Az analízis néhány közgazdaságtani alkalmazása

Szakdolgozat

Írta: Simon Anita
Matematika Bsc szak
Matematikai elemző szakirány

Témavezető:
Sikolya Eszter, adjunktus
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2009.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A függvények az elméleti és alkalmazott matematika számos területén jelen vannak, ebbe beleértve a közgazdaságtani matematikát is, hiszen ennek a területnek a nyelve tele van olyan szakkifejezésekkel mint költségfüggvény, fogyasztási függvény, keresleti és kínálati függvény stb. A közgazdaságtanban továbbá fontos kérdés annak a vizsgálata, hogy bizonyos mennyiségek milyen gyorsan változnak, például valamely populáció növekedésének jóslásához vagy valamely termék iránti kereslet előrejelzéséhez ismernünk kell a kérdéses mennyiség változásának mértékét.

A görbe adott pontbeli meredekségének geometriai vizsgálata a függvény deriváltjának fogalmához vezet. A közgazdaságtanban igen fontos a függvényderiváltnak az az értelmezése, amely a függvény változásának sebességével függ össze, hiszen lényeges kérdés, hogy bizonyos mennyiségek milyen gyorsan változnak. Valamely termék iránti kereslet előrejelzése, vagy valamely populáció növekedésének megjóslása, mind olyan feladat, amelyekhez ismernünk kell a kérdéses mennyiség változásának mértékét. Az a matematikai fogalom, amely a változás mértékének leírására szolgál, a derivált.

I.e. 360-ban Eudoxos[1] kidolgozott egy általános módszert síkbeli alakzatok területének meghatározására, ez a fokozatos kimerítés módszere. Hasonló módszereket fejlesztettek ki görbék hosszának és testek térfogatának mérésére is. A kimerítés módszere korlátozottan bizonyult használhatónak, így olyan síkidomok területének megméréséhez, amelyet nem csupán egyenes szakaszok határolnak, szükség van egy függvény adott intervallumon vett integráljának definíciójára. Ez a 17. században kifejlesztett új módszer szorosan kötődik a differenciálszámításhoz.

A dolgozatban a fent említett három analízisbeli eszköz – függvények használata, differenciálszámítás, integrálszámítás – néhány közgazdaságtani alkalmazását mutatom be.

[1] Eudoxos: I. e. 4.századi matematikus és csillagász

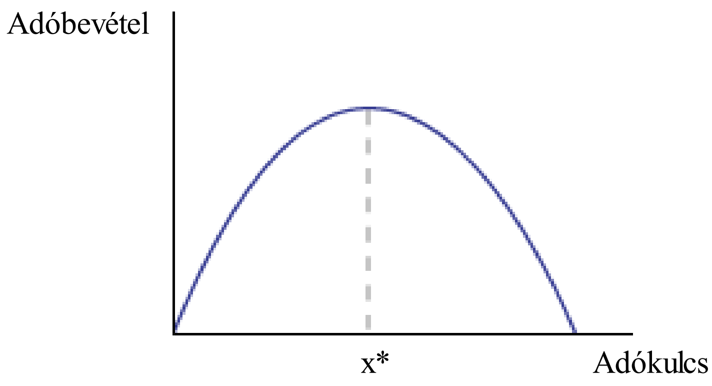
2. Függvények

Egy változó (mennyiség) *függvénye* egy másiknak, ha második változótól függ az első változó. Például, a sugártól függ a kör területe. Nem minden esetben szükséges matematikai képlet ahhoz, hogy egy változó egy másiktól való függéséről beszéljünk, hiszen a hozzárendelést megadhatjuk táblázat segítségével is. Az alábbi táblázat például az Egyesült Államok évi egy családra eső átlagjövedelem változását mutatja (2006-os dollár árfolyamban)[2]:

Év	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Egy családra eső átlagjövedelem ($)	59398	58545	57920	57751	57705	58036	58407

Megadható két változó közötti összefüggés diagram vagy grafikon segítségével is.

A következő görbe, amit *Laffer-görbé*nek nevezünk, a jövedelemből származó adóbevétel és a jövedelem adókulcsának viszonyát jeleníti meg. Ez kiemelkedő szerepet játszott az 1980-as adócsökkentés hatása körüli vitákban az USA-ban, közgazdászok keresték azt az x* százalékos kulcsot, ami maximális bevételt biztosít az államnak. Amennyiben az adókulcs 0 százalékos, az adóbevétel is 0 lesz, és ha az adókulcs 100%, akkor szintén 0 lesz az adóbevétel, mivel senki sem fog úgy dolgozni, hogy teljes jövedelme az államé lesz. A Laffer-görbe azt sugallja, hogy ha az adókulcs magas, akkor az adók további emelése végül csökkenti a beszedett adót. A jószág kínálatának csökkenése oly mértékben csökkenti az adóbevételeket, hogy a magasabb adókulcs nem tudja ellensúlyozni a visszaesést. Ez a *Laffer-hatás*.



1. ábra

[2] Az adatok az Economic Report of the President, www.gpoaccess.gov/eop/tables08.html táblázatából származnak

2.1. Egyváltozós valós függvények

Egy D értelmezési tartományú valós x változójú *függvény* egy olyan hozzárendelési szabály, amely minden D-beli x számnak egyértelmű módon megfeleltet egy valós számot. A függvényeket legtöbbször betűkkel jelöljük, például f, g, F. Ha f egy függvény, x pedig egy szám a D értelmezési tartományából, akkor $f(x)$ azt a számot jelöli, amelyet f x-nek feleltet meg. Ez a szimbólum szavakkal így hangzik: f az x helyen. Fontos felhívni a figyelmet arra, hogy az f és $f(x)$ szimbólumok jelentése különbözik, mivel f magát a hozzárendelési szabályt jelenti, míg $f(x)$ ezen hozzárendelés x helyen felvett értékét. Az f függvény x-beli értékét gyakran szokás y-nal jelölni, vagyis $y=f(x)$. Ekkor x-et f *független változójá*nak vagy argumentumának nevezzük, y-t pedig *függő változó*nak, mivel y értéke függ x-től. A közgazdaságtanban x-et *exogén*[3], y-t *endogén*[4] *változó*nak is szokták nevezni.

Ha egy árucikk x mennyiségének előállítási költsége $C(x)=1000+300\cdot x+x^2$, akkor 0 darab termék előállítási költségét, úgy kapjuk meg, ha a $C(x)$-et definiáló formulába x helyébe 0-át helyettesítünk:

$$C(0)=1000+300\cdot 0+0^2=1000 \ .$$

Ugyanígy gondolkodva 100 darab termék előállítási költsége:

$$C(100)+300\cdot 100+100^2=41000 \ .$$

Ahhoz, hogy megtudjuk mennyi a termelés 1 darabbal való növekedésének költsége, ki kell számolnunk, hogy mennyi 101 darab termék előállítási költsége:

$$C(101)+300\cdot 101+101^2=41501 \ .$$

Innen a költségnövekményt könnyen megkaphatjuk:

$$C(101)-C(100)=41501-41000=501 \ .$$

Tehát 501-gyel kerül többe 101 termék előállítása. Nézzük ezt általánosságban:

$$C(x+1)=1000+300\cdot(x+1)+(x+1)^2=x^2+302\cdot x+1301 \ ,$$

tehát a növekmény:

$$C(x+1)-C(x)=2\cdot x+301 \ ,$$

ez közgazdaságtanilag azt jelenti, hogy ennyi a termelés 1 egységgel való emelésének költsége az x szintről.

