Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Szakdolgozat

matematika BSc

p-adikus csoportok p-adikus Banach-tér-reprezentációi

Backhausz Tibor

Témavezető:
Zábrádi Gergely

2014

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **3**
1.1. Motiváció . . . 3
1.2. A dolgozatról . . . 5
1.3. Köszönetnyilvánítás . . . 6

2. Absztrakt algebrai alapok **7**
2.1. Kategóriák . . . 7
2.2. Modulusok kategóriái . . . 8
2.3. Inverz limesz . . . 9
2.4. Provéges csoportok . . . 9

3. Nem-arkhimédeszi analízis **11**
3.1. Nem-arkhimédeszi testek . . . 11
3.2. Lokálisan analitikus függvények . . . 12
3.3. Sokaságok . . . 13

4. Nemarkhimédeszi funkcionálanalízis **15**
4.1. Vektorterek nemarkhimédeszi testek felett . . . 15
4.2. Nemarkhimédeszi Banach-terek . . . 17
4.3. Lineáris leképezések . . . 17
4.4. Dualitás . . . 19

5. Disztribúcióalgebrák csoportokon **24**
5.1. Disztribúciók . . . 24
5.2. Függvények és disztribúciók kompakt csoportokon . . . 25
5.3. Csoportalgebrák . . . 25
5.4. $\mathbb{Z}_p$ disztribúcióalgebrája . . . 28

6. Folytonos reprezentációk **31**
6.1. Reprezentációk és modulusok . . . 31
6.2. Dualitás . . . 33
6.3. Lokalizálás . . . 35
6.4. Provéges csoportok reprezentációi . . . 35
6.5. $o[[G]]$ feletti modulusok . . . 36
6.6. Megengedhető Banach-tér-reprezentációk . . . 38
6.7. $\mathbb{Z}_p$ megengedhető reprezentációi . . . 39
6.8. Indukált reprezentációk . . . 39

7. p-adikus lokális Langlands-megfeleltetés $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-re **41**
7.1. Galois-reprezentációk 41
7.2. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ egyszerű reprezentációi 41

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Motiváció

Az algebrai számelmélet klasszikus motivációja a

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

racionális együtthatós polinomok racionális nullhelyeinek megtalálása, azaz diofantoszi egyenletek megoldása. Egy ilyen egyenlet megoldásait az F test felett jelöljük $X(F)$-fel.

$X(\mathbb{C})$ jellemzően jól kezelhető az algebrai geometria módszereivel, és innen $X(\overline{\mathbb{Q}})$-ról is elegendő információt kapunk.

Ahhoz azonban, hogy $X(F)$-et egy $F/\mathbb{Q}$ algebrai bővítésre le tudjuk írni, nem csak $X(\overline{\mathbb{Q}})$-t kell ismerni, hanem a $G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ abszolút Galois-csoport rajta való (folytonos) hatását is, hiszen $X(F)$ a $G_F = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ által fixált pontokból áll.

Ezért $G_{\mathbb{Q}}$ halmazokon, különösen vektortereken való hatása központi helyet foglal el a számelméletben. A legegyszerűbb eset természetesen az 1-dimenziós vektortereken való hatás. Ezek a $G_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}^\times$ homomorfizmusoknak (karaktereknek) felelnek meg.

Mint minden csoport, így $G_{\mathbb{Q}}$ Abel-csoportba menő homomorfizmusai átvezethetők a maximális Abel-féle faktorán, amelyet a következő híres XIX. századi tétel ad meg.

1.1.1. Tétel (globális Kronecker–Weber)**.**

$$G_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}} = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_\infty)/\mathbb{Q})$$

ahol μ_∞ az egységgyökök csoportja, és $\mathbb{Q}(\mu_\infty)$ a legkisebb μ_∞-t tartalmazó test $\mathbb{Q}$ felett.

De micsoda $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_\infty)/\mathbb{Q})$? A körosztási polinomok vizsgálatával kiderül, hogy nem más, mint az egységgyökök összes lehetséges automorfizmusa. Ez a $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ csoport. Az inverz limesz (2.3. alfejezetben leírt) konstrukciójával

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \varprojlim_n \mathrm{Hom}(n^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \varprojlim_n (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times.$$

A kínai maradéktétel szerint azonban ha $n = \prod_i p_i^{\alpha_i}$ az n prímfelbontása, akkor

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \prod_{p_i^{\alpha_i}} (\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z})^\times$$

$$\varprojlim_n (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \prod_{p \text{ prim}} \varprojlim_\alpha (\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times.$$

Úgy tűnik tehát, hogy $G_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}}$ felbomlik *lokális*, azaz csak egyetlen prímtől függő részek direkt szorzatára. Természetes a kérdés, hogy mi a

$$\varprojlim_\alpha (\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times$$

csoport természetes jelentése. Tekinthetünk a $\varprojlim_\alpha (\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})$ limeszre mint diszkrét, véges *gyűrűk* inverz limeszére, ekkor egy $\mathbb{Z}_p$ topologikus főideálgyűrűt kapunk, amelyben p a maximális ideál. Hányadosteste $\mathbb{Q}_p = p^{-\infty}\mathbb{Z}_p$, amelyet a p-adikus számok testének nevezünk.

Aritmetikai geometriai szemszögből nézve $\mathbb{Q}_p$-ben már csak azok az algebrai egyenletek nem megoldhatók, amelyeknek lokálisan akadálya van a p prímnél, például $x^2 - p = 0$, vagy $x^2 - a = 0$ ahol a nem kvadratikus maradék mod p.

Ezért $\mathbb{Q}_p$ Galois-elméletének megértése, majd az így kapott adatok összeillesztése az eredeti problémáról, $\mathbb{Q}$ Galois-elméletéről is sok információt ad. Így $\mathbb{Q}_p$ Galois-reprezentációi is érdekesek a számelmélet számára.

1.1.2. Tétel (lokális Kronecker–Weber)**.**

$$G_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ab}} = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_\infty)/\mathbb{Q}_p).$$

Ebből és $\mathbb{Q}_p$ vizsgálatából következik a következő észrevétel.

1.1.3. Állítás. *$G_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$ tartalmaz egy sűrű, $\mathbb{Q}_p^\times$-vel izomorf részcsoportot. Így a két csoport folytonos karakterei megegyeznek bármilyen test felett.*

A lokális Langlands-program ezt az állítást terjeszti ki karakterek helyett magasabb dimenziós reprezentációkra, illetve lineáris csoportokra, azzal a kikötéssel, hogy erősebb folytonossági feltételeket követelünk meg.

A következő tételt függetlenül bizonyította Harris és Taylor közösen, illetve Henniart. A technikai részletek nélkül a következőképpen lehet kimondani.

1.1.4. Tétel (Harris–Taylor, Henniart)**.** *Létezik egy kitüntetett bijekció $G_{\mathbb{Q}_p}$* bizonyos *$\mathbb{C}$ feletti n-dimenziós reprezentációi és $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$* bizonyos *irreducibilis sima $\mathbb{C}$ feletti reprezentációi között.*

Itt sima alatt a következőt értjük.

1.1.5. Definíció. *Egy G topologikus csoport egy V reprezentációját simának nevezzük, ha a $(g, v) \mapsto gv$ $G \times V \to V$ függvény minden rögzített v-re g-ben lokálisan konstans.*

Ekvivalens módon azt is megkövetelhetjük, hogy a V vektorteret (többnyire természetellenesen) a diszkrét topológiával ellátva folytonos reprezentációt kapjunk.

Mivel a $\mathbb{C}$ topológiája eredendően inkompatibilis akár $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, akár $G_{\mathbb{Q}_p}$ topológiájával, ez a tétel nagyon sok, számelméletben természetesen előforduló Galois-reprezentációról nem mond semmit.

Ezt a hiányt a következő sejtés orvosolná.

1.1.6. Sejtés (p-adikus lokális Langlands-megfeleltetés). *Legyen K a $\mathbb{Q}_p$ véges bővítése. Ekkor létezik egy kitüntetett bijekció $G_{\mathbb{Q}_p}$* bizonyos *K feletti n-dimenziós reprezentációi és* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ bizonyos folytonos *K feletti reprezentációi között.*

Sőt, a sejtés egy erősebb verziója szerint itt $\mathbb{Q}_p$ helyére egy F véges bővítését is lehetne írni.

Ennek a sejtésnek azonban még csak a $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ esetben bizonyította egy verzióját Colmez. A dolgozat hátralevő részében a szükséges definíciókat fogjuk kimondani és a fogalmakat ismertetni, hogy végül precízen kimondhassuk a [2] cikkben található verzióját.

1.2. A dolgozatról

A dolgozat Peter Schneider és Jeremy Teitelbaum [10] előadásjegyzetének 1-19 fejezetei nyomán felépíti a *megengedhető p*-adikus Banach-tér-reprezentációk fogalmát, illetve megmutatja, hogy ezek kategóriája a $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ csoport esetében egy Noether-gyűrű feletti modulusok kategóriájának jó tulajdonságaival rendelkezik.

Először a 2. fejezetben kitérek azokra a szükséges absztrakt algebrai fogalmakra és konstrukciókra, amelyek nem szerepelnek az ELTE matematikus BSc-hallgatóknak szóló óráin. Különösen Zábrádi Gergely 2011 és 2013 közti Algebra 1-4, illetve Szűcs András 2012-es Bevezetés a topológiába előadásain bizonyított állításokat fogok gyakran külön hivatkozás nélkül használni.

Ezután Peter Schneider és Jeremy Teitelbaum [10] előadásjegyzetének felépítését követjük bizonyos egyszerűsítésekkel, illetve a vázlatként vagy feladatként közölt vagy kihagyott bizonyítások leírásával. Az állítások mellett igyekeztem jelölni, hogy [10] melyik állításának felel meg. Ha a bizonyítás nem saját munka, akkor a hivatkozás a bizonyítás kezdeténél (is) szerepel. A dolgozat struktúrája, így az állítások közti átvezető szövegek viszont többségében [10]-ból vett gondolatokat tükröznek.

A lokálisan analitikus reprezentációk elméletével a dolgozat nem foglalkozik, így szükségtelen többek között a nemarkhimédeszi Fréchet-terek, illetve a lokálisan analitikus disztribúciók tárgyalása. Bár kimondom a lokálisan analitikus függvények, sokaságok és csoportok definícióit, ezekre a dolgozatban a Lazard tételére való hivatkozásig (6.5.1 Tétel) nem is lesz szükség, mert amikor [10] kompakt lokálisan analitikus csoportról mond ki tételeket, akkor a dolgozat [11]-t követve provéges csoportra mondja ki.

Először definiáljuk a konvergens hatványsorok, (lokálisan) analitikus függvények, sokaságok és Lie-csoportok analógiáit egy K nemarkhimédeszi test felett. Majd a következő fejezetben a nemarkhimédeszi funkcionálanalízis alapjait. Itt jelenik meg az a követelmény a Hahn–Banach- és Banach–Alaoglu tételek kapcsán, hogy a választott K nemarkhimédeszi test lokálisan kompakt legyen. Ez a cél szempontjából nem jelent problémát, hiszen $\mathbb{Q}_p$ és véges bővítései lokálisan kompaktak a 2.4.3 Állítás szerint. A nehezebb funkcionálanalízisbeli állításokra, konkrétan a Hahn–Banach-tételre és Schikhof tételére nem adok bizonyítást, mert inkább a p-adikus funkcionálanalízishez tartoznak, mint a p-adikus Banach-tér-reprezentációk témaköréhez.

Az 5. fejezetben továbbra is [10]-t követve leírom a disztribúcióalgebrák elméletét provéges (tehát kompakt) csoportokon. A következő fejezetben pedig ezen algebrák feletti modulusokká tesszük a Banach-tér-reprezentációkat. Az így kapott kategória viszont túl nagy ahhoz, hogy számelméleti jelentést lehessen neki adni, ezért Schneider és Teitelbaum egyfajta végességi feltételként a [9] cikkben javasolták a *megengedhető* (angolul *admissible*) reprezentációk fogalmát. (Ez a szó a sima reprezentációk elméletében már használatban volt. Schneider és Teitelbaum ezt a fogalmat terjesztették ki a folytonos esetre.)

A 6. fejezetben alapvetően [10] nyomán, de reményeim szerint a kategóriák lokalizálását kikerülve, a kategória-ekvivalenciák és -beágyazások láncolatát explicitebben kiírva és megmagyaráva mutatjuk meg, hogy a megengedhető reprezentációk kategóriája már anti-ekvivalens egy bizonyos Noether-gyűrű feletti *végesen generált* modulusok kategóriájával.

1.3. Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni Zábrádi Gergelynek a téma felvetését, a támogatást és a dolgozat alapos átolvasását.

2. fejezet

Absztrakt algebrai alapok

2.1. Kategóriák

Egy $\mathcal{C}$ kategória objektumait $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$-vel, az a és b közti morfizmusait pedig $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b)$-vel jelöljük. A $\mathcal{C}$ kategórián az identitás által megadott funktort $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$-vel fogjuk jelölni.

2.1.1. Definíció. *Legyen F és G $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktorok. Egy η természetes transzformáció egy $\eta\colon X \mapsto \eta(X) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), G(X))$ hozzárendelés, amely minden $X, Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$-re és $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$-ra kommutatívvá teszi a következő diagramot.*

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \eta(X)} & & \big\downarrow{\scriptstyle \eta(Y)} \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

Ha $\eta(X)$ minden $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$-re izomorfizmus, akkor η természetes izomorfizmus *F és G között.*

2.1.2. Definíció. *Az $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ és $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funktorok* kategóriaekvivalenciát *határoznak meg $\mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$ között, ha $G \circ F$ természetesen izomorf $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$-vel és $F \circ G$ természetesen izomorf $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$-vel.*

2.1.3. Definíció. *Egy $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktort* teljesnek *nevezünk, ha az általa megadott $\mathrm{Hom}_C(x_1, x_2) \to \mathrm{Hom}_D(F(x_1), F(x_2))$ leképezés szürjektív.*

2.1.4. Definíció. *Egy $\mathcal{C}$ kategória egy $\mathcal{D}$ részkategóriáját* teljesnek *nvezzük, ha a $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$ beágyazás teljes funktor.*

2.1.5. Definíció. *Egy $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktort* hűségesnek *nevezünk, ha az általa megadott $\mathrm{Hom}_C(x_1, x_2) \to \mathrm{Hom}_D(F(x_1), F(x_2))$ leképezés injektív.*

2.1.6. Definíció. *Egy $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktort* lényegében szürjektívnek *nevezünk, ha minden $D \in \mathcal{D}$-re létezik $C \in \mathcal{C}$ hogy $F(C)$ és D izomorf objektumok $\mathcal{D}$-ben.*

2.1.7. Állítás ([6, Theorem 1, 93. o.])**.** *Legyen $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktor. Ekkor ekvivalensek a következő állítások.*

1. *Létezik G funktor, hogy F és G kategóriaekvivalenciát határoz meg $\mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$ között.*

2. *F teljes, hűséges és lényegében szürjektív.*

2.2. Modulusok kategóriái

Legyen R egységelemes de nem feltétlenül kommutatív gyűrű. Ekkor jelölje $R-$Mod, illetve Mod $-R$ az R feletti bal-, illetve jobbmodulusok kategóriáját. Az fg index megjelenése a végesen generált, a tf a torziómentes modulusok teljes részkategóriáját jelenti. $\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{Mod}}(M, N)$-t egyszerűen $\mathrm{Hom}(M, N)$-nel fogjuk jelölni.

