leq s \leq m_j$, és $g_j(0) = 0$). Két ilyen kifejtést – legyenek ezek a (j, s) és a (\tilde{j}, \tilde{s}) indexekhez tartozók – *lényegében különbözőnek* (*essentially different*) mondunk, ha $j \neq \tilde{j}$. Ezek értelmében a $[0 : 0 : 1]$ pont π szerinti ősképek számossága pontosan a C lényegében különböző Puiseux-kifejtéseinek száma $[0 : 0 : 1]$ körül, amely a korábbi megjegyzések alapján megegyezik a lokális irreducibilis komponensek számával. Ez az információ később még fontos szerepet fog játszani.

Megjegyzés: Mint az elején kikötöttem, a $[0 : 0 : 1]$ pont választása csak kényelmi szempont volt, az eredmények a görbe minden pontjára érvényesek.

5. A Noether-formula, szinguláris görbék génusza

Az előző két fejezetben előkészítettük a szinguláris görbék topológiai vizsgálatához szükséges eszközöket, most segítségükkel rátérhetünk a téma fő tételének körüljárására. Vizsgálataink irreducibilis görbékre fognak vonatkozni, a reducibilis eset ugyanis az egymást néhány pontban metsző irreducibilis komponensek uniója. Legyen tehát C a $P(x, y, z)$ által definiált irreducibilis komplex projektív görbe, \tilde{C} a 3.3.2 alapján a görbéhez rendelt Riemann-felület és π a $\tilde{C} \rightarrow C$ leképezés, a korábban megbeszélt tulajdonságokkal. Tehát sima pontok körül π egy homeomorfizmust ad, továbbá ha p szinguláris pontja C -nek, akkor mint a 4.0.14 megjegyzésnél láttuk, a $\pi^{-1}(p)$ elemszáma a C görbe p -beli Puiseux-kifejtéseitől, azaz a lokális irreducibilis komponensektől függ. Ezáltal topológiai szempontból C előáll \tilde{C} -ből pár (véges sok) pont egyesítésével, és ezen egyesítéseket a Puiseux-kifejtések meghatározzák. \tilde{C} -nek, mint felületnek egyértelműen létezik a génusza, nevezzük ezt a g értéket a C görbe génuszának is. Most, a fok-génusz formula általánosításaként be fogom látni a *Noether-formulát*, mellyel egy tetszőleges irreducibilis görbe fokából és szingularitásainak tulajdonságaiból kiszámítható a görbe génusza.

Mint sima esetben, tegyük fel most is, hogy $[0 : 1 : 0] \notin C$, legyen $\phi([x : y : z]) = [x : z]$ a standard y irányú vetítés \mathbf{P}^1 -re ($\phi : C \rightarrow \mathbf{P}^1$), és legyen a $\psi = \phi \circ \pi : \tilde{C} \rightarrow \mathbf{P}^1$ a komplex projektív egyenes egy elágazó fedése. Legyen $R = \pi^{-1}\{[a : b : c] \in C : \partial_y P(a, b, c) = 0\}$ a ψ elágazási pontjainak-, $\psi(R)$ pedig az kritikus értékeinek halmaza. A 2.1.1 definícióból legyen $\nu_\phi(p)$ az elágazási szám, azaz $p = [a : b : c]$ esetén a $P(a, y, c)$ polinom $y = b$ gyökének multiplicitása. Végig ezeket a jelöléseket fogjuk használni.

5.0.15. Tétel. *Legyen $d = \deg C$. Ekkor \mathbf{P}^1 tetszőleges (V, E, F) felháromszögelése esetén, melyre $\psi(R) \subseteq V$, létezik \tilde{C} -nek egy $(\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{F})$ felháromszögelése, melyre $\tilde{V} = \psi^{-1}(V)$, $|\tilde{E}| = d|E|$ és $|\tilde{F}| = d|F|$ teljesül.*

Bizonyítás. Mivel $R \supseteq \pi^{-1}(\text{Sing}(C))$ és $\pi : \tilde{C} \setminus \pi^{-1}(\text{Sing}(C)) \rightarrow C \setminus \text{Sing}(C)$ egy homeomorfizmus, így a bizonyítás a 2.3.4 lemma bizonyításából kis változtatásokkal közvetlenül adódik. \square

5.0.16. Lemma. *Az előző feltételek mellett*

$$|\tilde{V}| = d|V| - \sum_{p \in \pi(R)} (\nu_\phi(p) - 1) + \sum_{p \in \text{Sing}(C)} (|\pi^{-1}\{p\}| - 1)$$

Bizonyítás. a 2.1.4 lemma alapján (mely nem használt semmiféle simaságot), tetszőleges $q \in \mathbf{P}^1$ pont ϕ szerinti ősképe pontosan $d - \sum_{p \in \phi^{-1}\{q\}} (\nu_\phi(p) - 1)$ pontot tartalmaz, továbbá $\nu_\phi(p) = 1$ ha $p \notin \pi(R)$, és $\phi^{-1}(V) \supseteq \pi(R)$. Ennek következtében

$|\phi^{-1}(V)| = d|V| - \sum_{p \in \pi(R)} (\nu_\phi(p) - 1)$. Mivel $\pi : \tilde{C} \setminus \pi^{-1}(\text{Sing}(C)) \rightarrow C \setminus \text{Sing}(C)$ bijektív és $\text{Sing}(C) \subseteq \phi^{-1}(V)$ így

$$|\psi^{-1}(V)| = |\pi^{-1}\phi^{-1}(V)| = d|V| - \sum_{p \in \pi(R)} (\nu_\phi(p) - 1) + \sum_{p \in \text{Sing}(C)} (|\pi^{-1}\{p\}| - 1).$$

□

Legyen $I_p(P, \partial_y P)$ a $P(x, y, z)$ által definiált C , és a $\partial_y P(x, y, z)$ homogén $(d-1)$ -edfokú polinom által definiált D görbe metszetmultiplicitása a p pontban.

5.0.17. Lemma. *Tegyük fel, hogy (esetleg projektív transzformációk alkalmazása, azaz megfelelő koordinátázás után) a $[0 : 1 : 0] \notin C$, továbbá nem fekszik egyetlen C -hez a $C \setminus \text{Sing}(C)$ -beli inflexiós pontban húzott érintőn sem. Ekkor, ha $p \in \pi(R)$ és $p \notin \text{Sing}(C)$, akkor $\nu_\phi(p) = 2$ és $I_p(P, \partial_y P) = 1$.*

Bizonyítás. Ez közvetlen következménye az 1.5.5 tételnek, a 2.1.2 megjegyzésnek és a 2.1.5 lemmának. Ugyanis ebben az esetben minden pont elágazási száma ≤ 2 , de elágazási pontok esetén ez a szám > 1 így ezen p -kre $\nu_\phi(p) = 2$. Ebből következik, hogy $P(p) = 0 = \partial_y P(p)$ de C és D érintői p -ben nem esnek egybe, különben $\nu_\phi(p) > 2$ lenne. Így $I_p(P, \partial_y P) = 1$. □

5.0.18. Következmény. Ezen koordinátázás mellett a \tilde{C} Eluer-karakterisztikája

$$\chi(\tilde{C}) = d(3-d) + \sum_{p \in \text{Sing}(C)} (I_p(P, \partial_y P) - \nu_\phi(p) + |\pi^{-1}\{p\}|).$$

Bizonyítás. A χ definíciója és az 5.0.15 tétel, valamint az 5.0.16 lemma alapján, ha $(\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{F})$ felháromszögelése \tilde{C} -nek akkor

$$\begin{aligned} \chi(\tilde{C}) &= |\tilde{V}| - |\tilde{E}| + |\tilde{F}| = \\ &= d(|V| - |E| + |F|) - \sum_{p \in \pi(R)} (\nu_\phi(p) - 1) + \sum_{p \in \text{Sing}(C)} (|\pi^{-1}\{p\}| - 1), \end{aligned}$$

ahol (V, E, F) a \mathbf{P}^1 egy felháromszögelése. Mivel $\chi(\mathbf{P}^1) = 2$, így $|V| - |E| + |F| = 2$. Továbbá az 5.0.17 lemma értelmében

$$\sum_{p \in \pi(R) \setminus \text{Sing}(C)} (\nu_\phi(p) - 1) = \sum_{p \in \pi(R) \setminus \text{Sing}(C)} I_p(P, \partial_y P).$$

Mivel $\text{Sing}(C) \subseteq \pi(R) \subseteq C \cap D$ (ahol D továbbra is a $\partial_y P$ által definiált görbe), így a Bézout tétel (1.5.6) szerint $\sum_{p \in \pi(R) \setminus \text{Sing}(C)} I_p(P, \partial_y P) = d(d-1) - \sum_{p \in \text{Sing}(C)} I_p(P, \partial_y P)$ is teljeseül. Ezeket az azonosságokat felhasználva pont a kívánt kifejezést kapjuk. □

5.0.19. Definíció. Legyen p a $P(x, y, z)$ polinom által definiált C irreducibilis görbe szinguláris pontja, és tegyük fel, hogy $[0 : 1 : 0]$ nem fekszik sem C -n, sem egyetlen C -hez egy $C \setminus \text{Sing}(C)$ -beli inflexiós pontban húzott érintőn. Ekkor legyen $\delta(p) = \frac{1}{2}(I_p(P, \partial_y P) - \nu_\phi(p) + |\pi^{-1}\{p\}|)$.