[3] kívülről származó, külső eredetű
[4] belső eredetű

H. Schultz az USA 1915 és 1919 közötti időszakbeli gyapotkeresletére a $D(P)=6{,}4-0{,}3\cdot P$ becslést adta, ahol P az ár, $D(P)$ pedig a mennyiség. Meghatározhatjuk a keresletet különböző árak mellett. Legyen az ár rendre 8, 10 és 10.22:

$$D(8)=6.4-0.3\cdot 8=4\ ,$$

$$D(10)=6.4-0.3\cdot 10=3.4\ ,$$

$$D(10.22)=6.4-0.3\cdot 10.22=3.334\ .$$

Ezt fordítva is megtehetjük, vagyis, ha a kereslet 3.13, meg tudjuk mondani, hogy mennyi az ár:

$$D(P)=3.13=6.4-0.3\cdot P\text{, amiből } P=10.9\ .$$

2.2. Az értelmezési tartomány és az értékkészlet

A függvény definíciójának az *értelmezési tartomány* megadását is magában kell foglalnia. Az $f(x)=x^2$ egyenlőséggel megadott f függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza. A $C(x)=1000+300\cdot x+x^2$ egyenlőséggel definiált C költségfüggvény értelmezési tartománya nem volt külön definiálva, de a természetes értelmezési tartomány a $0,1,2,3,\ldots,x_0$ számok halmaza, ahol x_0 a cég által termelhető maximális mennyiség. Ha x folytonos változó, akkor a természetes értelmezési tartomány az zárt $[0,x_0]$ intervallum lesz.

Ha az f függvény értelmezési tartománya D, akkor a függvény által felvett $f(x)$ értékek összességét az f függvény *értékkészleté*nek hívjuk. Az értelmezési tartományt gyakran szokás D_f -el, az értékkészletet R_f -el jelölni.

2.3. Grafikonok

Az $y=f(x)$ egyenletet legtöbbször a derékszögű vagy Descartes-féle koordinátarendszerben ábrázoljuk, ami más néven az xy sík. Egy (a,b) számpár megoldása egy x -ben és y -ban vett kétismeretlenes egyenletnek, ha x helyébe a -t és y helyébe b -t helyettesítve igaz lesz az egyenlőség. Az összes lehetséges megoldásból álló halmaz a *megoldáshalmaz*. Ha a megoldáshalmazbeli számpárokat koordinátarendszerben ábrázoljuk, egy görbét kapunk, amit az egyenlet *grafikonjá*nak nevezünk.

Nézzünk a grafikonok alkalmazására egy közgazdasági példát! Ehhez szükségünk lesz az alábbi képletekre. Legyen $P_1=(x_1,y_1)$ és $P_2=(x_2,y_2)$ a sík két pontja, a két pont közötti távolság a Pythagoras-tétel szerint kielégíti a $d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$ egyenletet. Ebből adódik a távolságképlet: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Ha (a,b) a sík egy pontja. Az (a,b) középpontú r sugarú kör azon (x,y) pontok halmaza, amelyeknek (a,b) -től vett távolsága éppen r . Az (a,b) középpontú, r sugarú kör egyenlete a következő: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

A példában egy cégnek két kirendeltsége van egymástól 60 kilométer távolságban, amelyeket az $A(0,0)$ és a $B(60,0)$ pontokban vettünk fel. Ugyanazt a terméket kínálják ugyanazon a p forintos egységáron. A szállítási költség A -tól kilométerenként és egységenként 10 forint, B -től pedig ugyanez 5 forint. Az (x,y) pontban egy vevő tartózkodik.

Az A , illetve a B pontokból az (x,y) pontba szállítás teljes egységárát (az áru ára és a szállítás ára) adja meg a következő két kifejezés:

$$p+10\cdot\sqrt{x^2+y^2} \text{ és } p+5\cdot\sqrt{(x-60)^2+y^2} \ .$$

Meghatározhatjuk azon egyenletet, mely aszerint vágja két részre a kirendeltségek piacainak halmazát, hogy az illető piac melyik cégtől tudja az árut olcsóbban beszerezni. Ezt úgy tehetjük meg, hogy a szállítás költségeit leíró képleteket egyenlővé tesszük:

$$p+10\cdot\sqrt{x^2+y^2}=p+5\cdot\sqrt{(x-60)^2+y^2}$$

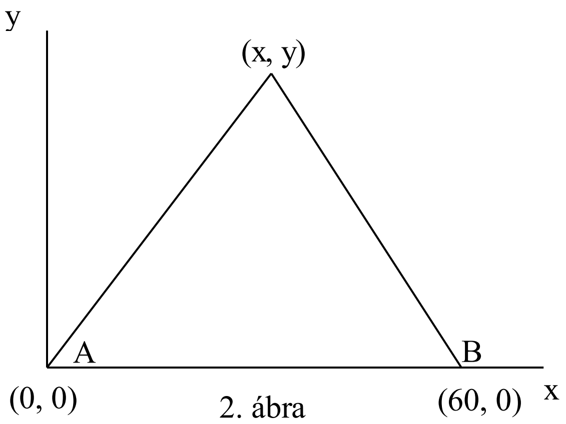
$$2\cdot\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-60)^2+y^2}$$

$$4\cdot x^2+4\cdot y^2=x^2-120\cdot x+3600+y^2$$

$$x^2+y^3+40\cdot x=1200$$

$$(x+20)^2+y^2=40^2$$

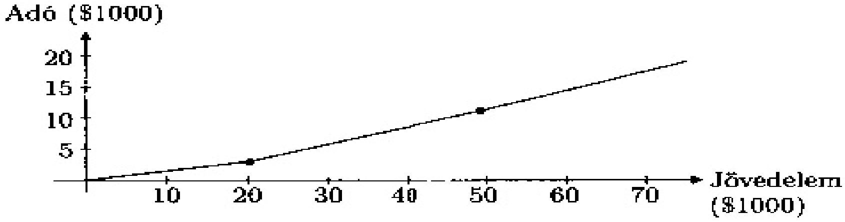
Tehát a piacokat szétvágó görbe egy kör, amelynek középpontja a $(20,0)$, sugara pedig 40.



2. ábra

2.4. Függvények grafikonja

Az $(x, f(x))$ alakú pontok összessége az f *függvény grafikon*ja, ahol x végigfutja f értelmezési tartományát. A közgazdaságtanban gyakran előfordulnak szakaszonként más-más képlettel értelmezett függvények.



3. ábra

Az ábrán az USA-beli 1991. évi személyi jövedelemadó mint a jövedelem függvénye szerepel. A 20250 dollár alatti jövedelmek 15%-os adókulccsal rendelkeznek, a 20251 és 49300 dollár közöttiek 28%-ossal, a 49301 dollár feletti jövedelmek 31%-ossal.

Az egységhossz megválasztása nagyon fontos, amikor egy hozzárendelést függvénnyel akarunk megadni. A pénzt dollárban, forintban vagy akár euróban is mérhetjük. A grafikonnak a szemlélőre gyakorolt hatását nagyban befolyásolja az egységek megválasztása. Ezt sűrűn használják, hogy befolyásolják az emberek különböző mennyiségek közötti kapcsolatáról alkotott benyomását.

2.5. Lineáris függvények

Az $y = a \cdot x + b$ alakú megfeleltetést (ahol a és b konstansok) az x és y változó közötti *lineáris hozzárendelés*nek nevezzük. $f(x) = a \cdot x + b$ esetén f-et lineáris vagy elsőfokú függvények nevezzük. A függvény meredeksége pedig az a szám. Az x szám 1-gyel való növekedésével kapott megváltozását méri az a meredekség. Az $x = 0$ helyen az $y = a \cdot 0 + b = b$, ezért b-t y-tengelymetszetnek szokás nevezni.

A meredekséget a következő képlettel határozhatjuk meg:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2 ,$$

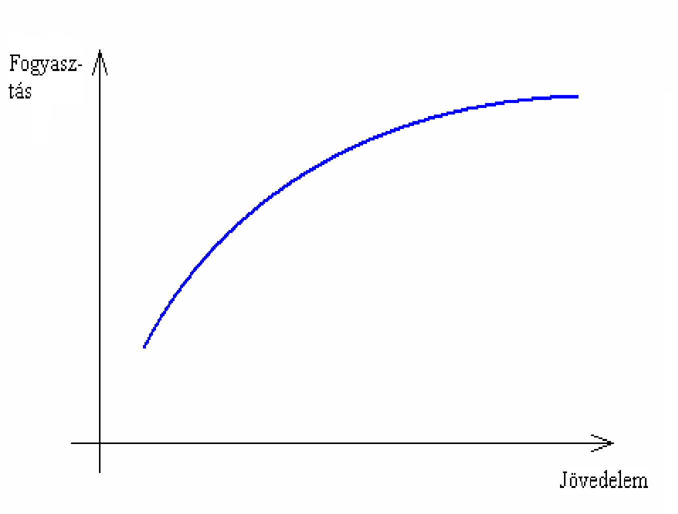
ahol (x_1, y_1) és (x_2, y_2) az egyenes két különböző pontja.

