A koronglövő játék

Szakdolgozat

Weisz Ágoston
ELTE TTK matematikus BSc
weiszago@gmail.com

Témavezető: Frank András, egyetemi tanár
Operációkutatási Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Budapest, 2014.

Szeretném köszönetemet kifejezni témavezetőmnek, Frank András professzor úrnak a rengeteg odafigyelésért és támogatásért. Köszönöm Hujter Bálintnak a konzultációkat.

Tartalomjegyzék

Előszó

A szakdolgozatban a koronglövő (*chip firing*) játékot fogjuk vizsgálni. Ez egy tetszőleges gráfon játszott egyszemélyes játék. Kezdetben a gráf minden csúcsán van néhány korong, és a játék során ezeket mozgatjuk. Egy lépésben a játékos kiválasztja a gráf egy olyan csúcsát, melyen legalább annyi korong van, mint a csúcs fokszáma, és a csúcs korongjaiból egyet-egyet áthelyez a csúcs szomszédaira. Ezt hívják a csúccsal való lövésnek. Azt fogjuk megvizsgálni, hogy mikor véges a játék, mikor végtelen. Ki fog derülni, hogy a játék végessége a gráftól, illetve a korongok elhelyezésétől és számától függ, viszont attól nem, hogy a játékos milyen sorrendben lő a csúcsokkal. A játék egy kezdetleges formáját 1986-ban J. Spencer kezdte el kutatni, 1987-ben L. Lovász, P. Shor, J. Spencer, É. Tardos és S. Winograd tanulmányozták részleteiben.

1. fejezet

Jelölések

A szakdolgozat keretei között kizárólag véges, hurokél mentes gráfokról beszélünk. Feltesszük azt is, hogy nem üres, összefüggő a gráf. Egy egyszerű gráf alatt egy $G = (V, E)$ párt értünk, ahol V elemeit a gráf csúcsainak és E elemeit a gráf éleinek nevezzük. Egy $e \in E$ él egy uv pontpár, ahol $u, v \in V$. Egy $v \in V$ csúcs fokszámát $d(v)$-vel jelöljük. Továbbá legyen n a gráf csúcsainak száma, m az élek száma és $N(v)$ a v csúcs szomszédainak halmaza.

Adott egy véges egyszerű G gráf, illetve a csúcsain értelmezett $f : V \to \mathbb{N}$ függvény. Azt mondjuk, hogy a gráf egy $v \in V$ csúcsára $f(v)$ darab korongot helyeztünk. A v csúcs **szabad**, ha $f(v) \geq d(v)$. Képzeljünk el ezen a gráfon egy játékot, amely a következő lépésekből áll: ha van egy v szabad csúcs, akkor v korongjainak számát $d(v)$-vel csökkentjük, és minden $vu \in E$ élre u korongjainak számát 1-gyel növeljük. Tehát egy szabad csúcs a játék egy lépése során minden szomszédjának ad egy korongot, ezt hívjuk úgy, hogy a v csúcs **lő**. A játék egy lépése során tetszőleges szabad csúcs lőhet. A játék véget ér, ha már nincsen szabad csúcs a gráfban, ekkor ezt a korongkiosztást **végső korongkiosztásnak** nevezzük. Legyen $N = \sum_{v \in V} f(v)$, nyilvánvaló, hogy a korongok száma nem változik a játék során. Azt mondjuk, hogy egy $v_1, v_2, ..., v_k$ lövéssorozat **legális**, ha az i-edik lépésben a v_i-edik csúcs szabad volt. A lövések számát a **játék hosszának** nevezzük, ez nem feltétlen véges. Egy $x = v_1, v_2, ..., v_k$ lövéssorozatra legyen $|x|$ az x szó hossza, azaz azon csúcsok száma multiplicitással, melyekkel lőttünk. Továbbá legyen $[x]$ egy vektor, melyet a következőképp definiálhatunk: $[x]_v = k$, ha v összesen k-szor szerepel x-ben.

Definiáljuk az $n \times n$-es általános Laplace mátrixot, ahol $e(u, v)$ az uv élek száma. Ebben a szakdolgozatban ha külön nem említjük, akkor egyszerű gráfokról beszélünk.

$$Q(u,v) = \begin{cases} -e(u,v), & \text{ha } u \neq v; \\ d(u), & \text{ha } u = v. \end{cases}$$

A Q mátrixban minden sor és oszlop összege 0. Legyen e_v az az n dimenziós vektor, amely mindenhol 0, csak a v csúcshoz tartozó helyen 1. Ekkor a v csúcs lövése után kapott konfigurációra fel tudjuk írni, hogy $f = f_0 - Q \cdot e_v$. Ugyanígy, egy x lövéssorozatra $f = f_0 - Q \cdot [x]$. Mindezeket egyszerű látni, a definícióból triviálisan következnek.

A szakdolgozatban az adott tétel mellé írtam a szerzőjét. A bizonyításnál csak akkor van jelölve a szerző, ha más, mint a tétel szerzője. Azok a tételek, melyeknél nincs feltüntetve a szerző, saját eredmények.

2. fejezet

Alaptulajdonságok

2.1. A játék hossza

Ebben a részben megvizsgáljuk, hogy egy véges játék hány lépésben érhet véget, illetve azt is bebizonyítjuk, hogy a játék végállapota nem függ a lépések sorrendjétől. A fejezetben szereplő tételek Tardos [8]-as és Thorup [9]-es cikkéből származnak.

2.1. Tétel. *[8] Ha minden csúcs legalább egyszer lő, akkor a játék végtelen.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben minden csúcs lőtt már legalább egyszer, de mégis véget ért a játék. Ekkor minden csúcsnak van egy legutolsó lövése. Tekintsük azt a v csúcsot, amelynek a legutolsó lövése a legrégebben történt. Ez azt jelenti, hogy v utolsó lövése után még minden szomszédja is lőtt legalább egyszer, $f(v) \geq d(v)$. Így a játék végén v csúcs szabad, azaz nem érhetett véget a játék. ■

2.2. Tétel. *[9] Ha a játék véget ér egy A játékossal, akkor egy B játékos tetszőleges játéka esetén is véget fog érni. Ráadásul A és B minden csúccsal ugyanannyiszor lőtt a játék során, így a játék végállapota egyértelműen meghatározott, azaz csak a kiindulási korongkiosztástól függ, és nem a lövések sorrendjétől.*

Bizonyítás. Jelöljük $\ell(v)$-vel a v csúcs lövéseinek számát egy véges játékban. A játék kezdeti állapotában $f(v)$ darab korong van a v csúcson. Ekkor egy legális lövéssorozat után a v csúcson lévő korongok $f'(v)$ számát a következőképp számolhatjuk ki:

$$f'(v) = f(v) - \ell(v) \cdot d(v) + \sum_{w \in N(v)} \ell(w), \tag{2.1}$$

hiszen ő maga $\ell(v)$-szer lőtt $d(v)$ darab korongot, és a szomszédaitól $\ell(w)$-szer kapott 1 darab korongot.

Szimmetria okokból feltehetjük, hogy A játékos összesen nem lőtt többször, mint B játékos. Írjunk annyi A betűt minden csúcsra, amennyiszer A játékos lőtt a csúccsal. Ezután játsszuk le B játékos játékát. Írjunk B betűt minden csúcsra, amivel B lő B játéka során. Ha egyik csúcson sem szerepel több B, mint A, akkor készen vagyunk, hiszen ebben az esetben minden csúcs ugyanannyiszor lőtt mind a két játékban. Tegyük fel, hogy van olyan csúcs, amin több B van, mint A. Vegyük az első olyan pillanatot, amikor egy B-t szeretnénk írni egy olyan c csúcsra, amin már ugyanannyi B és A van. Ez azt jelenti, hogy a két játékos játéka során c ugyanannyiszor lőtt, továbbá az összes többi csúcs legalább annyiszor lőtt A játéka során, mint B játéka során. Viszont B tud lőni a c csúccsal, így a c csúcs B játéka során szabad. Mivel A játéka során a többi csúcs nem lőtt kevesebbszer, így a (2.1) egyenlőségből következik, hogy c szabad A játéka során is. Ez a tulajdonság a játék végéig nem változik, hiszen A nem lő többször c-vel. Ebből következik, hogy c szabad A játéka végén, ez ellentmondás. A végállapot egyértelműsége nyilvánvalóan következik a (2.1) egyenletből. ■

A következőkben egy lépésszám becslést adunk egy véges játékra. Ehhez egy lemmára lesz szükségünk:

2.3. Lemma. *[8] A játék során két szomszédos u, v csúcsra u és v lövései számának különbsége nem lehet N-nél nagyobb.*

Bizonyítás. Ha u $\ell(u)$-szor és v $\ell(v)$-szer lőtt összesen, akkor az uv élen $\ell(u)$ korongot lőttünk v irányába, és $\ell(v)$ korongot u irányába. Tegyük fel, hogy $\ell(u) < \ell(v)$. Álljon a H halmaz a gráf azon w csúcsaiból, melyekre $\ell(w) \leq \ell(u)$. Így $u \in H$, továbbá $v \notin H$. Megfigyelhetjük, hogy a H-ból $V - H$-ba vezető élek mentén H-ból kifelé több korong mozgott, mint H-ba befelé. Összesen N-nél több korong nem mozoghatott H-ból kifelé és az uv élen ez az érték $\ell(u) - \ell(v)$, így azt kapjuk, hogy $\ell(u) - \ell(v) \leq N$. ■

Most pedig térjünk át a véges játék lépésszámbecslésére.

2.4. Tétel. *[8] Minden véges játék véget ér $2nm\Theta$ lépés alatt, ahol Θ a gráf átmérője.*

Bizonyítás. A 2.1. Tételből adódóan egy véges játék során lesz olyan v csúcs, amely nem lőtt egyszer sem. Jelölje minden w csúcsra w v-től való távolságát $dist(w)$. Ekkor a 2.3. Lemmából adódóan v szomszédai legfeljebb N-szer lőhettek. Ugyanígy beláthatjuk, hogy egy w csúcs legfeljebb $dist(w) \cdot$

N alkalommal lőhetett. $dist(w) \leq \Theta$, így összegezve az n csúcsra kapjuk, hogy összesen a gráfban legfeljebb $n\Theta N$ lövés történhetett. Egy véges játék során $N \leq 2m$, hiszen ha több korongunk van, mint a gráf fokszámösszege, akkor a skatulyaelv miatt mindig van olyan csúcs, amin legalább annyi korong van, mint a fokszáma. Így ez nem lehet véges játék. Ezért összevetve kapjuk, hogy a lövések száma nem lehet több, mint $2nm\Theta$. ■

2.5. Állítás. *[8] Létezik n pontú G gráf olyan kezdeti korongkiosztással, hogy a játék hossza $O(n^4)$.*

Bizonyítás. Tekintsük az $[\frac{n}{2}]$ csúcsú teljes gráfot, és ennek egyik csúcsából indítsunk egy $[\frac{n}{2}]$ hosszú utat. Tegyünk $[\frac{n}{2}]^2 - 2n$ korongot az út végére, a többire 0-t. Könnyen látható, hogy ekkor a játék $\frac{n^4}{32} + O(n^3)$ lépésben fog véget érni. ■

2.2. Nyelvek

Az előző részben bizonyított állításokat próbáljuk most másként megközelíteni. A tételeket Björner, Shor és Lovász [4]-ban és Jeffs, Seager [5] cikkében találhatjuk meg. Ehhez szükségünk lesz néhány definícióra. Legyen A egy véges halmaz, és L egy A feletti nyelv. Tehát $f \in L$ egy A elemeiből álló véges sorozat. Ennek egy részsorozata g, ha g megkapható f-ból néhány (esetleg 0) betű törlésével, ahol g nem feltétlen összefüggő részsorozata f-nak. Jelölje két $u, v \in R^n$ vektorra $u \vee v$ a két vektor koordinátánkénti maximumát, hasonlóképpen $u \wedge v$ a két vektor koordinátánkénti minimumát. Továbbá $|u|$-val fogjuk jelölni az $|u|$ vektor elemei abszolútértékének összegét.

Most definiáljunk néhány fontos tulajdonságát az L nyelvünknek, ezekre sokat fogunk még hivatkozni.

2.6. Definíció. *[4]*

(i) *L **bal-öröklődő**, ha $f \in L$-ből következik, hogy f minden kezdőszelete is L-beli.*

(ii) *L **lokálisan szabad** (LF), ha minden $f \in L$ és $x \neq y \in A$-ra, melyre teljesül, hogy $fx \in L$ és $fy \in L$ az is igaz, hogy $fxy \in L$, (ekkor nyilván $fyx \in L$ is teljesül).*

(iii) *Azt mondjuk, hogy L **permutábilis** (PM), ha minden $f, g \in L$-re, amire $[f] = [g]$ és $fx \in L$ teljesül, $gx \in L$ is teljesül.*

(iv) ***Erősen kicserélhető***_nek_ (SE) *nevezünk egy* L *nyelvet, ha* $f, g \in L$, *akkor* f*-nak van olyan* f' *részsorozata, melyre* $gf' \in L$, *továbbá* $[gf'] = [f] \vee [g]$.