2.2.1. Állítás. *Legyen $Z(R)$ az R centruma, $M, N \in R-\mathrm{Mod}$. Ekkor $\mathrm{Hom}(M, N)$ egy $Z(R)$-modulus.*

Bizonyítás. Legyen $\varphi \in \mathrm{Hom}(M, N)$, $z \in Z(R)$. Definiáljuk, hogy

$$z\varphi\colon = m \mapsto z\varphi(m)$$

Ez additív, és tetszőleges $r \in R$-re

$$z\varphi(rm) = zr\varphi(m) = rz\varphi(m)$$

tehát modulushomomorfizmus is egyben. □

2.2.2. Megjegyzés. *Ellenőrizhetjük azt is, hogy a kompozíció $Z(R)$-bilineáris a fenti modulusstruktúrával.*

2.2.3. Definíció. *Egy $x \mapsto x^\iota$ $R \to R$ gyűrűhomomorfizmust anti-involúciónak nevezünk, ha $(x^\iota)^\iota = x$, továbbá $(xy)^\iota = y^\iota x^\iota$.*

2.2.4. Példa. *Tetszőleges R kommutatív gyűrűre a transzponálás anti-involúció az $M_n(R)$ mátrixgyűrűn.*

2.2.5. Példa. *Legyen R kommutatív gyűrű, G véges csoport, és $R[G]$ a G csoportgyűrűje R felett. Ekkor a $g \mapsto g^{-1}$ kiterjed egy anti-involúcióvá $R[G]$-n.*

A következő állítás magyarázza, hogy csoportgyűrűk esetén miért nem kell külön foglalkozunk a jobb-, illetve balmodulusok elméletével. Egyúttal illusztrálja a kategória-ekvivalencia fogalmát.

2.2.6. Állítás. *Legyen $\iota\colon R \to R$ anti-involúció. Ekkor $R-\mathrm{Mod}$ és $\mathrm{Mod}-R$ ekvivalens kategóriák.*

Bizonyítás. Legyen $F\colon R-\mathrm{Mod} \to \mathrm{Mod}-R$, amelyre $F(M)$ legyen M-mel megegyező Abel-csoport. Ezen hasson R úgy, hogy $mr\colon = r^\iota m$ legyen. Ellenőrizhető, hogy $F(M)$ ezzel a hatással valóban R-jobbmodulus, mert

$$m(rs) = (rs)^\iota m = (s^\iota m)r = mrs.$$

Egy N jobbmodulusra pedig legyen $G(N)$ ugyanígy az N-nel megegyező Abel-csoport, az $r^\iota n\colon = (nr)$ hatással. Ekkor $M = G(F(M))$ és $N = F(G(N))$. Ebben az esetben $G \circ F$ és $F \circ G$ konkrétan megegyeznek az identitásfunktorral, nem csupán természetesen izomorfak vele. □

A reziduálisan véges hosszú reprezentációk definíciójához szükségünk lesz a modulusok hosszának definíciójára.

2.2.7. Definíció. *Egy M (topologikus) modulus* hossza *legyen azon ℓ egész szuprémuma, amelyekre létezik*

$$N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \ldots \subsetneq N_\ell \subseteq M$$

(zárt) részmodulusokból álló lánc M-ben.

Így például a 0 modulus hossza 0 és az egyszerű modulusok hossza 1.

2.3. Inverz limesz

Legyen $\mathcal{C}$ egy kategória.

2.3.1. Definíció. *Legyen $(I, \leq)$ részben rendezett halmaz amelyben bármely két elemnek van felső korlátja. Legyen $(X_i)_{i\in I} \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})^I$, $f_{ij} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_j, X_i)$ minden $i \leq j$-re. $(X_i)_{i\in I}$-t és $(f_{ij})_{i,j\in I}$-t* inverz rendszert *alkotnak, ha $f_{ii} = \mathrm{id}_{X_i}$ és $f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk}$.*

Ha $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ a halmazok kategóriája, akkor

2.3.2. Definíció. *Egy $(X_i)_{i\in I}$, $(f_{ij})_{i,j\in I}$ által alkotott inverz rendszer inverz limesze legyen*

$$\varprojlim_{i\in I} X_i = \left\{ x \in \prod_{i\in I} X_i \mid x(i) = f_{ij}(x(j)) \text{ ha } i \leq j \in I \right\}.$$

2.3.3. Állítás. *Ha $\mathcal{C}$ a (topologikus) csoportok vagy gyűrűk kategóriája, akkor $\varprojlim_{i\in I} X_i$ (oda-vissza folytonos) izomorfizmus erejéig felruházható (topologikus) csoport- vagy gyűrűstruktúrával.*

Ehhez a műveleteket elemenként kell értelmezni $\prod_{i\in I} X_i$-ben, illetve a legdurvább olyan topológiát venni $\varprojlim_{i\in I} X_i$-n, hogy az $\varprojlim_{i\in I} X_i \to X_j$ vetítések folytonosak legyenek.

Ezt nevezzük (topologikus) terek, csoportok vagy gyűrűk inverz limeszének.

2.3.4. Állítás. *Legyen $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$ a topologikus terek kategóriája (a folytonos függvényekkel, mint morfizmusokkal). Ha egy $\mathcal{C}$-beli inverz rendszer kompakt, Hausdorff terekből áll, akkor az inverz limesz is kompakt és Hausdorff.*

2.4. Provéges csoportok

2.4.1. Definíció. *Egy G topologikus csoportot provégesnek nevezünk, ha véges diszkrét $(G_i)_{i\in I}$ csoportok inverz limesze.*

Ekkor a $G \to G_i$ kanonikus projekciók magjai az identitás környezetbázisát adják G-ben, ezek csoportelemekkel való eltoltjai pedig a topológia bázisát.

A 2.3.4 Állítás miatt igaz a következő.

2.4.2. Állítás. *Minden provéges csoport kompakt és Hausdorff.*

2.4.3. Állítás. *$\mathbb{Q}_p$ véges bővítései lokálisan provégesek, tehát lokálisan kompaktak.*

Bizonyítás. Legyen $K/\mathbb{Q}_p$ $r < \infty$ fokú bővítés. Ekkor $K \cong {\mathbb{Q}_p}^r$ topologikusan. $\mathbb{Z}_p$ nyílt és provéges részcsoport $\mathbb{Q}_p$-ben, így van egy $\mathbb{Z}_p^r$-vel topologikusan izomorf azaz nyílt és provéges részcsoport-környezete a 0-nak K-ban. Ennek eltoltjai K minden pontjára megadnak egy kompakt környezetet. $\square$

3. fejezet

Nem-arkhimédeszi analízis

3.1. Nem-arkhimédeszi testek

3.1.1. Definíció. *Legyen K test. Egy $|\cdot|\colon K \to \mathbb{R}$ függvényt* nemarhimédeszi abszolútértéknek *nevezünk, ha teljesülnek rá a következők.*

(I) $\mid a \mid \geq 0$

(II) $|a| = 0$ *akkor és csak akkor, ha* $a = 0$

(III) $|ab| = |a||b|$

(IV) $|a + b| \leq \max(|a|, |b|)$

(V) Létezik $a_0 \in K^\times$ *hogy* $|a_0| \neq 1$

(III) miatt szükségképpen $|1| = 1$. Az fő eltérést a szokásos abszolút értéktől a (IV) feltétel jelenti, amelyet az *ultrametrikus tulajdonság* néven is neveznek. Emiatt $|n| = |1 + \cdots + 1| \leq |1| = 1$ ha n egész szám, ezzel ellentmondva Arkhimédesz ókori feltevésének, amely szerint minden mennyiségnél van nagyobb, egész számszor egységnyi mennyiség.

Az (V) feltételt teljesítő a_0 elem a_0^k ($k \in \mathbb{Z}$) hatványai miatt $K^\times$-ban akármilyen nagy és akármilyen kicsi normájú elemek is szerepelnek.

Kényelmes tulajdonság viszont, hogy ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra $|a_{n+1} - a_n|$ 0-hoz tart, akkor a sorozat automatikusan Cauchy lesz.

3.1.2. Definíció. *Adott $|\cdot|$ abszolút értékből kiindulva K metrikus (és egyúttal topologikus) térré tehető a $d(a, b) = |a - b|$ metrikával, ezt a teret szintén K-val jelöljük.*

Az összeadás (IV) miatt, a szorzás pedig (II) és (III) miatt folytonos $K \times K \to K$ függvény lesznek.

3.1.3. Definíció. *A K testet nemarkhimédeszinek nevezzük, ha a fenti $d(\cdot, \cdot)$ metrika szerint teljes metrikus tér.*

3.1.4. Lemma ([10, Lemma 1.2]). *(i) $o\colon = \{a \in K\colon \mid a \mid \leq 1\}$ integritási tartomány és hányadosteste K*

(ii) $\mathfrak{m}\colon = \{a \in K\colon |a| < 1\}$ *az o egyetlen maximális ideálja*

(iii) $o^\times = o \setminus \mathfrak{m}$

(iv) *o Bézout-gyűrű, azaz minden végesen generált ideálja főideál*

Bizonyítás. Mivel K test, az (i) állításhoz elég látni, hogy o egységelemes részgyűrűje K-nak. Ez valóban így van, mert a (III) és (IV) feltevések miatt sem az összeadás, sem a szorzás nem vezet ki o-ból. Másrészt véve egy $b \in \mathfrak{m}$ elemet, tetszőleges $k \in K$ előáll kb^n/b^n hányadosként, ahol n elég nagy ahhoz, hogy $kb^n \in o$ legyen (konkrétan $n > \log_{|b|} |k|^{-1}$.

(III) miatt egy nem nulla $a \in o$ elemre $|a^{-1}| \in o$ akkor és csak akkor, ha $a \notin \mathfrak{m}$, tehát (iii) teljesül.

Ezért ha $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{m}$ maximális ideál o-ban, akkor van $a \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{m}$ elem, viszont a invertálható, így $o = (a) \leq \mathfrak{a} \leq o$, azaz $\mathfrak{a}$ nem valódi ideál.

Ha egy $\mathfrak{b}$ ideált abszolútérték szerint csökkenő sorrendben $b_1, \ldots, b_n$ elemek generálnak, akkor $\mathfrak{b} = ob_1$. □

3.1.5. Definíció. *Az o gyűrű elemeit a K-beli egészeknek fogjuk hívni, az $o/\mathfrak{m}$ testet (valóban test, hiszen $\mathfrak{m}$ maximális ideál) pedig K maradéktestének.*

Ennek az o gyűrűnek és $\mathfrak{m}$ ideálnak a létezése jelenti a legnagyobb eltérést a szokásos analízistől. Az elmélet jóval algebraibb alakot ölt, hiszen a „kicsi” elemek ideált alkotnak, míg éppen ellenkezőleg, az $(\mathbb{R}, +)$ csoportnak, vagy általánosabban a Lie-csoportoknak nincsenek „kicsi részcsoportjaik”, azaz az identitás egy elég kis környezete már nem tartalmaz nem triviális részcsoportot. (Ez a kritérium Hilbert ötödik problémájának megoldásában is kulcsszerepet játszott.)

A nemarkhimédeszi esetben azonban éppen ellenkezőleg közeli kapcsolat van a gömbök és a részcsoportok között.

3.1.6. Állítás ([10, Feladat, 3. o.]). *K-ban minden $B_\varepsilon(a)$ gömb $a+\mathfrak{b}$ alakú ahol $\mathfrak{b}$ o-részmodulus K-ban. Speciálisan, o-ban minden $B_\varepsilon(a)$ gömb $a + \mathfrak{b}$ alakú ahol $\mathfrak{b}$ ideál o-ban.*

Bizonyítás. $B_\varepsilon(a) = a + B_\varepsilon(0)$, és $B_\varepsilon(0) = \{a \in o \colon |a| < \epsilon\}$ o-modulus, mert egy o-beli elemmel való szorzás nem növeli az abszolútértéket, tehát nem vezet ki $B_\varepsilon(0)$-ból. □

3.1.7. Következmény. *K természetes topológiának bázisát adják a nemtriviális o-részmodulusok eltoltjai.*

3.2. Lokálisan analitikus függvények

A sokaságok bevezetéséhez előbb a K^r tereket kell tanulmányozni a koordinátánkénti maximum-normával.

Először a merev-analitikus hatványsorokat definiáljuk az $X_1, \ldots, X_r$ változókban, egy V-vel jelölt K-Banach-térbeli értékekkel.

3.2.1. Definíció. *Egy $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{N}^r$ elemre legyen $|\alpha| = \sum_{i=1}^r \alpha_i$, és $X^\alpha \colon = X_1^{\alpha_1} \ldots X_r^{\alpha_r}$.*

Tekintsünk K^r-en egy $F(X) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^r} b_\alpha X^\alpha$ hatványsort, ahol $b_\alpha \in K$. Mi adhat természetes feltételt ahhoz, hogy $F(X)$ a $B(\varepsilon, 0)$ halmazon konvergens legyen?

A hatványsorba $x \in B(\varepsilon, 0)$-t helyettesítve kapott összeg pontosan akkor konvergens, ha Cauchy, azaz ha

$$\lim_{|\alpha|\to\infty} |b_\alpha||x|^{|\alpha|} = 0.$$

$|x| < \varepsilon$ garantált, ezért a megfelelő feltétel az, hogy

$$\lim_{|\alpha|\to\infty} |b_\alpha|\varepsilon^{|\alpha|} = 0,$$

amelynek teljesülését úgy jelöljük, hogy $F \in \mathcal{A}_K(B_\varepsilon)$. Ekkor $\mathcal{A}_K(B_\varepsilon)$ elemeit a B_ε gömbön merev-analitikus függvényeknek nevezzük.

3.2.2. Definíció. *Egy $f\colon U \to V$ függvényt lokálisan analitikusnak nevezünk, ha minden $x_0 \in U$ pontnak létezik olyan U_{x_0} környezete, ahol $f(x) = F(x - x_0)$ valamely ε-ra és $F \in \mathcal{A}_K(B_\varepsilon)$ hatványsorra.*

$\mathbb{C}$-ben az egységkörlapon lokálisan analitikus függvények egyben analitikus hatványsorral megadhatók is. Azonban mivel K esetében az egységgömb teljesen összefüggéstelen, egy tipikus lokálisan analitikus függvény nem merev-analitikus. Például minden lokálisan konstans függvény lokálisan analitikus, de minden lokálisan konstans merev-analitikus függvény konstans.

3.3. Sokaságok

A p-adikus sokaságokat a valós (vagy komplex) analitikus sokaságok mintájára definiálhatjuk, azzal az eltéréssel, hogy két térkép akkor lesz kompatibilis, ha a köztük levő leképezés *lokálisan analitikus.* Technikai okokból célszerű megkövetelni, hogy a sokaság parakompakt legyen.

3.3.1. Definíció. *Egy $M = \bigcup_{i\in I} C_i$ fedés finomítása egy $M = \bigcup_{j\in J} D_j$ fedés ahol minden $j \in J$-re létezik $i \in I$ hogy $D_j \subseteq C_i$.*

3.3.2. Definíció. *Egy $M = \bigcup_{i\in I} C_i$ fedés lokálisan véges, ha minden $x \in M$-nek van U környezete, hogy az U-t metsző C_i-k halmaza véges.*

3.3.3. Definíció. *Egy M topologikus tér parakompakt, ha minden nyílt fedésének létezik lokálisan véges nyílt finomítása.*

3.3.4. Definíció. *Legyen M egy parakompakt topologikus tér. M egy* térképe *egy $M_i \subseteq M$ nyílt halmaz egy $\phi_i\colon M_i \to B_{r(i)}(0) \subseteq K^d$ homeomorfizmussal együtt (megfelelő $r(i) \in \mathbb{R}$ és $d \in \mathbb{N}$ számokkal).*

3.3.5. Definíció. *A $(\phi_i,\, \phi_j)$ pár kompatibilis, ha $\phi_i \circ \phi_j^{-1}\colon B_{r(j)} \to B_{r(i)}$ lokálisan analitikus.*

3.3.6. Definíció. *$((M_i, \phi_i))_{i\in I}$-t atlasznak nevezzük, ha $\bigcup_{i\in I} M_i = M$, és bármely $i, j \in I$-re (ϕ_i, ϕ_j) kompatibilis.*

3.3.7. Definíció. *M két atlaszát kompatibilisnek nevezzük, ha az uniójuk is atlasz. Tetszőleges A atlaszra legyen $\tilde{A}$ az A-val kompatibilis atlaszok uniója, amely szintén A-val kompatibilis. Maximálisnak nevezzük az $\tilde{A}$ alakú atlaszokat, mivel $\tilde{\tilde{A}} = \tilde{A}$.*

3.3.8. Definíció. *(M, A)-t lokálisan K-analitikus sokaságnak nevezzük, ha M parakompakt topologikus tér, és A rajta egy maximális atlasz.*

3.3.9. Definíció. *Legyenek M, N lokálisan K-analitikus sokaságok. Ekkor egy $f\colon M \to N$ leképezést lokálisan analitikusnak nevezünk, ha minden $(M_i, \phi_i), (N_j, \varphi_j)$ térképre $\varphi_j \circ f \circ \phi_i^{-1}$ lokálisan K-analitikus.*

Két lokálisan K-analitikus sokaság direkt szorzata is lokálisan K-analitikus sokaság lesz, ha $M \times N$ térképeinek $\phi_i \times \varphi_j$-t vesszük M, illetve N maximális atlaszából.