A $C = 55{,}73 \cdot x + 182100000$ egy költségfüggvény-becslés, ahol C az évenkénti költség dollárban, x pedig az évenkénti acéltermelés tonnában. Ebben az esetben a meredekség 55.73, ami azt jelenti, hogy ha 1 tonnával növeljük a termelést, a költség 55.73 dollárral növekszik.

2.6. Lineáris modellek

A gyakorlatban alkalmazott modelleknek gyakori szereplői a lineáris függvények. Két változó közötti lineáris megfeleltetésre példa a hőmérséklet Celsius-, illetve Fahrenheit-fokban mért értéke. A legtöbb közgazdaságtanban szereplő lineáris modell csak közelítése más, összetettebb modelleknek. Általában statisztikai módszerekkel választják ki azt a modellt, ami a legjobban közelíti a mérési adatokat.

A fogyasztáselmélet fontos részterülete a makroökonómiának, mivel az aggregált kereslet egyik fontos összetevője a fogyasztás, így alakulása nagy mértékben hat a gazdaság ingadozásaira. Több makroökonómikus próbálta leírni, hogy az összgazdasági fogyasztásra milyen tényezők és milyen mértékben hatnak. Az általuk előállított modellek célja az volt, hogy ezeket a tényezőket olyan jó közelítéssel határozzák meg, hogy lehetőséget biztosítsanak arra, hogy előre jelezzék a jövőbeli fogyasztást. John Maynard Keynes[5] modelljében csak a jövedelemnek van a fogyasztásra számottevő hatása, tehát létezik a *fogyasztási függvény*, melynek egyetlen változója a jövedelem. Keynes szerint a fogyasztási függvény növekvő, de a meredeksége, a *fogyasztási határhajlandóság* a jövedelem emelkedésével fokozatosan csökken. „A fogyasztási határhajlandóságnak nevezzük azt a számot, amely megmutatja, hogy a gazdaság fogyasztói minden jövedelemegység hányad részét kívánják fogyasztási cikkekre kiadni."[6]



A keynesi fogyasztási függvény

4. ábra

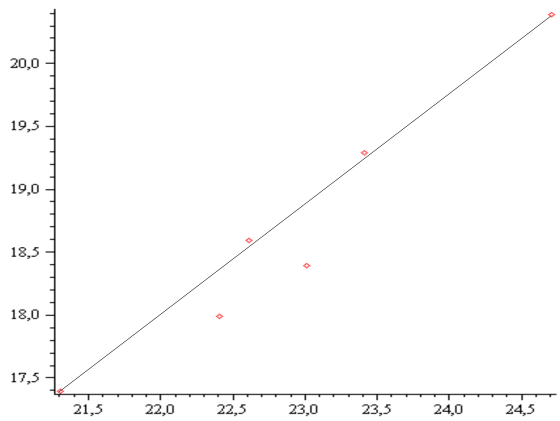
[5] John Maynard Keynes (1883. június 5. - 1946. április 21.) angol matematikus és közgazdász, az elméleti közgazdaságtan tudományának egyik legnagyobb egyénisége, a modern makroökonómia megteremtője.
[6] Gacsányi – Meyer – Misz - Simonits: Közgazdaságtan II. Makroökonómia, 37. oldal

A szolgáltatásokra és javakra fordított C teljes fogyasztási kiadást az Y nemzeti jövedelem függvényének tekintik a Keynes-i makroökonómiában, így $C=f(Y)$. A modellekben általában felteszik, hogy a fogyasztási függvény lineáris, tehát $C=a\cdot Y+b$. Ekkor a a meredekséget nevezik fogyasztási határhajlandóságnak. Amennyiben C -t és Y -t millió dollárban értjük, akkor a azt mondja meg, hogy a nemzeti jövedelem 1 millió dollárral növekedése esetén hány millióval nő a fogyasztás. Rendszerint 0 és 1 közé esik ez a szám. Egy, az USA gazdaságának 1914 és 1929 közötti szakaszáról szóló tanulmányban T. Haavelmo a $C=95.05+0.712\cdot Y$ fogyasztási függvénnyel dolgozott. Itt a fogyasztási határhajlandóság 0.712.

Az alábbi táblázatban egy adott ország 1955 és 1960 közötti nettó nemzeti jövedelemét és éves összfogyasztását láthatjuk millió dollárban megadva.

Év	1955	1956	1957	1958	1959	1960
Összfogyasztás (C)	17,4	18,0	18,4	18,6	19,3	20,4
Nettó nemzeti termék (Y)	21,3	22,4	23,0	22,6	23,4	24,7

Ezt ábrázolhatjuk egy YC -síkon is:



5. ábra

A kép szélső pontot összekötő egyenes egyenlete a következő:

$$C-17.4=\frac{20.4-17.4}{24.7-21.3}\cdot(Y-21.3)$$

$$C-17.4=\frac{3}{3.4}\cdot(Y-21.3)$$

$$C=0.8824\cdot Y-1.3941$$

A meredekség becslése a fogyasztási határhajlandóságnak.

3. Deriváltak

3.1. A görbék meredeksége

Az a számmal, vagyis az egyenes iránytangensével mérjük az $y=a\cdot x+b$ egyenletű egyenes meredekségét. Amennyiben a pozitív és nagy, az egyenes meredeken emelkedik balról jobbra, viszont, ha a nagy abszolút értékű negatív szám, akkor meredeken esik az egyenes. Tetszőleges függvény grafikonjának adott pontbeli *meredekség*ét az adott pontban húzott érintő meredekségével definiáljuk. Az f függvény grafikonja *szelő*jének meredeksége az a és $a+h$ pontok között.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

amit *differencia hányados*nak hívunk. Minket ezen szelőmeredekségek határhelyzete érdekel az $h=0$ pontban.

Legyen f értelmezve az a pont környezetében, ekkor f differenciálható az a pontban, ha

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

létezik és véges. Ezt nevezzük az f függvény a -beli *derivált*jának vagy *differenciál hányadosá*nak. Az f függvény grafikonjának az a -beli érintője az $(a,f(a))$ -n átmenő $f'(a)$ meredekségű egyenes, ha f az a -ban differenciálható.

Egy adott árucikkre, mely darabjának ára P , az árucikk iránti kereslet $D(P)=b-a\cdot P$ függvénnyel adható meg. Ekkor a $D'(P)$ derivált $-a$ lesz, ugyanennek a terméknek egyes darabjainak előállítási költsége $C(x)=P+q\cdot x^2$, ekkor $C'(x)=2\cdot q\cdot x$ lesz.

3.2. A változás mértéke és jelentősége a közgazdaságtanban

A derivált értelmezhető úgy is, mint a változás mértéke. Az y mennyiség az $y=f(x)$ összefüggés révén függ az x mennyiségtől, $x=a$ esetén a függvény értéke $f(a)$. Ha az x változó értéke a -ról $a+h$ -ra változik, y értéke $f(a)$ -ról $f(a+h)$ -ra, a függvény értékének megváltozása $f(a+h)-f(a)$. Az átlagos megváltozása az y mennyiségnek az a -tól $a+h$ -ig terjedő intervallumon:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Ez a tört nem más, mint az f *különbségi hányadosa*. Ennek határértéke, $f'(a)$ az f pillanatnyi megváltozása az a pontban.