(v) *A* ***greedoid kicserélési tulajdonság*** (GE) *akkor teljesül, ha* $f, g \in L$ *és* $|g| < |f|$ *esetén van olyan* $x \in f$, *hogy* $gx \in L$.

A következő lemmákat bizonyítás nélkül közöljük:

2.7. Lemma. *[4] Minden lokálisan szabad, permutábilis, bal öröklődő nyelvre teljesül az erős kicserélési tulajdonság. Megfordítva: minden az erős kicserélési tulajdonsággal bíró nyelv lokálisan szabad és permutábilis.* ■

Most nézzük meg, hogyan is viszonyul a koronglövő játék egy L nyelvhez. Rögzítsünk egy G gráfot, és egy $f(v_i)$ korongkiosztást. Legyenek az A halmaz elemei a gráfunk csúcsai, továbbá L álljon azokból a $f = (v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_k})$ szavakból, melyek mint lövéssorozat legálisak. Állítjuk, hogy L lokálisan szabad, permutábilis, bal öröklődő. Bal öröklődő, hiszen egy legális lövéssorozat kezdőszelete is nyilván legális. Lokálisan szabad, hiszen ha u-val és v-vel is lehet lőni, akkor a kettővel egymás után is lehet. A permutábilisség is egyszerűen látszik, hiszen csak az adott állapottól függ, hogy melyik csúcs szabad, az oda vezető lépésektől nem.

2.8. Definíció. *[4] Egy* $f \in L$ *szó* ***bázis***, *ha egyik* L*-beli szónak sem valódi kezdőszelete.*

Könnyen látható, hogy ha egy bal öröklődő nyelvnek van alap szava, akkor minden alap szava ugyanolyan hosszú, továbbá semelyik L-beli szó sem lehet ennél hosszabb. Az alap szó hosszát nevezzük az L nyelv rangjának. Ez a rang végtelen, ha a nyelv nem tartalmaz alap szót. Ebben az esetben tetszőleges $f \in L$ szó végtelen hosszan folytatható, tehát a játékunk végtelen. Az erős kicserélési tulajdonságból azt is kiolvashatjuk, hogy ha f, g két alap szó, akkor $[f] = [g]$.

Greedoidokról bővebben [7]-ban olvashatunk.

2.9. Definíció. *[4]* $f \approx g$, *azaz* f *ekvivalens* g*-val, ha minden* $h \in 2^A$*-ra* $fh \in L$ *pontosan akkor teljesül, ha* $gh \in L$.

2.10. Lemma. *[4] Legyen* L *véges rangú, ekkor* $f \approx g$ *pontosan akkor teljesül, ha* $[f] = [g]$.

2.3. A főtétel

Most pedig belátjuk a fejezet legfontosabb tételét. Előtte viszont nézzünk még egy bizonyítást egy alapvető lemmára.

2.11. Lemma. *[4] Egy végtelen játékban minden csúcs végtelen sokszor lő.*

Bizonyítás. Mivel végtelen a játék, így található egy v csúcs, amely végtelen sokszor lőtt. Tekintsük ennek egy u szomszédját. Mindahányszor v lő, u kap egy korongot. Továbbá azt is tudjuk, hogy $f(u) \leq N$ minden lépésben, ezért u-nak is végtelen sokszor kell lőnie. A gráf összefüggőségét kihasználva ez bizonyítja a lemmát. ∎

2.12. Tétel. *[4] A következő eseteket különböztethetjük meg:*

(i) $N > 2m - n$ *esetén a játék végtelen.*

(ii) $m \leq N \leq 2m - n$ *esetén létezik olyan korongkiosztás, melyre a játék végtelen, de létezik olyan is, melyre a játék véges.*

(iii) Végezetül $N < m$ *esetén a játék mindig véges.*

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy $N > 2m - n$ esetén a játék nem fejeződhet be, hiszen a skatulyelv miatt mindig van olyan v csúcs, melyre $f(v) \geq d(v)$. Ugyanígy kapjuk, hogy $N \leq 2m - n$ korong esetén van olyan állapot, amikor a játék befejeződik. Tegyünk ugyanis minden csúcsra $f(v) = d(v) - 1$ korongot, ekkor biztosan egyik csúcs sem tud lőni. A korongok száma ekkor $\sum d(v) - \sum 1 = 2m - n$. Ha bármelyik csúcsra ennél kevesebb korongot teszünk, akkor az is egy végállapot.

Most mutassuk meg, hogy ha $N \geq m$, akkor található olyan kezdőállapot, hogy a játék végtelen. Természetesen elegendő ezt $N = m$ esetén megmutatni, hiszen, ha egy f' kiosztásra $f' \geq f$ minden v-re, akkor az f kiosztással legális lövéssorozat az f' kiosztással is legális. Tekintsük a G gráf éleinek egy aciklikus irányítását, és jelöljük $\delta(v)$-vel a v csúcs kifokát. Vegyük a következő korongkiosztást: $f(v) = \delta(v)$. Először is nézzük meg, hogy összesen hány korongot helyeztünk így el: $\sum \delta(v) = m$, pont ezt szerettük volna. Most lássuk be, hogy a játék végtelen.

Minden aciklikus irányításban van forrás, azaz olyan v csúcs, melyből minden él kifelé mutat. Ha nem lenne ilyen csúcs, akkor minden csúcsba mutatna befelé él, ezek viszont kört alkotnának. Erre a v csúcsra $f(v) = \delta(v) = d(v)$, tehát tud lőni. Figyeljük meg, mi történik a lövés során: $f(v) = 0$ lesz, és minden szomszédja kap egy korongot. Ezt úgy tudjuk az élekkel szimulálni, ha minden v-ből kimenő élet megfordítunk. Ez pont azt jelenti, hogy v kifoka 0 lesz, és minden szomszédjának kifoka 1-gyel nő. Még azt kell látnunk, hogy egy ilyen élfordítás során nem jöhet létre irányított kör. Egy ilyen kör mindenképp két élet használna a megfordítottak közül, hiszen ha v-t tartalmazza a kör, akkor két v-vel szomszédos élet is tartalmaznia kell. De mind a két él megfordul, így nyilván nem keletkezhet irányított kör. Tehát újra egy aciklikus irányítást kaptunk, így a játék végtelen.

Nézzük a tétel utolsó részének bizonyítását: vegyünk egy tetszőleges kiosztást, melyre $N < m$. Ismét tekintsünk egy aciklikus irányítást az előző jelölésekkel. A következő értéket fogjuk vizsgálni:

$$T = \sum_{v \in V} \max\{0, f(v) - \delta(v)\} \geq 0.$$

Nevezzünk egy u csúcsot hiányosnak, ha $f(u) < \delta(u)$. Azt fogjuk belátni, hogy az acikilus irányítás bizonyos változtatásával T-t nem növeljük. Viszont ha a hiányos csúcsok halmaza változik, akkor T legalább 1-gyel csökken. Így csak véges sokszor tud a hiányos csúcsok halmaza változni. Viszont ha a játék végtelen lenne, akkor a 2.11. Lemma következményeként minden csúcs végtelen sokszor lő. Egy hiányos csúcs nem tud lőni, hiszen $f(u) < \delta(u) \leq d(u)$ teljesül. Így ellentmondásra jutottunk, hiszen végtelen sokszor kellene a hiányos csúcsok halmazának változnia.

Most figyeljük meg, milyen módosításokkal érhetjük el, hogy az előző bekezdésben leírtak teljesüljenek. Ha egy v csúcs lő ($f(v) \geq \delta(v)$), akkor irányítsunk meg minden v-ből kifelé mutató élet v felé. Ezáltal az aciklikusság ismét nem változik, mert egy irányított kör, ha tartalmazza v-t, akkor v-ből kifelé mutató élet is tartalmaznia kellene. Továbbá T nem nőhet, hiszen a v-ez tartozó tagban $f'(v) = f(v) - d(v)$, és $\delta'(v) = 0$, így ez a tag $d(v) - \delta(v)$-vel csökken. A többi olyan csúcshoz tartozó tag, melybe menő éleket megfordítottuk nem változik. Azon tagokra, ahova csak lőttünk korongot, de élet nem fordítottunk $f'(w) = f(w) + 1$ és $\delta'(w) = \delta(w)$. Ha eddig $f(w) - \delta(w) \geq 0$ volt, akkor 1-gyel nő a tag, ha viszont $f(w) - \delta(w) < 0$ volt, akkor nem változik. Így az összegben egy tag pontosan $d(v) - \delta(v)$-vel nőtt, és $d(v) - \delta(v)$ darab tag maximum 1-gyel nőtt. Akkor nem nőttek ezek a tagok 1-gyel, ha hiányosak voltak. Tehát akkor és csak akkor marad T változatlan, ha ezek közül a csúcsok közül egyik sem volt hiányos. Ebben az esetben viszont a hiányos csúcsok halmaza nem változott. Ez azért van így, mert v nem lett hiányos, továbbá ha egy T összegbeli tag nő, akkor csak hiányosból nem hiányosba való átlépés történhet. ∎

A bizonyítás gondolatmenetének fontossága miatt álljon itt egy másik bizonyítás is az (*iii*) részre.

Bizonyítás. Vegyük a kiindulási állapotot, és kezdjük el játszani a játékot. Rendeljünk hozzá élekhez korongokat a következőképpen: amikor egy csúcs lő, és egy élen végigmegy egy korong, akkor - ha még nem rendeltünk hozzá ahhoz az élhez korongot - ezt a most átlőtt korongot hozzárendeljük. Azt fogjuk mondani, hogy ha egy $e = uv$ élhez egy x korongot hozzárendeltünk, akkor a játék további lövései során az x korongot csak az e élen mozgatjuk. Ezt azért tudjuk megvalósítani, hiszen ha az x korong épp u-ban van, és u lő, akkor egy korongot át kell adnunk v-nek. Ekkor azt mondjuk, hogy mivel az e élhez x van hozzárendelve, ezért x-et adjuk át. Mivel kevesebb korong van, mint él, így biztosan lesz olyan g él, amihez nem rendeltünk korongot. Márpedig ha ezen az élen keresztül lőnénk, akkor az itt először átmenő korongot egészen biztosan hozzárendelhetnénk g-hez. Ez azért van így, mert ez a korong biztosan nincsen még semmelyik élhez sem hozzárendelve, hiszen akkor a játék során már csak azon az élen mozogna. Tehát találtunk egy élet, amin nem megy át korong, vagyis egyik végpontja sem lő. Innen a 2.11. Lemma segítségével beláttuk, hogy véges a játék. ■

2.4. Ismétlődések

Ebben a részben általánosan leírjuk, hogy mikor fordulhat elő, hogy egy korongkiosztás ismétlődik.

2.13. Definíció. *[5] Egy kiosztást* ***diffúz****nak nevezünk, ha G minden H feszített részgráfjára teljesül, hogy van benne olyan csúcs, melyen legalább annyi korong van, mint a H-beli fokszáma.*

Azt fogjuk belátni, hogy pontosan a diffúz konfigurációk tudnak ismétlődni.

2.14. Lemma. *[5] Ha minden csúcs pontosan egyszer lő, akkor visszajutunk a kezdő állapotba.*

Bizonyítás. Triviálisan következik a (2.1) egyenlőségből. ■

2.15. Lemma. *[5] Egy konfiguráció nem ismétlődhet, amíg minden csúcs nem lőtt legalább egyszer.*

Bizonyítás. Ha egy v csúcs lőtt már, akkor v minden szomszédján több korong lett, mint eredetileg, így egyszer azoknak is lőniük kellett. Mivel összefüggő a gráf, így minden csúcsnak lőnie kellett. ■

Egy irányítatlan gráfban egy $H \subseteq V$ feszített részgráfra jelölje $d_H(v)$ H-ban v fokszámát.