Ezzel már a p-adikus Lie-csoportokat is definiálhatjuk, amelyek a következő definíció lokálisan $\mathbb{Q}_p$-analitikus csoportjai lesznek.

3.3.10. Definíció. *Legyen G egy csoport, amelynek alaphalmaza egy lokálisan K-analitikus sokaság. G-t egy lokálisan K-analitikus csoportnak nevezzük, ha a szorzás mint $G \times G \to G$ művelet lokálisan K-analitikus, továbbá $g \to g^{-1}$ lokálisan K-analitikus $G \to G$ függvény.*

4. fejezet

Nemarkhimédeszi funkcionálanalízis

4.1. Vektorterek nemarkhimédeszi testek felett

A továbbiakban szükségünk lesz a topologikus vektorterek elméletének nemarkhimédeszi általánosításának egy részére, különösen a lokális konvexitás fogalmára. Legyen V egy K-vektortér.

4.1.1. Definíció. *Rácsnak nevezzük azokat az $L \leq V$ o-modulusokat, amelyekre minden $v \in V$ vektorhoz található $a \in K^\times$ (ekvivalensen $a \in o^\times$) hogy $av \in L$. (Másképpen: V/L o-torziómodulus.)*

4.1.2. Állítás ([10, Feladat 1., 5. o.]). *Ha L rács, akkor a skalárszorzás által megadott $K \otimes_o L \to V$ legképezés izomorfizmus.*

Bizonyítás. A K test az o gyűrű hányadosteste, tehát lapos o-modulus. Így az

$$0 \to L \to V \to V/L$$

egzakt sorozatból kapjuk, (felismerve $K \otimes_o V = V$-t), hogy

$$0 \to K \otimes_o L \to V \to K \otimes_o V/L$$

egzakt. A rács definíciója szerint V/L o-torzió, mert minden elemnek van L-beli többszöröse, tehát az utolsó tag 0, hiszen osztható modulus tenzorszorzata egy torziómodulussal. Így a leképezés izomorfizmus. □

4.1.3. Állítás ([10, Feladat 2., 5. o.]). *Egy $L \subseteq W$ rácsnak egy K-lineáris transzformáció szerinti őse képe rács.*

Bizonyítás. Jelölje $\phi : V \to W$ a transzformációt. ϕ K-lineáris és $o \leq K$, tehát ϕ egy o-modulushomomorfizmus, tehát $L' = \phi^{-1}(L)$ o-részmodulus, hiszen részmodulus őse képe. Másrészt ϕ K-linearitása és az előző állítás miatt $V = \phi^{-1}(W) = \phi^{-1}(K \otimes_o L) = K \otimes_s \phi^{-1}(L) = K \otimes_o L'$. Így az előző állítás miatt L' is rács. □

4.1.4. Állítás ([10, Feladat 3., 5. o.]). *Ha $L, L' \subseteq V$ rácsok, akkor $L \cap L' \subseteq V$ is rács.*

Bizonyítás. V két o-részmodulusának metszete nyilván o-részmodulus. Másrészt ha $v \in V$ és $av \in L$, illetve $bv \in L'$ valamely $a, b \in o^{\times}$-ra, akkor $abv = b(av) \in L$ és $abv = a(bv) \in L'$. □

Ez a tulajdonság látványosan nem teljesül arkhimédeszi esetben, már a legegyszerűbb $V = \mathbb{R}$ esetben sem (lehet pl. $L = \mathbb{Z}$, $L' = \pi\mathbb{Z}$).

4.1.5. Definíció. *Rácsoknak egy nemüres $(L_j)_{j \in J}$ halmaza a $\mathcal{T}$* lokálisan konvex topológiát *határozza meg a V vektortéren, ha bármely $j \in J$-re és $a \in K^{\times}$-ra létezik $k \in J$ hogy $L_k \subseteq aL_j$, és bármely $i, j \in J$-re létezik $k \in J$ amelyre $L_k \subseteq L_i \cap L_j$, továbbá $\mathcal{T}$-nek a*

$$\{v + L_j \mid v \in V \ ; \ j \in J\}$$

halmazok adják meg a bázisát.

Ezek valóban bázist alkotnak, hiszen lefedik a V-t, és a $(L_j)_{j \in J}$-re vonatkozó második feltétel éppen a bázis definíciójában szereplő feltétel.

4.1.6. Állítás ([10, Feladat, 6. o.]). *Lokálisan konvex V esetén az összeadás folytonos $V \times V \times V \to V$ függvény.*

Bizonyítás. A folytonossághoz elég megmutatni, hogy a bázisba tartozó halmazok ősképei nyíltak, azaz a

$$B_{v,i} = \{(a, b) \mid a, b \in V, \ a + b \in v + L_i\} \tag{4.1}$$

alakú halmazok nyíltak. Ez pedig igaz, mert $L_i + L_i = L_i$, tehát ha $a + b \in v$, akkor $(a + L_i) + (b + L_i) \subseteq v + L_i$, tehát

$$B_{v,i} = \bigcup_{a+b=v} (a + L_i, b + L_i) \tag{4.2}$$

ami nyíltak uniója. □

4.1.7. Állítás ([10, Feladat, 5. o.]). *Lokálisan konvex V esetén a skalárral való szorzás folytonos $K \times V \to V$ függvény.*

Bizonyítás. Hasonlóan elég megmutatni, hogy a

$$\{(k, v) \mid k \in K, v \in V, \ kv \in w + L_i\} \tag{4.3}$$

halmazok nyíltak. Legyen L_j olyan, hogy $kL_j \subseteq L_i$. Ha $k = 0$, akkor triviálisan van ilyen, különben pedig k^{-1}-re alkalmazzuk az L-ek családjára vonatkozó második feltételt. Legyen $x \in o$ olyan, hogy $xw \in L_i$. Utóbbi feltétel a rács definíciója szerint egy $x' \in K$ kielégíti, ezt alkalmasan kicsi abszolút értékű o-beli elemmel szorozva o-beli x-et kapunk. Ekkor $k(1 + xo)(v + L_j) = w + wxo + kL_j + k(1 + xo)L_j \subseteq w + L_i + L_i + L_i = w + L_i$. Ezért a (k, v) pont $(k + xo) \times (v + L_j)$ nyílt környezete $w + L_i$-be képződik, így az őskép ezen nyíltak uniója. □

A topologikus vektorterek elméletében korlátosnak nevezzünk egy B halmazt, ha az origó minden (nyílt) környezetét fel lehet nagyítani, hogy B-t tartalmazza. Egy lokálisan konvex K-vektortérben az origónál éppen a nyílt rácsok alkotnak lokális bázist, tehát a következő nemarkhimédeszi analógiát kapjuk:

4.1.8. Definíció. *Korlátosnak nevezzük azokat a $B \subseteq V$ halmazokat, amelyekre minden L nyílt rács van $a \in K$ hogy $B \subseteq aL$.*

4.1.9. Állítás. *Legyen $f \colon V \to W$ folytonos lineáris leképezés lokálisan konvex K-vektorterek között és $B \subseteq V$ korlátos halmaz. Ekkor $f(B)$ is korlátos.*

Bizonyítás. Legyen M tetszőleges nyílt rács W-ben. Ekkor $f^{-1}(M)$ rács V-ben, ezért létezik $a \in K$ hogy $B \subseteq af^{-1}(M)$. Ekkor viszont $f(B) \subseteq aM$. □

4.2. Nemarkhimédeszi Banach-terek

Az $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ feletti Banach-terek elméletével párhuzamosan beszélhetünk nemarkhimédeszi Banach-terekről.

Legyen V vektortér a K nemarkhimédeszi test felett.

4.2.1. Definíció. *Ebben az esetben félnorma alatt olyan $q : V \to \mathbb{R}$ függvényt értünk, amelyre*

(i) $q(av) = |a| \cdot q(v)$ *minden* $a \in K$, $v \in V$ *elemre*

(ii) $q(v + w) \leq \max(q(v), q(w))$ *minden* $v, w \in V$ *elemekre*

A q-t normának nevezzük, ha a 0-n kívül seholsem 0.

4.2.2. Definíció. *A V teret (nemarkhimédeszi) normált térnek nevezzük, ha adott rajta egy $\|\cdot\| = q(\cdot)$ norma. Ha továbbá V az ezáltal indukált metrikával teljes metrikus tér, akkor (nemarkhimédeszi) Banach-térnek nevezzük.*

Egy W normált tér ε sugarú a középpontú gömbjét jelölje $B_\varepsilon(a; W)$.

4.2.3. Állítás. *Minden V nemarkhimédeszi normált tér lokálisan konvex.*

Bizonyítás. A $B_\varepsilon(0)$ gömb rács, mert egyrészt o-részmodulus a normára vonatkozó első feltétel szerint, másrészt minden $v \in V$-re van $a \in K^\times$ hogy $\|av\| < \epsilon$, hiszen csak a-t akármilyen kis normájúnak válaszhatjuk. Az $(B_\varepsilon(0))_{\varepsilon \in \mathbb{R}^+}$ rácscsalád pedig teljesíti a feltételeket ahhoz, hogy lokálisan konvex topológiát generálhasson V-n. □

4.3. Lineáris leképezések

Legyenek V, W lokálisan konvex terek a K nemarkhimédeszi test felett.

4.3.1. Definíció. *Legyen $\mathcal{L}(V, W) \subseteq \mathrm{Hom}_K(V, W)$ a folytonos lineáris leképezések K-vektortere a két tér között.*

Ezen a téren több topológia is természetesen fog adódni, amelyek a következő konstrukcióra épülnek.

4.3.2. Definíció. *Ha $B \subseteq V$ korlátos és $M \subseteq W$ rács, akkor legyen*

$$\mathcal{L}(B, M) \colon = \{f \in \mathcal{L}(V, W) \colon f(B) \subseteq M\}.$$

Ez egy rács $\mathcal{L}(V, W)$-ben, mert nyilván o-részmodulus, továbbá mivel $f(B)$ korlátos, $f(B) \subseteq aM$ megfelelő $a \in K^\times$-ra. Ekkor $a^{-1}f \in \mathcal{L}(B, M)$.

4.3.3. Definíció. *V korlátos részhalmazainak egy $\mathcal{B}$ nemüres, unióra zárt halmazrendszerére legyen $\mathcal{L}_\mathcal{B}(V,W) = \mathcal{L}(V,W)$ az $(\mathcal{L}(B,M))_{B,M}$ rácshalmaz által megadott lokálisan konvex topológiával felruházva.*

Ha $\mathcal{B}$-t a V véges részhalmazainak választjuk, akkor $\mathcal{L}_\mathcal{B}(V,W) = \mathcal{L}_s(V,W)$ a leképezések tere a *gyenge topológiával.* Ez a pontonkénti konvergencia topológiája.

Ha $\mathcal{B}$-t a V összes korlátos részhalmazainak választjuk, akkor $\mathcal{L}_\mathcal{B}(V,W) = \mathcal{L}_b(V,W)$ a leképezések tere az *erős topológiával.*

4.3.4. Állítás ([10, Feladat, 13. o.]). *Ha V és W normált vektorterek K felett, akkor $\mathcal{L}_b(V,W)$ topológiáját az $\|f\| = \sup_{0\neq v\in V} \|f(v)\|/\|v\|$ operátornorma határozza meg.*

Bizonyítás. Mivel két lokálisan konvex topológiát kell összehasonlítanunk, elég megmutatni, hogy a nyílt rácsok ugyanazok.

A $\mathcal{L}_b(V,W)$ tér nyílt rácsai $\mathcal{L}(B_\delta(0;V), B_\varepsilon(0;W))$ alakúak, azonban linearitás miatt

$$\mathcal{L}(B_\delta(0;V), B_\varepsilon(0;W)) = \mathcal{L}(B_1(0;V), B_{\varepsilon/\delta}(0;W))$$

ami az operátornorma szerinti ε/δ sugarú 0 középpontú gömb, és éppen ezek a nyílt rácsok. □

4.3.5. Definíció. *$\mathcal{L}(V,W)$-beli függvények egy H halmaza* ekvifolytonos*, ha bármely $M \subseteq W$ rácsra létezik $L \subseteq V$ nyílt rács amelyre $f(L) \subseteq M$ minden $f \in H$-ra.*

4.3.6. Lemma. *Ha H ekvifolytonos, akkor korlátos $\mathcal{L}_\mathcal{B}(V,W)$-ben bármilyen $\mathcal{B}$-re.*

Bizonyítás. Lásd [10, Lemma 7.1]. □

A következő tétel a funkcionálanalízisből ismert Banach–Steinhaus-tétel megfelelője. Ez fogja majd garantálni a disztribúcióalgebrákon a szorzás folytonosságát.

4.3.7. Tétel ([10, Proposition 7.2]). *Legyen V Banach-tér, és $\mathcal{B}$ legyen egy minden véges halmazt tartalmazó unióra zárt halmazrendszer V-ben. Ekkor $\mathcal{L}_\mathcal{B}(V,W)$ korlátos részhalmazai éppen az ekvifolytonos részhalmazok.*

Mivel $\mathcal{L}_s(V,W)$ általában nem metrizálható (sőt, a pontoknak általában nincs megszámlálható környezetbázisuk), szükségünk van a következő definíciókra.

4.3.8. Definíció. Hálónak *(angolul* net*) nevezzük az $I \to X$ alakú függvényeket, ahol I részbenrendezett halmaz amelyben bármely két elemnek létezik felső korlátja.*

4.3.9. Definíció. *Legyen X topologikus tér. Az $(x_i)_{i\in I}$ háló konvergál x-hez, ha x minden U környezetéhez létezik $j \in I$ hogy $x_i \in U$ minden $i \geq j$-re.*

4.3.10. Következmény. *Legyen V Banach-tér, és legyen $(\ell_i)_{i\in I}$ korlátos háló $\mathcal{L}_s(V,W)$-ben, amelyre a $(\ell_i(v))_{i\in I}$ háló minden $v \in V$ elemre konvergens. Ekkor $(\ell_i(v))_{i\in I}$ konvergál $\mathcal{L}_s(V,W)$-ben $\ell(v) = \lim_{i\in I} \ell_i(v)$-hez.*

4.3.11. Definíció. *Legyen V lokálisan konvex K-vektortér. Egy $(x_i)_{i\in I}$háló Cauchy, ha minden L nyílt rácsra létezik $j \in I$ hogy $x_i - x_k \in L$ ha $i, k \geq j$.*

Mivel nyílt rács folytonos őse nyílt rács, ezért Cauchy-háló folytonos képe Cauchy-háló.

Ezt a definíciót $\mathcal{L}_s(V, W)$ esetére fordítva azt kapjuk, hogy az $(\ell_i)_{i\in I}$ pontosan akkor Cauchy-háló, ha $(\ell_i(v))_{i\in I}$ minden $v \in V$-re Cauchy-háló.