Megjegyzés: Belátható, hogy $\delta(p)$ mindig pozitív egész (A bizonyítás megtalálható Brieskorn és Knörrer könyvében [3]). Ha belátjuk, hogy $\delta(p)$ független a koordinátázástól (melyet a következő két lemmában megteszek), akkor általános összefüggést teremtettünk egy görbe foka és szingularitásainak tulajdonságai és a génusza között. Ez a

5.0.20. Tétel (Noether-formula). Egy d -edfokú irreducibilis komplex projektív görbe g génuszára fennáll a $g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - \sum_{p \in \text{Sing}(C)} \delta(p)$ összefüggés.

Bizonyítás. A tétel közvetlenül adódik az 5.0.18 következményből, hiszen $\chi(\tilde{C}) = 2 - 2g$. \square

Tehát szükséges még annak belátása, hogy $\delta(p)$ -t a koordinátatranszformációk változatlanul hagyják. Ez evidens a ∂_y operátort változatlanul hagyó (legfeljebb skalárral szorzó) tranzformációkra, így elég belátnunk a következő lemmát:

5.0.21. Lemma. Tegyük fel, hogy sem a $[0 : 1 : 0]$ sem a $[\alpha : \beta : \gamma]$ pont nem fekszik C -n, vagy egy C -hez egy $C \setminus \text{Sing}(C)$ -beli inflexiós pontban húzott érintőn. Tegyük fel, hogy $p \in \text{Sing}(C)$ és legyen $\nu_\phi^{[\alpha:\beta:\gamma]}(p)$ a legkisebb pozitív egész m , melyre az $(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z})^m P$ nem tűnik el p -ben. Ekkor

$$I_p(P, \alpha \frac{\partial}{\partial x} P + \beta \frac{\partial}{\partial y} P + \gamma \frac{\partial}{\partial z} P) - \nu_\phi^{[\alpha,\beta,\gamma]}(p) = I_p(P, \frac{\partial}{\partial y} P) - \nu_\phi(p)$$

Ahhoz hogy ezt belássuk, szükségünk lesz azonban egy másik segédállításra is. Ha $h(t)$ nemkonstans meromorf függvény a 0 egy összefüggő nyílt környezetén, akkor jelöljük $\mu(h)$ -val a h függvény 0-beli gyökének multiplicitását, vagy az ottani pólus rendjének (-1) -szeresét.

5.0.22. Lemma.

(i) $I_p(P, \partial_y P) = \sum_{\langle f, g \rangle \in \pi^{-1}\{p\}} \mu(\partial_y P(f, g, 1))$ (ahol tehát a $\mu(\partial_y P(f, g, 1))$ szám a $\frac{\partial}{\partial y} P(f(t), g(t), 1)$ függvény $t = 0$ -beli gyökének multiplicitása vagy az ottani pólus fokának (-1) -szerese), továbbá

(ii) $\nu_\phi(p) = \sum_{\langle f, g \rangle \in \pi^{-1}\{p\}} \mu(f - f(0))$, ahol $f(0)$ -t elhagyjuk a képletből, ha a ∞ értéket veszi fel.

Az 5.0.22 lemma bizonyítása. (i) Legyen $p = [a : b : c]$, $c \neq 0$ így feltehető, hogy $c = 1$. Ekkor a 3.3.6 és a 4.0.14 megjegyzés alapján

$$P(x, y, z) = K \prod_{1 \leq j \leq l} \prod_{1 \leq s \leq m_j} (y - z g_j(e^{2\pi i s/m_j} (\frac{x}{z} - a)^{1/m_j})),$$

ahol $K \neq 0$ konstans, g_1, \dots, g_l az a közelében értelmezett holomorfi függvények, és

$$\pi^{-1}\{p\} = \langle a + t^{m_j}, g_j(t) \rangle : 1 \leq j \leq l, g_j(0) = b \}.$$

Bár $y - z g_j(e^{2\pi i s/m_j} (\frac{x}{z} - a)^{1/m_j})$ nem polinom, a metszetmultiplicitás definíciója alkalmazható rá (jelen esetben a paraméterezés-behelyettesítő módszerrel számolunk).

Ekkor a következő egyenlőségek értelmesek és helyesek:

$$\begin{aligned} I_p(P, \partial_y P) &= \sum_{1 \leq j \leq l} \sum_{1 \leq s \leq m_j} I_p(y - z g_j(e^{2\pi i s/m_j} (\frac{x}{z} - a)^{1/m_j}), \partial_y P) = \\ &= \sum_{1 \leq j \leq l, g_j(0) = b} \sum_{1 \leq s \leq m_j} \mu(\partial_y P(a + t, g_j(e^{2\pi i s/m_j} t^{1/m_j}), 1)) = \\ &= \sum_{1 \leq j \leq l, g_j(0) = b} \mu(\partial_y P(a + t^{m_j}, g_j(t), 1)) = \\ &= \sum_{\langle f, g \rangle \in \pi^{-1}\{p\}} \mu(\frac{\partial P}{\partial y}(f, g, 1)). \end{aligned}$$

(ii) Ezt az érvelést folytatva a $\nu_\phi(p)$ elágazási számra, mint a $P(a, y, c)$ polinom $y = b$ gyökének multiplicitására teljesül:

$$\nu_\phi(p) = \sum_{1 \leq j \leq l, g_j(0) = b} m_j = \sum_{\langle f, g \rangle \in \pi^{-1}\{p\}} \mu(f - f(0)).$$

Ha $c = 0$, akkor $a + t^{m_j}$ helyére $t^{-m_j} - t$, $z g_j(e^{2\pi i s/m_j} (\frac{x}{z} - a)^{1/m_j})$ helyére pedig $x g_j(e^{2\pi i s/m_j} (\frac{z}{x})^{1/m_j}) - t$ írhatunk, és a fenti számolásokban e változtatásokkal kijön a kívánt eredmény. \square

Az 5.0.21 lemma bizonyítása. Ha $[\alpha : \beta : \gamma] = [0 : 1 : 0]$, akkor nincs mit bizonyítani, egyébként pedig található egy, a $[0 : 1 : 0]$ pontot fixen hagyó projektív leképezés, melyre a ∂_y operátor invariáns, és a $[\alpha : \beta : \gamma]$ pontot $[1 : 0 : 0]$ -ba viszi. Tehát feltehető, hogy $[\alpha : \beta : \gamma] = [1 : 0 : 0]$.

Tetszőleges $\langle f, g \rangle \in \tilde{C}$ esetén $P(f(t), g(t), 1) = 0$ kis t -kre. Ezt az egyenletet deriválva kapjuk, hogy $f'(t) \partial_x P(f(t), g(t), 1) + g'(t) \partial_y P(f(t), g(t), 1) = 0$ kis t értékekre, így

$$\mu(f') + \mu(\partial_x P(f, g, 1)) = \mu(g') + \mu(\partial_y P(f, g, 1)). \quad (5.1)$$

Felhasználva, hogy $\mu(f') = \mu(f - f(0)) - 1$ és ugyanígy $\mu(g') = \mu(g - g(0)) - 1$ (ahol $f(0)$ -t illetve $g(0)$ -t elhagyjuk, ha az értékük ∞), majd az (5.1) egyenlőséget összegezve minden olyan $\langle f, g \rangle \in \tilde{C}$ -re ahol $\pi(\langle f, g \rangle) = p$ az 5.0.22 lemma szerint kapjuk, hogy $I_p(P, \partial_x P) + \nu_\phi(p) = I_p(P, \partial_y P) + \nu_\phi^{[1:0:0]}(p)$. \square

5.0.23. Megjegyzés. A $\delta(p)$ invariáns kiszámítására létezik más, a görbének kevesebb globális tulajdonságára épülő módszer is, többek között egy, a *Milnor-számot* felhasználó számolás. Ehhez csak a görbe lokális tulajdonságaira van szükség, így feltehetjük, hogy C affin görbe a $P(x, y)$ által van definiálva. Ekkor a $p \in C$ szinguláris pont Milnor-száma a $\mu(p) = I_p(\partial_x P, \partial_y P)$ érték. Belátható, hogy a Milnor-számra fennáll a $\mu(p) = 2\delta(p) - r + 1$ összefüggés, ahol r a lokális irreducibilis komponensek száma, ami például – a korábban megbeszéltek alapján – a lényegesen különböző Puiseux-kifejtések számával megadható. (Erről bővebben Milnor könyvének 10. fejezetében olvashatunk [4].)