Vegyünk egy vállalatot, ami termel valamilyen terméket, ennek a terméknek a mennyiségét jelölje x. Legyen $C(x)$ egy egység előállításának *költsége*, $R(x)$ az a *jövedelem*, ami egy egység eladásából szárazik, $\pi(x)=R(x)-C(x)$ az a *profit*, ami egy egység előállításából és eladásából származik. $C'(x)$ -et *határköltségnek* nevezzük, ami a termelésváltozás egységére jutó költségváltozás nagyságát fejezi ki. $R'(x)$ -et *határbevételnek* hívjuk, ami az eladások egy egységgel való növeléséből származó bevételváltozás. A $\pi'(x)$ -et pedig *határprofitnak* nevezzük, ami a termelés egységnyi növekedésére jutó profitváltozás. A határ szót gyakran használják a közgazdaságtanban a derivált jelölésére. A határköltség a definíció szerint:

$$C'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{C(x+h)-C(x)}{h}\ .$$

A legtöbb esetben egy cég nagy számú termékmennyiséget állít elő, azaz x nagy, ehhez képest $h=1$ 0-hoz közeli értéknek tekinthető. Így a következő közelítő egyenlőséget írhatjuk fel:

$$C'(x)\approx\frac{C(x+1)-C(x)}{1}=C(x+1)-C(x)\ .$$

„A határköltség tehát közelítően egyenlő a $C(x+1)-C(x)$ költségnövekedéssel, azaz azzal a többletköltséggel, ami ahhoz szükséges, hogy x számú termék helyett $x+1$ -et állítsunk elő.”[7] Azokban az esetekben, ahol a differenciálszámítás megfelelő fogalmai nem állnak rendelkezésre, a közgazdászok a határköltséget gyakran a $C(x+1)-C(x)$ különbségként definiálják.

Amennyiben $R(x)=a\cdot x-b\cdot x^2$, $C(x)=a_1\cdot x+b_1$, a határbevétel $R'(x)=a-2\cdot b\cdot x$, a határköltség $C'(x)=a_1$ és a határprofit $\pi'(x)=a-2\cdot b\cdot x-a_1$. Meghatározhatjuk azt az x értéket, amelyre a határprofit nulla lesz. Az előbbi egyenletet átrendezve kapjuk, hogy

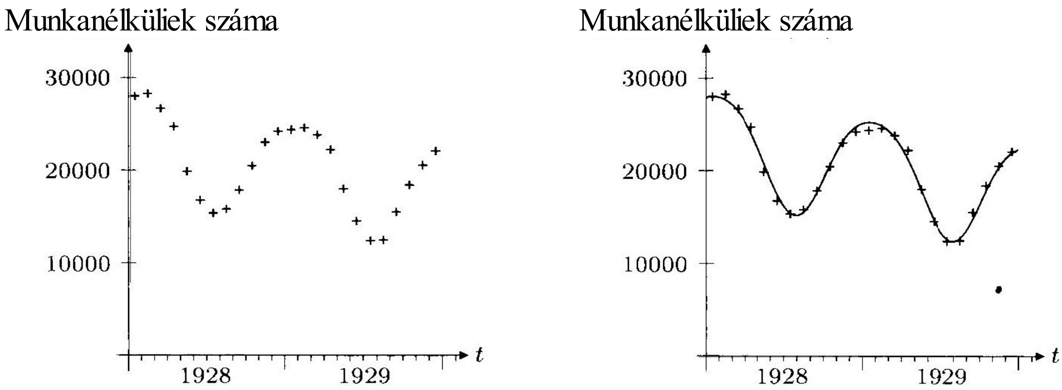
$$x=\frac{(a-a_1)}{2\cdot b}\ .$$

Tehát a határprofit akkor lesz nulla, ha az $(a-a_1)/2\cdot b$ hányados nulla lesz.

[7] Sydsaeter-Hammond: Matematika közgazdászoknak, 109. oldal

3.3. Differenciálhatóság

A deriváltnak a definíciója ezt feltételezi, hogy a független változó tetszőlegesen kis megváltozásai lehetségesek, viszont gyakorlati példáknál sokszor nem lehetséges a változó tetszőlegesen kis megváltozásait mérni vagy megvalósítani. A közgazdaságtani mennyiségeket, mint például egy ország nemzeti jövedelmét, csak bizonyos időközönként határozzák meg. Egyes függvények pedig, mint például a költségfüggvény, a változóknak csak az egész értékeire vannak definiálva, vagyis csak diszkrét értékeket vehet fel. Az ilyen függvényekre a derivált nem definiálható, ezért a függvényt egy differenciálható függvénnyel helyettesítjük, amely jól közelíti az eredeti függvényt. Az alábbi ábra erre szemléltet egy példát: bal oldalán a Norvégiában 1928-1929 között regisztrált munkanélküliek száma látható, a jobb oldalon pedig egy differenciálható függvény, amelynek grafikonja jól közelíti a bal oldalon feltüntetett pontokat.



6. ábra

3.4. A szorzat és hányados deriválása

A szorzat differenciálására vonatkozó szabály egy olajkútból kitermelt olajra vonatkozó példán keresztül a következő. Legyen $x(t)$ a t időpillanatban a termelés rátája hordó/nap egységben, míg $p(t)$ egy hordó olaj ára a t időpillanatban dollárban kifejezve. A kútból egységnyi idő alatt kitermelt olaj ára és mennyisége is a t idő függvényében változik. Az egynapi bevétel dollárban $R(t)=p(t)\cdot x(t)$, így a szorzat szabálya szerint

$$R'(t)=p'(t)\cdot x(t)+p(t)\cdot x'(t)\ .$$

Ezt a következőképpen értelmezhetjük. Az infláció és a vállalat fejlődése miatt $p(t)$ és $x(t)$ is növekszik az idővel, így $R(t)$ növekedésének két oka van: egyrészt az inflációból származó áremelkedés, másrészt a termelés növekedése. Az infláció miatti növekedés arányos a kitermelt olaj $x(t)$ mennyiségével és nagysága $p'(t)\cdot x(t)$. $R(t)$ változásának mértéke arányos az árral, és nagysága $p(t)\cdot x'(t)$ a termelés növekedése miatt. Tehát a $R'(t)=p'(t)\cdot x(t)+p(t)\cdot x'(t)$ egyenlőség azt fejezi ki, hogy $R'(t)$, vagyis az $R(t)$ függvény változásának értéke ezen két összetevő összege.

Az $f'(a)/f(a)$ az f *arányos megváltozása* az a pontban. A közgazdaságtanban az arányos változási mértékeket a *változás relatív mértéké*nek is szokás nevezni. A bevétel változásának relatív mértékét megkapjuk, ha az egyenlőséget elosztjuk $R(t)=p(t)\cdot x(t)$ -vel, vagyis

$$\frac{R'}{R}=\frac{p'\cdot x+p\cdot x'}{p\cdot x}=\frac{p'}{p}+\frac{x'}{x}\ .$$

Tehát a jövedelem változásának relatív mértéke az ár és a termelés mennyisége változásának relatív mértékének összege.

Hasonlóan meggondolható a hányadosra vonatkozó szabály. Legyen $C(Q)$ egy termék Q darabjának előállításához szükséges összköltség, $C(Q)/Q$ hányados pedig a Q termék előállításához szükséges átlagköltség, ami az összköltség termékegységre jutó nagysága. A hányados deriválási szabálya alapján:

$$\frac{d}{dQ}[C(Q)/Q]=\frac{Q\cdot C'(Q)-C(Q)}{Q^2}=\frac{1}{Q}\cdot[C'(Q)-\frac{C(Q)}{Q}]\ .$$

Ebből látható, hogy amennyiben a termelés Q értéke pozitív, akkor a $C'(Q)$ határköltség akkor, és csak akkor lehet nagyobb a $C(Q)/Q$ átlagköltségnél, ha az átlagos költség növekedésének mértéke pozitív.

A változás relatív mértékét tekintve a hányados differenciálási szabálya a következő:

$$F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\Rightarrow\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{g'(x)}{g(x)}\ .$$

A hányados változásának relatív mértéke egyenlő a számláló és a nevező változásának relatív mértékének különbségével. Ennek egy közgazdaságtani alkalmazása a következő. Legyen $W(t)$ a nominális jövedelemráta, és $P(t)$ az árindex a t időpillanatban. Ekkor

$$w(t)=\frac{W(t)}{P(t)}$$

hányados a valódi jövedelemráta. Az előzőek szerint

$$\frac{w'(t)}{w(t)}=\frac{W'(t)}{W(t)}-\frac{P'(t)}{P(t)}\ .$$

Vagyis, a valódi jövedelem változásának relatív mértéke a nominális jövedelem és az árindex változásának relatív mértékének különbségével egyenlő. Tehát amennyiben az árak 6 %-kal, a névleges jövedelem 5 %-kal nőnek, akkor a valódi jövedelem 1 %-kal csökken.