4.3.12. Definíció. *Egy V lokálisan konvex topologikus vektortér egy X részhalmaza* teljes*, ha minden X-beli értékű Cauchy-hálónak létezik X-beli határértéke.*

4.3.13. Állítás. *Ha V és W Banach-tér, akkor $\mathcal{L}_s(V, W)$ kvázi-teljes, azaz minden zárt és korlátos részhalmaza teljes.*

Bizonyítás. Legyen $S \subseteq \mathcal{L}_s(V, V)$ zárt és korlátos részhalmaz. Legyen $(\ell_i)_{i\in I}$ S-ben haladó Cauchy-háló, amely korlátos mert S korlátos. Ekkor mivel $(\ell_i(v))_{i\in I}$ Cauchy-háló és W teljes, létezik a pontonkénti határérték, így teljesül a 4.3.10 Következmény feltétele, tehát $(\ell_i(v))_{i\in I}$-nek van egy $\ell \in \mathcal{L}_s(V, W)$ limesze. S zárt, tehát $\ell \in S$. □

4.4. Dualitás

4.4.1. Definíció. *Legyen $V' = \mathcal{L}(V, K)$, illetve topologizálva $V'_s = \mathcal{L}_s(V, K)$ és $V'_b = \mathcal{L}_b(V, K)$. Utóbbiakat rendre a V gyenge és erős duálisának fogjuk nevezni.*

Mivel ezek a $\mathcal{B}$-topológiák speciális esetei, ezek a duális terek lokálisan konvexek.

Ahhoz, hogy a valós és komplex funkcionálanalízis jól ismert Hahn–Banach tétele nemarkhimédeszi esetre is általánosítható legyen, fel kell tennünk K-ról egy további feltételt.

4.4.2. Definíció. *Egy K nemarkhimédeszi test* szférikusan teljes*, ha tetszőleges $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots \supseteq B_n \supseteq \ldots$ zárt gömbök metszete nemüres.*

4.4.3. Definíció. *Egy $f : V \to W$ normált terek közti lineáris leképezést (gyenge) kontrakciónak nevezünk, ha $\|f(x)\| \leq \|x\|$.*

4.4.4. Tétel (Hahn–Banach)**.** *Legyen K* szférikusan teljes*. Legyen $(U, \|\cdot\|)$ normált K-vektortér és legyen U_0 egy lineáris altere. Legyen $\ell_0 : U_0 \to K$ kontrakció. Ekkor ℓ_0 kiterjed egy $\ell : U \to K$ kontrakcióvá.*

Bizonyítás. Itt nem bizonyítjuk, ld. [10, Proposition 8.1]. □

A következőkhöz viszont ennél többre lesz szükségünk; fel kell tennünk, hogy K lokálisan kompakt.

4.4.5. Állítás. *Ha K lokálisan kompakt, akkor szférikusan teljes, továbbá o kompakt.*

Bizonyítás. Legyen S a 0 egy kompakt környezete, amely tartalmazza a $B_\varepsilon(0; K)$ gömböt. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$. Létezik $x \in K$ amire $|x| > r/\varepsilon$ és a szorzás folytonos, tehát $xB_\varepsilon(0; K) = B_{\varepsilon x}(0; K)$ kompakt. Ennek $B_r(0; K)$ zárt része, tehát $B_r(0; K)$ is kompakt minden r-re, speciálisan $r = 1$-re o is kompakt. Eltolással pedig minden K-belizárt gömb kompakt, tehát teljesül rá Cantor tétele, így a szférikus teljesség is. □

4.4.6. Definíció. *Ha V Banach-tér, akkor legyen*

$$V^d = \{\ell \in V' : \|\ell\| \leq 1\} = \{\ell \in V' : |\ell(v)| \leq \|v\|\}\,.$$

A következő lemma a Banach–Alaoglu-tétel nemarkhimédeszi verziója.

4.4.7. Lemma ([10, Lemma 8.6])**.** *Tegyük fel, hogy o kompakt. Ekkor V^d kompakt V'_s-ben.*

Bizonyítás a [10, Lemma 8.6] -ban felvázoltak szerint. Vegyük a

$$V^d \hookrightarrow \prod_{\|v\|\leq 1} o$$

$$\ell \mapsto (v \mapsto \ell(v))$$

Ez a leképezés jól definiált, mert V^d elemei kontrakciók, és valóban injekció, hiszen ha ℓ és ℓ' azonosak a $\|v\| \leq 1$ gömbön, akkor lineárisok lévén mindenhol azonosak.

V^d egyrészt örököl egy altértopológiát V'_s-től és a beágyazáson keresztül egy másikat $\prod_{\|v\|\leq 1} o$-tól. Az előbbinek az $\mathcal{L}(v, B_\varepsilon(k;K))$ halmazok adják egy előbázisát, ahol $v \in V$, $\varepsilon > 0$ és $k \in K$. Ezek éppen a $V^d \cap F(v, B_\varepsilon(k;K))$ halmazok, ahol $F(v, B_\varepsilon(k;K))$ azokból az (absztrakt) függvényekből áll, amelyek v-t $B_\varepsilon(k;K)$-ba képezik. Az $F(v, B_\varepsilon(k;K))$ definíció szerint előbázisa a szorzattopológiának, tehát V^d-n a két topológia megegyezik (azaz V^d beágyazása a szorzattérbe *topologikus beágyazás*).

Másrészt V^d egy zárt altere $\prod_{\|v\|\leq 1} o$-nak, mert a linearitást kifejező axiómák miatt

$$V^d = \bigcap_{k\in o, \|v\|\leq 1} \left\{ f \in \prod_{\|v\|\leq 1} o : f(kv) = kf(v) \right\} \cap \tag{4.4}$$

$$\cap \bigcap_{\|x\|, \|y\|\leq 1} \left\{ f \in \prod_{\|v\|\leq 1} o : f(x+y) = f(x) + f(y) \right\}. \tag{4.5}$$

A metszetben szereplő halmazok pedig mind zártak.

Mivel o kompakt, $\prod_{\|v\|\leq 1} o$ Tyihonov tétele szerint kompakt, V^d pedig ennek zárt altereként szintúgy kompakt. □

V' egy torziómentes o-modulus volt, o-lineáris (o-modulusstruktúrával kompatibilis) topológiával; ezek a tulajdonságok öröklődnek a V^d o-részmodulusra.

4.4.8. Definíció. *Legyen* $\mathrm{Ban}_K^{\leq}$ *az a kategória, ahol az objektumok a K-Banach-terek kategóriája, a morfizmusok pedig a kontrakciók.*

Egy $\phi : V \to W$ lineáris leképezés megad egy $\phi^d : W^d \to V^d$ leképezést, amelyre

$$\phi^d(\ell) = (v \mapsto \ell(\phi(v))).$$

Ez kontrakció, hiszen mind ℓ, mind ϕ az.

Tehát $\cdot^d$ egy *kontravariáns* funktort határoz meg $\mathrm{Ban}_K^{\leq}$-ból az o-lineárisan topologizált kompakt torziómentes o-modulusok kategóriájába.

Felmerül a kérdés, hogy van-e ennek a funktornak inverze. Lényegében igen, a következő konstrukcióval.

4.4.9. Definíció. *Egy M o-lineárisan topologizált kompakt torziómentes o-modulusra legyen M^d a folytonos, o-lineáris $M \to K$-leképezések halmaza, a K normája szerinti szuprémumnormával. (Mivel M kompakt, minden rajta folytonos függvény felveszi a maximumát.)*

Azonban így minden M^d-beli elem normája valamely K-beli elem normája, tehát $\|M^d\| \subseteq |K|$. Ez azonban (ellentétben az arkhimédeszi Banach-terekkel) nem feltétlenül teljesül minden K-Banach-térre. Előfordulhat például, hogy $|K|$ megszámlálható, azonban egy $|\cdot|$ nemarkhimédeszi abszolút értékre $|\cdot|^r$ is abszolút érték ahol $r > 0$ tetszőleges valós, tehát K-n más értékkészletű normát is megadhatóak. Ez a probléma azonban nem jelentős.

4.4.10. Állítás ([11, Exercise 3])**.** *Legyen V Banach-tér a $\|\cdot\|$ normával. Ekkor létezik V-n egy $\|\cdot\|'$ ekvivalens norma amelyre $\|V\|' \subseteq |K|$.*

Bizonyítás. Legyen

$$\|v\|' = \inf\{|k| \colon k \in K,\ \|v\| \le |k|\}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
\|av\|' &= \inf\{|k| \colon k \in K,\ \|av\| \le |k|\} = \inf\left\{|k| \colon k \in K,\ \|v\| \le |a^{-1}k|\right\} = \\
&= \inf\{|ak| \colon k \in K,\ \|v\| \le |k|\} = |a|\|v\|' \text{ és} \\
\|v+w\|' &= \inf\{|k| \colon k \in K,\ \|v+w\| \le |k|\} = \\
&= \inf\{|k| \colon k \in K,\ \max(\|v\|, \|w\|) \le |k|\} = \max(\|v\|', \|w\|').
\end{aligned}$$

Így $\|\cdot\|'$ is norma. $\log(|K|)$ egy nemtriviális részcsoportja $\mathbb{R}$-nek, így létezik egy maximális $d \ge 0$ átmérőjű nyílt gömb amely $\mathbb{R} \setminus \log(|K|)$-ba írható. Ekkor $e^{-d}\|v\|' \le \|v\| \le \|v\|'$, így a normák valóban ekvivalensek. □

Ha adott egy $\psi : M \to N$ leképezés, akkor létezni fog egy $\psi^d \colon N^d \to M^d$ leképezés amelyre $\psi^d(f) = m \mapsto f(\psi(m))$. Mivel a $\psi^d(f)$ függvény értékkészlete része az f függvény értékkészletének, ψ^d nem csökkenti a szuprémum-normát.

Tehát az újabb $M \to M^d$ is egy kontravariáns funktor.

Így a pontosabban megfogalmazott tétel a következő.

4.4.11. Definíció. *Legyen $\mathcal{M}(o)$ az o-lineárisan topologizált kompakt torziómentes o-modulusok kategóriája a folytonos modulushomomorfizmusokkal.*

4.4.12. Tétel ([10, Proposition 8.7])**.** *A $V \to V^d$ és $M \to M^d$ funktorok egymás kvázi-inverzei, így anti-ekvivalenciát adnak meg egyrészt azon K-Banach-terek kategóriája, ahol a norma képe része $|K|$-nak, másrészt $\mathcal{M}(o)$ között.*

Bizonyítás. Lásd [8]. □

Ennek speciális eseteként kapjuk a következőt.

4.4.13. Következmény. *M és $M^{dd} = (M^d)^d$ izomorfak mint topologikus o-modulusok. Az izomorfizmust a $m \mapsto (f \mapsto f(m)$ leképezés adja meg. $f \mapsto f(m)$ valóban kontrakció, hiszen $|f(m)| \le \max_{n \in M} f(n) = \|f\|$.*

Illusztrációként a következőt bizonyítjuk be.

4.4.14. Definíció. *Legyen X tetszőleges halmaz. Ekkor legyen $\ell^\infty(X)$ a korlátos $X \to K$ függvények tere Banach-tér a szuprémum-normával. Továbbá legyen $c_0(X)$ azon $f\colon X \to K$ függvények halmaza amelyekre minden $\varepsilon > 0$ -ra $|f(x)| < \varepsilon$ véges sok x kivételével teljesül. Ez is Banach-teret alkot a szupremum-normával (hiszen konvergens sorozat korlátos).*

4.4.15. Állítás ([11, Exercise 5]). *1)* $c_0(X)^d \cong o^X$

2) $(o^X)^d \cong c_0(X)$

Bizonyítás. Az első izomorfizmust a

$$\begin{aligned}\varphi\colon c_0(X)^d &\to o^X\\ \ell &\mapsto (x \mapsto \ell(\mathbf{1}_x))\end{aligned}$$

függvény adja meg, ahol $\mathbf{1}_x(y) = 1$ ha $x = y$ és 0 egyébként. Mivel ℓ kontrakció, $|\ell(\mathbf{1}_x)| \leq 1$ azaz $\ell(\mathbf{1}_x) \in o$. Ez szürjektív o^X-re, mert az ellenkező irányban megadhatjuk a $\psi\colon g \mapsto \left(f \mapsto \sum_{x\in X} f(x)g(x)\right)$ lineáris leképezést, amely jól definiált, mert $c_0(X)$-beli és $\ell^\infty(X)$-beli sorozat pontonkénti szorzata $c_0(X)$-beli, tehát összegezhető.

Másrészt φ izomorfizmus ψ inverzzel, mert

$$\psi \circ \varphi = \ell \mapsto \left(f \mapsto \sum_{x\in X} f(x)\ell(\mathbf{1}_x)\right) = \ell \mapsto (f \mapsto \ell(f)) = \mathrm{id}_{c_0(X)^d}$$

$$\varphi \circ \psi = g \mapsto \left(x \mapsto \left(\sum_{y\in X} \mathbf{1}_x(y)g(y)\right)\right) = g \mapsto (x \mapsto g(x)) = \mathrm{id}_{o^X}$$

Ezzel az első rész absztrakt (topológia nélküli) verzióját beláttuk. Ugyanakkor φ homeomorfizmus is a 4.4.7 Lemma bizonyítása miatt.

A második részt analóg módon bizonyítjuk. Legyen

$$\begin{aligned}\alpha\colon (o^X)^d &\to K^X\\ \ell &\mapsto (x \mapsto \ell(\mathbf{1}_x))\end{aligned}$$

Belátjuk, hogy α valójában $c_0(X)$-be képez. Ellenkező esetben (a kiválasztási axióma alkalmazásával) létezik végtelen sok különböző $x_1, \dots, x_n, \dots \in X$ hogy $|\ell(\mathbf{1}_{x_n})| > \epsilon > 0$. Mivel o^X a szorzattopológiával van felruházva, $\sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{x_n}$ tart $\mathbf{1}_\mathbf{x}$-hez ahol utóbbi az $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat indikátorfüggvénye. ℓ folytonossága miatt tehát

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N \ell(\mathbf{1}_{x_n}) = \lim_{N\to\infty} \ell\left(\sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{x_n}\right) = \ell(\mathbf{1}_\mathbf{x}).$$

A feltevés miatt a bal oldali sorozat nem lehet Cauchy, tehát konvergens sem; ellentmondásra jutottunk.

α injektív, mert az $\mathbf{1}_x$ alakú függvények generálják a véges sok kivétellel azonosan 0 értékű függvények részmodulusát o^X-ben, amelyet most U_0 jelöljön. A szorzattopológia definíciója szerint U_0 sűrű részmodulus, tehát egy rajta értelmezett folytonos K-beli értekeket felvevő függvény legfeljebb egyféleképpen terjedhet ki egy $o^X \to K$ függvénnyé.

Utoljára marad megmutatni, hogy α szürjektív. Legyen $g \in c_0(X)$ tetszőleges. Legyen $\ell_g = f \mapsto \sum_{x \in X} f(x)g(x)$, ami jól definiált mert, mint fent, $c_0(X)$-beli és $\ell^\infty(X)$-beli függvények pontonkénti szorzata összegezhető. Ez folytonos és o-lineáris $o^X \to K$ függvény, tehát $(o^X)^d$-beli. Másrészt $\alpha(\ell_g) = g$, tehát α minden $g \in c_0(X)$-et felvesz. Mivel $\|\ell_g\| = \|g\|$, α Banach-terek közti izomorfizmus.

$\square$

5. fejezet

Disztribúcióalgebrák csoportokon

5.1. Disztribúciók

Legyen M topologikus tér. Ekkor $C(M,K)$ az $M \to K$ folytonos függvények tere a szuprémum-normával.

Legyen $D^c(M,V)\colon = C(M,V)'$, amelyet az M-en értelmezett disztribúciók terének fogunk nevezni.

A legegyszerűbb disztribúciók a $\delta_x = f \mapsto f(x)$ leképezések valamely $x \in M$ pontra. Ezeket *Dirac-disztribúcióknak* nevezzük.