Ugyanebben a műben Milnor bebizonyítja azt, is, hogy a $\delta(p)$ invariáns szemléletesen a " p pontba koncentrált" közöséges dupla pontok száma.

6. Egy konkrét példa

Most, hogy az elméleti módszerekkel már tisztában vagyunk, lássunk egy példát. Kirwan könyvének ([1]) 7.5/(iv)-es számú feladatának önálló kidolgozását választottam, amely jól bemutatja az alkalmazás közben esetleg felmerülő különböző nehézségeket is.

Legyen $P(x, y, z) = 2xy^5 + 5y^2z^4 - 3x^2z^4$. Ki fogom számolni a P által definiált C görbe szinguláris pontjait, azok körül a Puiseux-parametrizálást, és a Noether-formulával a C génuszát.

Kezdjük a szinguláris pontokkal:

$$P(x, y, z) = 2xy^5 + 5y^2z^4 - 3x^2z^4 = 0 \quad (6.1)$$

$$\partial_x P(x, y, z) = 2y^5 - 6xz^4 = 0 \quad (6.2)$$

$$\partial_y P(x, y, z) = 10xy^4 + 10yz^4 = 0 \quad (6.3)$$

$$\partial_z P(x, y, z) = 20y^2z^3 - 12x^2z^3 = 0 \quad (6.4)$$

Ha $z = 0$ akkor a (6.2) egyenletet csak $y = 0$ elégíti ki, és ez a többi egyenletnek is megoldása, így $[1 : 0 : 0]$ szinguláris pont. Ha $z \neq 0$ akkor z választható 1-nek. Ekkor a (6.4) egyenletből $5y^2 = 3x^2$, így (6.1) miatt $2xy^5 = 0$. Azaz vagy $y = 0$ vagy $x = 0$, tehát a köztük fennálló (6.3) reláció miatt $x = y = 0$. Így $[0 : 0 : 1]$ szinguláris pont.

Tehát a görbénknek két szinguláris pontja van. A Noether-formula alkalmazásához mindkettőt meg kell vizsgálnunk.

$$(\text{Emlékeztető: } \delta(p) = \frac{1}{2}(I_p(P, \partial_y P) - \nu_\phi(p) + |\pi^{-1}\{p\}|).)$$

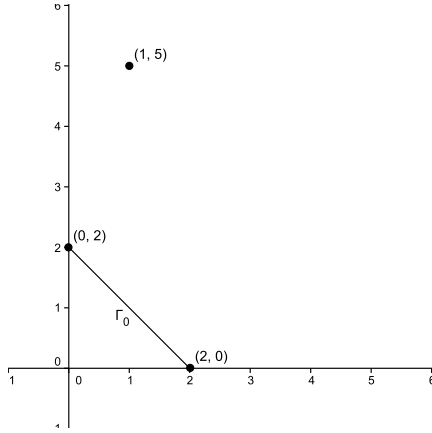
$$\text{I. } p = [0 : 0 : 1]$$

A Puiseux-kifejtés:

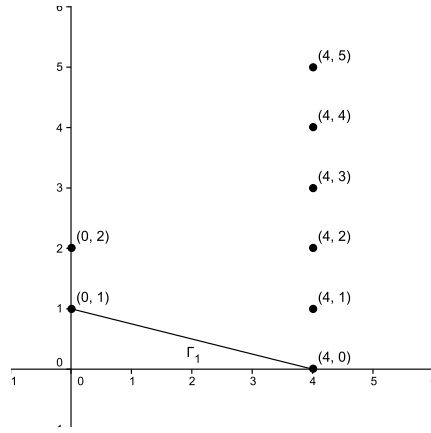
Ebben az esetben $P_0(x, y) = P(x, y, 1) = 2xy^5 + 5y^2 - 3x^2$, és ekkor $\Delta(P_0) = \{(0, 2), (2, 0), (1, 5)\}$, tehát a Γ_0 Newton-poligon a $[(0, 2), (2, 0)]$ szakasz, melynek meredeksége $\mu_0 = 1$, továbbá a 4. fejezetben definiált jelölésekkel $\beta_0 = 2$ és $\nu_0 = 2$. Ekkor $f_0(t) = \sum_{\alpha+\mu_0\beta=\nu_0} c_{\alpha,\beta}t^\beta = 5t^2 - 3$, így $t_0 = \pm\sqrt{3/5}$. Ekkor $x = x_1$ -et és $y = x_1(t_0 + y_1)$ -et helyettesítve P_0 -ba kapjuk a

$$\begin{aligned} P_1(x_1, y_1) &= 2x_1^4(t_0 + y_1)^5 + 5(t_0 + y_1)^2 - 3 = \\ &= 2x_1^4t_0^5 + 10t_0^4x_1^4y_1 + 20t_0^3x_1^4y_1^2 + 20t_0^2x_1^4y_1^3 + 10t_0x_1^4y_1^4 + 2x_1^4y_1^5 + 5t_0^2 + 10t_0y_1 + 5y_1^2 - 3 = \\ &= 2x_1^4t_0^5 + 10t_0^4x_1^4y_1 + 20t_0^3x_1^4y_1^2 + 20t_0^2x_1^4y_1^3 + 10t_0x_1^4y_1^4 + 2x_1^4y_1^5 + 10t_0y_1 + 5y_1^2 = \\ &= 2x_1^4t_0^5 + 10t_0y_1 + 10t_0^4x_1^4y_1 + R(x_1, y_1) \end{aligned}$$

polinomot (ahol értelemszerűen R a többi tag által alkotott polinom, ezekre azonban nem igazán lesz szükségünk). Eszerint a P_1 Newton-poligonja a $[(0, 1), (4, 0)]$ szakasz, így $\mu_1 = 4$, $f_1(t) = 10t_0t + 2t_0^5$ és így $t_1 = 9/125$.



(a) A P_0 Newton-poligonja



(b) A P_1 Newton-poligonja

6.1. ábra. Az első két Newton-poligon a p szingularitás vizsgálatakor

Ekkor $x_1 = x_2$, $y_1 = x_2^4(t_1 + y_2)$ a második helyettesítés.

A következő lépést elvégezve (P_2 -t kiszámolva) sejthető, hogy a $\mu = 4$ érték állandósul, és így sosem áll le az iteráció, azonban nekünk már az eddig kiszámolt értékek is elegendők lesznek a δ_p kiszámításához. Ugyanis a helyettesítéseket visszafejtve az $y = x_1(t_0 + y_1) = x_1(t_0 + x_2^4(t_1 + y_2)) = xt_0 + x^5t_1 + \dots = \pm\sqrt{3/5}x + 9/125x^5 + \dots$ kezdetű Puiseux-kifejtéseket nyerjük. Mivel $\beta_1 = 1$ és a β -k monoton csökkenő sorozatot alkotnak, így $f_j(t)$ minden $j \geq 1$ esetén lineáris tehát a t_j értékek a korábbi t_i -kből lineáris egyenlet megoldásával számolhatók, így azok által egyértelműen meghatározottak. Ennek értelmében a t_0 választásától függően legfeljebb 2 különböző Puiseux-kifejtés lehet p körül.

Be kellene látni, hogy ez a két kifejtés tényleg lényegében különböző. A 4.0.14 megjegyzésben megtárgyaltak alapján ez akkor nem teljesülne, ha mindkét fenti kifejtés egy, a 0 közelében holomorf g függvényből lenne nyerhető az $y = g(e^{2\pi is/m}x^{1/m})$ helyettesítéssel valamely m -re és s -ekre. Ez azonban lehetetlen, hisz a kifejtésekben csak egész együtthatós tagjaink vannak, tehát a g hatványsorában szereplő összes nemnulla együtthatójú tag kitevőjének m többszörösének kellene lennie, ekkor azonban a $e^{2\pi is/m}$ szorzó sosem jelenne meg ténylegesen, mindig egyet adna. Ekkor ebből a g függvényből minden s választásával ugyanazt a sort kapnánk, így nem származhat mindkét kifejtés egyazon g -ből.

Ezek alapján $|\pi^{-1}\{p\}| = 2$.

Megjegyzés: Könnyen ellenőrizhető, hogy a polinom lokálisan tényleg szorzattá bontható: $2xy^5 + 5y^2 - 3x^2 = (\sqrt{5}y - \sqrt{3}x + \dots)(\sqrt{5}y + \sqrt{3}x + \dots)$. Minkét faktor egy-egy lokális irreducibilis komponenst generál.

Az elágazási szám:

Triviális, hogy $\nu_\phi(p) = 2$, hiszen ez definíció szerint a $P(0, y, 1) = 5y^2$ polinom $y = 0$ gyökének multiplicitása.