2.16. Lemma. *[5] Minden olyan konfiguráció, amit akkor kapunk, amikor már minden csúcs lőtt legalább egyszer, diffúz.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy ilyen konfigurációt, és vegyünk egy tetszőleges H feszített részgráfot. Ekkor vegyük azt a $v \in H$ csúcsot, amely a legrégebben lőtt, ekkor v minden H-beli szomszédja lőtt már azóta. Azaz $d_H(v) \leq f(v)$, ahol $d_H(v)$ jelöli a v csúcs H-beli fokszámát. ■

2.17. Lemma. *[5] Minden α diffúz korongkiosztáshoz található a gráf csúcsainak egy olyan x permutációja, hogy x mentén lőve pont α-ba jutunk vissza.*

Bizonyítás. Először vegyük G-t, mint G részgráfját. Ebben van olyan csúcs, melynek legalább annyi korongja van, mint a fokszáma, tehát tudunk vele lőni. Ezután indukcióval folytatjuk: tegyük fel, hogy már lőttünk a $v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_k}$ csúcsokkal. Ekkor vegyük a $H = G - \{v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_k}\}$ részgráfot. Ebben is van olyan u csúcs, hogy $f_\alpha(u) \geq d_H(u)$. Mivel u minden H-n kívüli szomszédja már lőtt, így $f(u) \geq f_\alpha(u) + d(u) - d_H(u) \geq d(u)$ miatt u-val fogunk tudni lőni. ■

2.18. Tétel. *[5] Egy korongkiosztás akkor és csak akkor ismétlődhet, ha diffúz.*

Bizonyítás. A 2.17. Lemma miatt ha a kiosztás diffúz, akkor ismétlődhet. Továbbá a 2.15. és a 2.16. Lemmából kapjuk, hogy ha egy kiosztás ismétlődik, akkor szükségszerűen diffúz. ■

2.19. Tétel. *[5] Amint eljutottunk egy diffúz kiosztáshoz, utána bármilyen csúccsal lövünk, diffúz konfigurációt kapunk.*

Bizonyítás. Legyen α egy diffúz konfiguráció. Ekkor ha egy v csúccsal lövünk, akkor ugyanazt a kiosztást kapjuk, mintha a 2.17. Lemmának megfelelően minden csúccsal lövünk egyszer, majd utána v-vel. ■

Vizsgáljuk meg, hogy miként lehet eldönteni egy konfigurációról, hogy diffúz-e. Jelölje egy irányított gráfban $\rho(v)$ a $v \in V$ csúcsba menő élek számát. A következő tételre szükségünk lesz.

2.20. Tétel. *[Folklór] Tetszőleges $f : V \to \mathbb{N}$ függvényre akkor és csak akkor létezik a gráfnak olyan aciklikus irányítása, melyre $\rho(v) \leq f(v)$ minden $v \in V$-re, ha minden $H \subseteq V$-re van olyan $v \in H$, hogy $d_H(v) \leq f(v)$.*

Vegyük észre, hogy ez utóbbi pont a diffúz konfiguráció definíciója, ha f a korongkiosztás.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy van egy megfelelő aciklikus irányításunk, és lássuk be ebből a részhalmazokra vonatkozó állítást. Vegyük a gráf topologikus rendezését, mutasson minden él jobbra. Ha most veszünk egy $H \subseteq V$-t, akkor ebben jól definiált a legjobbrább fekvő pont, legyen ez q. Most vizsgáljuk meg, mit tudunk q-ról: mindenekelőtt csak tőle balra fekvő pontokból vezethet oda él, azaz $d_H(q) \leq \rho(q)$. Másrészről a feltevés miatt $\rho(q) \leq f(q)$, így a $q \in H$ csúcsra teljesül, hogy $d_H(q) \leq f(q)$.

Most nézzük meg a másik irányt. Mivel minden részhalmazra teljesül a feltétel, így $H = V$-re is, azaz van olyan v csúcs, melyre $d_V(v) \leq f(v)$. Írjuk fel ezt a pontot, legyen ez v_1 majd irányítsuk meg az összes v_1-ből kilógó élet v_1 felé. Az általános lépésben feltesszük, hogy már leírtuk a $v_1, v_2, ..., v_k$ pontokat, most szeretnénk folytatni a topologikus sorrend létrehozását. Ezúttal minden él balra fog mutatni. A feltétel szerint van egy v_{k+1} csúcs a $H = V - \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ halmazban, melyre $d_H(v_{k+1}) \leq f(v_{k+1})$. Írjuk le ezt a csúcsot a sorrend végére, és irányítsuk meg v_{k+1} felé az összes belőle kilógó még meg nem irányított élet. Kizárólag még le nem írt, azaz H-beli csúcsból mutathat v_{k+1}-be meg nem irányított él, így sikerült fenntartani azt, hogy a leírt csúcsokra $\rho(v) \leq f(v)$ teljesül. Folytassuk az eljárást, amíg minden csúcsot leírtunk. ∎

2.21. Tétel. *Ha adott egy f korongkiosztás, akkor $O(m)$ időben el tudjuk dönteni róla, hogy diffúz-e.*

Bizonyítás. Ugyanez a tétel $O(n^2)$ lépésbecsléssel [5]-ben szerepel. A 2.20. Tétel miatt elegendő ellenőrizni, hogy van-e a gráfnak megfelelő irányítása. Ehhez legyen adott a gráf, az f kiosztással, illetve készítsünk egy sor adatszerkezetet, jelöljük s-sel. Így s-be $O(1)$ időben tudunk betenni egy elemet, ugyanígy $O(1)$ időben tudunk kivenni belőle egy elemet. Tárolni fogjuk még minden csúcsra a belőle kilógó még nem megirányított élek számát: $ud(v)$-t. Kezdetben $ud(v) = d(v)$ minden v-re. Most végigmegyünk az összes csúcson, és betesszük a sorba azokat a v csúcsokat, melyekre $f(v) \geq ud(v)$. Ezután az algoritmus egy k-adik lépésében, ha nem üres az s sor, akkor kivesszük belőle az első elemet, és leírjuk, ez lesz v_k. Ezután az összes belőle kilógó még irányítatlan élet megirányítjuk v_k felé, illetve ezzel párhuzamosan, amint valamilyen qv_k élet megirányítunk firssítjük az $ud(q)$-t, azaz levonunk belőle 1-et. Ha ezáltal $ud(q) \leq f(q)$ teljesül, akkor q-t betesszük a sorba.

Ha minden csúcsot meg tudunk számozni, akkor nyilvánvalóan a feltételeknek megfelelő aciklikus irányítást kaptunk, hiszen az s sorban azok a q csúcsok szerepelnek mindig, melyekre a kilógó még irányítatlan élek száma nem több, mint $f(q)$, így ha megirányítjuk ezeket az éleket, akkor $f(q) \geq \rho(q)$ teljesül.

Még azt kell belátnunk, hogy ha a sor kiürül, mielőtt az összes csúcsot megszámoztuk volna, akkor tudunk mutatni olyan halmazt, mely ellentmond a 2.20. Tétel feltételének. A $H = V - \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ pont ilyen halmaz, hiszen a H feszített részgráf egyetlen élét sem irányítottuk meg. Az összes többi él már irányított, azaz $ud(z) = d_H(z)$ minden $z \in H$-ra. Viszont nincs olyan $z \in H$ csúcs, melyre $d_H(z) \leq f(z)$, hiszen ez a csúcs bekerült volna az s sorba. Az algoritmus valóban $O(m)$ időben fut, minden él mentén legfeljebb egyszer frissítjük ud-t, és minden élet egyszer irányítunk meg. ■

2.22. Állítás. *[5] Ha egy α kiosztásból indulva x mentén lőve α-ba jutunk vissza, akkor $[x] = (k, k, ..., k)$.*

Bizonyítás. A 2.18. Tétel miatt α diffúz, ezért a 2.17. Lemma miatt létezik olyan y, amire y mentén lőve is α-ba jutunk vissza és $[y] = (1, 1, ..., 1)$. Az 2.15. Lemma miatt $[x] \vee [y] = [x]$, így az erős kicserélési tulajdonság miatt $x = yz$ valamely z-re. Ha z üres, akkor nyilvánvalóan igaz az állítás, ha nem üres, akkor viszont z mentén lőve is α-t kapjuk vissza, így $[z] = [x] - (1, 1, ..., 1)$ miatt indukcióval készen vagyunk. ■

2.23. Tétel. *[5] Legyen α és β két korongkiosztás. Tegyük fel, hogy létezik x és y sorozat, hogy ezek mentén lőve α-ból β-t kapjuk. Ekkor $[x] - [y] = (k, k, ..., k)$ valamilyen egész k-ra.*

Bizonyítás. Ha $[x] = [y]$, akkor igaz az állítás, így tegyük fel, hogy létezik olyan v csúcs, melyre $[x]_v > [y]_v$. Legyen K G-nek az a feszített részgráfja, melyben pontosan azok az u csúcsok vannak, amelyekre teljesül, hogy $[x]_u > [y]_u$.

Először is tegyük fel, hogy $K \neq G$, legyen $L = G - K$. Mivel G összefüggő, így biztosan van él K és L között. Ekkor ha x mentén lövünk, akkor több korong megy át K-ból L-be, mint ha y mentén lövünk, de mivel ugyanabba a β kiosztásba jutunk el, ez nem lehet.

Most vizsgáljuk meg a $K = G$ esetet. Ezek szerint minden csúcs legalább eggyel többször lő x-ben mint y-ban, így β diffúz a 2.16. Lemma miatt. De az erős kicserélési tulajdonság miatt, felhasználva, hogy $[x] \vee [y] = [x]$, kapjuk, hogy létezik valamilyen z sorozat, melyre $x = yz$. Tehát z mentén lőve β-ból β-t kapjuk, azaz a 2.22. Állítás miatt $z = (k, k, ..., k)$. ■

2.5. Eljuthatunk-e egy kiosztásból egy másikba?

Ha adott egy α és egy β korongkiosztás, akkor felmerülhet a kérdés, hogy legális lövésekkel el tudunk-e jutni α-ból β-ba. A válaszhoz szükségünk lesz a Laplace mátrixra. Ha létezik ilyen lövéssorozat, akkor arra $\beta = \alpha - Qw$ teljesül, azaz mi $Qw = (\alpha - \beta)$ megoldását keressük. Mivel Q rangja $n-1$, így meg tudjuk oldani az egyenletet úgy, hogy $w = w_0 + \lambda e$, ahol e az n dimenziós egységvektor, ez minden λ-ra megoldás. Válasszuk ki azt a λ-t, melyre w legalább egy helyen 0 lesz, a többi helyen meg nemnegatív. Ekkor ha w nem egész, akkor nem juthatunk el, hiszen ha eljuthatnánk α-ból β-be, akkor létezne egész w is, továbbá kielégítené a $\beta = \alpha - Qw$ egyenletet, tehát valamilyen λ-ra egész w-et kellene kapnunk. Viszont ha w egy koordinátája egész és van olyan koordinátája, ami nem egész, akkor nem létezik ilyen λ.

2.24. Tétel. *[Lovász] Akkor és csak akkor tudunk eljutni α-ból β-ba, ha a következő lépésekkel el tudjuk érni, hogy $w = 0$ legyen: válasszunk ki egy szabad v csúcsot, aminek megfelelő helyen $w_v > 0$, és hajtsunk végre egy lövést v-vel. Majd vonjunk ki w_v-ből 1-et.*

Bizonyítás.[Saját bizonyítás] Ha el tudtuk érni, hogy $w = 0$ legyen, akkor ezzel a lövéssorozattal pont eljutottunk α-ból β-ba, hiszen találtunk olyan x lövéssorozatot, melyre $[x] = w$, és pont az volt a célunk, hogy minden u-ra az u csúccsal w_u-szor lőjünk.

Viszgáljuk meg, miért nem lehet eljutni, ha leáll az algoritmus, mielőtt $w = 0$ lenne. Legyen w' az a vektor, amit az algoritmus végén kaptunk, és legyen x az eddigi lövéssorozat. Ez azt jelenti, hogy ahol w' pozitív, azok a csúcsok nem szabadok. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy létezik valamilyen y lövéssorozat, hogy y során eljutunk α-ból β-ba. Vegyük a minimális l_1 normájú $[y]$-t. Ekkor $\beta = \alpha - Q[y]$ teljesül. Továbbá nyilván $[y] \geq 0$.

Ha valamilyen v csúcsra $[y]_v = 0$, akkor $[y] = w$, hiszen $[y] = w + \lambda e$ a fentiek miatt, mindkettő nemnegatív, és van 0 koordinátájuk. Így $\lambda = 0$ kell, hogy legyen. Ekkor $[x] \vee [y] = [y]$, viszont ekkor az erős kicserélhetőségi tulajdonság miatt létezik olyan x', melyre $[xx'] = [x] \vee [y]$. Tehát x-et tudjuk folytatni olyan lövésekkel, melyek mentén $w > 0$, hiszen $w = [y]$.

Nézzük meg azt az esetet, amikor $[y] > 0$ teljesül. Ez az eset véges játék esetén nem lehetséges, hiszen ekkor minden csúccsal lőttünk legalább egyszer. Tehát véges játék esetén ez az eset nincs, vagyis a tételt bebizonyítottuk.