$D^c(M,K)$-n tekinthetnénk az operátornorma által megadott topológiát is, azonban nem így teszünk. Ennek oka az, hogy az a célunk, hogy abban az esetben, ha M a G provéges csoport, akkor a $D^c(G,K)_b = C(M,K)'_b$ egységgömbjeként visszakapjuk az $o[[G]]$ Iwasawa-algebrát, annak természetes topológiájával, amely a gyenge topológiának felel meg.

Analóg módon legyen $o[[M]]$ a $C(M,K)'_b$ egységgömbje, azaz a $C(M,K) \to K$ kontrakciók tere, a *gyenge* topológiával (azaz a $C(M,K)'_s$ topológiájának megszorításával $o[[M]]$-re).

5.1.1. Definíció. *$D^c(M,K)$ jelölje a $C(M,K)'$ vektorteret a legfinomabb olyan lokálisan konvex topológiával, amely $o[[M]]$-re megszorítva legalább olyan durva, mint $o[[M]]$ saját gyenge topológiája. Ezt a korlátos-gyenge topológiának nevezzük, és megjegyezzük, hogy (normában) korlátos halmazokon a gyenge topológiával egyezik meg.*

Megjegyezzük, hogy a korlátos-gyenge topológia létezik és legalább olyan finom, mint a gyenge topológia, mert a gyenge topológia kielégíti a feltételeket.

A következő állítást a kompakt téren folytonos függvény disztribúció szerinti integrálásának a definíciójának vehetjük.

5.1.2. Állítás ([10, Theorem 11.3], [9, Corollary 2.2])**.** *Legyen M kompakt topologikus tér, W pedig lokálisan konvex, Hausdorff K-vektortér, amely továbbá* kvázi-teljes, *azaz minden korlátos zárt részhalmaza teljes. Ekkor van egy*

$$C(M, W) \to \mathcal{L}(D^c(M, K), W)$$
$$f \mapsto \left(\mu \mapsto \int_M f d\mu\right)$$

izomorfizmus, amelyet a Dirac-disztribúciókon való kiértékelés ad meg.

5.2. Függvények és disztribúciók kompakt csoportokon

A továbbiakban szükségünk lesz a következő állításra.

5.2.1. Definíció. *M topologikus térre legyen $C^\infty(M, K)$ a lokálisan konstans, más néven* sima *$M \to K$ függvények tere. Amennyiben M kompakt, ez a szupremum-normával Banach-teret alkot.*

5.2.2. Lemma. *(K továbbra is lokálisan kompakt nemarkhimédeszi test.) Legyen M kompakt topologikus tér. Ekkor $C^\infty(M, K)$ sűrű $C(M, K)$-ban.*

Bizonyítás. Legyen $f \in C(M, K)$ tetszőleges. Legyen $\varepsilon > 0$ valós szám. Mivel M kompakt, $\operatorname{im} f$ is kompakt, ezért lefedhető véges sok $B_\varepsilon(a_i)$ gömbbel. Ha $|a_i - a_j| \le \varepsilon$ akkor az (IV) feltevésünk („ultrametrikus tulajdonság") miatt $B_\varepsilon(a_i) = B_\varepsilon(a_j)$, az ilyen párok közül az egyiket hagyjuk el, és a maradék $B_\varepsilon(a_i)$ gömbök pontosan egyszeresen fogják lefedni $\operatorname{im} f$-et.

Legyen
$$f_\varepsilon(x) = a_i \text{ ha } f(x) \in B(\varepsilon, a_i).$$
Mivel f folytonos, f_ε lokálisan konstans.

Ekkor $\|f - f_\varepsilon\| \le \varepsilon$, ezért az $(f_{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat szuprémumnormában tart f-hez. □

5.2.3. Állítás ([10, Proposition 12.1])**.** *Legyen G kompakt topologikus csoport. Definiálhatjuk a $\mu, \nu \in D^c(G, K)$ disztribúciók (konvolúció-) szorzatát, amely a következő $\mu * \nu$-vel jelölt disztribúció.*

$$\mu * \nu \colon C(G, K) \to K$$
$$(\mu * \nu)(f) := \mu(x \mapsto (\nu(y \mapsto f(xy)))$$

Ez a definíció K-lineáris asszociatív műveletet határoz meg, továbbá a rögzített elemmel való jobb- és balszorzás folytonosak $D^c(G, K)$ topológiájában.

Ezt az állítást közvetlenül, funkcionálanalízissel is be lehet bizonyítani, azonban a következő alfejezetből természetesen következni fog provéges csoportokra.

5.3. Csoportalgebrák

Emlékeztetünk a csoportalgebra szokásos definíciójára.

5.3.1. Definíció. *Ha R gyűrű és G véges csoport, akkor az $R[G]$ csoportalgebra a G csoport elemeinek R-együtthatós formális lineáris kombinációiból áll, az elemenkénti szorzással.*

Hasznosabb lesz azonban a következő, ekvivalens felfogás:

5.3.2. Definíció. *Ha R gyűrű és G véges csoport, akkor az $R[G]$ csoportalgebra $G \to R$ függvényekből áll, a konvolúcióval mint szorzással, azaz*

$$\alpha\beta = g \mapsto \sum_{h_1, h_2 \in G; h_1 h_2 = g} \alpha(h_1)\beta(h_2)$$

Sőt, valójában még természetesebb R-beli értékű *mértékekként* tekinteni a csoportalgebra elemeire.

Legyen K lokálisan kompakt nemarkhimédeszi test. Legyen G tetszőleges provéges csoport.

Mivel a provéges csoport a véges faktorainak inverz limesze, kézenfekvő a csoportalgebráját is így definiálni.

5.3.3. Definíció. $o[[G]] := \varprojlim o[G/H]$ *ahol H a G nyílt normálosztóin fut végig. $o[[G]]$ természetes topológiáját az inverz limesz adja meg.*

5.3.4. Állítás. *$o[[G]]$ kompakt és torziómentes o-modulus.*

Bizonyítás. $o[[G]]$ kompakt, mivel kompakt és Hausdorff topologikus terek inverz limesze is kompakt és Hausdorff, és minden $o[G/H]$ kompakt és Hausdorff, mert a kompakt és Hausdorff o véges hatványa.

Tegyük fel, hogy $x \in o[[G]]$ torzióelem. Ekkor tetszőleges H-ra x képe a kanonikus $o[[G]] \to o[G/H]$ leképezés alatt szintén torzióeleme $o[G/H]$-nak, tehát 0. Mivel ez minden H-ra igaz, ezért $x = 0$. $\square$

Még nem magyaráztuk meg, hogy miért egyezik meg az $o[[G]]$ csoportalgebra az előző fejezet szerint képzett $o[[G]]$-vel.

Először belátjuk a következő lemmát, ami véges G-re $H = \{1\}$-gyel meg is oldja a kérdést.

5.3.5. Definíció. *Legyen $C(G,K)^H$ a $C(G,K)$ azon altere, amelyik a $H \leq G$ nyílt normálosztó jobbról való hatására invariáns, azaz $f \in C(G,K)^H$ pontosan akkor, ha $f(gh) = f(g)$ minden $g \in G, h \in H$ párra.*

5.3.6. Lemma. *Legyen G provéges csoport. Bármely H nyílt normálosztóra $\mathrm{Hom}^{\leq}(C(G,K)^H, K) \cong o[G/H]$ mint topologikus o-modulusok.*

Bizonyítás. Egyrészt $\mathrm{Hom}^{\leq}(C(G,K)^H, K) \cong \mathrm{Hom}^{\leq}(C(G/H,K), K)$ mivel $C(G,K)^H$ és $C(G/H,K)$ kanonikusan izomorf K-Banach-terek (azaz valójában véges dimenziós K-vektorterek).

$\mathrm{Hom}^{\leq}(C(G/H,K), K) \cong C(G/H,K)^d$ definíció szerint, és a 4.4.15 Állítás 1) részének véges dimenziós speciális eseteként $C(G/H,K)^d = o[G/H]$. $\square$

Ez megad egy $o[G/H] \times C(G,K)^H \to K$ bilineáris leképezést, amely $\sum_{gH \in G/H} f(g)\mu(gH)$ alakú ha $\mu \in o[G/H]$ és $f \in C(G,K)^H$.

Részcsoportok egy rendszerét kofinálisnak nevezzük, ha minden az id_G minden U környezete tartalmaz egy részcsoportot a rendszerből. A 2. fejezetben láttuk, hogy provéges csoportban létezik nyílt normálosztóknak csökkenő kofinális hálója.

5.3.7. Lemma. *Legyen $(H_n)_{n \in N}$ G nyílt normálosztóinak csökkenő kofinális hálója. Ekkor egy $f \in C(G,K)$ függvény egyenletesen közelíthető $f_n \in C(G,K)^{H_n}$ függvényekkel.*

Bizonyítás. Mivel f folytonos, az 5.2.2 Lemma szerint egyenletesen közelíthető lokálisan konstans függvényekkel, amelyek csak véges sokféle értéket vesznek fel. Legyen φ_m ilyen függvény, amelyre $\|f - \varphi_m\| \to 0$.

φ_m tehát $U_1, \ldots, U_r$ nyíltzárt halmazokra bontja fel G-t, amelyeken konstans.

G provéges topológiájának a nyílt normálosztók szerinti mellékosztályok bázist alkotnak. Mivel G kompakt, mindegyik U_i felírható bázisnyíltak *véges* uniójaként. Így $U_i = \bigcup g_j H_{ij}$ véges unióval, tehát $\bigcap_{i,j} H_{ij}$ egy nyílt normálosztó G-ben. Mivel $(H_n)_{n\in N}$ kofinális háló a nyílt normálosztók között, lesz $H_{n_m} \leq U_0 \bigcap_{i,j} H_{ij}$, amelyre φ_m valóban jobbinvariáns lesz.

Legyen $f_n = \varphi_m$ a legnagyobb olyan m-re amire $n_m \leq n$. □

5.3.8. Állítás. *$o[[G]]$ topologikus o-modulusként izomorf $\mathcal{L}_s^{\leq}(C(G,K),K))$-val, azaz a $C(G,K) \to K$ kontrakciók halmazával, ha utóbbit a gyenge topológiával látjuk el.*

Bizonyítás. Egy $\mu \in o[[G]]$ elem kanonikus $o[G/H]$-beli képe egyértelműen felírható $\sum_{g\in G/H} a_g^H g$ alakban megfelelő $a_g^H \in o$ elemekre.

A fenti lemma szerint vegyünk $(H_n)_{n\in N}$ hálót és minden f függvényre egy $f_n \to f$ egyenletes jobbról H_n-invariáns approximációt. Legyen

$$\int_G f d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{g\in G/H_n} a_g^{H_n} f_n(g).$$

Itt f_n alatt implicit módon az f_n G/H_n-re való előretolását értjük. Az érték nem függ f_n választásától, mert ha f_n és f_n' különböző H_n-invariáns lokálisan konstans approximációi f-nek, akkor $f_n - f_n'$ 0-hoz tart egyenletesen, így $a_g^{H_n} \in o$ miatt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{g\in G/H_n} a_g^{H_n}(f_n(g) - f_n'(g)) = 0.$$

Végül a $(H_n)_{n\in N}$ háló megválasztása sem számít, mert bármely kettőnek létezik közös finomítása, amely azonos eredményt ad.

Ezzel $(\mu, f) \mapsto \int_G f d\mu$ egy $o[[G]] \times C(G,K) \to K$ bilineáris leképezés, amely megad egy $\mu \mapsto (f \mapsto \int_G f d\mu)$ $o[[G]] \to C(G,K)'$ leképézést. Sőt, bármely μ-re $(f \mapsto \int_G f d\mu)$ egy kontrakció, mert $\sup_{g\in G} |f(g)|$-nél nagyobb abszolút értéket a limeszben egyetlen összeg egyetlen tagja sem vehet fel.

Legyen $\ell \in \mathrm{Hom}^{\leq}(C(G,K),K)$ tetszőleges, megmutatjuk, hogy előáll $\int_G f d\mu$ alakban.

Minden H nyílt normálosztóra Az 5.3.6 Lemma szerint ℓ megszorítása $C(G,K)^H$-ra megad egy $o[G/H]$-beli elemet, mivel a megszorítások kompatibilisek, ezért az $o[G/H]$-beli elemek is inverz rendszert alkotnak, tehát ℓ-hez tartozik egy $o[[G]]$-beli elem. A lemma utáni észrevétel miatt ez ugyanaz, mint eg

$o[[G]]$ inverz limeszből származó topológiája a legdurvább topológia, ami az $o[[G]] \to o[G/H]$ projekciókat folytonossá teszi. Másrészt $\mathrm{Hom}^{\leq}(C(G,K),K)$ gyenge topológiája a legdurvább topológia, ami az $\ell \mapsto \ell(f)$ behelyettesítéseket folytonossá teszi minden $f \in C(G,K)$-ra. Belátjuk, hogy ez a két topológia megegyezik.

Legyen $(f_n)_{n\in N} \to f$ a fenti, azaz lokálisan konstans jobb H_n-invariáns egyenletes közelítése f-nek. Ahhoz, hogy $\ell \mapsto \ell(f)$ folytonos legyen, elég, hogy

$\ell \mapsto \ell(f_n)$ folytonosak, ugyanis $f_n \to f$ egyenletes közelítése f-nek, tehát $|\ell(f) - \ell(f_n)| \leq \|\ell\| \|f - f_n\| \leq \|f - f_n\|$, így az $\ell \mapsto \ell(f_n)$ *folytonos* függvények $\mathrm{Hom}^{\leq}(C(G,K),K)$-en egyenletesen tartanak $\ell \mapsto \ell(f)$-hez, így határértékük folytonos.

Az 5.3.6 Lemma miatt az, hogy rögzített H-ra minden $C(G,K)^H$-beli f-re $\ell \mapsto \ell(f)$ folytonos, ekvivalens azzal, hogy a lemma szerinti $\mathrm{Hom}^{\leq}(C(G,K),K) \to C(G/H,K)^d$ folytonos, azaz $o[[G]] \to o[G/H]$ folytonos. Ez viszont éppen az inverzlimesz-topológia definíciójában szereplő feltétel.

□

Mivel minden K-Banach-térben az egységgömb rácsot alkot, igaz a következő, amely $D^c(G,K)$ alternatív definíciója is lehetne.

5.3.9. Következmény. *$D^c(G,K) = K \otimes_o o[[G]]$ a természetes topológiával.*

Itt a tenzorszorzat természetes topológiája magyarázatra szorul. Ha egy gyűrű felett a gyűrű hányadostestével tenzorszorzunk, akkor a szorzat minden eleme elemi tenzor lesz, így jelen esetben kapunk egy $\phi\colon K \times o[[G]] \to K \otimes_o o[[G]]$ leképezést, amelyről szeretnénk, hogy folytonos legyen, ha az értelmezési tartományára a szorzattopológiát tesszük. Ekkor $K \otimes_o o[[G]]$ természetes a topológiája alatt a legfinomabb olyan topológiát értjük, amely a ϕ leképezést folytonossá teszi, azaz a nyílt halmazok pontosan a nyílt halmazok ϕ szerinti képei lesznek.

5.3.10. Állítás ([10, Proposition 12.1])**.** *$D^c(G,K)$ olyan K-algebra, amelyben a balról és a jobbról szorzás is folytonos.*

Bizonyítás. Az $o[[G]]$ gyűrűt adó inverz limesz konstrukció garantálja, hogy a limeszgyűrűn folytonosak legyenek a műveletek. Legyen $\alpha \in D^c(G,K) = q\mu$, ahol $q \in K$, $\mu \in o[[G]]$, rögzített. Legyen $r \in K$ tetszőleges, jelölje $ro[[G]]$ az $o[[G]]$ (mint halmaz) r-szeresét. A μ-vel jobbról (balról) való szorzás egy folytonos $ro[[G]] \to ro[[G]]$ leképezés és a q-val való (skalár)szorzás is folytonos, ezért az $\alpha = q\mu$-vel való jobbról (balról) való szorzás is folytonos.