3.5. Implicit függvények differenciálása

Az explicit módon definiált függvények deriválására jól ismert szabályok vannak, léteznek viszont olyan függvények is, amelyek nem egyenlőséggel vannak meghatározva, hanem valamilyen más formában, ún. *implicit módon*. Például az $x\cdot\sqrt{y}=2$ egyenlet esetén azt mondjuk, hogy az egyenlet implicit módon definiálja y-t x függvényeként. Ezt ábrázolva természetes kérdés, hogy mi a görbe egy tetszőleges pontjában húzott érintő iránytangense, vagyis mi az y függvény x szerinti deriváltja. Ezt az egyenlet implicit deriválásával adjuk meg.

A következő makroökonómiai modell a nemzeti jövedelem meghatározására szolgál egy zárt gazdaságban: $Y=C+I$, $C=f(Y)$. Az utóbbi egy fogyasztási függvény, míg az előbbi azt állítja, hogy az Y nemzeti jövedelemből C fogyasztásra és I beruházásra fordítódik. $f'(Y)$ a fogyasztási határhajlandóság, ami 0 és 1 között van. Legyen

$$C=f(Y)=95.05+0.712\cdot Y,$$

és a modellt használjuk Y-nak I-vel való kifejezéséhez. Meghatározhatjuk Y-nak a megváltozását, ΔY-t, ha I ΔI egységnyit változik. Mivel

$$Y=95.05+0.712\cdot Y+I,$$

így

$$Y\approx 3.47\cdot I+300.03 \quad .$$

Amennyiben I ΔI-vel változik, az Y mennyiség ehhez tartozó ΔY megváltozására az

$$Y+\Delta Y\approx 3.47\cdot(I+\Delta I)+330.03$$

teljesül. Ezt az előzőbe helyettesítve kapjuk, hogy $\Delta Y\approx 3.47\cdot\Delta I$ .Tehát, ha I egy egységgel, mondjuk 1 milliárd dollárral változik (azaz $\Delta I=1$), akkor a nemzeti jövedelem megfelelő változása $\Delta Y\approx 3.47$ milliárd.

Az $Y=C+I$, $C=f(Y)$ egyenletek Y-t mint I differenciálható függvényét definiálják. Meghatározhatjuk dY/dI-t, mivel $C=f(Y)$, így $Y=f(Y)+I$. Ha feltesszük, hogy ez az egyenlet Y-t mint I differenciálható függvényét definiálja, $Y=f(Y)+I$ egyenlőséget a láncszabály alapján differenciálva:

$$\frac{dY}{dI}=\frac{f'(Y)\cdot dY}{dI}+1$$

$$\frac{dY}{dI}\cdot[1-f'(Y)]=1$$

$$\frac{dY}{dI}=\frac{1}{1-f'(Y)} \quad .$$

Mivel $f'(Y)=0.712$, ezért $\frac{dY}{dI}=3.47$. Mivel $f'(Y)$ 0 és 1 között van, azért $1-f'(Y)$ is 0 és 1 között van, így $1/1-f'(Y)$ mindig nagyobb 1-nél. Tehát ebben a modellben 1 milliárd dollárnyi beruházás növekedés a nemzeti jövedelemnek mindig több mint 1 milliárd dollárral való növekedéséhez vezet. Minél nagyobb a fogyasztási határhajlandóság, $f'(Y)$, annál nagyobb $\frac{dY}{dI}$.

Implicit függvények második deriváltját is meg lehet határozni. Nézzük az előző modellben a $d^2 Y/dI^2$ -t, ha $Y=f(Y)+I$.

$$\frac{dY}{dI}=\frac{1}{[1-f'(Y)]}=[1-f'(Y)]^{-1} ,$$

ezt I szerint deriválva és a láncszabályt felhasználva kapjuk, hogy

$$\frac{d^2 Y}{dI^2}=(-1)\cdot[1-f'(Y)]^{-2}\cdot[-f''(Y)]\frac{dY}{dI}=f''(Y)\cdot[1-f'(Y)]^{-2}\frac{dY}{dI} .$$

Ezután $\frac{dY}{dI}$ ismert értékét felhasználva kapjuk, hogy

$$\frac{d^2 Y}{dI^2}=f''(Y)\cdot[1-f'(Y)]^{-3}=\frac{f''(Y)}{[1-f'(Y)]^3} .$$

3.6. Elaszticitás

A közgazdászok gyakran használják a derivált helyett az *elaszticitás*t, vagyis két összefüggő jelenség közötti olyan kapcsolatot, amelyben az egyiknek a megváltozását a másiknak bizonyos százaléknyi módosulása követ. Lehetséges, hogy arra vagyunk kíváncsiak, hogy valamely termék árának megváltozása hogyan hat a termék keresletére. Megnézhetjük, hogy hány darabbal változik meg a termék iránti kereslet, ha 1 dollárral nő az ár, ebben az esetben egy konkrét számot kapunk, ami a kereslet változása darabszámban. Sok esetben nem megfelelő az árral szembeni érzékenységét a keresletnek ilyen módon mérni, mivel míg egy autó 1 dolláros árnövekedése jelentéktelen, addig 1 font kávé árának 1 dolláros növekedése jelentős.

A probléma a keresletnek az árváltozástól való való függését, a termék iránti keresletet és az árat ugyanazzal a mértékkel való méréséből ered. Ezek a nehézségek elkerülhetőek, ha relatív változásokat használunk, tehát ha azt vizsgáljuk, hogy hány százalékkal változik a kereslet, ha 1%-kal nő az ár. Az így kapott számot nevezzük a kereslet *árrugalmasság*ának vagy *elaszticitás*ának, ami független lesz attól, hogy milyen mértékkel mértük a termék árát és a kereslet mennyiségét.

Az $x=D(P)$ függvény jelentse egy termék iránti keresletet az ár függvényében. A termék keresletének x mennyisége változik, ha az ár P -ről $P+\Delta P$ -re változik. Az x abszolút változása

$$\Delta x = D(P+\Delta P) - D(P) \,,$$

relatív vagy más néven arányos változása

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{D(P+\Delta P)-D(P)}{D(P)} \,.$$

A kereslet mennyisége relatív változásának és az ár relatív változásának hányadosa pedig

$$\frac{\Delta x}{x} / \frac{\Delta P}{P} = \frac{P}{x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta P} = \frac{P}{D(P)} \cdot \frac{D(P+\Delta P)-D(P)}{\Delta(P)} \,.$$

Az ár egy százalékkal nő, ha $\Delta P = \frac{P}{100}$, ekkor az előző képlet bal oldalán $(\frac{\Delta x}{x}) \cdot 100$ áll, ami a kereslet mennyiségének százalékos megváltozását jelenti. A

$$\frac{\Delta x}{x} / \frac{\Delta P}{P} = \frac{P}{x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta P} = \frac{P}{D(P)} \cdot \frac{D(P+\Delta P)-D(P)}{\Delta(P)}$$

képletben szereplő

$$\frac{P}{D(P)} \cdot \frac{D(P+\Delta P)-D(P)}{\Delta(P)}$$

hányadost x *átlagos elaszticitásának* nevezzük a $[P, P+\Delta P]$ intervallumban. Az előbbiekben definiált szám függ a ΔP árváltozástól és a P ártól is, de egységmentes, tehát nem számít, hogy a termék mennyiségét tonnákban vagy kilogrammokban mérjük, és hogy az ár dollárban vagy koronában van-e megadva.