2.25. Lemma. *Ha egy végtelen játékban egy $[y] > 0$ sorozat legális, akkor van legális y' úgy, hogy $[f_e y'] = [y]$, ahol f_e egy olyan lövéssorozat, melyben minden csúcs pontosan egyszer lő.*

Bizonyítás. Mivel $[y] \vee [f_e] = [y]$, így az erős kicserélési tulajdonság miatt létezik olyan y', hogy $[f_e y'] = [y]$. ■

Ez azt jelenti, hogy feltevésünkkel ellentétben y' szintén α-ból β-ba visz, de l_1 normája nyilván kisebb, hiszen $[y] - \underline{1} = [y'] \geq 0$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ∎

A Laplace mátrixos egyenlet megoldása $O(n^3)$ időben megvalósítható, hiszen mátrixot ilyen időben tudunk invertálni, majd utána egyszerű mátrixműveletek végrehajtásával kapjuk a megoldást: kitöröljük a mátrix első sorát és oszlopát, így invertálható lesz, hiszen a rangja $n-1$. Tegyük fel, hogy adott az egyenletünk megoldása.

2.26. Állítás. *Ha algoritmikusan akarjuk eldönteni, hogy egy α-ból egy β-ba el tudunk-e jutni, és adott a w vektor, akkor* $\min\{O((\max w)\cdot m), O((we)\cdot n)\}$ *időben véget ér a fentebb leírt algoritmus.*

Bizonyítás. Minden lépésben tárolunk egy listát azokról a v csúcsokról, melyek szabadok, és $w_v > 0$, tehát amelyekkel kell is lőni. Lövünk egy ilyen csúccsal és a szomszédaira frissítjük a listát, ha szabaddá válnak. Egyrészt minden élen maximum annyiszor frissítünk, amennyi a w koordinátáinak maximuma, másrészt meg egy lövéssel maximum n csúcson frissítünk. ∎

3. fejezet

A kör vizsgálata

Most megpróbáljuk jellemezni a játékot, amikor a G gráfunk egy n hosszú kör. A tételek Jeff és Seager [5]-ből származnak. A 2.12. Tétel miatt ha $N < n$, akkor a játék véges, míg ha $N > n$, akkor végtelen. Ezért foglalkozzunk most kizárólag az $N = n$ esettel. Legyen $n \geq 3$, és számozzuk meg a gráf csúcsait sorban a kör mentén az $\{1, 2, ..., n\}$ számokkal. Könnyen látható, hogy az egyedüli végső korongkiosztás az $(1, 1, ..., 1)$, hiszen egyik csúcson sem lehet legalább 2 korong, így viszont - mivel összesen $N = n$ korong van - minden csúcson kell lennie legalább 1-nek. Az is látható, hogy az előző feladat jelöléseit használva egy konfiguráció pontosan akkor diffúz, ha nem végső, és nincsen benne olyan út, melyen sorrendben a korongok száma: $(0, 1, 1, ..., 1, 0)$.

3.1. Előkészületek

3.1. Lemma. *[5] Egy diffúz konfigurációban a fenti feltételek mellett*

(i) minden csúcson 0, 1, vagy 2 korong van;

(ii) legalább egy csúcson 2 korong van és legalább egy csúcson 0 darab;

(iii) a 0 korongos csúcsok száma megegyezik a 2 korongos csúcsok számával.

Bizonyítás. Ha találunk olyan csúcsot, amelyen legalább 3 korong van, akkor a konfiguráció biztosan nem diffúz, hiszen a skatulyaelv miatt a 0 korongos csúcsok száma több lenne, mint a több, mint 1 korongos csúcsok száma, így biztosan lenne $(0, 1, 1, ..., 1, 0)$ út a gráfban. Így minden csúcson 0, 1, vagy 2 korong van. A Lemma többi része ebből egyszerűen következik, felhasználva azt, hogy az $(1, 1, ..., 1)$ korongkiosztás nem diffúz. ■

Most definiáljuk egy kiosztás súlyát.

3.2. Definíció. *[5] Egy α korongkiosztás* ***súlya*** $w(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot f_\alpha(i) \mod n$.

Most pedig vizsgáljuk meg néhány egyszerű tulajdonságát ennek a súlynak. Ez nem függ attól, hogy a kört melyik pontjánál kezdjük el számozni.

3.3. Állítás. *[5] A következő invarianciák teljesülnek.*

(i) Egy lövés során a súly nem változik.

(ii) Ha a korongkiosztást elforgatjuk egy rögzített k-val, azaz egy α' konfigurációban minden csúcsra annyi korongot teszünk, amennyi egy rögzített körüljárás szerinti k-adik szomszédján volt az α konfigurációban, akkor a súly szintén nem változik.

Bizonyítás. Ha az i-edik csúcs lő, akkor mindent modulo n számolva $w(\alpha)$ csökken $2i$-vel, viszont nő $(i-1)+(i+1) = 2i$-vel a két szomszédja miatt. Ha egy korongot k csúccsal odébb mozgatunk, akkor a súly k-val nő. Mivel mind az n koronggal végrehajtjuk ezt a lépést, így összesen $n \cdot k \equiv 0$-val nő a súlyunk. ■

Most pedig vizsgáljuk meg azokat a konfigurációkat, melyekben pontosan 0, vagy 1 db 2 korongú csúcs szerepel. Ehhez minden $1 \leq i \leq n$-re és minden $0 \leq k < n$-re legyen $\alpha_{i,k}$ az a konfiguráció, amit úgy kapunk, hogy a $(0, 1, 1, ..., 1)$ kiosztás i-edik csúcsának korongjaihoz 1-et adunk, majd k-val elforgatjuk az egészet. Megfigyelhetjük, hogy $i = 1$-re pont a végső kiosztást kapjuk, míg $1 < i$-re egy diffúz konfigurációt kapunk. Fordítva, ha adott egy olyan diffúz konfiguráció, amiben pontosan egy csúcson van két korong, és pontosan egy csúcson van 0, akkor ez előbbit t-vel, ez utóbbit s-sel jelölve $\alpha_{t-s+1,s-1}$-ről beszélünk.

3.4. Lemma. *[5] Akkor és csak akkor teljesül valamilyen egészekre $w(\alpha_{i,k}) = w(\alpha_{j,r})$, ha $i = j$, tehát egymás elforgatottjai.*

Bizonyítás. Mivel egy forgatás során a súly nem változik, így $w(\alpha_{i,k}) = w(\alpha_{i,0})$, és $w(\alpha_{j,r}) = w(\alpha_{j,0})$. Másrészről $w(\alpha_{i,0}) = w(0, 1, 1, ..., 1) + i$ modulo n nézve, továbbá $w(\alpha_{j,0}) = w(0, 1, 1, ..., 1) + j$. ■

Célunk belátni, hogy ha α és β diffúz kiosztások, melyekre $w(\alpha) = w(\beta)$, akkor lövések egymásutánjával el lehet jutni az egyikből a másikba, és visszafelé is.

3.5. Lemma. *[5] Legyen α tetszőleges diffúz konfiguráció úgy, hogy az i-edik csúcson 2 korong van, és β olyan diffúz kiosztás, melyben pontosan az i-edik csúcson van két korong. Ekkor létezik olyan lövéssorozat, mely α-t β-ba viszi.*

Bizonyítás. Játsszuk a játékot α-ból indulva, úgy, hogy ha van szabad csúcs, akkor lövünk vele, de az i-edik csúccsal sosem lövünk. Ez a lépéssorozat véget ér, hiszen véges sokféle kiosztás van, és ismétlődés nem következhet be, mivel az i-edik csúccsal nem lövünk, tehát sosem lőhetünk az összes csúccsal. Ezért az 2.15. Lemma miatt valóban nem fordulhat elő ismétlődés. Ezután az i-edik az egyetlen csúcs, amin több, mint 1 korong van. Mivel a 2.19. Tétel miatt most is diffúz kiosztást kaptunk, így az i-edik csúcson legfeljebb 2, azaz pontosan két korong lesz. Ez pont a β kiosztás. ∎

3.6. Lemma. *[5] Legyen α egy olyan diffúz kiosztás, melyben pontosan egy csúcson van két korong, és legyen α' az α elforgatottja. Ekkor α-ból el tudunk jutni α'-be.*

Bizonyítás. Elegendő, ha $k = 1$-gyel való elforgatásra ellenőrizzük. A továbbiakban számításainkat modulo n végezzük. Legyen az i-edik csúcson a két korong, ha az $i+1$. csúcson 0 korong van, akkor megfelelő lövéssorozat a $(i, i-1, i-2, ..., i-n+2)$. Ellenkező esetben lőjünk egyet az i-edik csúccsal, így szintén egy diffúz kiosztást kaptunk, melyben az $i+1$. csúcson pontosan 2 korong van. Ekkor a 3.5. Lemma miatt el tudunk innen jutni egy olyan kiosztásba, melyben pontosan az $i+1$. csúcson van két korong. Mivel a súlyunk végig változatlan maradt, így a 3.4. Lemma miatt a kapott konfiguráció pont a $k = 1$-gyel való elforgatás. ∎

3.7. Lemma. *[5] Legyen α tetszőleges diffúz konfiguráció, és α' olyan diffúz konfiguráció, melyre pontosan egy csúcson van két korong. Tegyük fel, hogy α-ból el tudunk jutni α'-be, ekkor α'-ből is el tudunk jutni α-ba.*

Bizonyítás. A 3.3. Állítás miatt van olyan csúcs az α kiosztásban, amelyen 0 korong van, legyen ez az i-edik. Ha nincs másik ilyen korong, akkor a bizonyítás készen van, hiszen pont ezt mondja a 3.4. és a 3.6. Lemma. Ellenkező esetben próbáljuk meg visszafelé megkapni a kívánt lövéssorozatot. Az i-edik csúcsot lefixálva, keressünk egy másik olyan csúcsot, mondjuk i_1-et, melyen 0 korong van. Mivel diffúz konfigurációról van szó, ezért i_1 mindkét szomszédján van legalább egy korong. Fogjunk a két szomszédról 1-1 korongot, és mozgassuk őket i_1-re, így egy olyan kiosztást kaptunk, melyben ha i_1-gyel lövünk, akkor pont α-t kapjuk vissza. Ismételjük meg ezt a lépést, ahányszor csak tudjuk. Ismételten csak véges sokszor tudjuk ezt megtenni, pont úgy, mint a 3.5. Lemmában, hiszen visszafelé nézve az i-edik csúcs sosem lő, ezért ismétlődés nem lehet. Emiatt kapunk egy $i_s, i_{s-1}, ..., i_1$ lövéssorozatot, mely mentén lőve egy β kiosztásból indulva, α-t kapjuk meg. Ráadásul az eljárás végessége miatt azt is tudjuk, hogy β-ban pontosan egy 0 korongos csúcs van, így pontosan egy darab 2 korongos csúcs lehet csak. Így az 3.4. Lemma miatt β az α' kiosztás egy elforgatottja. A 3.6. Lemma miatt α'-ből el tudunk jutni β-ba, és a fentiek miatt tovább α-ba is. ∎

3.2. Eredmények

Mindent összevetve kapjuk a következő tételt.

3.8. Tétel. *[5] Egy diffúz konfigurációból egy másikba pontosan akkor tudunk eljutni, ha a súlyuk megegyezik.*

Bizonyítás. A bizonyítás következik a 3.5., a 3.6. és a 3.7. Lemmák egymás utáni alkalmazásából. ∎

3.9. Tétel. *[5] Egy konfiguráció pontosan akkor vezet véges játékhoz, ha a súlya megegyezik, az $(1, 1, ..., 1)$ konfiguráció súlyával, azaz $\binom{n}{2} \mod n$-nel.*

Bizonyítás. Egy véges játék pontosan az $(1, 1, ..., 1)$ kiosztással érhet véget, közben a súlya nem változik, így az eredeti állapotban is ez volt a súlya. Ha pedig egy kiosztásnak pontosan ennyi a súlya, akkor tegyük fel, hogy nem ér véget a játék. Ekkor van benne ismétlődés, azaz el tudunk jutni valamilyen diffúz konfigurációhoz. Ekkor a 3.5. Lemma miatt el tudunk jutni olyan diffúz konfigurációhoz, hogy pontosan egy csúcson legyen 2 korong. Ennek a súlya viszont a 3.4. Lemma miatt nem egyezik meg $w(1, 1, ..., 1)$-vel, így ellentmondásra jutottunk. ∎

3.10. Tétel. *[5] Amennyiben az α kiosztás $w(\alpha)$ súlya nem $\binom{n}{2} \mod n$, úgy minden $w(\alpha)$ súlyú diffúz konfigurációt el tudunk érni az α-ból legális lövések egymásutánjával.*

Bizonyítás. Az α kiosztásból indulva szabad csúcsok lövésével ismétlődéshez kell jutunk. Ez egy diffúz konfiguráció, innen meg a 3.8. Tétel adja a bizonyítást. ∎

Az viszont egyáltalán nem biztos, hogy tetszőleges játékban minden azonos súlyú diffúz konfiguráció megjelenik.