Ezért az α-val való szorzás az egész $D^c(G,K) = \bigcup_{r \in K} ro[[G]]$ téren folytonos.

□

5.4. $\mathbb{Z}_p$ disztribúcióalgebrája

A legegyszerűbb csoport, amit p-adikusnak nevezhetünk, a p-adikus egészek $(\mathbb{Z}_p, +)$ additív csoportja. Ennek a példáját fogjuk részletesebben megvizsgálni. Azonban, hogy a többi jelöléssel összhangban maradjunk, $\mathbb{Z}_p$-t multiplikatívan fogjuk írni.

$\mathbb{Z}_p$ provéges, sőt, pro-p csoport, tehát a fenti csoportalgebrás konstrukció működni fog. K továbbra is lokálisan kompakt nemarkhimédeszi test lesz.

Először meghatározzuk az $o[[\mathbb{Z}_p]]$ Iwasawa-algebra szerkezetét. Ehhez a $\mathbb{Z}_p \to K$ folytonos függvények ismerete lesz szükséges. Ez alapvetően komplex egységkörön folytonos függvényekkel (és így a Fourier-sorok elméletével) fog rokonságot mutatni. $\mathbb{Z}_p$, mint kompakt topologikus csoport áll párban a komplex egységkörrel.

Tekintsük a $\Delta\colon C(\mathbb{Z}_p, K) \to C(\mathbb{Z}_p, K)$, $\Delta(f) = x \mapsto f(x+1) - f(x)$ operátort. Megjegyezzük, hogy $\binom{x}{k}$ rögzített k-ra minden 0 karakterisztikájú test felett egy polinom az x változóban.

5.4.1. Lemma. *1.* $\Delta\binom{x}{k} = \binom{x}{k-1}$

2. $\left(\Delta^n\binom{x}{k}\right)(0) = \delta_{n,k}$

Bizonyítás. Ha $x \in \mathbb{Z}$ akkor $\binom{x+1}{k} - \binom{x}{k} = \binom{x}{k-1}$ kombinatorikai tétel, tehát a két oldal mint polinom megegyezik.

Ezt n-szer ismételten alkalmazva $\left(\Delta^n\binom{x}{k}\right) = \binom{x}{k-n}$, és $\binom{0}{k-n} =$ ha $n-k=0$ és 0 egyébként. □

Ha $x \in \mathbb{Z}$, akkor $\binom{x}{k} \in \mathbb{Z}$, ezt az o-n vett topológia szerinti lezártakra kiterjesztve ha $x \in o$, akkor $\binom{x}{k} \in o$. Mivel $\binom{k}{k} = 1$, ezért

$$\left\|\binom{x}{k}\right\| = \sup_{x \in \mathbb{Z}_p}\left|\binom{x}{k}\right| = 1.$$

Newton egyik jól ismert azonossága szerint minden p polinomra igaz, hogy

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{x}{k}\Delta^k(p)(0).$$

Ezt Mahler a következő módon terjesztette ki.

5.4.2. Tétel ([7])**.** *Legyen $f \in C(\mathbb{Z}_p, K)$ tetszőleges. Ekkor*

$$\lim_{k\to\infty}\Delta^k(f)(0) = 0 \text{ és}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{x}{k}\Delta^k(f)(0).$$

Az ellenkező irányban pedig láthatjuk, hogy tetszőleges $(b_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N})$ sorozatra értelmes az

$$f:=\sum_{k=0}^{\infty} b_k\binom{x}{k}$$

függvény, és $\Delta^k(f)(0) = b_k$.

5.4.3. Állítás. $\|f\| = \sup_{k\in\mathbb{N}}|\Delta^k(f)(0)|$

Bizonyítás.

$$\|f\| = \sup_{k\in\mathbb{N}}\|\binom{x}{k}\Delta^k(f)(0)\| = \sup_{k\in\mathbb{N}}|\Delta^k(f)(0)|.$$

□

A jobboldal éppen a $|\Delta^k(f)(0)|$ sorozat normája $c_0(\mathbb{N})$-ben.

5.4.4. Következmény. *Az*

$$f \mapsto (k \mapsto \Delta^k(f)(0))$$

függvény Banach-tér-izomorfizmus $C(\mathbb{Z}_p, K)$ és $c_0(\mathbb{N})$ között.

Ezt dualizálva kapjuk, hogy

5.4.5. Állítás. $D^c(\mathbb{Z}_p, K) = C(\mathbb{Z}_p, K)' \cong c_0(\mathbb{N})' = \ell^\infty(\mathbb{N})$.

Azaz egy $\mu \in D^c(\mathbb{Z}_p, K)$ disztribúciót

$$\mu = f \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Delta^k f(0) =: \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k$$

alakban írhatunk le, ahol $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$.

5.4.6. Állítás. $T_n * T_k = T_{n+k}$

Bizonyítás. Legyen $f \in C(G, K)$, $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \binom{z}{i}$. A konvolúció definíciója szerint

$$T_n * T_k(f) = T_n(x \mapsto T_k(y \mapsto f(x+y)))$$

$$T_k(x \mapsto f(x+y)) = \left[\sum_{i=k}^{\infty} b_i \binom{x+y}{i-k}\right]_{x=0} = \sum_{i=0}^{\infty} b_{i+k} \binom{y}{i}$$

$$T_n\left(y \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} b_{i+k} \binom{y}{i})\right) = b_{n+k} = T_{n+k}(f).$$

□

5.4.7. Következmény. *Legyen $T = T_1$, ekkor $T_n = T^n$.*

Így $o[[\mathbb{Z}_p]]$ izomorf a $o[[T]]$ egész együtthatós hatványsor-gyűrűvel, és $D^c(\mathbb{Z}_p, K)$ izomorf a $K[[\mathbb{Z}_p]] = K \otimes_o o[[T]]$ korlátos együtthatós hatványsor-gyűrűvel.

Mivel a jelölések megtévesztőek lehetnek, megemlítjük a következő tartalmazási viszonyokat.

$$o[[T]] = o[[\mathbb{Z}_p]] \subsetneq K[[\mathbb{Z}_p]] \subsetneq K[[T]].$$

6. fejezet

Folytonos reprezentációk

6.1. Reprezentációk és modulusok

Legyen K továbbra is lokálisan kompakt, G pedig topologikus csoport.

6.1.1. Definíció. *G K-feletti Banach-tér reprezentációja alatt formálisan egy olyan (V, π) párt értünk, ahol V egy K-Banach-tér, π pedig egy $G \times V \to V$* foly- tonos *csoporthatás, amelyre $v \mapsto \pi(g, v)$ lineáris. Ahol ez nem okoz problémát, ott a reprezentációt is V-vel jelöljük, $\pi(g, v)$-t pedig gv-vel.*

6.1.2. Definíció. *Legyen $\mathrm{Ban}_G(K)$ a G K-Banach-terek feletti reprezentációinak kategóriája, a folytonos K-lineáris és G-ekvivariáns függvényekkel mint morfizmusokkal.*

6.1.3. Lemma. *Legyen G provéges, $\mu \in D^c(G, K)$. Megadható $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat ami μ-höz tart, és Dirac-disztribúciók véges kombinációiból áll.*

Bizonyítás. $D^c(G, K) = K \otimes_o o[[G]]$ miatt elég $\mu \in o[[G]]$-re bizonyítani, és ebben az esetben a gyenge topológia szerint kell μ-höz konvergálni. Legyen H nyílt normálosztó G-ben. Ekkor μ $o[G/H]$-beli képe felírható $\sum_{g \in G/H} a_g^H g$ alakban. Legyen $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nyílt normálosztók kofinális sorozata. Legyen $\mu_n = \sum_{g \in G/H} a_g^{H_n} \delta_{\hat{g}}$ ahol $\hat{g}$ G/H-nak tetszőleges reprezentánsa. Ekkor μ és μ_n megegyezik a H_n-jobbinvariáns függvényeken.

Az 5.3.7 Lemma szerint minden $f \in C(G, K)$ függvényre létezik $f_n \to f$ egyenletes H_n-jobbinvariáns approximáció, ezt fogjuk használni.

$$|(\mu - \mu_n)(f)| \leq |(\mu - \mu_n)(f - f_n)| + |(\mu - \mu_n)(f_n)| =$$

ahol az első tag legfeljebb $\|f - f_n\|$, mert $\|\mu - \mu_n\| \leq 1$, és az utolsó tag 0 a fentiek miatt. Ezért $|(\mu - \mu_n)(f)| \leq \|f - f_n\| \to 0$ miatt $\mu_n \to \mu$ *pontonként*, azaz a gyenge topológiában. □

6.1.4. Állítás ([10, Proposition 17.1])**.** *Legyen G provéges csoport, V egy Banach-tér-reprezentáció. Ekkor G hatása V-n kiterjed egy $D^c(G, K)$-modulusstruktúrává V-n, ahol a hatás külön-külön mindkét változóban folytonos. (Ezt a modulust továbbra is V-vel fogjuk jelölni.)*

Bizonyítás a [10] 34. oldalán felvázoltak szerint. A 4.3.13 Következmény szerint alkalmazhatjuk az 5.1.2 Állítást a $W = \mathcal{L}_s(V,V)$ esetben, így kapunk egy

$$I\colon C(G,V) \to \mathcal{L}(D^c(G,K),V)$$

folytonos leképezést.

$\mu \in D^c(G,K)$ és $v \in V$-re legyen $\mu * v = I(g \mapsto gv)(\mu)$.

Ez olyan értelemben terjeszti ki az eredeti hatást, hogy $\delta_{g_0} * v = I(g \mapsto gv)(\delta_{g_0}) = g_0 v$ az I konstrukciója szerint.

$\mu * v$ az első változójában I definíciója szerint folytonos. Meg kell mutatni, hogy v-ben is folytonos. Ennek lépései a következők.

1. $\delta_g * v = gv$ ami v-ben folytonos minden $g \in G$-re.

2. $\mu * v$ v-ben folytonos, ha μ Dirac-disztribúciók véges lineáris kombinációja

3. A fenti lemma szerint $\mu_i \to \mu$ sorozatot véve mindegyik $\mu_i * v$ folytonos v-ben.

4. Banach–Steinhaus-tételt alkalmazva a $\mu_i * v$ folytonos lineáris leképezések pontonként konvergens sorozatára kapjuk, hogy $\mu * v$ is folytonos v-ben.

   Végül $\nu*(\mu*v) = (\nu*\mu)(v)$ bizonyítása szükséges, ez ugyanúgy igaz Dirac-disztribúciók véges lineáris kombinációjára, és onnan az egész $D^c(G,K)$-ra kiterjed a fenti módon.

□

6.1.5. Állítás ([10, Proposition 17.1]). *Legyenek V, W K-Banach-tér reprezentációi a G provéges csoportnak, $\phi\colon V \to W$ pedig egy folytonos, lineáris, G-ekvivariáns leképezés. Ekkor ϕ egy $D^c(G,K)$-modulushomomorfizmus.*

Bizonyítás. ϕ additív függvény, tehát csak a $\phi(\mu * u) = \mu * \phi(v)$ feltételt kell ellenőriznünk. A G-ekvivariancia miatt

$$\phi(\delta_g * u) = \phi(gu) = g\phi(u) = \delta_g * \phi$$

teljesül, és ϕ lineáris, ezért a feltétel Dirac-disztribúciók véges K-lineáris kombinációira igaz. Továbbá ϕ folytonos, ezért ilyenek limeszére, azaz tetszőleges μ-re is igaz a feltétel. □

Az előbbi eredmények megfordítása is igaz.

6.1.6. Állítás. *Legyen V K-Banach-tér és egyben $D^c(G,K)$-modulus különkülön folytonos hatással. Ekkor V egy K-Banach reprezentáció. Egy $\phi\colon V \to W$ modulushomomorfizmus K-lineáris és G-ekvivariáns.*

Bizonyítás. Legyen $\pi(g,v) = \delta_g * v$. A rá vonatkozó feltételek speciális esetei a $*$ műveletre vonatkozó feltételeknek.

ϕ ugyanígy K-lineáris és G-ekvivariáns. □

Nem igaz viszont, hogy az általános modulushomomorfizmusok folytonosak lennének, például triviális G-hatás esetén egy általános lineáris leképezés nem lesz folytonos. A fenti két állítás azonban mutatja, hogy

6.1.7. Tétel. $\mathrm{Ban}_G(K)$ *ekvivalens* $D^c(G,K) - \mathrm{Mod}$ *egy teljes részkategóriájával.*

Ezért innentől amikor reprezentációk homomorfizmusairól beszélünk, akkor $D^c(G,K)$-modulushomomorfizmusokat értünk, amelyek így automatikusan folytonosak. Ennek megfelelően a részreprezentációkat zártnak, a faktorokat zárt részreprezentáció szerinti faktornak értjük.

6.2. Dualitás

Ebben az alfejezetben feltesszük, hogy K 0 karakterisztikájú lokálisan kompakt test. Ekkor $\mathbb{Q} \leq K$ és $o\mathbb{Q} = K$.

6.2.1. Állítás. *Legyen* $V \in \mathrm{Ban}_G(K)$. *Ekkor* $V'_b \in Ban_G(K)$ *az operátornormával és a*

$$\pi' \colon G \times V'_b \to V'_b$$
$$\pi'(g,\ell) = v \mapsto \ell(\pi(g^{-1},v))$$

hatással, amit V duális reprezentációjának *fogunk nevezni.*

Bizonyítás. Emlékeztetünk, hogy V'_b K-Banach-tér az operátornormával.

A megadott hatás valóban csoporthatás, mivel

$$g(h(\ell)) = g\left(v \mapsto \ell(\pi(h^{-1},v))\right) = w \mapsto \ell(\pi(h^{-1},\pi(g^{-1},w))) =$$
$$= w \mapsto \ell(\pi(h^{-1}g^{-1},w)) = w \mapsto \ell(\pi((gh)^{-1},w)) = (gh)(\ell).$$

π' folytonos, mert $g \mapsto g^{-1}$, π, és az ℓ-be való behelyettesítés mind folytonosak. π' második változójában lineáris, mert a behelyettesítés lineáris. □

Megjegyezzük továbbá, hogy tetszőleges $g \in G$-re $g(\ell)$ a $g(v)$ helyen kiértékelve az $\ell(v)$ értéket veszi fel.

Emlékeztetünk, hogy V^d a V'_b egységgömbje az operátornorma szerint, ami kompakt, lineárisan topologizált o-modulus.

Az a stratégiánk, hogy a $V \mapsto V^d$ $\mathrm{Ban}(K) \to \mathcal{M}(o)$ funktort (sőt, kategóriák antiekvivalenciáját) $\mathrm{Ban}_G(K)$-ra megfelelően értelmezve egy $\mathrm{Ban}_G(K)$-val antiekvivalens $\mathcal{C}$ kategóriát kapjunk.

Ez a következő esetben egyszerűen lehetséges.

6.2.2. Definíció. *Legyen* G *topologikus csoport.* $V \in \mathrm{Ban}_G(K)$ *unitér, ha* $\|gv\| = \|v\|$ *minden* $g \in G$*-re és* $v \in V$*-re. Az unitér reprezentációk kategóriáját* $\mathrm{uBan}_G(K)$*-val jelöljük.*

6.2.3. Definíció. $\mathcal{M}(o[[G]])$ *jelölje azon topologikus* $o[[G]]$ *modulusok kategóriáját, amelyek kompaktak és* o*-torziómentesek.*

6.2.4. Állítás. *Legyen* $V \in uBan_G(K)$.
Ekkor $V^d \in \mathcal{M}(o[[G]])$, *azaz kompakt, lineárisan topologizált* o*-modulusstruktúrája kiterjed egy (topologikus)* $o[[G]]$*-modulusstruktúrára.*

Bizonyítás. V_b' egy $D^c(G,K)$-modulus, tehát a $o[[G]] \leq D^c(G,K)$ tartalmazáson keresztül egy $o[[G]]$-modulus is. Azt kell tehát megmutatni, hogy $V^d \subseteq V_b'$ $o[[G]]$ hatására zárt.