D elaszticitását egy adott pontban úgy szeretnénk definiálni, hogy az független legyen P megváltozásától. Ekkor D -nek a P pontban vett elaszticitását a

$$\frac{\Delta x}{x} / \frac{\Delta P}{P} = \frac{P}{x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta P} = \frac{P}{D(P)} \cdot \frac{D(P+\Delta P)-D(P)}{\Delta(P)}$$

képletben szereplő

$$\frac{P}{D(P)} \cdot \frac{D(P+\Delta P)-D(P)}{\Delta(P)}$$

hányados határértékeként kell definiálni, midőn ΔP tart 0-hoz. Mivel a $\frac{[D(P+\Delta P)-D(P)]}{\Delta P}$ különbségi hányados $D'(P)$ -hez tart, ha $\Delta P \to 0$, azt kapjuk, hogy a $D(P)$ függvény P -beli elaszticitása

$$\frac{P}{D(P)} \cdot D'(P) .$$

Általában jó közelítését kapjuk az elaszticitásnak, ha a $\frac{\Delta P}{P} = \frac{1}{100} = 1$ választás mellett kiszámoljuk a $\frac{P \cdot \Delta x}{x \cdot \Delta P}$ hányadost.

Tegyük fel, hogy egy termék keresletét a $D(P) = 800 \cdot P^{-1.5}$ formula határozza meg. Az előző képlet segítségével meghatározhatjuk $D(P)$ elaszticitását. A D deriváltfüggvénye:

$$D'(P) = 8000 \cdot (-1.5) \cdot P^{-1.5-1} = -12000 \cdot P^{-2.5} ,$$

Ebből $D(P)$ -nek a P szerinti elaszticitása:

$$\frac{P}{D(P)} \cdot D'(P) = \frac{P}{8000 \cdot P^{-1.5}} \cdot (-12000) \cdot P^{-2.5} = -\frac{12000}{8000} \cdot \frac{P \cdot P^{-2.5}}{P^{-1.5}} = -1.5 .$$

Tehát az elaszticitás -1.5, vagyis az ár 1%-os növekedése a kereslet nagyságának 1.5%-os csökkentését eredményezi. Ha a $P = 16$ ár 1%-kal nő, a kereslet nagysága $D(16) = 8000 \cdot 16^{-1.5} = 125$. Az ár 1%-os növekedésével az új ár $16 + 16/100 = 16.16$, ekkor a kereslet megváltozása:

$$D(16.16) - D(16) = 8000 \cdot 16.16^{-1.5} - 125 = -1.848 .$$

$D(16) = 125$ -ről a keresletnek százalékos megváltozása $-(\frac{1.848}{1000}) \cdot 100 = -0.1848$ lesz.

Általánosságban, ha az f függvény differenciálható x -ben és $f(x) \neq 0$, akkor az f függvény x pontbeli elaszticitását a következőképpen definiálhatjuk:

$$El_x f(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) .$$

Az $y = f(x)$ esetben szokás még az $El_x y$ és ϵ_{xy} jelölések használata is.

Nézzük meg most azt, hogyan függ a jövedelemelaszticitás a keresletelaszticitástól. Ha D valamely termék keresletfüggvénye, akkor $D(p)$ egységnek p áron való eladása által a gyártó jövedelme $R(p) = p \cdot D(p)$ lesz. A szorzatszabály miatt

$$R'(p) = D(p) + p \cdot D'(p) = D(p) \cdot [1 + \frac{p}{D(p)} \cdot D'(p)] ,$$

így

$$R'(p) = D(p) \cdot [1 + El_p D(p)]$$

és

$$El_p R(p) = \frac{p \cdot R'(p)}{R(p)} = \frac{R'(p)}{D(p)} = 1 + El_p D(p) .$$

$El_p R(p) = -1$ esetén $R'(p) = 0$ lesz. Ha a kereslet árelaszticitása egy adott pontban -1, akkor egy kis árváltozásnak szinte semmi hatása nem lesz a jövedelemre. Ha a kereslet árelaszticitása nagyobb mint -1, akkor az árváltozás által jövedelemelaszticitás pozitív, és ha az elaszticitás -1-nél kisebb, akkor negatív lesz. Továbbá a kereslet árelaszticitásánál a jövedelemnek az árra vonatkozó elaszticitása pontosan 1-gyel nagyobb.

4. Integrálok

4.1. Primitív függvények

Ha F differenciálható az I intervallumon és $F'(x)=f(x)$, minden $x\in I$ -re, akkor F az f függvény *primitív függvény*e. A primitív függvény nem egyértelmű, hiszen, ha F primitív függvénye f -nek, akkor $F+C$ is primitív függvénye minden C konstansra. Az f primitív függvényeinek összességét f határozatlan integráljának nevezzük és $\int f(x)dx$ -szel jelöljük. Azaz f határozatlan integrálja azon F függvények halmaza, amelyekre $F'=f$.

4.2. Kezdetiérték – problémák

Végtelen sok olyan primitív függvény van, amelyeknek ugyanaz a deriváltjuk. Ezen függvények gráfjai egymás eltoltjai az y -tengely mentén. Viszont, ha adott egy tetszőleges $(x_{0,}y_0)$ pont, akkor pontosan egy olyan görbe van, amely ezen átmegy.

Lerajzolhatunk néhányat az $F(x)$ függvény gráfjából az xy síkon, amelyre $F'(x)=-(x-1)^2$, köztük azt, amely áthalad az $(x_{0,}y_0)=(1,1)$ ponton. Ez úgy is fogalmazható, hogy megkereshetjük azt az egyetlen $F(x)$ függvényt, amelyre $F'(x)=-(x-1)^2$ és $F(1)=1$. Ezt nevezzük *kezdetiérték-problémá*nak, ahol $F(1)=1$ a *kezdeti feltétel*.

$$F(x)=\int -(x-1)^2dx=-\frac{1}{3}\cdot(x-1)^3+C \ .$$

C tetszőleges értéket felvehet. Az a görbe, amely az $(1,1)$ ponton átmegy, az $F(1)=1$ egyenlet megoldásával adódik, vagyis:

$$-\frac{1}{3}\cdot(1-1)^3+C=1 \ .$$

Ebből látszik, hogy $C=1$, így a keresett függvény:

$$F(x)=1-\frac{1}{3}\cdot(x-1)^3 \ .$$

Amennyiben egy áru gyártásának x mennyiségéhez tartozó határköltsége $3\cdot x+4$ és fix költsége 40, megkereshetjük a költségfüggvényt. Jelöljük a költségfüggvényt $c(x)$ -el, $c'(x)=3\cdot x+4$ és $c(0)=40$, hiszen $c(0)$ az a költség, amely akkor merül fel, ha nem gyártunk semmit. Integráljuk $c'(x)=3\cdot x+4$ -et:

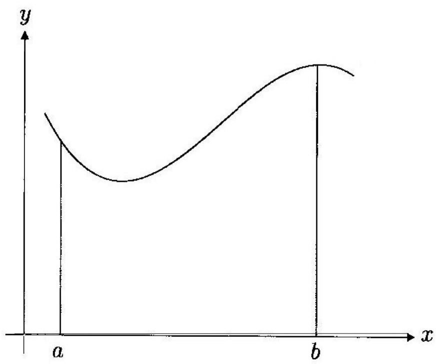
$$c(x)=\frac{3}{2}\cdot x^2+4\cdot x+C \ .$$

Az $x=0$ behelyettesítve $c(x)=\frac{3}{2}\cdot x^2+4\cdot x+C$ -be kapjuk, hogy $c(0)=C$, így $C=40$ a $c(0)=40$ miatt. Így a költségfüggvény:

$$c(x)=\frac{3}{2}\cdot x^2+4\cdot x+40 \ .$$

4.3. A Riemann - integrál

Az analízisben jelentős témakör a függvény gráfja alatti terület meghatározása, azaz az integrálás. Szemléletesen az integrálás feladata azt meghatározni, hogy adott $[a,b]$ zárt intervallumon értelmezett, pozitív értékeket felvevő függvény mekkora területű síktartományt határol az x tengely, valamint az $x=a$ és az $x=b$ egyenes között. Ez valójában a másik irányban igaz, vagyis az integrálás segítségével definiálható az említett görbével határolt terület nagysága.