3.11. Tétel. *[5] Legyen α olyan konfiguráció, amely végtelen játékra vezet. Ekkor létezik egy minimális x lövéssorozat abban az értelemben, hogy x mentén lőve diffúz konfigurációt kapunk, és ha bármilyen másik y mentén lőve diffúz kiosztáshoz jutunk, akkor $[y] \geq [x]$.*

Bizonyítás. Legyen s a(z egyik) legrövidebb lövéssorozat hossza, mellyel diffúz konfigurációhoz jutunk. Ilyen s létezik, hiszen véges sok lépésben diffúz kiosztást kapunk. A tételt s-re vonatkozó indukcióval fogjuk bizonyítani. Az $s = 0$ esetben már az eredeti α is diffúz. Tegyük fel, hogy $s > 0$, és tetszőleges olyan β konfigurációhoz, melyből s-nél kevesebb lépésben diffúz kiosztást kapunk, van minimális lövéssorozat. Először keressünk egy olyan z lövéssorozatot, mely mentén egészen biztosan kötelező lőnünk, ha α-ból egy diffúz kiosztáshoz szeretnénk eljutni. Amennyiben van olyan csúcs, melynek korongjainak száma több, mint 2, akkor legyen az egyik ilyen csúcs i, és legyen $z = i$. Ha nincs ilyen csúcs, akkor minden csúcson legfeljebb 2 korong van, viszont mivel a konfiguráció nem diffúz, így van egy $i_1, i_2, ..., i_k$ út a következő korongszámokkal: $(2, 1, 1, ..., 1, 2)$. Ez azért van így, mert egy nem diffúz kiosztásban van $(0, 1, 1, ..., 1, 0)$ út, továbbá ugyanannyi 2-es van, mint 0-s. Egy $(2, 1, 1, ..., 1, 2)$ útnak legalább az egyik végpontjával lőni kell. Jelöljük k-val az út hosszát, így ha $k = 2$, akkor $(2, 2)$-ből $(3, 0)$-t, vagy $(0, 3)$-mat kapunk. Mindkét esetben a másik csúccsal is lőni kell. Ha $k > 2$, akkor az egyik szélső csúccsal lőve egy $k - 1$ hosszú $(2, 1, 1, ..., 1, 2)$ utat kapunk, így indukcióval az út minden csúcsával lőni kell. A fentiek miatt $z = i_1, i_2, ..., i_k$ lövéssorozat legális, és ha diffúz konfigurációt szeretnénk, akkor valóban minden z-ben szereplő csúccsal kötelező lőni valamikor.

Így minden y diffúz konfigurációhoz vezető lövéssorozatra az erős kicserélési tulajdonság miatt létezik olyan y', hogy $y = zy'$. Legyen β az a kiosztás, amit α-ból z mentén lőve kapunk. Ekkor az indukció miatt létezik minimális x' lövéssorozat β-hoz. Ekkor $x = zx'$ megfelelő minimális lövéssorozat lesz α-hoz. ∎

Végezetül bebizonyítunk még egy általánosabb tételt a diffúz konfigurációkról.

3.12. Tétel. *Ha adott α és β konfigurációk, melyekre teljesül, hogy*

(i) mindkettő diffúz,

(ii) azonos N korongszámúak, ahol N nem feltétlen egyezik meg n-nel és

(iii) azonos súlyúak,

akkor el tudunk jutni koronglövésekkel α-ból β-ba.

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítunk. Egy diffúz konfiguráció legalább n korongot tartalmaz. Így $N = n$-re a 3.8. Tétel adja a bizonyítást.

Most tegyük fel, hogy $n = k$-ra beláttuk az állítást, és bizonyítsuk $n = k+1$-re. Mivel β diffúz, és $N > n$, így azt szeretnénk látni, hogy el tudunk venni egy korongot az egyik csúcsról úgy, hogy továbbra is diffúz konfigurációt kapjunk. A 2.20. Tétel miatt egy konfiguráció pontosan akkor diffúz, ha létezik a gráfhoz olyan aciklikus irányítás, melyre $\rho(v) \leq f(v)$ minden v-re. Vegyünk egy ilyen aciklikus irányítást. Ekkor a skatulyaelv miatt létezik olyan w csúcs, melyre $\rho(w) < f(w)$. Ekkor a w csúcsról el tudunk venni úgy egy korongot, hogy a kapott β' kiosztás is diffúz maradjon.

Most vizsgáljuk meg, hogy az α kiosztásban is el tudunk-e venni w-ről egy korongot. Ha $f_\alpha(w) = 0$, akkor nem tudunk. Mivel α diffúz, így nem létezhet benne $(0, 1, 1, 1, 0)$ ív, tehát létezik v csúcs úgy, hogy $f_\alpha(v) > 1$ és minden további v és w közötti csúcson pontosan 1 korong van. Ezek után v-vel lőve, majd sorban a v és w közötti csúcsokkal, kapunk egy olyan kiosztást, ahol v-n legalább 1 korong van. Vegyük el ezt a korongot, és jelöljük az így kapott kiosztást α'-vel.

Mivel α és β súlya megegyezett, így α' és β' súlya is megegyezik, hiszen ugyanarról a csúcsról vettünk el egy korongot. α' nem feltétlen diffúz, de a súlya megegyezik a diffúz β' súlyával, így az α' egészen biztosan végtelen játékot eredményez. Így a 2.16. Lemma miatt α'-ből el tudunk jutni egy α'' vele azonos súlyú diffúz kiosztásba. Ekkor az indukció miatt α''-ből β'-be el tudunk jutni. Így összességében találtunk egy olyan lövéssorozatot, melynek segítségével α'-ből β'-be eljutottunk, azaz a korongokat visszatéve α-ból β-ba is. ■

3.3. Lépésszámbecslés

Vizsgáljuk meg, hogy hány lépésben tudunk eljutni egy diffúz konfigurációból egy vele azonos súlyú másik diffúz konfigurációba. A 3.8. Tételből már tudjuk, hogy el tudunk jutni, most csak azt szeretnénk megvizsgálni, hány lépésben. Ehhez, ugyanúgy, mint a 3.8. Tétel bizonyításában három lemmára lesz szükségünk.

3.13. Lemma. *Legyen α tetszőleges diffúz konfiguráció úgy, hogy az i-edik csúcson 2 korong van, és β olyan diffúz kiosztás, melyben pontosan az i-edik csúcson van két korong. Ekkor létezik olyan lövéssorozat, mely $O(n^2)$ lövésből áll és α-t β-ba viszi.*

Bizonyítás. Rögzítsük le az i-edik csúcsot, ezzel nem fogunk lőni. Felhasználva a 3.5. Lemma bizonyítását, elegendő azt belátnunk, hogy van olyan játék, ami $O(n^2)$ lépésben véget ér. Mivel α diffúz, így a definícióból és a 3.1. Lemmából következik, hogy a 0 és 2 korongszámú csúcsok felváltva következnek, köztük valahány 1 korongszámú csúccsal. Először vizsgáljunk meg egy ilyen $(0, 1, 1, ..., 1, 2, 1, 1, ..., 1, 0)$ ívet. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az első 0 korongszámú csúcs az 1 idexű, utána a db 1-es van, utána az $a+2$-edik helyen van a 2-es, utána b db 1-es, majd az $a+b+3$-as indexű helyen a másik 0-s. Azt fogjuk belátni, hogy $2ab$ lépésben ebből az ívből olyan ív lesz, ahol csak 1-esek és egy darab 0-s fog szerepelni. A következő lövéseket hajtsuk végre: $(a+2, a+1, ..., 2)$. Könnyen látható, hogy ezután a következő kiosztáshoz jutunk: $(1, 0, 1, 1, ..., 1, 2, 1, 1, ..., 1, 0)$, ahol most a darab 1-es van a bal oldali 0-s és 2-es között és csak $b-1$ darab a jobb oldali részen, azaz a 2-es és 0-s között. Ezután úgy tekintünk az ívre, mintha 1-gyel rövidebb lenne, és újra ismételjük az eljárást. Így $b \cdot a$ lövéssel a következő kiosztáshoz jutunk: $(1, 1, ..., 1, 0, 1, 1, ..., 1, 2, 0)$, ahol először b darab 1-es szerepel, majd egy 0-s, majd a darab 1-es, majd egy 2-es és egy 0-s. Ezután a 2 korongú csúccsal lövünk: $(1, 1, ..., 1, 0, 1, 1, ..., 1, 2, 0, 1)$, tehát egy lövéssel eggyel csökkentettük a 0 és két korongú csúcsok közti 1-esek számát. Ismételjük ezt meg a-szor: $(1, 1, ..., 1, 0, 2, 0, 1, 1, ..., 1)$. Most az elején b darab 1-es van, a végén meg a darab. Ezután már csak a 2 korongú csúccsal kell egyet lőnünk, hogy eljussunk a kívánt $(1, 1, ..., 1, 0, 1, 1, ..., 1)$ kiosztáshoz, $b+1$ csúccsal az elején, és $a+1$-gyel a végén. Mindezt $ab+a+1$ lövéssel értük el.

Most nézzük meg az α kiosztást. Van egy rögzített 2-esünk. Ezután egy tetszőleges körüljárás szerint valahány 1-es. Majd egy 0-s. Ezután néhány 1-es, legyen k_1 darab, majd ismét egy 2-es. Utána k_2 darab 1-es, majd egy 0-s. Tehát a j-edik nem 1-es szám utáni 1-esek számát jelöljük k_j-vel. Az első 0-s és a második 0-s közti ív pont olyan, mint amiről eddig beszéltünk, erre játsszuk le a fentebb leírt lövéssorozatot. Tehát $k_1k_2+k_1+1$ lövéssel egy új konfigurációhoz jutunk, ahol eggyel kevesebb 2-es és eggyel kevesebb 0-s van. Ekkor az így kapott kiosztásban az első 0-s és 2-es között a fentiek miatt k_1+k_3+1 darab 1-es lesz, míg az első 2-es és a második 0-s között k_4 darab 1-es. Tehát erre alkalmazva a fenti algoritmust $(k_1+k_3+1)k_4+(k_1+k_3+1)+1$ lövéssel ér véget. Az általános esetben $(\sum_{i=0}^{l-1} k_{2i+1}+l-1)k_{2l}+(\sum_{i=0}^{l-1} k_{2i+1}+l-1)+1$ lövésre lesz szükségünk. Legyen p a legnagyobb indexű k indexe. Ezeket mind összeadva:

$$\sum_{l=1}^{p/2} \Big((\sum_{i=0}^{l-1} k_{2i+1}+l-1)k_{2l} + (\sum_{i=0}^{l-1} k_{2i+1}+l-1)+1 \Big)$$

Ezt akarjuk megbecsülni, felhasználva, hogy $n > \sum k_i$. Szerepelnek az összegben kettős k_ik_j szorzatok. Ezeket felülről becsülhetjük $n^2 > (\sum k_i)^2$-tel, hiszen ebben az összegben minden kétszeres szorzat szerepel. Továbbá a fenti összegben szerepelnek k_i-k valamilyen n-nél kisebb együtthatóval. A páros indexű tagokról ez könnyen látszik, a páratlan indexűeket meg legfeljebb $\frac{p}{2}$-ször adjuk össze. Így ezeket felülről becsülhetjük $n^2 > n\sum k_i$-vel. Ezek mellett még konstansok is szerepelnek, ezekre: $\sum_{i=1}^{p/2} i < n^2$. Mindezeket összeadva kaptuk az $O(n^2)$-es felső becslést. ■

3.14. Lemma. *Legyen α egy olyan diffúz kiosztás, melyben pontosan egy csúcson van két korong, és legyen α' az α elforgatottja. Ekkor α-ból el tudunk jutni α'-be $O(n^2)$ lövésből.*

Bizonyítás. Az 3.6. Lemma bizonyítását fogjuk pontosítani. Azt látjuk be, hogy az 1-gyel való elforgatás $O(n)$ időben végrehajtható. Legyen az i-edik csúcson a két korong.

Ha az $i+1$-edik csúcson 0 korong van, akkor megfelelő lövéssorozat az $(i, i-1, i-2, ..., i-n+2)$.