Legyen $g \in G$, $\ell \in V_b'$. Ekkor $g(\ell) = v \mapsto \ell(g^{-1}v)$, és $|\ell(g^{-1}v)| \leq \|\ell\|\|g^{-1}v\| \leq \|\ell\|\|v\|$ tehát g kontrakcióként hat V_b'-n.

Ezért Dirac-disztribúciók o-beli együtthatós lineáris kombinációi is kontrakciók. Továbbá minden $\mu \in o[[G]]$ ilyen kombinációk pontonkénti limesze, tehát $\ell \mapsto \mu * \ell$ is kontrakció V_b'-n. Ezért speciálisan V^d-t magába képezi. □

Emlékeztetünk rá, hogy $M \in \mathcal{M}(o)$-ra M^d-vel jelöltük a folytonos $M \to K$ o-lineáris leképezések Banach-terét a szuprémum-normával. Ha M továbbá $\mathcal{M}(o[[G]])$-beli, akkor M^d-n megadunk egy unitér K-Banach-reprezentációt.

6.2.5. Definíció. *Legyen $M \in \mathcal{M}(o[[G]])$. Ekkor $M^d \in \mathrm{uBan}_G(K)$ a következő $D^c(G,K)$-hatással: $g \in G$-re és $q \in M^d$-re legyen $g(q) = m \mapsto q(g^{-1}m)$*

A V^d esettel teljesen analóg módon kell kiszámolni, hogy ez valóban reprezentációt ad meg, és ugyanúgy kiterjed $D^c(G,K)$-modulusstruktúrává. A 6.2.4 Állítással azonos módon lesz ez is unitér reprezentáció.

Legyen $V \in \mathrm{uBan}_G(K)$. Ekkor $V \cong (V^d)^d$ mint K Banach-tér [8] szerint.

6.2.6. Állítás. *$V \cong (V^d)^d$ mint K-Banach-reprezentáció. Sőt, a $V \mapsto (V^d)^d$ funktor természetesen izomorf az $\mathrm{Id}_{\mathrm{uBan}_G^{\leq}(K)}$ funktorral.*

Bizonyítás. A szokásos módon a V^d-beli funkcionálok $v \in V$-n vett kiértékelése megad egy folytonos $V \to (V^d)^d$ beágyazást. A [8] Tétel szerint ez izomorfizmus lesz, ezért nekünk elég megmutatni, hogy a

$$\iota_v \colon V^d \to K \tag{6.1}$$
$$\ell \mapsto \ell(v) \quad (v \in V) \tag{6.2}$$
$$\tag{6.3}$$

alakú elemek terén G hatása megegyezik a V-n vett hatásával. Ezzel a [8] által megadott (V variálásával természetes módon változó) izomorfizmusok G-ekvivariánsak lesznek. Ezért $V \mapsto (V^d)^d$ természetesen izomorfizmusa a $\mathrm{Id}_{\mathrm{uBan}(K)^{\leq}}$ funktorral az $\mathrm{Id}_{\mathrm{uBan}_G(K)^{\leq}}$ kategóriában is természetes izomorfizmus.

A definíciókat beírva

$$\begin{aligned} g(\iota_v) &= \ell \mapsto \iota_v(g^{-1}(\ell)) = \\ &= \ell \mapsto \iota_v(w \mapsto \ell(gw)) = \ell \mapsto \ell(gv) = \\ &= \iota_{gv} \end{aligned}$$

□

Ugyanezt a számítást $(M^d)^d$-re elvégezve kapjuk, hogy

6.2.7. Állítás. *$M \cong (M^d)^d$ mint K-Banach-reprezentáció. Sőt, a $M \mapsto (M^d)^d$ funktor természetesen izomorf az $\mathrm{Id}_{o[[G]]}$ funktorral.*

Az utóbbi két állításunk együtt bizonyítja a következőt.

6.2.8. Tétel. *Legyen G provéges. Ekkor $\mathrm{uBan}_G^{\leq}(K)$ a $V \mapsto V^d$ funktoron keresztül antiekvivalens $\mathcal{M}(o[[G]])$-vel.*

6.3. Lokalizálás

Legyen ebben az alfejezetben K a $\mathbb{Q}_p$ test véges bővítése. Ekkor $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}_p$ és $\|\mathbb{Q}\|$ torlódik a 0-hoz.

Ezért bármely $\mathrm{uBan}_G(K)$-beli morfizmus megfelelő racionális számszorosa már $\mathrm{uBan}_G^{\leq}(K)$-morfizmus. Így amennyiben szeretnénk visszanyerni az egész $\mathrm{uBan}_G^{\leq}(K)$ kategóriát, úgy lokalizálhatunk $\mathbb{Q}$ szerint ahogyan [10] teszi. Ez egy általános kategóriaelméleti konstrukció, amelynek lényege, hogy a $\mathbb{Z}$ elemeivel való szorzás által megadott morfizmusoknak formális inverzeket adunk.

Ebben a dolgozatban azonban egy kevésbé általános, de könnyebben leírható módszert használunk, amely a lokalizálással ekvivalens kategóriát fog adni. A nevet az adja, hogy általában lokalizálásnak nevezzük egy R gyűrű feletti modulusainak R egy lokalizáltjával való tenzorszorzását.

Legyen $\mathcal{C}$ $o[[G]]-\mathrm{Mod}$-nak egy teljes részkategóriája. Definiáljuk $\mathcal{C}_{\otimes\mathbb{Q}}$-t a következőképpen. Legyenek a $\mathcal{C}_{\otimes\mathbb{Q}}$ objektumai a valamely $M \in \mathcal{C}$-re $M \otimes \mathbb{Q}$ alakú $o[[G]]$-modulusok. Legyenek továbbá $\mathcal{C}_{\otimes\mathbb{Q}}$ morfizmusai az $r\varphi$ alakú morfizmusok ahol φ egy $\mathcal{C}$-beli morfizmus és $r \in \mathbb{Q}$.

Könnyen látható, hogy ez a konstrukció ekvivalens kategóriákat ekvivalens kategóriákba visz, illetve hogy a fenti gondolatmenet szerint $\mathrm{uBan}_G^{\leq}(K)_{\otimes\mathbb{Q}} = \mathrm{uBan}_G(K)$.

A $\mathbb{Q}$ szerinti lokalizálással éppen csak annyi információt veszítünk, amennyit a $\mathbb{Q}$ szerinti tenzorszorzással; ha az vizsgált modulusok $\mathbb{Z}$-torziómentesek, akkor lényegében nem veszítünk információt. Ez történik a következő esetben is.

A 6.2.8 Tételben szereplő kategóriákat lokalizálva $\mathbb{Q}$ szerint a következőt kapjuk.

6.3.1. Tétel. *Legyen G provéges. Ekkor $\mathrm{uBan}_G(K)$ a $V \mapsto V^d \otimes \mathbb{Q}$ funktoron keresztül antiekvivalens $\mathcal{M}(o[[G]])_{\otimes\mathbb{Q}}$-val.*

6.4. Provéges csoportok reprezentációi

Felmerül a kérdés, hogy az unitér G-reprezentációk leírásával milyen mértékben írtunk le minden reprezentációt. A válasz, hogy G provéges, akkor a norma –de nem a topológia– megváltoztatásának erejéig minden reprezentációt leírtunk.

6.4.1. Állítás ([10, Remark 18.2]). *Legyen G kompakt csoport, $V \in Ban_G(K)$. Ekkor létezik G-invariáns norma V-n, amely az eredetivel azonos topológiát határoz meg.*

[10, Remark 18.2], azonos bizonyítással. Legyen $L \subseteq V$ a V Banach-tér nyílt egységgömbje ami nyílt és korlátos rács. Mivel a $\pi\colon G \times V \to V$ hatás folytonos, V őségképe nyílt, tehát tartalmaz egy $H \times L_0$ nyílt halmazt ahol H nyílt részcsoport és $L_0 \leq L$ rács. Ekkor $L_1 \colon = \bigcap_{h \in H} hL$ tartalmazza L_0-t, tehát szintén nyílt (és H-invariáns) rács. Továbbá $g \in G$-re gL_1 nyílt, mert a nyílt L_1 őséképe a folytonos g^{-1} függvény szerint).

Most legyen

$$L_2\colon = \bigcap_{g \in G} gL_1 = \bigcap_{g \in G/H} gL_1.$$

Ez már G invariáns lesz. Továbbá mivel G kompakt és kompakt topologikus csoport nyílt részcsoportja véges indexű, L_2 nyílt rácsok véges metszete, ami szintén nyílt rács.

Legyen $\|v\|_G = \inf\{|x| \mid xv \in L_2\}$. Mivel L_2 G invariáns, ez a norma is az. Mivel L_2 egyrészt L-ben van, másrészt a 0 nyílt környezete, tartalmaz nyílt $r > 0$ sugarú gömböt, ezért $\|v\| \leq \|v\|_G \leq r^{-1}\|v\|$ és a két norma ekvivalens. $\square$

6.4.2. Állítás. $\mathrm{uBan}_G(K)$ *ekvivalens a* $\mathrm{Ban}_G(K)$ *kategóriával.*

Bizonyítás. Az $\iota\colon \mathrm{uBan}_G(K) \to \mathrm{Ban}_G(K)$ funktor a természetes beágyazás. A másik irányba a $u\colon \mathrm{Ban}_G(K) \to \mathrm{uBan}_G(K)$ funktort a fent megadott konstrukcióval értelmezzük.

Az $\iota \circ u$ funktor természetesen izomorf az $\mathrm{Id}_{\mathrm{Ban}_G(K)}$ funktorral. Ennek bizonyítása: minden V-re vehetjük azt a $V \to \iota(u(V))$ K-lineáris, G-ekvivariáns homeomorfizmust (tehát $\mathrm{Ban}_G(K)$-izomorfizmust), amely a pontokat helyben hagyja.

Ugyanezt a pontokat helybenhagyó izomorfizmust kell venni az $u \circ \iota$ esetében. $\square$

A kategóriák (anti-)ekvivalenciája tranzitív, tehát a következő tételt kaptuk.

6.4.3. Tétel ([10, Theorem 17.4])**.** *Legyen G provéges. Ekkor* $\mathrm{Ban}_G(K)$ *a* $V \mapsto V^d \otimes \mathbb{Q}$ *funktoron keresztül antiekvivalens* $\mathcal{M}(o[[G]])_{\otimes\mathbb{Q}}$*-val.*

Vegyük észre, hogy $V^d \otimes \mathbb{Q}$ egy $\mathbb{Q} \otimes o[[G]] = K \otimes_o o[[G]] = K[[G]] = D^c(G, K)$-modulus.

6.5. $o[[G]]$ feletti modulusok

Ebben az alfejezetben legyen K a $\mathbb{Q}_p$ véges bővítése, G pedig kompakt és lokálisan K-analitikus csoport. Ekkor G provéges csoport is egyben.

Ekkor Lazard tétele a következőt mondja.

6.5.1. Tétel ([5])**.** $o[[G]]$ *és* $D^c(G, K)$ *Noether-gyűrűk.*

6.5.2. Definíció. *A végesen generált o-torziómentes $o[[G]]$-balmodulusok kategóriáját jelöljük* $o[[G]] - \mathrm{Mod}_{\mathrm{fg}}^{o-\mathrm{tf}}$*-vel.*

6.5.3. Állítás. *Az* $o[[G]] - \mathrm{Mod}_{\mathrm{fg}}^{o-\mathrm{tf}}$ *ekvivalens a* $\mathcal{M}(o[[G]])$ *végesen generált elemeinek teljes részkategóriájával.*

Ezt a következő állítások bizonyítják.

6.5.4. Állítás ([10, Lemma 19.3 i)])**.** *Egy végesen generált M $o[[G]]$-modulusnak létezik egy egyértelmű Hausdorff-topológiája amivel az $o[[G]] \times M \to M$ hatás folytonos. Ezt M kanonikus topológiájának hívjuk.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy adott egy ilyen topológia M-en. Legyenek $m_1, \ldots, m_e$ az M egy generátorrendszere. Ekkor létezik egy $\pi\colon o[[G]]^e \to M$ homomorfizmus ami az $(r_1, \ldots, r_e)$ elemet a $\sum_{i=1}^{e} r_i m_i$ elembe viszi. A szorzás és az összeadás folytonossága miatt π leképezés folytonos ha $o[[G]]^e$-re a szorzattopológiát tesszük. π továbbá faktorleképezés. $o[[G]]$ kompaktsága miatt $o[[G]]^e$ is kompakt. Elemi topológiai tény, hogy egy X kompakt térből az Y térbe vezető folytonos faktorleképezés pontosan akkor zárt, ha Y Hausdorff. Ezért M pontosan akkor teljesíti a feltételeket, ha f zárt és folytonos. Ez pedig azt jelenti, hogy M zárt halmazai pontosan az $o[[G]]^e$ zárt halmazainak π alatti képei. Tehát M topológiája pontosan a π által megadott faktortopológia. $\square$

6.5.5. Következmény. *M kompakt és o-lineárisan topologizált a kanonikus topológiája szerint.*

Bizonyítás. M kompakt, mert az $o[[G]]^e$ kompakt halmaz folytonos képe. Az, hogy o-lineárisan topologizált, speciális esete annak, hogy az $o[[G]]$-hatás folytonos. $\square$

6.5.6. Állítás ([10, Lemma 19.3 ii)])**.** *Egy M $o[[G]]$-modulus minden részmodulusa zárt (a kanonikus topológiában).*

Bizonyítás. Legyen $N \leq M$ a részmodulus. Mivel $o[[G]]$ (jobb- és bal-)Noether-gyűrű, ezért N is végesen generált, tehát $o[[G]]$ egy (kompakt) hatványának képe, tehát kompakt, tehát –mivel M Hausdorff– zárt is. $\square$

6.5.7. Állítás ([10, Lemma 19.3 iii)])**.** *Ha M, N végesen generált $o[[G]]$-modulusok, akkor minden $\varphi\colon M \to N$ modulushomomorfizmus folytonos a kanonikus topológia szerint.*

Bizonyítás. A 6.5.4 Állítás szerint M-be létezik egy folytonos és zárt π faktorleképezés $o[[G]]^e$-ből. Legyen $\phi = \varphi \circ \pi$. A következő kommutatív diagram szemlélteti a helyzetet.

$$\begin{tikzcd} o[[G]]^e \arrow[d, two heads, "\pi"] \arrow[dr, "\phi"] & \\ M \arrow[r, "\varphi"] & N \end{tikzcd}$$

Legyenek $a_1, \ldots, a_e$ az $o[[G]]^e$ független generátorai. Ekkor $\phi(\sum_i r_i a_i) = \sum_i r_i \phi(a_i)$ ami folytonos, mert az $o[[G]]$ elemeivel való szorzás folytonos N topológiája szerint.

Azt kell belátnunk, hogy ha $S \subseteq N$ zárt, akkor $\varphi^{-1}(S)$ zárt. Mivel π zárt és folytonos leképezés, ezért ez ekvivalens azzal, hogy $\pi^{-1}(\varphi^{-1}(S)) = \phi^{-1}(S)$ zárt. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy ϕ folytonos. $\square$

Ez a három állítás együtt a következőt bizonyítja.