7. ábra

Ezt

$$\int_a^b f(x)dx$$

módon jelöljük. Ez a jelölés tartalmazza az $f(x)$ függvényt, amit integrálunk és *integrandus*nak nevezünk, valamint egyértelművé teszi azt az $[a,b]$ intervallumot, amin integrálunk. Az integrálás *alsó*, illetve *felső határá*nak nevezzük az a és b számot. A keresett területet megkaphatjuk, ha az intervallumot részintervallumokra osztjuk és összegezzük a közelítő összegeket, de ennél sokkal jobb megoldást nyújt a Newton – Leibniz tétel, ami a következő:

$$\int_a^b f(x)dx=\Big|_a^b F(x)=F(b)-F(a) \ ,$$

ahol $F'(x)=f(x)$ minden $x\in(a,b)$ -re.

Azt, hogy $a<b$ legyen, a definíció nem feltétlenül követeli meg. Ha azonban $a>b$ és $f(x)$ pozitív az $[a,b]$ intervallumon, akkor $\int_a^b f(x)dx$ negatív szám. A Riemann - integrál geometriai interpretációval van definiálva, de tulajdonképpen többféle interpretációja van. Például ha egy jövedelemeloszlást annak $f(r)$ sűrűségfüggvényével adunk meg, akkor $\int_a^b f(r)dr$ azon egyének aránya, akiknek jövedelemszintje a és b közé esik.

Az $f(x)=x^3$ megoldása a következőképpen írható az új jelölésekkel:

$$\int_0^1 x^3 dx=[\frac{1}{4}\cdot x^4]_0^1=\frac{1}{4}.$$

Tegyük fel, hogy $f(x)$ folytonos $[a,b]$ -n, ekkor $\int_a^b f(x)dx$ az $F(b)-F(a)$ szám, feltéve, hogy $F(x)$ egy olyan függvény, amelynek deriváltja $f(x)$. Néhány esetben találunk explicit kifejezést $F(x)$ -re, viszont vannak olyan esetek is, amikor az integrál kiszámításához nem tudunk összebarkácsolni pusztán elemei függvények segítségével olyan függvényt, amelynek megfelelő a deriváltja. Az viszont igaz, hogy minden folytonos függvénynek van primitív függvénye.

A Riemann - integrál és a primitív függvény jelölései hasonlóak, de maguk a koncepciók teljesen különbözőek. Hiszen $\int_a^b f(x)dx$ egy konkrét számot jelöl, míg $\int f(x)dx$ bármely olyan függvényt reprezentál, amelynek deriváltja $f(x)$. A kapcsolat a kettő között az, hogy $\int f(x)dx=F(x)+C$ pontosan akkor teljesül egy I intervallumon, ha $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ teljesül minden I -beli a -ra és b -re.

4.4. Az integrálás közgazdaságtani alkalmazásai

Olajkitermelés esetén feltehetjük, hogy az olajat a $t=0$ időpontban kezdjük el kitermelni egy K hordó olajat tartalmazó kútból. Legyen az $x(t)$ függvény a t időpont után a kútban megmaradó olaj mennyisége (barrelben[8] mérve).

Mivel kezdetben K hordó olaj van, így $x(0)=K$. Feltehetjük azt is, hogy nem lehet olajat visszajuttatni a kútba, ebből következik, hogy $x(t)$ monoton csökkenő függvénye t -nek. $x(t)-x(t+\Delta t)$ a $[t,t+\Delta t]$ időintervallumban kitermelt olajmennyiség, ahol $\Delta t>0$.

[8] Angol-amerikai űrmérték, a szó jelentése: hordó. Egy amerikai barrel 1,59 hektoliternek felel meg. A barrel mértékegységét manapság leginkább az olajpiacon használják.

$$\frac{x(t)-x(t+\Delta t)}{\Delta t}=-\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

az egységnyi idő alatt kitermelt mennyiség.

Amennyiben $x(t)$ differenciálható, akkor

$$\frac{x(t)-x(t+\Delta t)}{\Delta t}=-\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

határértéke $-x'(t)$, ha $\Delta t\to 0$. A kitermelés sebességét a t időpontban jelölje $u(t)$, ekkor $x'(t)=-u(t)$ és $x(0)=K$. Ennek a kezdetiérték-problémának a megoldása a következő:

$$x(t)=K-\int_0^t u(\tau)d\tau \ .$$

Ezt ellenőrizhetjük is: először $t=0$ -t helyettesítve $x(0)=K$ -t, t szerint differenciálva $x'(t)=-u(t)$ kapunk. Az eredményt azt jelenti, hogy a kútban levő olajmennyiség a t időpontban megegyezik a kiindulási mennyiség mínusz a $[0,t]$ időintervallumban kitermelt olaj mennyiségével.

Abban az esetben, ha a kitermelés sebessége állandó, vagyis $u(t)=\tilde{u}$ akkor

$$x(t)=K-\int_0^t \tilde{u}\,d\tau=K-\big|_0^t\tilde{u}\cdot\tau=K-\tilde{u}\cdot t. \quad .$$

Tehát az olajkút akkor merül ki, ha $K-\tilde{u}\cdot t=0$, vagyis ha $t=K/\tilde{u}$.

Ezen példa esetében az $x(t)$ *stock*[9] jellegű adat, hordókban mérjük, az $u(t)$ pedig *flow*[10] jellegű, egy időegységre eső kitermelésre vonatkozik. Ennek a két fogalomnak a megkülönböztetése nagyon fontos közgazdaságtani elméletekben.

Nézzünk most egy másik példát!

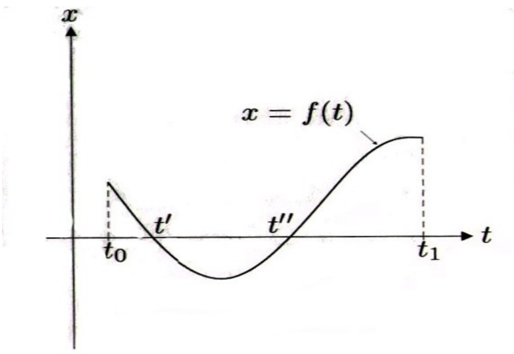
Valutatartalékok esetén jelölje $F(t)$ a t időpontban egy adott ország devizakészletét. Egy időegység alatti devizakészlet-változás $f(t)=F'(t)$ feltéve, hogy F differenciálható. A t időpontban nettó devizabeáramlás van, ha $f(t)>0$, és nettó devizakiáramlás, ha $f(t)<0$.

$$F(t_1)-F(t_0)=\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt \ .$$

Ez a kifejezés adja meg a devizakészletekben történő változást a $[t_0,t_1]$ időintervallumban. A következő ábra erre illusztrál egy példát. t_0 és t' időpontok között nettó devizabeáramlás, míg t' és t'' között nettó devizakiáramlás van.

9 Állomány jellegű változók - amelyeknek nincs idődimenziójuk. (pl.: befektetés, vagyon stb.).

10 Folyam jellegű változók - amelyek egy időszak (általában egy év) eredményeit és ráfordításait rögzítik (például éves jövedelem, éves kiadások stb.)



8. ábra

Több országban jövedelemadózásból származó adatokat használnak fel arra, hogy adott év jövedelemeloszlási jellemzőit vizsgálják és azt, hogy a jövedelem ezen évek során hogyan változik.

A jövedelmet általában dollárban mérjük. Jelölje $F(r)$ azon személyek arányát a társadalomban, akiknek legfeljebb r dollárnyi jövedelmük van. n fős népesség esetén $n \cdot F(r)$ azon egyének száma, akik legfeljebb r dollár jövedelemmel rendelkeznek. Ha a népesség körében r_0 a legalacsonyabb és r_1 a legmagasabb regisztrált jövedelem, akkor az F függvényre vagyunk kíváncsiak az $[r_{0,} r_1]$ intervallumban. A definíció alapján nem feltétlenül differenciálható F és nem is feltétlenül folytonos $[r_{0,} r_1]$ -n, hiszen r 0.01 dollár, $F(r)$ pedig $1/n$ többszöröse kell legyen. Elég nagy népesség esetén viszont általában találhatunk olyan „sima" függvényt, amely jó becslést ad a valódi jövedelemeloszlásra. Ezért tegyük fel, hogy F folytonosan deriválható, deriváltja f, és így

$$f(r) = F'(r) \text{ minden } r \in (r_{0,} r_1) \text{-re.}$$

A derivált definíciója szerint $f(r) \cdot \Delta r \approx F(r + \Delta r) - F(r)$ minden kis Δr -re. Ezért $f(r) \cdot \Delta r$ körülbelül egyenlő azon egyének arányával, akik r és $r + \Delta r$ közötti jövedelemmel rendelkeznek. f függvényt *jövedelem-sűrűségfüggvény*nek, F -et pedig a hozzá tartozó *jövedelem-eloszlásfüggvény*nek nevezzük.