Ellenkező esetben lőjünk egyet az i-edik csúccsal, így szintén egy diffúz kiosztást kaptunk, melyben az $i+1$-edik csúcson pontosan 2 korong van: $(1,1,...,1,2,0,2,1,1,...,1,0,1,1,...,1)$, vagy $(1,1,...,1,0,2,1,1...,1)$. A második esetben készen vagyunk. Az első esetben figyeljük meg a két 0-s közötti $(0,1,1,...,1,2,0)$ ívet. A másik 2-es már a helyén van, így a diffúzitás miatt elegendő elérnünk, hogy eggyel kevesebb 2-es és 0-s legyen itt. A 3.13. Lemma algoritmusát használva ez pontosan $ab+a+1$ lépésben végrehajtható. Itt most $b=0$, azaz $a+1 \leq n$ lépés elegendő. ■

3.15. Lemma. *Legyen α tetszőleges diffúz konfiguráció, és α' olyan diffúz konfiguráció, melyre pontosan egy csúcson van két korong. Tegyük fel, hogy α-ból el tudunk jutni α'-be, ekkor α'-ből is el tudunk jutni α-ba $O(n^2)$ lövésből.*

Bizonyítás. Legyen $\beta = (2,2,...,2) - \alpha$. Ekkor $w(\beta) = -w(\alpha)$, hiszen $w(2,2,...,2) = 0$. Ráadásul, mivel α diffúz volt, így β igazából α-ban a 0-k 2-re, és a 2-esek 0-ra való átírása. Azaz β is diffúz. A 3.13. Lamma miatt β-ból el tudunk jutni egy olyan $-w(\alpha)$ súlyú γ konfigurációba, melyben pontosan egy darab 2-es és 0-s van. Ekkor $(2,2,...,2) - \gamma$ egy olyan $w(\alpha)$ súlyú diffúz konfiguráció, melyben pontosan egy darab 2-es és 0-s van. Azaz α' egy elforgatottja, hiszen $w(\alpha') = w(\alpha)$. Úgy fogunk α'-ből α-ba eljutni, hogy először is vesszük egy alkalmas elforgatottját, majd utána észrevesszük, hogy ahogyan β-ból γ-ba eljutottunk, az invertálható, és pontosan így tudunk eljutni α' egy megfelelő elforgatottjából α-ba.

Ehhez csak a következő megfigyelést kell tennünk: ha egy tetszőleges $(2,2,...,2)-\delta$ konfigurációban lövünk az i-edik csúccsal, és így a $(2,2,...,2)-\delta'$ konfigurációt kapjuk, akkor a δ' konfigurációban az i-edik csúccsal lőve pont δ-t kapjuk vissza. Közben végig megmarad a nemnegativitás, hiszen egy diffúz konfigurációban csak 0, 1, 2-es csúcsok lehetnek. A lövés során a $(2, 2, ..., 2) - \delta$ kiosztásban az i-edik csúcs korongszáma 2-vel csökken, a szomszédaié 1-gyel nőnek. Azaz a δ'-ben az i-edik csúcs korongszáma 2-vel lesz több, míg a szomszédaié 1-gyel kevesebb, mint a δ konfigurációban, ami pont ezt a lövést jelenti. Mivel a forgatást $O(n^2)$ lépésben meg tudjuk csinálni, majd a 3.13. Lemma lövéssorozatát is $O(n^2)$ lépésben végre tudjuk hajtani, így ennek megfordítottja is nyilván ilyen lépésszámú. Ezek összege is $O(n^2)$. ■

3.16. Tétel. *Ha adott két azonos súlyú α és β diffúz konfiguráció, akkor α-ból el tudunk jutni β-ba $O(n^2)$ lövéssel.*

Bizonyítás. Először a 3.13. Lemmával egy olyan α' konfigurációt kapunk, melyben pontosan egy darab 2-es van, majd a 3.15. Lemmával innen eljutunk β-ba. ■

4. fejezet

Teljes gráfok

Ebben a fejezetben szükséges és elégséges feltételt adunk arra, hogy egy teljes gráf esetén véges legyen a játék. A fejezet tételeit Zhuang, Yang, Zhang, Guo [11]-ben találhatjuk. Egy korongkiosztást a gráf n csúcsán egy n dimenziós $\alpha = (f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n))$ vektorként is elképzelhetünk. Itt $f_\alpha(v)$ jelöli az α kiosztás esetén a v csúcs korongjainak számát. Azt mondjuk, hogy β **elérhető** α-ból, ha létezik legális lövéssorozat, amely során az α korongkiosztásból indulva a β korongkiosztást kapjuk. α-t és β-t **ugyanolyannak** nevezünk, és a továbbiakban nem is különböztetjük meg őket, ha β az α egy permutációja. Az motiválja ezt a definíciót, hogy a játék szempontjából nem tudjuk megkülönböztetni őket. A 2.12. Tétel miatt a továbbiakban csak olyan kiosztásokról beszélünk, melyekre $\binom{n}{2} \leq N \leq 2\binom{n}{2} - n$, hiszen a teljes gráfban $m = \binom{n}{2}$.

4.1. Speciális eset

4.1. Lemma. *[11] Legyen $\alpha = (0, 1, ..., n-1)$ K_n egy kiosztása. Ha β-ból el tudjuk érni α-t, akkor β és α ugyanolyan.*

Bizonyítás. Tekintsük azt a legális $v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_k}$ lövéssorozatot, mely β-t α-ba viszi. Itt természetesen α egy permutációjába, azaz egy olyan α'-be is viheti, melyre α és α' ugyanolyan. Nézzük az utolsó lövést, nevezzük u-nak azt a csúcsot, mellyel utoljára lőttünk. Ezzel a lövéssel pont $(0, 1, ..., n-1)$-be jutottunk. Mivel egy teljes gráfról van szó, így minden $v \neq u$ csúcs kapott korongot, azaz $f_\alpha(v) > 0$. Tehát a lövés után $f_\alpha(u) = 0$ kellett, hogy legyen. Azaz a lövés előtt u-nak $n-1$ korongja volt. Mivel az összes többi csúcs korongszáma 1-gyel nőtt a lövés során, és így lett $(0, 1, ..., n-1)$, ezért a többi v csúcs koronszáma az $(1, ..., n-1)$ korongoknál 1-gyel kevesebb volt, azaz u-val együtt pont $(0, 1, ..., n-1)$-t kapjuk. Teljes indukcióval készen is vagyunk. ■

4.2. Tétel. *[11] Ha $N = \binom{n}{2}$, akkor α kiosztásra a játék akkor és csak akkor végtelen, ha $\alpha = (0, 1, ..., n-1)$.*

Bizonyítás. Ha $\alpha = (0, 1, ..., n-1)$, akkor végtelen a játék. Most próbáljuk belátni, hogy ez szükséges is. Induljunk ki egy végtelen játékot eredményező α-ból és tegyük fel, hogy $f(v_1) \le f(v_2) \le ... \le f(v_n)$. Mivel nem ért véget a játék, így tudjuk, hogy $f(v_n) \ge n-1$. A továbbiakban a következő szabályok szerint játsszuk le a játékot:

(S_1) Mindig azzal a csúccsal lövünk, amin a legtöbb korong van.

(S_2) Ha több csúcsnak is maximális korongszáma van, akkor a nagyobb számú csúccsal lövünk.

4.3. Lemma. *[11] Ekkor $f_\alpha(v_1) = 0$ teljesül.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f_\alpha(v_1) > 0$, és nézzünk egy végtelen legális lövéssorozatot. Mivel v_1 biztosan lő, így nézzük az első pillanatot, amikor ő lő. Ekkor már az összes többi csúcsnak lőnie kellett, hiszen $f(v_1) \le f(v_2) \le ... \le f(v_n)$-ről indultunk, és mindig a legnagyobb korongszámúval lőttünk. Legyen β az a kiosztás, ahol minden csúcson ugyanannyi korong van, kivéve v_1-en, ahol 1-gyel kevesebb. Tehát $f_\beta(v_1) = f_\alpha(v_1) - 1$. Kezdjük el ugyanezt a játékot játszani. Nyilvánvalóan legális marad mindaddig, amíg v_1-gyel lövünk először, de v_1-gyel tudunk lőni, hiszen az összes szomszédja lőtt már addig. Ugyanígy a továbbiakban is le tudjuk játszani α végtelen játékát β-n, vagyis β is végtelen a 2.1. Tétel miatt. De β csúcsainak korongösszege $\binom{n}{2} - 1$, amiről pedig 2.12 kimondja, hogy véges játék. Így ellentmondásra jutottunk. ■

Az első lövés v_n-nel történik a szabályok szerint. Ekkor ismét egy végtelen kiosztást kapunk, tehát ennek is van olyan csúcsa a 4.3. Lemma miatt, melyen 0 korong van. Mivel a lövés során v_n-en kívül minden csúcs kapott korongot, így csak v_n-en maradhatott 0, vagyis $f(v_n) = n-1$ volt. Miután v_n-nel lőttünk, ugyanezt el lehet mondani: $f(v_{n-1}) = n-1$ lesz, így v_n lövése előtt $f(v_{n-1}) = n-2$ volt. Ugyanígy könnyen látható, hogy $f(v_i) = i-1$ volt minden csúcsra. ■ ■

4.2. Több korong esete

Most pedig nézzük meg, mit mondhatunk, ha nem pontosan $\binom{n}{2}$ korongunk van összesen.

4.4. Tétel. *[11] Legyen* $x = f(v_1) = f(v_2) = ... = f(v_k) < f(v_{k+1}) \leq f(v_{k+2}) \leq ... \leq f(v_n)$*. Ekkor* α *véges, ha* $N < \binom{n}{2} + \max\{\binom{k}{2}, \binom{x+1}{2}\}$*.*

Bizonyítás. Bizonyításunk során ismét az $(S1)$ és az $(S2)$ szabályok szerint játszunk. Bontsuk fel két esetre a bizonyítást:

Ha $0 \leq x \leq k-1$, akkor $N < \binom{n}{2} + \binom{k}{2}$. Tegyük fel, hogy α végtelen, és lőjünk a $v_n, ..., v_{k+1}$ csúcsokkal ebben a sorrendben. Ezt megtehetjük, hiszen végtelen játékról van szó. Ezáltal egy $\beta = (n-1, n-1, ..., n-1, f_\beta(v_{k+1}), ..., f_\beta(v_n))$ kiosztáshoz jutunk. Készítsünk egy $\beta' = (n-k, n-k+1, ..., n-1, f_\beta(v_{k+1}), ..., f_\beta(v_n))$ kiosztást. Most lőjünk az első k darab csúccsal fordított sorrendben. Ezt nyilván meg tudjuk tenni, így viszont a 2.1. Tetel szerint β' végtelen játék, ami viszont $N - \binom{k}{2} < \binom{n}{2}$ miatt ellentmond a 2.12. Tételnek.

Ha $k \leq x < n-1$, akkor $N < \binom{n}{2} + \binom{x+1}{2}$. Ismét tegyük fel, hogy α végtelen, és nézzük a $\beta' = (0, 1, 2, ..., x, f_\alpha(v_{x+2}), ..., f_\alpha(v_n))$ kiosztást. Ekkor N'-vel jelölve a korongösszeget kapjuk, hogy $N - N' = \sum_{i=0}^{x} f_\alpha(v_{i+1}) - i \geq \sum_{i=0}^{x} x - i = \binom{x+1}{2}$. Vagyis $N' \leq N - \binom{x+1}{2} < \binom{n}{2}$. Így ez egy véges játék a 2.12. Tétel miatt. Mivel α végtelen és a szabályok szerint lövünk, így vehetünk egy $n-x-1$ hosszú legális lövéssorozatot, melyre a csúcsok a $\{v_{x+2}, v_{x+3}, ..., v_n\}$ halmazból kerülnek ki. Ez a lövéssorozat β'-re is legális, így ezt lejátszva a $\beta'' = (n-x-1, n-x, ..., n-1, f''_\beta(v_{x+2}), ..., f''_\beta(v_n))$ kiosztást kapjuk. Erre az első $x+1$ csúcs fordított sorrendben tud lőni, ezután pedig a $\{v_{x+2}, v_{x+3}, ..., v_n\}$ korábban nem lőtt csúcsoknak legalább $n-1$ korongjuk van. Vagyis minden csúcs tudott lőni, így a játék végtelen, ellentmondás. ■

4.5. Lemma. *[11] Egy olyan* α *kiosztásból indulva, melyre* $\binom{n}{2} \leq N \leq 2\binom{n}{2} - n$ *teljesül, elérhető egy olyan* β *kiosztás, melyre minden* v *esetén* $f_\beta(v) \leq 2n-3$*.*

Bizonyítás. Legyen a β kiosztásban minden $f_\beta(v) = [f_\alpha(v)/2]$. Ekkor β-ban kevesebb korong van, mint $\binom{n}{2}$, így a játék véges. Játsszuk is le a játékot, majd ugyanezt a lövéssorozatot játsszuk le α-ra, arra ügyelve, hogy ha β-ban lőttünk egy csúcsot, akkor α-ban ugyanazt a csúcsot kétszer lőjük egymás után. Ez a konstrukció miatt legális. Ekkor egy olyan állapothoz jutunk, melyre minden $f_\beta(v) < n-1$, azaz $f_\alpha(v) < 2n-2$. ■