Az $I_p(P, \partial_y P)$ metszetmultiplicitás:

A metszetmultiplicitás definíciójában szereplő $(i) - (vi)$ tulajdonságok és az 1.5.5 tétel segítségével kiszámolható, hogy:

$$\begin{aligned} & I_p(2xy^5 + 5y^2z^4 - 3x^2z^4, 10xy^4 + 10yz^4) \stackrel{(vi)}{=} \\ & \stackrel{(vi)}{=} I_p(3y^2z^4 - 3x^2z^4, 10xy^4 + 10yz^4) \stackrel{(v)}{=} I_p(y^2 - x^2, xy^4 + yz^4) + \underbrace{I_p(z^4, 10xy^4 + 10yz^4)}_{=0 \text{ a (iii). tul. miatt}} \stackrel{(v)}{=} \\ & \stackrel{(v)}{=} \underbrace{I_p(y - x, xy^4 + yz^4)}_{=1 \text{ az 1.5.5 miatt}} + \underbrace{I_p(y + x, xy^4 + yz^4)}_{=1 \text{ az 1.5.5 miatt}} = 2. \end{aligned}$$

Tehát $\delta(p) = (2 - 2 + 2)/2 = 1$.

II. $q = [1 : 0 : 0]$

Ebben az esetben az x és a z változó szerepe felcserélődik.

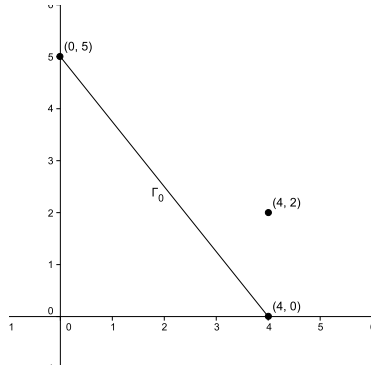
$P_0(y, z) = P(1, y, z) = 2y^5 + 5y^2z^4 - 3z^4$, tehát $\Gamma_0 = [(0, 5), (4, 0)]$, így $\mu_0 = 4/5$, $f_0(t) = 2t^5 - 3$, azaz t_0 ötféle lehet: $t_0 = \sqrt[5]{3/2}e^{2\pi ik/5} = c_0e^{2\pi ik/5}$. A helyettesítés: $z = z_1^5$ és $y = z_1^4(t_0 + y_1)$, így

$$\begin{aligned} P_1(y_1, z_1) &= 2(t_0 + y_1)^5 + 5(t_0 + y_1)^2z_1^8 - 3 = \\ &= 10t_0^4y_1 + 20t_0^3y_1^2 + 20t_0^2y_1^3 + 10t_0y_1^4 + 2y_1^5 + 5z_1^8t_0^2 + 10z_1^8t_0y_1 + 5z_1^8y_1^2 = \\ &= 10t_0^4y_1 + 5z_1^8t_0^2 + R(y_1, z_1). \end{aligned}$$

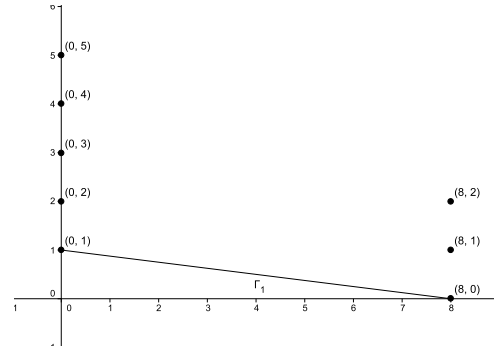
Ekkor $\mu_1 = 8$, $f_1(t) = 10t_0^4t + 5t_0^2$ tehát

$$t_1 = -t_0^{-2}/2 = -\sqrt[5]{1/72}e^{-4\pi ik/5} = c_1e^{-4\pi ik/5},$$

továbbá $z_1 = z_2$, $y_1 = z_2^8(t_1 + y_2)$.



(a) A P_0 Newton-polygonja



(b) A P_1 Newton-polygonja

6.2. ábra. Az első két Newton-polygon a q szingularitás vizsgálatakor

$$\begin{aligned}
P_2(y_2, z_2) &= 2z_2^{32}t_1^5 + 2z_2^{32}y_2^5 + 5z_2^{16}t_1^2 + 5z_2^{16}y_2^2 + 10t_0^4y_2 + 60z_2^{16}t_0^2t_1^2y_2 + 60z_2^{16}t_0^2t_1y_2^2 + \\
&+ 40z_2^{24}t_0t_1y_2^3 + 60z_2^{24}t_0t_1^2y_2^2 + 40z_2^8t_0^3t_1y_2 + 40z_2^{24}t_0t_1^3y_2 + 10z_2^{16}t_1y_2 + 20z_2^{32}t_1^2y_2^3 + \\
&+ 20z_2^8t_0^3t_1^2 + 10z_2^{32}t_1y_2^4 + 10z_2^{24}t_0t_1^4 + 10z_2^{32}t_1^4y_2 + 20z_2^8t_0^3y_2^2 + 10z_2^8t_0y_2 + 20z_2^{16}t_0^2t_1^3 + \\
&+ 20z_2^{16}t_0^2y_2^3 + 20z_2^{32}t_1^3y_2^2 + 10z_2^8t_0t_1 + 10z_2^{24}t_0y_2^4 = \\
&= 20t_0^3z_2^8y_2^2 + 15z_2^{24}y_2^2/t_0^3 - 10t_0z_2^8y_2 - 5z_2^{24}y_2/t_0^5 - 25z_2^{16}y_2^2 + 10t_0^4y_2 + 20t_0^2z_2^{16}y_2^3 - \\
&- 20z_2^{24}y_2^3/t_0 - (5/2)z_2^{32}y_2^2/t_0^6 + 10t_0z_2^{24}y_2^4 + 5z_2^{32}y_2^3/t_0^4 - 5z_2^{32}y_2^4/t_0^2 + (5/8)z_2^{32}y_2/t_0^8 + \\
&+ 10z_2^{16}y_2/t_0^2 - (5/4)z_2^{16}/t_0^4 + (5/8)z_2^{24}/t_0^7 - (1/16)z_2^{32}/t_0^{10} + 2z_2^{32}y_2^5 = \\
&= 10t_0^4y_2 - \frac{5}{4t_0^4}z_2^{16} + R(y_2, z_2)
\end{aligned}$$

Ekkor $\mu_2 = 16$, $f_2(t) = 10t_0^4t - \frac{5}{4t_0^4}$ tehát $t_2 = \frac{1}{8t_0^8} = c_2e^{-16\pi ik/5}$. Az előző esethez hasonlóan t_0 választása meghatározza az összes többi együtthatót, hiszen azok ugyanúgy lineáris egyenlet megoldásával következnek t_0 -ból.

Ezt folytatva (a Maple nevű programot segítségül hívva megspórolva a számolást) a Puiseux-kifejtés első pár tagja:

$$\begin{aligned}
y &= t_0z^{4/5} - \frac{1}{2t_0^2}z^{12/5} + \frac{1}{8t_0^8}z^{28/5} + \frac{1}{16t_0^{11}}z^{36/5} + \dots = \\
&= c_0e^{2\pi ik/5}z^{4/5} + c_1e^{-4\pi ik/5}z^{12/5} + c_2e^{-16\pi ik/5}z^{28/5} + c_3e^{-22\pi ik/5}z^{36/5} + \dots,
\end{aligned}$$

ahol csak a k függ a t_0 (az öt lehetőség közül) választásától, a c_i -k nem. Ez lényegében egy kifejtés lehet csak, hisz mint láttuk az $z = 0$ koordinátájú kifejtések $y = g_j(e^{2\pi is/m_j}z^{1/m_j})$ alakúak, ahol $g_j(t)$ a 0 környezetében holomorf, és $m_1 + \dots + m_l = d$. A q pontbeli kifejtés(ek)re tehát $m_j = 5$, így, mivel $d = 6$, csak 1 ilyen j lehet, ami pont a kifejtés egyértelműségét jelenti. (A 6-hoz hiányzó $m'_j = 1$ az $z = 0$ egyenes C -vel vett másik metszéspontjában, a $[0 : 1 : 0]$ -ben a

Puiseux-kifejtés kitevőjének nevezője, tehát ebből is látszik, hogy $[0 : 1 : 0]$ egy sima pont.) A kiszámolt kifejtési tagok megfelelnek a $g(t) = c_0t^4 + c_1t^{12} + c_2t^{28} + c_3t^{36} \dots$ kezdetű sorból az $e^{2\pi is/5} z^{1/5}$ behelyettesítésével nyert sor első pár tagjának a $4s \equiv k \pmod{5}$ esetén.

$$\text{Tehát } |\pi^{-1}\{q\}| = 1$$

Az elágazási szám:

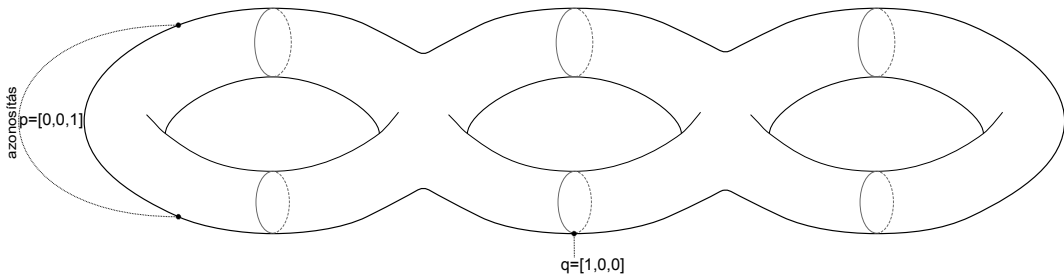
$$\text{Mivel } P(1, y, 0) = 2y^5 \text{ így } \nu_\phi(q) = 5.$$

Az $I_q(P, \partial_y P)$ metszetmultiplicitás:

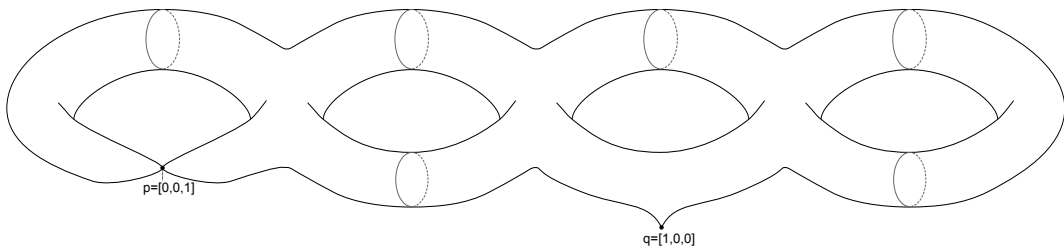
$$\begin{aligned} & I_q(2xy^5 + 5y^2z^4 - 3z^4, 10xy^4 + 10yz^4) \stackrel{(vi)}{=} \\ & \stackrel{(vi)}{=} I_q(3y^2z^4 - 3x^2z^4, 10xy^4 + 10yz^4) \stackrel{(v)}{=} I_q(z^4, xy^4 + yz^4) + \underbrace{I_q(y - x, xy^4 + yz^4)}_{=0 \text{ a (iii). tul. miatt}} + \\ & \quad + \underbrace{I_q(y + x, xy^4 + yz^4)}_{=0 \text{ a (iii). tul. miatt}} \stackrel{(vi)}{=} I_q(z^4, xy^4) \stackrel{(v)}{=} I_q(z^4, y^4) + \underbrace{I_q(z^4, x)}_{=0 \text{ a (iii). tul. miatt}} \stackrel{1.5.5}{=} 16 \end{aligned}$$

$$\text{Tehát } \delta(q) = (16 - 5 + 1)/2 = 6.$$

A fenti adatok segítségével megállapítható, hogy a C görbe génusza $g = (6 - 1)(6 - 2)/2 - 1 - 6 = 3$, tehát a \tilde{C} rezolúció egy három-lyukú tórusz. Továbbá C a \tilde{C} (p miatt) két pontjának azonosításával, és (q miatt) egy pontjának "kicsúcsosításával" keletkezik.



6.3. ábra. A \tilde{C} a módosítandó pontokkal



6.4. ábra. A C görbe topologikus alakja

Megjegyzés: A Noether-formula levezetésekor többek között kikötöttük, hogy $[0 : 1 : 0] \notin C$. Ez a technikai feltétel ebben a példában nem teljesül, azonban ez az elvi hiba könnyen javítható (így például a Kirwan-könyv[1] kidolgozott példái sem foglalkoznak vele). Az első esetben például az $x := x + y$ koordinátacserével (projektív transzformáció), a második esetben pedig a $z := z + y$ transzformációval elérhetjük, hogy teljesüljön a feltétel, miközben a szóban forgó szingularitás, a metszetmultiplicitás és az elágazási szám nem változik. Tehát a kiszámolt eredmények helyesek. Ezt a Milnor-számos kiszámolási módszerrel is ellenőrizhetjük.

Például a q pont esetén a $\mu(q) = 2\delta(q) - r + 1$ azonosságot, és azt, hogy a lokális irreducibilis komponensek száma $r = 1$ felhasználva, $\delta(q)$ -t kiszámolhatjuk a $\delta(q) = \mu(q)/2$ képlettel is. Ekkor

$$\mu(q) = I_q(\partial_y P, \partial_z P) = I_q(10xy^4 + 10yz^4, 20y^2z^3 - 12x^2z^3) = I_q(y^4, z^3) = 12,$$

tehát ezzel a módszerrel is $\delta(q) = 6$.

7. Kitekintés, további érdekességek

Ezt a fejezetet ismeretterjesztő jellegűnek szántam, az algebrai görbék témakörébe tartozó egyéb érdekességekről szeretnék most néhány szót ejteni. Azonban, például az első alfejezet alapos megtárgyalása külön kitenne egy szakdolgozatot, így csak szemléletesen tudom itt bemutatni a felmerülő módszereket, elméleteket. Ezáltal a kimondott állítások bizonyításait sem mindig fogom részletezni.

7.1. A görbék beágyazott típusa

Mint láttuk, a Noether-formula és a szingularitások alapos ismeretének segítségével pontos képet kaphatunk egy görbe absztrakt topologikus alakjáról, azaz, hogy milyen Riemann-felület feleltethető meg a görbéknek. Azonban, hogy ez pontosan hogy ágyazódik be a \mathbb{C}^2 -be (illetve \mathbf{P}^2 -be) arról még nem beszéltem, és teljesen pontos képet most sem fogok adni. Ugyanakkor lokálisan ez a kérdés elég jól vizsgálható.

Jelöljük $(\cdot, 0)$ -val, ha egy objektumot lokálisan, a 0 egy környezetében vizsgálunk csak. Ekkor a C görbe lokális beágyazott típusát a $(C, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ objektumpár határozza meg. Azt mondjuk, hogy két görbe beágyazott típusa megegyezik, azaz

$$\{(C_1, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)\} \sim \{(C_2, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)\},$$

ha létezik olyan $\varphi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ irányítástartó homeomorfizmus, melyre $\varphi((C_1, 0)) = (C_2, 0)$.

Mint már láttuk egy sima pont környezetében az implicitfüggvény-tétel értelmében a görbe egy sima felületdarabnak felel meg, sőt, holomorf függvény grafikonjaként áll elő. Mint ilyen, ez a környezet beágyazottan homeomorf egy körlappal, így a sima pontokban a vizsgálat ismét igen egyszerűnek bizonyult.

Egy szinguláris pont környezete azonban újfent sokkal érdekesebb. Kényelmi szempontból tegyük fel, hogy a $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ pont egy szinguláris pontja a C (affin) görbének (a lokális vizsgálódás miatt nem szükséges a \mathbf{P}^2 elemeiként tekinteni a görbéinkre, hisz itt egy pont egy kis környezete a standard térképezéssel feleltethető \mathbb{C}^2 egy nyílt részalmazának). Ekkor nézzük a C metszetét a $B_\varepsilon^4 = \{p \in \mathbb{C}^2 : |p| \leq \varepsilon\}$ tömör gömbbel és az $S_\varepsilon^3 = \partial B_\varepsilon^4 = \{p \in \mathbb{C}^2 : |p| = \varepsilon\}$ gömbfelülettel. Ekkor, mivel a szingularitások izoláltak, egy ε_0 küszöb alatt minden ε esetén $B_\varepsilon^4 \cap \text{Sing}(C) = (0, 0)$. Továbbá belátható, hogy ezen küszöb alatt minden ε esetén C és S_ε^3 transzverzálisan metszik egymást, azaz érintőtereik generálják \mathbb{C}^2 -et. Ekkor a 2 valós dimenziójú C és a 3 valós dimenziójú S_ε^3 transzverzális metszete egy

1 valós dimenziójú kompakt sima sokaság lesz, tehát valahány S^1 diszjunkt uniója, azaz egy L lánc. Belátható, hogy az $L = C \cap S_\varepsilon^3$ lánc csomóelméleti ekvivalenciaosztálya (az $L \hookrightarrow S_\varepsilon^3$ beágyazott típus) független az $\varepsilon < \varepsilon_0$ választásától, valamint hogy az összefüggő komponenseinek száma megegyezik a C görbe $(0, 0)$ pontbeli lokálisan irreducibilis komponenseinek számával. Ezáltal L ekvivalens módon meghatározza a görbe beágyazott típusát, ugyanis a $C \cap B_\varepsilon^4$ halmaz beágyazott homeomorfizmus erejéig az L -re a $(0, 0)$ -ból emelt kúp, az ε -tól való függetlenség miatt.