Feltehetjük, hogy f egy adott népesség folytonos jövedelemeloszlási függvénye, melynek értelmezési tartománya az $[r_{0,} r_1]$ intervallum. Ha $r_0 \leq a \leq b \leq r_1$, akkor következik, hogy $\int_a^b f(r) dr$ azon egyének aránya, akik jövedelme az $[a, b]$ intervallumba esik. Ekkor $n \cdot \int_a^b f(r) dr$ azon egyének száma, akiknek jövedelme az $[a, b]$ intervallumba esik. Meghatározhatjuk azon személyek összjövedelmét, akik a és b dollár között keresnek. Legyen $M(r)$ azok *összjövedelm*e, akik legfeljebb r dollárt keresnek, és tekintsük az $[r, r+\Delta r]$ jövedelemintervallumot. Ebbe az intervallumba körülbelül $n \cdot f(r) \cdot \Delta r$ egyén jövedelme esik, nagyjából r dollár jövedelme van mindenkinek, így ezen személyek összjövedelme

$$M(r+\Delta r) - M(r) \approx n \cdot r \cdot f(r) \cdot \Delta r \ .$$

Vagyis

$$\frac{M(r+\Delta r) - M(r)}{\Delta r} \approx n \cdot r \cdot f(r) \ .$$

Ez a közelítés annál jobb, minél kisebb Δr, és ha $\Delta r \to 0$, kapjuk, hogy $M'(r) = n \cdot r \cdot f(r)$, vagyis $n \cdot \int_a^b r \cdot f(r) dr = M(b) - M(a)$.

Tehát $n \cdot \int_a^b r \cdot f(r) dr$ az összjövedelme azon személyeknek, akiknek egyénenként a jövedelme az $[a, b]$ intervallumba esik. Az összjövedelem és azon egyének száma közötti arány, akik egy adott $[a, b]$ jövedelemintervallumba tartoznak ezen egyének ún. *átlagjövedelm*e. Így kapjuk, hogy

$$m = \frac{\int_a^b r \cdot f(r) dr}{\int_a^b f(r) dr}$$

azoknak az átlagjövedelem, akiknek a jövedelme az $[a, b]$ intervallumba esik.

A valódi jövedelemeloszlást jól közelítő függvény az USA-ban a *Pareto-eloszlás*. Itt azon egyének aránya, akiknek legfeljebb r dollár a jövedelmük $f(r) = B \cdot r^{-\beta}$. B és β pozitív konstansok. β empirikus becslése: $2.4 < \beta < 2.6$. Ha r közel van 0-hoz, a formula nem értelemes $\beta \geq 1$ esetén, mivel $\int_a^b f(r) dr \to \infty$ ha $r \to 0$.

Egy következő példában egy társadalom tagjainak egy olyan árut kínálnak, amelynek kereslete csak annak p árától és az egyén r jövedelmétől függ. Az r jövedelmű egyén folytonos keresleti függvénye a p ár mellett legyen $D(p, r)$. Ha a és b között mozognak a jövedelmek és $f(r)$ a jövedelemeloszlás, akkor az áru összkereslete p ár mellett a következőképpen határozható meg.

Legyen p rögzített ár, és $T(r)$ jelölje azon egyének összes keresletét, akik legfeljebb r jövedelemmel rendelkeznek. Nézzük az $[r, r+\Delta r]$ jövedelemintervallumot. Ide körülbelül $n \cdot f(r) \cdot \Delta r$ egyén jövedelme esik, mindegyikük jövedelme nagyjából $D(p, r)$, ezért összkeresletük megközelítőleg $n \cdot D(p, r) \cdot f(r) \cdot \Delta r$. Ez éppen $T(r+\Delta r) - T(r)$, tehát

$$T(r+\Delta r) - T(r) \approx n \cdot D(p, r) \cdot f(r) \cdot \Delta r \ ,$$

ezért

$$\frac{T(r+\Delta r)-T(r)}{\Delta r} \approx n \cdot D(p,r) \cdot f(r) \ .$$

Ez a közelítés annál jobb, minél kisebb Δr, és ha $\Delta r \to 0$, kapjuk, hogy

$$T'(r) = n \cdot D(p,r) \cdot f(r) \ ,$$

$$T(b) - T(a) = n \cdot \int_a^b D(p,r) \cdot f(r)\, dr \ .$$

$T(b)-T(a)$ a népesség összkereslete az adott áru iránt, ami függ p -től, így jelölhetjük $x(p)$ -vel.

Ekkor a teljes kereslet:

$$x(p) = n \cdot \int_a^b D(p,r) \cdot f(r)\, dr \ .$$

5. Összefoglalás

Látható, hogy a matematika eme 3 részterülete mint függvények, deriváltak és integrálok milyen szoros kapcsolatban állnak egymással. Megvan a kapcsolat a függvények és a deriváltak között, mivel egy görbe adott pontbeli meredekségének geometriai vizsgálata a függvény deriváltjának fogalmához vezet. Szintén könnyen meggondolható a viszonya az integrálokkal, mivel az Riemann - integrál nem más, mint a függvény alatti terület nagysága. A legszorosabb kapcsolat mégis a differenciálszámítás és az integrálszámítás közötti van. E két fogalom közötti kapcsolat felfedezése az analízis legjelentősebb vívmányai közé tartozik.

Hasonlóan az előbbiekhez, megfigyelhető, hogy milyen szoros viszonyban áll egymással a matematika és a közgazdaságtan is. Rengeteg közgazdaságtani számítás matematikai fogalmokon alapszik. Közgazdaságtani megfigyelések, vizsgálatok, számítások könnyen ábrázolhatóak függvényekkel. A deriváltakat is sokszor használja ez a tudomány, hiszen nem csupán görbe - meredekségként lehet felfogni ezt a fogalmat, hanem a változás mértékeként is, ami fontos egy gazdasági rendszer időbeli fejlődésének vizsgálatakor. Sokat találkozhatunk az integrálás számos alkalmazásával is a közgazdaságtanban, mint például a kezdetiérték-problémákkal.

Összességében megállapítható, hogy a közgazdaságtanban számos analízisbeli eszközre van szükség. Dolgozatom célja az volt, hogy néhány konkrét példán keresztül rámutasson ezen eszközök használatára.

Irodalomjegyzék

[1] Sydsaeter – Hammond: Matematika közgazdászoknak
Aula, Budapest, 2000

[2] Hal R. Varian: Mikroökonómia középfokon – Egy modern megközelítés
Közgazdasági és jogi Könyvkiadó, Budapest, 1995

[3] Kopányi Mihály – Petró Katalin – Vági Márton: Közgazdaságtan I. Mikroökonómia
Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2004

[4] Gacsályi István – Meyer Dietmar – Misz József – Simonits Zsuzsa:
Közgazdaságtan II. Makroökonómia
Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2003

[5] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera: Analízis I.
Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005

[6] Economic Report of the President, 2008 Report Spreadsheet Tables
www.gpoaccess.gov/eop/tables08.html

[7] Fogyasztáselmélet (Makroökonómia) – Wikipédia
http://hu.wikipedia.org/wiki/Fogyasztáselmélet_(makroökonómia)

NYILATKOZAT

Név: Simon Anita

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika Bsc

ETR azonosító: SIAOACT.ELTE

Szakdolgozat címe: Az analízis néhány közgazdaságtani alkalmazása

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2009. május 27.

Simon Anita