Ha van egy kiosztásunk, akkor feltehetjük, hogy $f(v_1) \geq f(v_2) \geq ... \geq f(v_n)$. Ekkor ha valamely k-ra $f(v_k) - f(v_{k+1}) \geq 2$, akkor a (v_k, v_{k+1})-t **rés**nek nevezzük. Tetszőleges α-ból kiindulva jussunk el a 4.5. Lemmában meghatározott β kiosztáshoz. Ismét feltehetjük, hogy $f_\beta(v_1) \geq f_\beta(v_2) \geq ... \geq$

$f_\beta(v_n)$, és β-ban legyen $r-1$ darab rés. Ezek mentén osszuk fel β-t r darab részre, és jelöljük az i-edik részt S_i-vel. Az S_i legkisebb sorszámú csúcsát, amelyen a legtöbb korong van, jelöljük m_i-vel. Legyen az S_i korongösszege s_i. Ekkor a következő tulajdonságokat figyelhetjük meg:

4.6. Lemma. *[11] Ha van olyan csúcs, amellyel legalább háromszor tudunk lőni, akkor a játék végtelen.*

Bizonyítás. Legyen ez a csúcs $u \in S_i$. Ekkor a rendezés miatt nyilván m_i is legalább háromszor tud lőni. Be szeretnénk látni, hogy ekkor minden csúcs lőtt legalább egyszer. Ehhez elég, ha azt látjuk, hogy m_r lőtt legalább egyszer, hiszen ha ő tud lőni, akkor minden S_r-beli csúcs is tud utána sorrendben, mert S_r nem tartalmaz rést. Így tegyük fel, hogy m_r nem lőtt, de m_i már lőtt háromszor. Mivel $f_\beta(m_r) \leq f_\beta(m_i) \leq 2n-3 \leq 2n-3+f_\beta(m_r)$, így mire m_i háromszor lőtt, összesen legalább $n-f_\beta(m_r)$ korongot kapott. A szimmetria miatt m_r is kapott legalább $n-f_\beta(m_r)$ darab korongot, hiszen ő még egyszer sem lőtt. Azaz pont most tud lőni, így ezek után minden csúcs tud lőni. ∎

Most pedig próbáljunk szükséges és elégséges feltételt találni a teljes gráfon egy játék végességére. Ehhez elegendő a 4.5. Lemmában meghatározott β kiosztásra adni egy feltételt. Azt mondjuk, hogy S_i-vel lövünk, ha minden $v \in S_i$-vel sorrendben lövünk. Ezt nyilván megtehetjük, hiszen S_i nem tartalmaz rést. A korábbi jelöléseket felhasználva felírhatjuk a fejezet utolsó tételét.

4.7. Tétel. *[11] Egy β kiosztással a játék akkor és csak akkor véges, ha létezik $i, j \in \{1, 2, .., k\}, j \leq i \leq k$ úgy, hogy*

$$f_\beta(m_i) + \sum_{b=1}^{i-1} s_b + \sum_{c=1}^{j-1} s_c < n-1 \tag{4.1}$$

és

$$f_\beta(m_j) + \sum_{b=1}^{i-1} s_b + \sum_{c=1}^{j-1} s_c - n < n-1. \tag{4.2}$$

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy a játék véges. Ekkor a 4.6. Lemma miatt minden csúccsal legfeljebb kétszer lőhettünk, így beoszthatjuk őket ennek megfelelően két csoportba. Legyen $H_1 = \{S_1, S_2, ..., S_{i-1}\}$ az a csoport, amelynek elemeivel egyszer lőttünk, és álljon $H_2 = \{S_1, S_2, ..., S_{j-1}\}$ azokból a részekből, melyekkel kétszer lőttünk. Nyilván $j \leq i$ és $i-1 < k$, különben nem lehetne véges a játék. Mivel véges, így egyik csúcson sem lehet legalább $n-1$ korong a lövések után. Ezt felírva m_i-re és m_j-re kapjuk a 4.1 és a 4.2 egyenlőtlenségeket.

Most lássuk be a fordított irányt. Tegyük fel, hogy találtunk i, j egészeket a 4.1 és a 4.2 egyenlőtlenségeknek megfelelően. Ekkor azt vehetjük észre, hogy m_i nem tud lőni a játék során és m_j nem tud kétszer lőni a játék során. Most azt fogjuk még leellenőrizni, hogy az első részben felírt lövések után a játék befejeződik. Ha $j = 1$, akkor ez nagyon egyszerű, hiszen m_1 nem tud kétszer lőni, és m_i már nem tud lőni, tehát véges. Ha $j > 1$, akkor pedig 4.1 miatt $f_\beta(m_r) + \sum_{b=1}^{i-1} s_b + \sum_{c=1}^{j-1} s_c < n-1$. Mivel $0 \leq f_\beta(m_1) - f_\beta(m_r) \leq 2n-3$, így $f_\beta(m_1) + \sum_{b=1}^{i-1} s_b + \sum_{c=1}^{j-1} s_c - 2n < n-1$. Ezért m_1 sem fog tudni harmadszorra lőni ezek után. Tehát összefoglalva m_i nem tud lőni egyszer sem, m_j nem tud másorjára lőni és m_1 nem tud harmadjára lőni, így a rendezés miatt egyik csúcs sem fog tudni lőni, vagy a játék valóban véges. ■

5. fejezet

Nyelőpont

Ebben a fejezetben az eddig megismert játék egy látszólag apró módosítással nyert változatát fogjuk vizsgálni. A témakörről bővebben van den Heuvel [10] cikkében olvashatunk.

5.1. Kritikus kiosztások

Az eddigi játékban minden csúcs lőhetett, ha legalább annyi korongja volt, mint a fokszáma. A módosított játékban adott egy kitüntetett q pont, amely bármikor lőhet, végtelen sok korong van rajta, így a továbbiakban $f(q)$-ról nem beszélünk. Ebben a fejezetben a többszörös éleket is megengedjük, a hurokéleket viszont nem. Jelöljük λ-val a gráf élösszefüggőségi-számát, továbbá $e(u, v)$-vel az u és v pontok közti élek számát. Jelölje továbbá $f_x(v)$ egy x lövéssorozat utáni állapotban a v csúcs koronszámát. Ennek a résznek egy speciális esete, amikor azt mondjuk, hogy a q pont sosem lő.

A játékot a következő két szabály szerint fogjuk játszani:

$(C1)$ Ha van $v \neq q$ szabad csúcs, akkor tetszőleges ilyen csúccsal lövünk.

$(C2)$ Ha nincs már $v \neq q$ szabad csúcs, akkor q-val lövünk.

5.1. Definíció. *[10] Egy α korongkiosztás*

(i) ***stabil****, ha q kivételével nincs szabad csúcs, tehát minden $v \neq q$ csúcsra $f(v) < d(v)$;*

(ii) ***ismétlődő****, ha létezik egy legális $(v_{i_1}, v_{i_2} \ldots, v_{i_k})$ csúcssorozat úgy, hogy ha ezekkel a csúcsokkal ebben a sorrendben lövünk, akkor visszakapjuk az α korongkiosztást;*

(iii) ***kritikus****, ha stabil és ismétlődő.*

A következő tételt bizonyítás nélkül közöljük.

5.2. Tétel. *[10] Minden α kezdeti kiosztáshoz egyértelműen található belőle elérhető kritikus konfiguráció.* ∎

A stabil, illetve ismétlődő kiosztásokat fogjuk vizsgálni, és azt, hogy egy általános kiosztásból hogyan kaphatunk ilyeneket. A most következő lemmákat vagy teljes egészében bizonyítottuk már, vagy a korábbi játék hasonló lemmáinak bizonyításából apró módosítással kapható.

5.3. Lemma. *[10] Legyen x legális sorozat az α kiosztásra. Ha egy u csúcs szabad az α kiosztással, és u nem szerepel x-ben, akkor ux is legális α-ra.* ∎

5.4. Lemma. *[10] Legyen $v_1, ..., v_{k-1}, v_k, v_{k+1}, ..., v_\ell$ legális valamely α-ra, továbbá v_k szabad az α-ra és nem szerepel a $v_1, ..., v_{k-1}$ sorozatban. Ekkor a $v_k, v_1, ..., v_{k-1}, v_{k+1}, ..., v_\ell$ is legális α-ra.* ∎

5.5. Lemma. *[10] Legyen x legális sorozat α-ra és tegyük fel, hogy q nem szerepel x-ben. Ekkor tetszőleges $\beta \geq \alpha$-ra x legális β-ra is (az egyenlőtlenséget koordinátánként értjük).* ∎

5.6. Lemma. *[10] Tetszőleges x és x' α-ra legális sorozatokhoz van y legális sorozat úgy, hogy $[y] = [x] \vee [x']$. Létezik y úgy is, hogy y-nak x kezdőszelete legyen.* ∎

5.7. Tétel. *[10] Legyenek x és x' legális sorozatok az α_0 kiosztásra. Ezek mentén lőve kapjuk az α és α' kiosztásokat. Ekkor a következők teljesülnek:*

(i) Létezik β, mely α-ból és α'-ből is megkapható legális lövéssorozattal.

(ii) Ha egyik csúcs sem szerepel kétszer sem x-ben, sem x'-ben, akkor a β kiosztás megkapható α_0-ból úgy is, hogy semelyik csúccsal sem lövünk több, mint egyszer.

(iii) Ha q nem szerepel x-ben és x'-ben, továbbá teljesülnek (ii) feltételei, akkor β-hoz eljuthatunk q lövése nélkül is, amellett, hogy egyik csúccsal sem lövünk egynél többször.

Bizonyítás. Közvetlenül következik az 5.6. Lemmából, illetve a (2.1). egyenletből. ∎

5.8. Lemma. *[10] Legyen α stabil, és legyen x legális úgy, hogy q pontosan egyszer szerepel benne. Ekkor minden csúcs legfeljebb egyszer szerepel x-ben.*

Bizonyítás. Mivel α stabil, így q-val kell először lőnünk. Tegyük fel, hogy van olyan csúcs, amely legalább kétszer szerepel $x = (v_1, ..., v_k)$-ban, és legyen v_i az első olyan csúcs, mellyel másodjára lövünk. Ekkor v_i szerepel az $y = (v_1, ..., v_{i-1})$ sorozatban, sőt, y lövése után v_i szabad. Ráadásul az összes többi csúcs legfeljebb egyszer szerepel y-ban. Tehát $f(v_i) - d(v_i) + \sum_{u \in N(v_i)} e(u, v_i) \leq f(v_i) - d(v_i) + d(v_i) = f(v_i)$, azaz v_i mégsem lehet szabad. ■

5.9. Következmény. *[10] Ha α stabil, akkor minden legális x-ben egy csúcs legfeljebb annyiszor szerepelhet, mint q.* ■

5.10. Következmény. *[10] Egy stabil α-ra, és olyan x legális sorozatra, melynek lövése után α-t kapjuk vissza teljesülnie kell, hogy minden csúcs ugyanannyiszor szerepel x-ben.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy nem igaz az állítás, és legyen v egy olyan csúcs, amely a legkevesebbszer szerepel x-ben, továbbá szomszédos egy olyan v'-vel, amely többször szerepelt v-nél. Az 5.9. Következmény miatt $v \neq q$. Tegyük fel, hogy a v csúcs p-szer szerepel x-ben, ekkor v a lövések során $p \cdot d(v)$ korongot veszít. Viszont minden szomszédjától minden élen kap legalább p korongot, és v'-től legalább $p + 1$-et. Így nem juthat vissza önmagába. ■

5.11. Tétel. *[10] Legyen α kritikus, és legyen x olyan legális sorozat, melyben q pontosan egyszer szerepel és ha x mentén lövünk, akkor stabil kiosztást kapunk. Ekkor $n = k$ és minden csúcs pontosan egyszer szerepel, továbbá a végén kapott stabil konfiguráció pont α.*

Bizonyítás. Legyen az x alkalmazásával kapott stabil kiosztás α'. Mivel α kritikus, így létezik egy x' legális lövéssorozat, mellyel α-ba jutunk vissza. Így az 5.10. Következmény miatt minden csúcs ugyanannyiszor, és legalább egyszer szerepel x'-ben, és legfeljebb egyszer x-ben. Ekkor az 5.6. Lemma miatt vehetjük y-t úgy, hogy $[x] \vee [x'] = [y]$. Ekkor nyilván $[x'] = [y]$, továbbá y-t úgy választjuk meg, hogy x egy kezdőszelete legyen y-nak. A fenti egyenlőségből adódóan y-nal is α-ba jutunk vissza. Legyen y' y-nak az x utáni része, így y' legális α'-re. Tehát van egy y-unk, melyben minden csúcs ugyanannyiszor szerepel, és a kezdőszelete egy olyan x, melyben minden csúcs legfeljebb egyszer szerepel, továbbá a maradék y' részben minden csúcs legfeljebb annyiszor szerepel, mint q (az 5.9. Következmény miatt). Ebből következik, hogy minden csúcs pontosan egyszer szerepel x-ben, azaz $\alpha = \alpha'$ és $k = n$. ■

A továbbiakban néhány, a témakör megértéséhez szükséges eredményt közlünk bizonyítás nélkül.