Az L lánc meghatározásában pedig a Puiseux-kifejtés lesz segítségünkre. Tegyük fel, hogy C lokálisan irreducibilis a $(0, 0)$ -ban. Ekkor csak 1 lényegesen különböző Puiseux-kifejtés létezik itt, illetve L egy csomó, azaz egy komponensű, homeomorf S^1 -gyel.

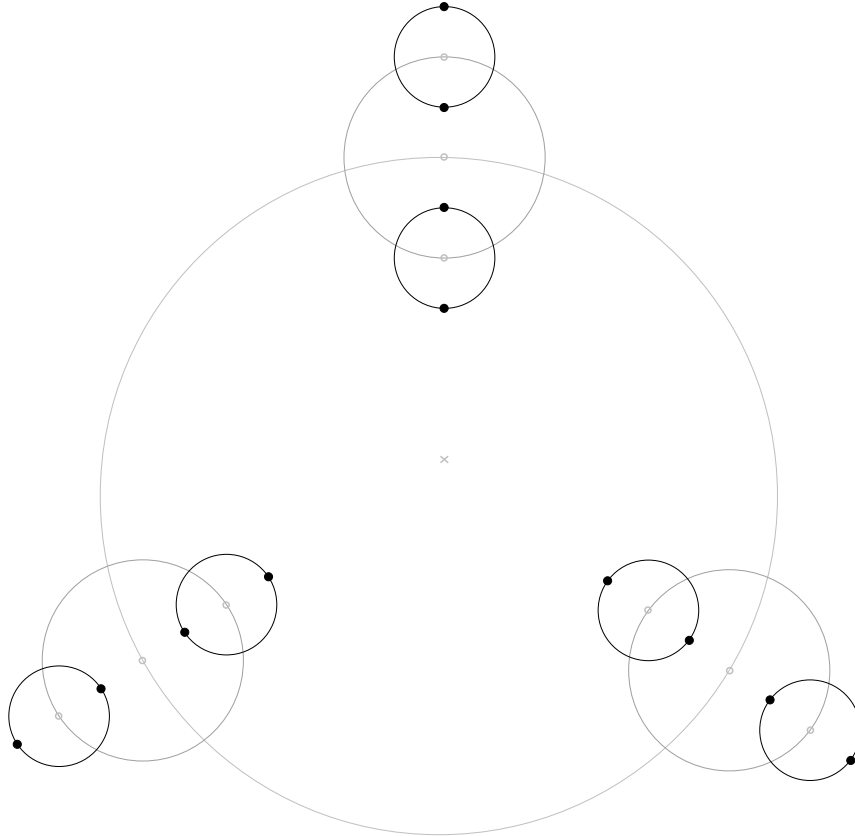
Írjuk fel a Puiseux-kifejtést úgy, hogy a kitevők növekvő sorrendben legyenek, valamint minden kitevőt úgy egyszerűsítsünk, hogy a nevezők a sorban őket megelőzőből annak beszorzásával keletkezzenek. Azaz ne egyszerűsítsünk le minden lehetséges prímtényezővel, a nevezők prímfelbontása alkosson bővülő sorozatot. Ekkor mivel a kitevők közös nevezőre hozhatók, csak véges sok olyan $\frac{p_i}{q_i}$ kitevő van, ahol a nevező ténylegesen nő, ezek kapnak kitüntetett szerepet a konstrukciónkban. Az így nyert (p_i, q_i) számpárok az úgynevezett *Puiseux-párok*, ezek ekvivalens módon meghatározzák az L beágyazott típusát, a következő szerkesztés segítségével:

Vegyünk egy tömör tóruszt, azaz egy hengert, melynek két végén lévő lapja azonosítva van. Vegyük továbbá a sorrendben első Puiseux-párt, és helyezzünk el q_1 pontot forgásszimmetrikusan a felső lapjára a hengernek, melyek a hengerben lefelé haladva egyenletes $\frac{p_1}{q_1}$ sebességgel forognak – "keringenek" – annak tengelye körül, azaz a henger (tórusz) teljes hosszán q_1 -szor végigmenve a pontok p_1 fordulatot tesznek meg. Ekkor egyszer végigmenve a hengeren $\frac{p_1}{q_1}$ fordulatot tettek, ami az eredeti forgásszimmetria miatt a q_1 pontból álló halmazt önmagába viszi, azonban a pontokat külön-külön nem. Ha nincs több pár, akkor készen vagyunk, a pontok pályájából megkaptuk L -et, ami ilyenkor egy tórikus csomó (ha a q_1 pontot a körlap peremére tettük, az egész "mozgás" a paláston folyik).

Ha van további pár, akkor vegyük a sorrendben következőt, és iteráljuk az eljárást a következő módon: A q_1 darab első párhoz tartozó pont mindegyikét *cseréljük ki* $\frac{q_2}{q_1}$ darab, azaz a nevező bővülésének megfelelő számú pontra. Ezek helyezkedjenek el az eredeti pontokra csoportonként forgásszimmetrikusan, az eredeti henger sugaránál jóval kisebb sugarú körön. Az új pontok csoportonként lefelé haladva keringjenek az eredeti pontok pályája, mint tengelyek körül $(\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1}{q_1})$ sebességgel. Ezeknek a pályája adja a második közelítésünket. Ezt az eljárást iterálva, míg el nem fogynak

a Puiseux-párok megkapjuk az L csomó egy realizációját.

Megjegyzés: L egy *iterált tóruszcsomó*, a szerkesztési eljárást pedig gyakran *fonat-szerkesztésnek*, illetve *körhinta (carousel) -konstrukciónak* nevezik. Egy másik intuitív elképzelése a konstrukciónak egy csillagrendszer-modell, ahol csak a legkisebb objektumok pályáját tekintjük, a többinek csak a gravitációs mezejét érezzük.



7.1. ábra. Carousel-ábra egy $q_1 = 3, q_2 = 6, q_3 = 12$ nevezőjű Puiseux kifejtéshez

Azon tagok a kifejtésben, ahol a nevező nem nőtt azért nem számítanak, mert ott az 1 relatív központi pontot 1 másikra cseréljük le, azaz csak kicsit megvariáljuk a pályát, ami azonban csomóelméleti szempontból nem lényeges változtatás.

Példa Lássunk egy egyszerű példát az érthetőség kedvéért, melynek segítségével a szerkesztés helyessége is hihetőbbé válik:

Legyen $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : P(x, y) = y^2 - x^3 = 0\}$ harmadfokú görbe. Ennek egyetlen szingularitása a $(0, 0)$ pont, itt a Puiseux-kifejtés(ek): $y = \pm x^{3/2}$. Legyen $\varepsilon = \sqrt{2}$, ekkor $L = C \cap S_\varepsilon^3 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^3 - y^2 = 0, |x|^2 + |y|^2 = 2\}$. Tehát L meghatározásához az $y = \pm x^{3/2}, |x|^2 + |y|^2 = 2$ egyenlőségrendszert kell

megoldanunk, amiből $|x|$ -re a következő összefüggés adódik: $|x|^3 + |x|^2 - 2 = 0$, melynek a pozitív számok körében csak az 1 a megoldása, tehát $|x| = 1$. Legyen $x = e^{2\pi is}$, ekkor Puiseux-kifejtés alapján $y = \pm e^{3\pi is}$, azaz 2 pont a B_1^2 körlemezben. Amint s befutja a $[0, 1]$ intervallumot, az x koordináta egy teljes körívet ír le, míg az y másfélszer fordul körbe. Együtt vizsgálva a két koordinátát $(x, y) \in S^1 \times B^2$, azaz a L pontjai egy tömör tóruszban (pontosabban a peremén) találhatóak, és a forgási sebességekből látható, hogy L a lóhere csomó (*trefoil knot*), azaz a $(2, 3)$ -as tórikus csomó.

Ha C nem lokálisan irreducibilis, akkor a hozzá tartozó L lánc összefüggő komponensei megfelelnek a C lokális irreducibilis komponenseinek, és ezek páronkénti metszetmultiplicitása az adott pontban (jelen esetben a $(0, 0)$ -ban) éppen a megfelelő lánckomponensek hurkolódási számával lesz egyenlő. Így a görbe lokális beágyazott típusát az adott pontbeli összes Puiseux-kifejtéshez tartozó Puiseux-párok, és a megfelelő lokális irreducibilis komponensek metszetmultiplicitásai meghatározzák.

7.2. Csoportstruktúra a tóruszon

A fok-génusz formula alapján egy C sima harmadfokú projektív görbe egy tóruszt határoz meg \mathbf{P}^2 -ben. A következő igen egyszerű konstrukcióval kommutatív csoportstruktúrát lehet definiálni C pontjain, és ezáltal a tóruszon. Abel csoport lévén a műveletet legyen az összeadás $(+)$.