6.5.8. Állítás. *A kanonikus topológiával való felruházás (mint funktor) teljes részkategóriaként beágyazza $o[[G]] - \mathrm{Mod}_{\mathrm{fg}}^{o-\mathrm{tf}}$-t az $\mathcal{M}(o[[G]])$ kategóriába. A beágyazás képét, tehát a kanonikus topológiával felruházott végesen generált o-torziómentes $o[[G]]$-modulusokat jelölje $\mathcal{M}(o[[G]])^{\mathrm{fg}}$.*

6.5.9. Állítás.
$$\mathcal{M}(o[[G]])^{\mathrm{fg}}_{\otimes\mathbb{Q}} = K[[G]] - \mathrm{Mod}_{\mathrm{fg}}$$

Bizonyítás. A $\mathcal{M}(o[[G]])^{\mathrm{fg}}_{\otimes\mathbb{Q}} \to K[[G]] - \mathrm{Mod}_{\mathrm{fg}}$ funktort az objektumok $K[[G]]$-modulusként, illetve a morfizmusok $K[[G]]$-morfizmusként való értelmezése adja meg.

Másrészt minden M $K[[G]]$-modulust átírhatunk $M_0 \times \mathbb{Q}$ alakba, ahol $M_0 = \langle m_1, \ldots, m_e \rangle_{o[[G]]}$ az M $K[[G]]$ feletti generátorai által $o[[G]]$ felett generált részmodulus. Egy $\phi\colon M \to N$ $K[[G]]$-homomorfizmust pedig átírhatunk $r\varphi = \varphi \otimes r$ alakba, ahol φ M_0-t N_0-ba viszi és $r \in \mathbb{Q}$. $\square$

6.6. Megengedhető Banach-tér-reprezentációk

6.6.1. Definíció. Megengedhetőnek *nevezzük azokat a* V K*-Banach-reprezentációkat, amelyekre* $V^d \otimes \mathbb{Q}$ *végesen generált* $K[[G]]$*-modulus. Ezeknek a modulusoknak a teljes részkategóráját* $\mathrm{Ban}_G(K)$*-ban jelölje* $\mathrm{Ban}_G^a(K)$*.*

A $V \mapsto V^d \otimes \mathbb{Q}$ a $\mathrm{Ban}_G^a(K)$ teljes részkategóriára megszorítva is antiekvivalencia.

6.6.2. Tétel ([10, Theorem 19.3])**.** *Legyen* G *lokálisan* K*-analitikus csoport. A* $V \mapsto V^d \otimes \mathbb{Q}$ *funktor antiekvivalenciát határoz meg* $\mathrm{Ban}_G^a(K)$ *és* $K[[G]] - \mathrm{Mod}_{\mathrm{fg}}$ *között.*

Utóbbi kategória ú.n. Abel-kategória, amelynek több következménye is van, ezek közül explicit kiemeljük a legfontosabbakat.

6.6.3. Következmény. *Egy* V *megengedhető Banach-tér-reprezentáció minden* W *részreprezentációja (azaz* $K[[G]]$*-részmodulusa) is megengedhető.*

Bizonyítás. A $W \to V$ injekciónak (monomorfizmusnak) megfelel egy $V^d \otimes \mathbb{Q} \to W^d \otimes \mathbb{Q}$ szürjekció (epimorfizmus). Végesen generált modulus képe mindig végesen generált, ezért $W \in \mathrm{Ban}_G^a(K)$. □

6.6.4. Következmény. *Egy* V *megengedhető Banach-tér-reprezentáció minden* W *faktorreprezentációja (azaz* $K[[G]]$*-részmodulusa) is megengedhető.*

6.6.5. Következmény. *A* $V \to W$ *szürjekciónak (epimorfizmusnak) megfelel egy* $W^d \otimes \mathbb{Q} \to V^d \otimes \mathbb{Q}$ *injekció (monomorfizmus).* $V^d \otimes \mathbb{Q}$*, mint Noether-gyűrű felett végesen generált modulus részmodulusa végesen generált, ezért* $W \in \mathrm{Ban}_G^a(K)$*.*

6.6.6. Következmény. *Egy* V *megengedhető* K*-Banach-tér-reprezentáció akkor és csak akkor irreducibilis, ha* $V^d \otimes \mathbb{Q}$ *egyszerű* $K[[G]]$*-modulus.*

Bizonyítás. Definíció szerint egy reprezentáció akkor irreducibilis, ha nincs nemtriviális valódi részreprezentációja (azaz $K[[G]]$-részmodulusa).Ekvivalensen, $V^d \otimes \mathbb{Q}$-nek nincs nemtriviális valódi faktora, azaz $V^d \otimes \mathbb{Q}$ egyszerű modulus. □

6.6.7. Definíció. *Egy* G *lokálisan* $\mathbb{Q}_p$*-analitikus csoportot egy* V *reprezentációját akkor nevezzük megengedhetőnek, ha* G *minden (ekvivalensen: valamelyik) kompakt (tehát provéges)* G_0 *részcsoportjára megszorítva* G *megengedhető reprezentáció.*

Legyen most $k = o/\mathfrak{m}$ a K maradékteste.

6.6.8. Definíció. *Egy* $V \in \mathrm{Ban}_G^a(K)$ *reprezentációt* reziduálisan véges hosszúnak *nevezünk, ha létezik olyan* Θ *korlátos nyílt* G*-invariáns rács, hogy* $\Theta \otimes_o k$ *véges hosszú* $k[[G]]$*-modulus.*

6.6.9. Példa. *Minden* K *felett véges dimenziós* V *reziduálisan véges hosszú, mert* $\Theta \otimes_o k$ *véges dimenziós* k *felett.*

6.7. $\mathbb{Z}_p$ megengedhető reprezentációi

Ebben a fejezetben megadjuk $\mathbb{Z}_p$ megengedhető reprezentációit. Ezen a példán is látszani fog, hogy a megengedhető reprezentációk kategóriája nem semmitmondó, de még kezelhető méretű.

A 6.6.6 Következmény miatt az egyszerű $K[[\mathbb{Z}_p]]$-modulusokat szeretnénk klasszifikálni, amelyek $K[[\mathbb{Z}_p]]/M$ faktoroknak felelnek meg, ahol M maximális ideál $K[[\mathbb{Z}_p]]$-ben.

Weierstrass előkészítési tételének p-adikus változata a következő.

6.7.1. Állítás. *$o[[T]]$ minden eleme felírható $\pi^k u(T)p(T)$ alakban, ahol π az o maximális ideálját generálja, $k \geq 0$, $u(T) \in o[[T]]^\times$ és $p(T)$* kitüntetett *polinom, azaz 1 a főegyütthatója, az összes többi pedig π-vel osztható.*

$K[[G]$-ben viszont már π is egység. Innen kapjuk, hogy

6.7.2. Állítás. *$K[[\mathbb{Z}_p]]$ maximális ideáljai $(p(T))$ alakúak ahol $p(T)$ irreducibilis kitüntetett polinom.*

6.7.3. Következmény. *$\mathbb{Z}_p$ irreducibilis megengedhető reprezentációi $V = (o[[T]]/p(T))^d = \mathrm{Hom}(o[[T]]/p(T), K)$ alakúak ahol $p(T)$ irreducibilis kitüntetett polinom. $\deg_K V = \deg p$.*

6.7.4. Definíció. *Egy V irreducibilis K-Banach-tér-reprezentációt abszolút irreducibilisnek nevezünk, ha K helyére K tetszőleges L véges bővítését írva irreducibilis marad (azaz $V \otimes_K L$ irreducibilis L-Banach-tér-reprezentáció).*

Az 1-nél magasabb fokú polinomok felbomlanak K egy megfelelő véges bővítésében, ezért V abszolút irreducibilis reprezentációi 1 dimenziósak K felett.

6.7.5. Állítás. *$\mathbb{Z}_p$ 1-dimenziós reprezentációi (karakterei) a K test felett $\chi\colon x \mapsto (1+\varepsilon)^x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x}{k}\varepsilon^k$ alakúak, ahol $|\varepsilon| < 1$.*

Bizonyítás. Legyen V az egydimenziós reprezentáció, ami $o[[T]]$-modulus is egyben. Mivel V egydimenziós és T lineáris, létezik $\varepsilon \in K^\times$ hogy $Tv = \varepsilon v$ minden $v \in V$-re. Hogy $(\sum_{k=0}^{\infty} T^k)v = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v$ konvergens, azaz Cauchy legyen, $\varepsilon < 1$ szükséges. Mivel $\delta_1 = 1 + T$, $(1+T)v = (1+\varepsilon)v$. Így

$$\delta_n v = (1+T)^n v = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} T^k\right) v = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \varepsilon^k v$$

azaz

$$\chi(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \varepsilon^k$$

minden $n \in \mathbb{N}$-re. Viszont $\mathbb{N}$ sűrű $\mathbb{Z}_p$-ben és χ folytonos, tehát ez a képlet egész $\mathbb{Z}_p$-n érvényes. □

6.8. Indukált reprezentációk

Legyen G lokálisan analitikus csoport, P pedig lokálisan analitikus részcsoportja, továbbá tegyük fel, hogy G/P kompakt. V legyen P egy Banach-tér-reprezentációja. Ekkor a V P-ről G-re indukált reprezentációja

$${}^c\mathrm{Ind}_P^G(V) = \{f\colon G \to V\colon f \text{ folytonos, és } f(gb) = b^{-1}(f(g))\}.$$

6.8.1. Állítás ([10, Example 16.10]). *${}^c\mathrm{Ind}_P^G(V)$ a megfelelő normával K-Banach-tér-reprezentáció.*

Bizonyítás [10, Example 16.10]. Féaux de Lacroix [4] eredménye szerint létezik egy folytonos, sőt lokálisan analitikus $\iota\colon G/P \to G$ szelés. A norma legyen

$$\|f\| = \sup_{gP\in G/P} |f(\iota(gP))|.$$

Ez értelmes definíció, mert G/P kompakt és f, illetve ι folytonosak. □

6.8.2. Példa. *Legyen $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ és*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{Q}_p \right\}$$

a felsőháromszög-mátrixok részcsoportja.

Ha $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ balról hat ${\mathbb{Q}_p}^2$-en, akkor P a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ által generált altér stabilizátor-részcsoportja. Így G/P pontjai a ${\mathbb{Q}_p}^2$ 1-dimenziós altereinek felelnek meg, pontosabban $G/P \cong \mathrm{Gr}(1, {\mathbb{Q}_p}^2) \cong \mathbb{P}({\mathbb{Q}_p}^2)$ $\mathbb{Q}_p$ feletti projektív egyenessel izomorf mint lokálisan analitikus $\mathbb{Q}_p$-sokaság. A projektív egyenes pedig kompakt, tehát az előbbi állítás alkalmazható.

7. fejezet

p-adikus lokális Langlands-megfeleltetés $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-re

7.1. Galois-reprezentációk

Legyen K a $\mathbb{Q}_p$ test egy véges bővítése. Legyen $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ és P mint fent.

7.1.1. Definíció. *n dimenziós Galois-reprezentációnak nevezzük a* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ *csoport folytonos lineáris hatását n-dimenziós K-vektortéren.*

7.1.2. Példa. *Legyen $A = (\mu_{p^\infty}, \times)$ a p-hatványadik egységgyökök csoportja $\overline{\mathbb{Q}_p}$-ba beágyazva. Ez egy Abel-csoport, amelyen* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ *hat. Legyen $A[p^n]$ a p^n rendű elemek részcsoportja, továbbá*

$$T_pA \colon = \varprojlim_n A[p^n]$$

az A Tate-modulusa*, jelen esetben 1-rangú $\mathbb{Z}_p$-modulus. Ekkor $V = K \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_pA$ 1-dimenziós K-vektortér, amelyen* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ *lineárisan hat.*

A-nak vehetünk egyéb csoportokat is, például $\mathbb{Q}_p$-együtthatós Abel-varietások $\overline{\mathbb{Q}_p}$-pontjait, és ebben az esetben nagyobb dimenziós Galois-reprezentációkat kapunk.

Megfogalmazzuk, hogy kapcsolódnak egymáshoz Colmez és Paškūnas eredményei szerint a 2-dimenziós Galois-reprezentációk K felett, illetve $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ K-Banach-tér-reprezentációi.

7.2. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ egyszerű reprezentációi

7.2.1. Definíció. *Egy V reprezentáció* részfaktorainak *nevezzük a V_1/V_2 alakú reprezentációkat ahol $V_2 \leq V_1 \leq V$.*

7.2.2. Definíció. Közönségesnek *nevezzük a ${}^c\mathrm{Ind}_P^G(\chi)$ alakú reprezentációk részfaktorait, ahol $\chi \colon P \to K^\times$ valamely unitér karakter.*

Colmez, Dospinescu és Paškūnas bebizonyították a következő tételt.

7.2.3. Tétel ([2, Theorem 1.4]). *Ha $V \in \mathrm{Ban}^a_G(K)$ egyszerű, akkor V reziduálisan véges hosszú.*

Ardakov és Wadsley [1] munkájára alapozva Dospinescu és Schraen belátták a következőt.

7.2.4. Tétel ([3]). *Jelöljük $Z(G)$-vel G centrumát. Ha $V \in \mathrm{Ban}^a_G(K)$ egyszerű, akkor létezik centrális karaktere, azaz $\chi\colon Z(G) \to K$ homomorfizmus amelyre $zv = \chi(z)v$ minden $z \in Z(G)$, $v \in V$-re.*

Véges dimenziós V-re ez az állítás következik a Schur-lemmából, sőt valójában Dospinescu és Schraen eredménye a Schur-lemma erős verziójának abszolút irreducibilis megengedhető unitér p-adikus Banach-tér-reprezentációkra való kiterjesztése.

[2] a következő kategóriát vezeti be:

7.2.5. Definíció. *Legyen $\mathrm{Rep}_G(K) \subseteq \mathrm{uBan}^a_G(K)$ a reziduálisan véges hosszú, centrális karakterrel rendelkező megengedhető unitér reprezentációk teljes részkategóriája.*

7.2.6. Tétel ([2, Theorem 1.1]). *Létezik egy $\mathbf{V}$ egzakt funktor $\mathrm{Rep}_G(K)$-ből a folytonos K feletti $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$-reprezentációk kategóriájába, amely bijekciót ad meg $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ egyszerű, unitér, megengedhető, és nem közönséges K-Banach-tér-reprezentációi és $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ 2-dimenziós (folytonos) K feletti reprezentációi között.*

Ez az állítás már elegendő ahhoz, hogy lássuk: a megfeleltetés nem önkényes, hanem két természetesen adódó kategória közti egzakt funktor adja meg, így valóban kapcsolatot mutat a számelmélet és a lineáris csoportok végtelen dimenziós reprezentációelmélete között, amely biztató előrelépés a p-adikus Langlands-programban.

Irodalomjegyzék

[1] Ardakov K., Wadsley S.J.: *On irreducible representations of compact p-adic analytic groups*, Annals of Mathematics 178, 2013, 453–557.

[2] Colmez P., Dospinescu G., Paškūnas V.: *The p-adic local Langlands correspondence for* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Cambridge Journal of Mathematics (elfogadva)

[3] Dospinescu G., Schraen B.: *Endomorphism algebras of p-adic representations of p-adic Lie groups*, Representation Theory 17 2013, 237-246.

[4] Féaux de Lacroix C. T.: *Einige Resultate über die topologischen Darstellungen p-adischer Liegruppen auf unendlich dimensionalen Vektorräumen über einem p-adischen Körper.* Thesis, Köln 1997, Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster, 3. Serie, Heft 23, pp. 1-111 (1999)

[5] Lazard M.: *Groupes analytiques p-adique.* Publ. Math. IHES 26, 389-603 (1965)

[6] Mac Lane S., Gehring F. W.: *Categories for the Working Mathematician*, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1998.

[7] Mahler K.: *An interpolation series for continuous functions of a p-adic variable*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 199: 23–34 (1958)

[8] Schikhof W.H.: *A perfect duality between p-adic Banach spaces and compactoids.* Indag. Math. 6, 325-339 (1995)

[9] Schneider P., Teitelbaum J.: *Banach space representations and Iwasawa theory.* Israel J. Math. 127, 359-380 (2002)

[10] Schneider P., Teitelbaum J.: *Continuous and locally analyitc representation theory*, jegyzet, 2004

[11] Schneider P.: *p-adic Banach space representations of p-adic groups*, jegyzet, 2009