5.12. Következmény. *[10] Egy γ kritikus kiosztásra $0 \leq [c]_v \leq d(v) - 1$ teljesül minden $v \neq q$-ra.* ∎

5.13. Tétel. *[10] Legyen x egy legális sorozat α-ra úgy, hogy*

(i) az x-et α-ra alkalmazva egy α' stabil kiosztást kapunk;

(ii) minden csúcs szerepel legalább egyszer x-ben.

Ekkor α' kritikus. Ha továbbá x semelyik kezdő részsorozatára sem teljesül (i) és (ii), akkor x-ben az utolsó q lövése előtti kiosztás pont α' az első kiosztás, ami kritikus. ∎

5.14. Következmény. *[10] Legyen α egy kezdeti kiosztás, és x legális sorozat úgy, hogy q kivételével minden csúcs legalább egyszer szerepel benne és x-et alkalmazva egy stabil α'-t kapunk. Ekkor α' kritikus.* ∎

5.2. Lépésszámbecslések

Ezen témakör további fontos eredményeit néhány tételben összefoglalva olvashatjuk.

5.15. Tétel. *[10] Legyen α egy kezdeti kiosztás és jelölje $||\alpha||^+$ a kiosztásban azon csúcsok korongjainak összegét, melyeken pozitív számú korong található. Ekkor*

(i) legfeljebb $\frac{3n^2||\alpha||^+}{\lambda+1}$ lövéssel és legfeljebb $\frac{6nm||\alpha||^+}{\lambda+1}$ korong mozgatásával egy stabil konfigurációt kapunk;

(ii) legfeljebb $\frac{3n^2(||\alpha||^+ + 2m)}{\lambda+1} + n$ lövéssel és legfeljebb $\frac{6nm(||\alpha||^+ + 2m)}{\lambda+1} + 2m$ korong mozgatásával egy kritikus konfigurációhoz jutunk.

5.16. Tétel. *[10] Legyen α egy kezdő kiosztás. Ekkor $O(n^2)$ aritmetikai művelet, $O(n^2 m \lambda^{-1})$ lövéssel és $O(nm^2 \lambda^{-1})$ korong mozgatásával egy kritikus konfigurációt kaphatunk.*

Bizonyítás. A bizonyítást a következőképp végezzük: először megpróbálunk készíteni egy olyan konfigurációt, amelyikből ugyanazt a kritikus konfigurációt kapjuk, viszont sokkal kevesebb korongot tartalmaz. Pontosabban $||\alpha|| \leq 2m$ legyen. Ekkor az 5.15. Tételt felhasználva kapjuk a bizonyítást. Legyen Q az $n \times n$-es Laplace mátrix.

$$Q(u,v) = \begin{cases} -e(u,v), & \text{ha } u \neq v; \\ d(u), & \text{ha } u = v. \end{cases}$$

Továbbá legyen Q_q a Laplace mátrix q csúcshoz tartozó sorának és oszlopának elhagyásával kapott mátrix és Q_q^+ az a mátrix, amikor csak a q-hoz tartozó sort tötöljük. A Q mátrixban minden sor és oszlop összege 0. Legyen $c_q(v)$ a Q_q^+ v-hez tartozó oszlopa, így $c_q(q) = -\sum_{v \in V-\{q\}} c_q(v)$. Ekkor a v csúcs lövése után kapott konfigurációra fel tudjuk írni, hogy $\alpha = \alpha_0 - c_q(v)$. Továbbá ha egy x legális sorozat mentén lövünk, akkor $\alpha = \alpha_0 - Q_q^+ \cdot [x]$, ez mind a Laplace mátrix definíciójából következik.

5.17. Lemma. *[10] Legyen $\alpha = \alpha_0 - Q_q^+ \cdot [z]$ egy z tetszőleges $n-1$ dimenziós vektorra. Ekkora az α_0-ból és α-ból kapott egyértelmű kritikus konfiguráció megegyezik.* ∎

Most pedig megmutatjuk, hogy az $\alpha' = \alpha - Q_q \lfloor Q_q^{-1} \alpha \rfloor$ egy megfelelő konfiguráció lesz. Mivel $Q_q^{-1}\alpha$ egy $n-1$ dimenziós vektor, így a definíció értelmes, és a 5.17. Lemma miatt elég az α'-ből kapott kritikus konfigurációt megkeresni.

5.18. Lemma. *[10] Tetszőleges α-ból a fent említett módon kapott α'-re teljesül, hogy $-d(v)+1 \leq f_{\alpha'}(v) \leq d(v)-1$ minden $v \neq q$ esetén.*

Bizonyítás. Legyen $t = Q_q^{-1}\alpha - \lfloor Q_q^{-1}\alpha \rfloor$, tehát $0 \leq t(v) < 1$ minden $v \neq q$-ra. Ezért $\alpha' = \alpha - Q_q \lfloor Q_q^{-1}\alpha \rfloor = Q_q(Q_q^{-1}\alpha - \lfloor Q_q^{-1}\alpha \rfloor) = Q_q t$. Pontosabban $\alpha'(v) = (Q_q t)(v) = t(v)d(v) - \sum_{u \in N(v)-\{q\}} t(u)e(u,v)$. Most pedig egyszerűen felhasználjuk a $t(v)$-re látott egyenlőtlenségeket, így $0 \leq t(v)d(v) < d(v)$ és $0 \leq \sum_{u \in N(v)-\{q\}} t(u)e(u,v) < d(v)$, azaz $-d(v) < \alpha'(v) < d(v)$. Mivel α' egész vektor, így a lemmát beláttuk. ∎

Először számoljuk ki $Q_q^{-1}\alpha$-t, feltéve, hogy Q_q^{-1} adott. Ezt $O(n^2)$ lépésben megtehetjük, hiszen egy $n-1 \times n-1$-es mátrixot szorzunk össze egy $n-1$ dimenziós vektorral. Q_q^{-1} mezőiben racionális számok állnak, méghozzá legfeljebb $\det Q_q = \kappa$ rendűek, ahol κ a gráf feszítőfáinak száma. Ez a gráf ismeretében konstans. Ekkor már t is könnyen megkapható $O(n)$ lépésben. Innen $\alpha' = Q_q t$ is $O(n^2)$ lépésben számolható.

Ezután már csak azt kell megnézni, hogy $||\alpha'|| = \sum_{v \in V-\{q\}} |f_{\alpha'}(v)| < \sum_{v \in V-\{q\}} d(v) = 2m$, így az 5.15. Tétel felhasználásával készen vagyunk a tételünk bizonyításával. ∎ ∎

6. fejezet

Összefoglalás

6.1. Eredmények

Az első pontban megismerhettük a játék alapvető tulajdonságait kétféle megközelítésben is. Ugyanitt beláttuk a témakör egyik legfontosabb tételét, a 2.12. Tételt, mely kimondja, hogy ha $N > 2m - n$, akkor tudjuk, hogy a játék végtelen, ha $N < m$, akkor tudjuk, hogy véges, és a kettő között pedig a kiosztástól függ, hogy véges-e vagy végtelen. Azt nem tudjuk, hogy hogyan lehetne gyorsan eldönteni, hogy egy általános gráf esetén egy ilyen kiosztás véges vagy végtelen játékot eredményez.

Ezután foglalkoztunk a játék során előforduló lehetséges ismétlődésekkel, illetve a diffúz konfigurációkkal, azaz azokkal a kiosztásokkal, melyek ismétlődhetnek. Adtunk egy $O(m)$ idejű algoritmust annak eldöntésére, hogy egy konfiguráció ismétlődhet-e.

Megvizsgáltuk azt az esetet, amikor a gráfunk egy kör, megmutattuk, hogy hogyan lehet egy diffúz konfigurációból eljutni egy másikba, és észrevettük, hogy egy diffúz konfigurációban csak 0, 1, vagy 2 korong lehet a csúcsokon, és a 0-k, illetve a 2-esek felváltva kell, hogy következzenek. Itt azt is meg tudtuk mondani, hogy pontosan mikor véges a játék, és mi a végállapot.

Ha a gráfunk egy teljes gráf, és $\binom{n}{2}$ korongunk van összesen, akkor szintén egészen pontosan meg tudtuk adni, hogy kizárólag az $\alpha = (0, 1, ..., n-1)$ kiosztás eredményez végtelen játékot. Ezután a 4.7. Tételben adtunk egy szükséges és elégséges feltételt tetszőleges N esetén a játék végességére.

Az eddig vizsgált játéknak egy másik verzióját is megvizsgáltuk, amikor van egy nyelőpont. Definiáltuk a stabil, ismétlődő és kritikus kiosztásokat, megvizsgáltuk, mi kell ahhoz, hogy lövések után kritikus konfigurációhoz jussunk, majd az 5.16. Tételben adtunk egy $O(n^2 m \lambda^{-1})$ lövéssel és $O(nm^2 \lambda^{-1})$

korong mozgatásával járó algoritmust, mely megadja egy kiindulási kiosztásból a belőle elérhető egyértelmű kritikus konfigurációt.

6.2. Saját eredmények

Adtam egy $O(m)$ idejű algoritmust annak eldöntésére, hogy egy konfiguráció diffúz-e. Általánosan bebizonyítottam, hogy a körön tetszőleges $N \geq n$ korongszám esetén teljesül a 3.8. Tétel. Ezután adtam egy $O(n^2)$-es lépésszámbecslést arra, hogy a körgráf esetében két azonos súlyú $N = n$ korongú diffúz konfiguráció között létezik lövéssorozat, amely maximum ennyi lövést használ.

6.3. Nyitott kérdések

Végezetül összefoglalok néhány kérdést, melyekre a válaszok még nem ismertek.

Hogyan változik a játék végessége, ha egy új élet behúzunk a gráfba?

Hogyan változik a játék végessége, ha egy élet felosztunk egy csúccsal?

Hogyan tudjuk megmondani egy játékról, hogy véges-e anélkül, hogy $O(n^4)$ lépésben lejátszanánk a játékot?

Hogyan tudjuk megmondani egy véges játékról, hogy egy adott csúcs hányszor lő, anélkül, hogy lejátszanánk a teljes játékot?

Meg tudjuk-e mondani egy véges játék lejátszása nélkül, hogy melyik az a csúcs, amelyik nem lő?

6.4. További cikkek

Baker [3]-ben a Riemann Roch tételről, valamint egy dualitás tételről olvashatunk, melynek segítségével könnyen látható, hogy a kritikus konfiguráció duálisának, a v_0 redukáltnak milyen tulajdonságai vannak.

Irányított gráfokon is vizsgálható ugyanez a játék, erről Lovász [1] cikkében olvashatunk.

A dualitás tételhez lépésszámbecsléseket, illetve a v_0 redukált meghatározásához szükséges algoritmusokat találhatunk Baker [2]-ben és de Bruyn [6]-ban.

Irodalomjegyzék

[1] A. Björner and L. Lovász. Chip-firing games on directed graphs. *J. Algebr. Comb.*, 1:305–328, 1992.

[2] M. Baker and F. Shokrieh. Chip-firing games, potential theory on graphs, and spanning trees. *J. Comb. Theory, Ser. A*, 120(1):164–182, 2013.

[3] Baker Matthew and Norine, Serguei. Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph. *Adv. Math.*, 215:766–788, 2007.

[4] A. Björner, L. Lovász, and P. W. Shor. Chip-firing games on graphs. *Eur. J. Comb.*, 12:283–291, 1991.

[5] J. Jeffs and S. Seager. The chip firing game on n-cycles. *Graphs Comb.*, 11(1):59–67, 1995.

[6] Josse van Dobben de Bruyn. Reduced divisors and gonality in finite graphs. Master's thesis, Mathematisch Institut, Universiteit Leiden, 2012.

[7] B. Korte, L. Lovász, and R. Schrader. *Greedoids.* Algorithms and Combinatorics, 4. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1991.

[8] G. Tardos. Polynomial bound for a chip firing game on graphs. *SIAM J. Disc. Math.*, 1:397–398, 1988.

[9] M. Thorup. Firing Games. Technical report, University of Copenhagen, 1996.

[10] J. van den Heuvel. Algorithmic aspects of a chip-firing game. *Comb. Probab. Comput.*, 10:505–529, 2001.

[11] W. Zhuang, W. Yang, L. Zhang, and X. Guo. Properties of Chip-firing Games on Complete Graphs. Technical report, Department of Mathematics and Physics, Xiamen University of Technology, Department of

Mathematics, Taiyuan University of Technology, School of Mathematical Science.