Vegyük a C egy p_0 inflexiós pontját (mely biztosan létezik az 1.6.4 tétel alapján), ez lesz a csoportunk 0 eleme. Az 1.5.6-es Bezout-tétel alapján a C görbe és egy tetszőleges egyenes multiplicitással számolva pontosan 3 pontban metszi egymást. A csoportunkban definiáljuk úgy az összeadást, hogy 3 pont összege akkor és csak akkor 0, azaz p_0 , ha azok egy egyenes metszéspontjai C -vel, multiplicitást megengedve. Ez az egy szabály egyértelműen meghatározza a csoportstruktúrát.

Ugyanis ekkor egy $p \neq p_0$ pont ellentettjét, $-p$ -t megkaphatjuk a p -t és p_0 -t összekötő projektív egyenes C -vel vett harmadik metszéspontjaként. A p_0 ellentettje pedig az elvárásoknak megfelelően önmaga, hisz "a p_0 -ra és p_0 -ra illesztett projektív egyenes" a C érintője a p_0 pontban, melynek 3. metszéspontja C -vel szintén a p_0 . Ekkor $p + q := -r$, ahol az r pont $p \neq q$ esetén a $\overline{p, q}$ egyenes-, illetve $p = q$ esetén a p -beli érintő egyértelműen meghatározott 3. metszéspontja C -vel. Ellenőrizendő, hogy erre a műveletre teljesülnek a csoportaxiómák.

A kommutativitás a definícióból közvetlenül következik. Szintén a definíciók alapján $p + (-p) = -p_0 = p_0$. Egy $p \neq p_0$ pontra $p + p_0 = -r$, ahol r a $\overline{p_0, p}$ egyenes C -vel vett 3. metszéspontja. Ez nem lehet p_0 , hisz a p_0 -beli érintő rögtön 3 multip-

licitással metszi C -t p_0 -ban. Tehát $-r$ az $\overline{p_0, r}$ egyenes C -vel vett 3. metszéspontja, ami p , így $p_0 + p = p$. Az asszociativitás bizonyítása kissé bonyolultabb, szükségünk lesz hozzá egy lemmára:

7.2.1. Lemma (Hasadási tétel). *Legyen C és D a P és Q polinomok által definiált n -edfokú projektív görbék, valamint E az R polinom által definiált e -edfokú irreducibilis görbe. Ekkor, ha a C és D görbék (multiplicitással számolt) n^2 metszéspontjából ne pont E -n fekszik, akkor a maradék $n^2 - ne$ pont egy másik, $(n - e)$ -edfokú görbe eleme.*

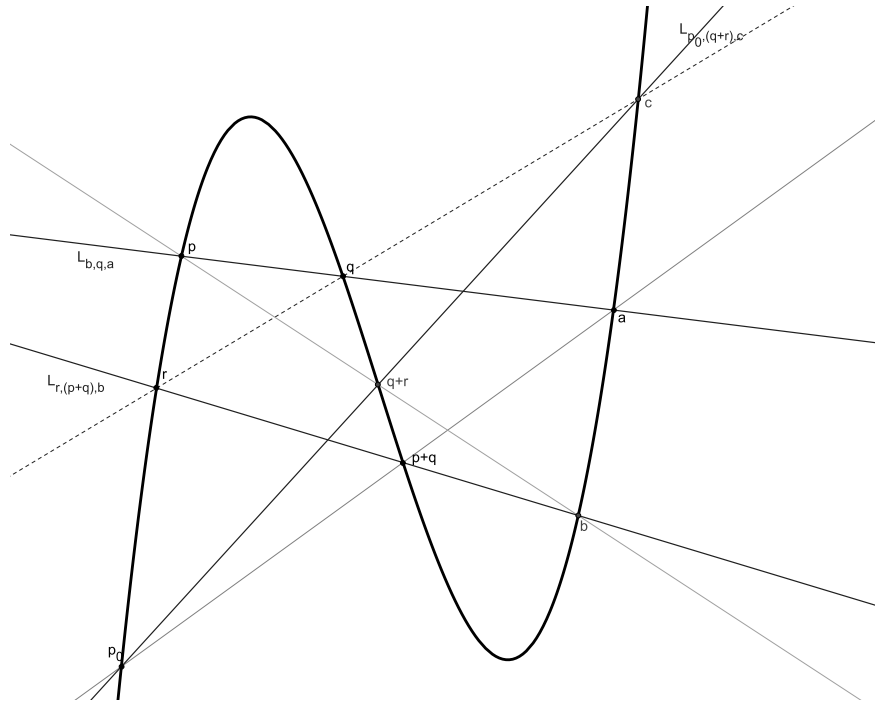
Bizonyítás. A bizonyítás a Bézout-tétel (1.5.6) alkalmazása. Legyenek a metszéspontok $C \cap D = \{p_1, \dots, p_{n^2}\}$, ezek közül $p_1, \dots, p_{ne} \in E$. Nézzük a $aP + bQ$ egyparaméteres polinomcsaládot, jelöljük ezt $S_{[a:b]}$ -vel, ahol $[a : b] \in \mathbf{P}^1$. Legyen a megfelelő görbecsalád $F_{[a:b]}$. Ekkor az eredeti n^2 metszéspont mindegyike rajta van $F_{[a:b]}$ -n, továbbá tetszőleges $q \in E \setminus \{p_1, \dots, p_{ne}\}$ pontra $\exists! [a_q : b_q]$, melyre $q \in F_{[a_q:b_q]}$. Ez utóbbi azért teljesül, mert a 0 előáll a $P(q_1, q_2, q_3)$ és $Q(q_1, q_2, q_3)$ komplex számok lineáris kombinációként, ahol $q = [q_1 : q_2 : q_3]$. Ekkor az e -edfokú E és az n -edfokú $F_{[a_q:b_q]}$ görbék a p_1, \dots, p_{ne}, q pontokban metszik egymást, ami $ne + 1$ pont, így nem teljesül a Bézout-tétel állítása. Ez csak úgy lehetséges, ha a két görbének van egy közös komponense, ami E irreducibilitása miatt csak maga E lehet. Ekkor $R|S_{[a_q:b_q]}$, tehát $S_{[a_q:b_q]} = RT$, ahol T egy $n - e$ -edfokú polinom, amely a G görbét definiálja. Mivel $\{p_1, \dots, p_{n^2}\} \subseteq F_{[a_q:b_q]}$, és $\{p_1, \dots, p_{ne}\} \subseteq E$, ezért $\{p_{ne+1}, \dots, p_{n^2}\} \subseteq G$. \square

Ennek segítségével az asszociativitás is bizonyítható, mégpedig a következő módon. Legyen $p, q, r \in C$ tetszőleges, az egyszerűség kedvéért 3 különböző pont, ekkor szükséges, hogy $(p + q) + r = p + (q + r)$. (Az egybeeső pontok esete külön kezelhető.) Legyen a $\overline{p, q}$ egyenes 3. metszéspontja C -vel a , az $\overline{(p + q), r}$ egyenesé b , a $\overline{q, r}$ -é pedig c .

A művelet szerkesztésének menetét megvizsgálva látszik, hogy azt kell belátnunk, hogy a $p, (q + r)$ és b pontok egy egyenesen vannak. Ehhez legyen

$$D := L_{p,q,a} \cup L_{r,(p+q),b} \cup L_{p_0,(q+r),c}$$

harmadfokú görbe, ahol $L_{x,y,z}$ az x, y, z görbepontokon átmenő egyenes. Ekkor $C \cap D = \{p, q, r, p_0, p + q, q + r, a, b, c\}$. Ebből az q, r és c pontok egy egyenesen vannak, tehát a 9 metszéspontból 3 egy elsőfokú görbén van, így az előző lemma értelmében a másik 6 egy másodfokú görbén található. Ekkor p_0, a és $(p + q)$ rajta van ezen a másodfokú görbén, közben pedig egy egyenesen is. Ez a Bézout-tétel értelmében csak úgy valósulhat meg, ha az egyenes része a másodfokú görbének, ami így két egyenes uniója. Ebből a másik egyenes tartalmazza a $p, (q + r)$ és b pontokat, beláttuk az állítást.



7.2. ábra. Az asszociativitás bizonyításának ábrája a valós síkon

Megjegyzés: Ennek a konstrukciónak a segítségével be tudunk mutatni egy, a C sima harmadfokú görbe inflexiós pontjaira vonatkozó érdekes állítást. Generikus esetben ilyenből 9 darab van (hiszen a Hesse-polinom harmadfokú), melyekből bármely három egy egyenesen fekszik. Ugyanis ha p inflexiós pont, akkor a C görbe p pontbeli érintője itt háromszoros multiplicitással metszi a görbét, tehát a csoportstruktúra alapján $3p = p + p + p = p_0 = 0$. Ennek az állításnak a megfordítása is igaz, ha $3p = p_0$ akkor p inflexiós pont. Vegyünk most két inflexiós pontra (p és q) illesztett egyenes harmadik metszéspontját a görbével ($r \neq q, p$). Ekkor az alapdefinícióból $p + q + r = p_0$, így $3p + 3q + 3r = 3p_0$. Ebből levonva a $3p = p_0$ és $3q = p_0$ egyenlőségeket, kapjuk, hogy $3r = p_0$, tehát r inflexiós pont. Ezt kicsit továbbgondolva kijön, hogy az inflexiós pontok egy részcsoportot alkotnak a létrehozott csoportban, amely izomorf $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ -mal.

F. Függelék

F.1. Komplex függvénytan

F.1.1. Tétel (Inverzfüggvény-tétel).

(i) Ha $f : U \rightarrow V$ holomorf bijekció a \mathbb{C} komplex számsík U és V nyílt részhalmazai között, akkor $f'(z) \neq 0 \forall z \in U$ esetén, és az inverz függvény $f^{-1} : V \rightarrow U$ holomorf.

(ii) Ha $f : U \rightarrow V$ holomorf függvény az a pont egy nyílt U környezetén van értelmezve, és $f'(a) \neq 0$ akkor az f megszorítása a -nak egy megfelelően kicsi, U -ban fekvő nyílt környezetére holomorf bijekció $f(a)$ egy nyílt környezetére.

F.1.2. Tétel (Implicitfüggvény-tétel). Legyen $F(z, w)$ kétváltozós, koordinátánként holomorf (azaz rögzített z mellett w -ben holomorf, és fordítva), komplex értékű függvények, és tegyük fel, hogy $F(z_0, w_0) = 0 \neq \frac{\partial}{\partial w} F(z_0, w_0)$. Ekkor létezik z_0 -nak U , és w_0 -nak V nyílt környezete, valamint egy bijektív és holomorf $f : U \rightarrow V$ függvény, melyre $f(z_0) = w_0$ és ha $z \in U$ és $w \in V$ akkor $f(z) = w \iff F(z, w) = 0$.

F.1.3. Tétel (Gyökök folytonossága). Legyen $P(z, w)$ komplex kétváltozós polinom, melyre $P(z_0, w_0) = 0$ és az $P(z_0, w)$, y változós polinomnak m -szeres gyöke van w_0 -ban. Ekkor $\forall \varepsilon > 0$ -ra $\exists \delta > 0$, hogy $|z - z_0| < \delta$ esetén az $P(z, w)$ polinomnak legalább m gyöke van multiplicitással számolva a $\{w \in \mathbb{C} : |w - w_0| < \varepsilon\}$ körlemezben.

Megjegyzés: Ez a tétel belátható $P(z, w)$ polinom helyett $F(z, w)$ koordinátánként holomorf függvényekre is.

F.1.4. Tétel (Unicitási tétel). Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ egy összefüggő nyílt tartomány, $z_i \in \Omega$, $i = 1, 2, \dots$ az Ω belsejében torlódó komplex számsorozat, f -pedig egy Ω -n értelmezett holomorf függvény. Ha $\forall z_i$ -re $f(z_i) = 0$, akkor $f \equiv 0$ az Ω tartományon.

F.2. Topológia

F.2.1. Definíció. A $\pi : Y \rightarrow X$ folytonos leképezés az X és Y topologikus terek között úgynevezett fedőleképezés, ha $\forall x \in X$ -nek $\exists U$ nyílt környezete X -ben, melyre $\pi^{-1}(U)$ diszjunkt Y -beli részhalmazok uniója, melyeket a π homeomorfán képez U -ra.

F.2.2. Lemma (Leképezés-felemelési lemma).

(i) Legyen $\pi : Y \rightarrow X$ egy fedőleképezés, és $f : A \rightarrow X$ egy folytonos leképezés az A útösszefüggő, lokálisan útösszefüggő és egyszeresen összefüggő topologikus

térről. Ekkor $\forall a \in A$ és $\forall y \in Y$ esetén, melyekre $f(a) = \pi(y)$, egyértelműen létezik egy $F : A \rightarrow Y$ folytonos leképezés, melyre $F(a) = y$, és $\pi \circ F = f$.

(ii) Továbbá, ha f homeomorfizmus a képére, $f(A)$ -ra, akkor F homeomorfizmus $\pi^{-1}(f(A))$ egy összefüggő komponensére.

F.2.3. Lemma.

(i) Legyen $\pi : Y \rightarrow X$ folytonos leképezés, és tegyük fel, hogy $\forall x \in X$ rendelkezik olyan U nyílt környezettel, melyre $\pi^{-1}(U)$ minden összefüggő komponensébe $\pi^{-1}(x)$ -nek legfeljebb egy pontja esik. Tegyük fel tovább, hogy Y kompakt, és V az X egy olyan nyílt részhalmaza, melyre a $\pi|_{\dots} : \pi^{-1}(V) \rightarrow V$ egy fedőleképezés. Ha $f : [0, 1] \rightarrow X$ folytonos, és $f^{-1}(V)$ tartalmazza a $(0, 1)$ nyílt intervallumot, akkor $\forall r \in (0, 1)$ és $\forall y \in Y$ esetén, ahol $\pi(y) = f(r)$, létezik egy egyértelmű egy $F : [0, 1] \rightarrow Y$ folytonos leképezés, melyre $F(r) = y$, és $\pi \circ F = f$.

(ii) Ugyanez elmondható f helyett a $g : \Delta \rightarrow X$ függvényre, ekkor az (i)-ben a $(0, 1)$ intervallumra vonatkozó feltételeknek a $\Delta \setminus \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ halmazra kell teljesülniük, és $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

Az F.1.1 és az F.1.4 tételek bizonyítása Priestleynél ([6]) olvasható, a többi bizonyítás megtalálható például a Kirwan-könyv ([1]) függelékében.

Ábrák jegyzéke

1.1. Az $xy = 0$ egyenlettel definiált projektív görbe stilizált képe	6
1.2. A $x^3 - y^2z$ polinom által definiált <i>cuspidális</i> harmadfokú görbe	7
1.3. A $x^3 + x^2z - y^2z$ polinom által definiált <i>nodális</i> harmadfokú görbe	7
6.1. Az első két Newton-poligon a p szingularitás vizsgálatakor	43
6.2. Az első két Newton-poligon a q szingularitás vizsgálatakor	45
6.3. A \tilde{C} a módosítandó pontokkal	46
6.4. A C görbe topologikus alakja	46
7.1. Carousel-ábra egy $q_1 = 3, q_2 = 6, q_3 = 12$ nevezőjű Puiseux kifejtéshez	50
7.2. Az asszociativitás bizonyításának ábrája a valós síkon	53

Felhasznált irodalom

- [1] Frances Kirwan: *Complex Algebraic Curves*, 1992. Cambridge University Press, London Mathematical Student Texts 23
- [2] Gerd Fischer: *Plane Algebraic Curves*, 2000. American Mathematical Society, Student Mathematical Library Vol. 15 (eredeti kiadás: Ebene algebraische Kurven, 1994)
- [3] Egbert Brieskorn, Horst Knörrer: *Plane algebraic curves*, 2012. Springer (eredeti kiadás: Ebene algebraische Kurven, Birkhäuser)
- [4] John W. Milnor: *Singular points of complex hypersurfaces*, 1968. Princeton University Press, Annals of Mathematics Studies 61
- [5] B.F. Jones: *Rudiments of Riemann surfaces*, 1971. Rice University
- [6] H.A. Priestley: *Introduction to complex analysis*, 1985, Oxford

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás	0
Előszó	1
1. Általános bevezető, alapfogalmak	2
1.1. Algebrai görbék a komplex síkon	2
1.2. Algebrai görbék a projektív síkon	3
1.3. Az affin és projektív görbék viszonya	4
1.4. Példák egyszerű görbékre	6
1.5. Algebrai görbék metszetéről, Bézout-tétel	8
1.6. Inflexiós pontok	10
2. Sima görbék topológiája, a fok-génusz formula	12
2.1. \mathbb{P}^1 elágazó fedései	12
2.2. A génusz fogalma	14
2.3. A fok-génusz formula	16
3. A szingularitások rezolúciója (Resolution of singularities)	19
3.1. Riemann-felületek	19
3.2. Az univerzális Riemann-felület	22
3.3. A szingularitások rezolúciója	26
4. A Puiseux parametrizálás	33
5. A Noether-formula, szinguláris görbék génusza	37
6. Egy konkrét példa	42
7. Kitekintés, további érdekességek	48
7.1. A görbék beágyazott típusa	48
7.2. Csoportstruktúra a tóruszon	51
F. Függelék	i
F.1. Komplex függvénytan	i
F.2. Topológia	i
Ábrák jegyzéke	iii
Felhasznált irodalom	iv