Simon Csilla

Matematika BSc, elemző szakirány

A Henstock-Kurzweil féle integrál

Szakdolgozat

Témavezető:

Keleti Tamás, egyetemi docens

Analízis Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Budapest, 2009

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Az integrálszámítás az analízis egyik fő része, a differenciálszámítás mellett. Leibniz és Newton voltak azok a kiváló matematikusok, akik az addig megszületett eredmények (amelyek Wallis, Pascal, Fermat, Gregory, Barrow, és Huygens műveiben már megjelentek) ismeretében, egymástól függetlenül felfedezték a differenciál- és az integrálszámítást, valamint a kettő kapcsolatát is. Az integrálfogalom legjelentősebb továbbfejlesztői: Clayraut (görbementi kétváltozós integrál), Euler (kettős integrál), Lagrange (hármas integrál), Riemann (Riemann-integrál), Lebesgue (Lebesgue-integrál), Henstock és Kurzweil (Henstock-Kurzweil integrál) és Stieltjes (Stieltjes-integrál). A különböző integrálelméletekre azért van szükség, hogy például nem Riemann-integrálható függvény is integrálható legyen (például a Dirichlet függvény Lebesgue-integrálható), vagy, hogy ne csak számegyenesen vagy $\mathbb{R}^n$-ben lehessen használni, hanem absztraktabb terekben.

A szakdolgozatom célja bemutatni a Henstock-Kurzweil féle integrálszámítást, amelyet általánosított Riemann-integrálnak is szoktak nevezni.

2. fejezet

Emlékeztető

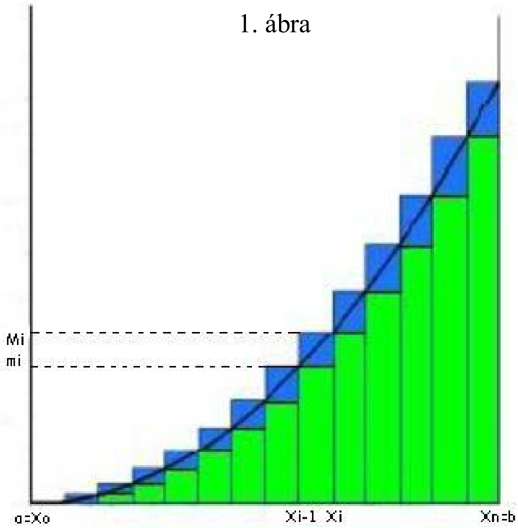
Ebben a fejezetben röviden áttekintjük azokat az ismereteket, amelyekre a későbbiek során szükség lesz.

2.1. A Riemann-integrál

Legyen adott az $y = f(x)$, amely az $[a, b]$ zárt intervallumban mindenütt értelmezett, korlátos függvény. Számoljuk ki a függvény alatti területet:

Legyen az $[a, b]$ intervallum egy ф felosztása: $a = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = b$.

Az $[x_{i-1}, x_i]$ fölötti rész T_i területét becsüljük alulról és felülről:



alsó becslés: $m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$, ahol $m_i = inf\{f(x): x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$ a téglalap magassága, $x_i - x_{i-1}$ a téglalap alapja.

felső becslés: $M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$, ahol $M_i = sup\{f(x): x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$ a téglalap magassága, $x_i - x_{i-1}$ a téglalap alapja. (szemléletesen az 1. ábrán)

Ami azt jelenti, hogy:

$$m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq T_i \leq M_i \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

A keresett terület:

$$\sum_{i=1}^{n} T_i.$$

Tehát:

$$\sum_{i-1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq T \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

$\sum_{i-1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$ az f függvény alsó közelítő összege, amit s_ϕ-vel jelölünk, $\sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$ pedig a felső közelítő összeg, aminek a jele S_ϕ.

Azaz:

$$s_\phi \leq T \leq S_\phi.$$

Világos, hogy ha minden $s_\phi(f)$ alsó közelítő összeg alulról becsül, akkor ezek infimuma is, és ha minden $S_\phi(f)$ felső közelítő összeg felülről becsül, akkor ezek szuprémuma is.

Elnevezés: az f függvény $[a, b]$-n vett alsó integrálja:

$$sups_\phi(f) = \int_{\overline{a}}^{b} f(x)dx$$

felső integrálja:

$$infS_\phi(f) = \int_{a}^{\underline{b}} f(x)dx$$

Tehát:

$$\int_{\overline{a}}^{b} f(x)dx \leq T \leq \int_{a}^{\underline{b}} f(x)dx$$

Vagyis ha az alsó és felső integrál megegyezik, akkor a T terület csak ennyi lehet.

Riemann integrálhatóság:

2.1. Definíció: Az f korlátos függvény Riemann-integrálható az $[a, b]$-n, ha az alsó és felső integrálja megeggyezik. Ekkor ezt a mennyiséget hívjuk az f függvény Riemann-integráljának.

2.2. Tétel: Ha az f függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor f Riemann-intagrálható az $[a, b]$-n.

2.2 A Lebesgue-integrál

Mivel a szakdolgozatom célja a Henstock-Kurzweil integrál bemutatása, a Lebesgue integrállal kapcsolatban egyetlen tételt említünk csak, mert a későbbiek során csak erre az egy tételre hivatkozunk.

2.3. Tétel: Az f függvény akkor és csak akkor Lebesgue-integrálható, ha $|f|$ Lebesgue-integrálható.

3. fejezet

A Riemann-, és Lebesgue-integrál hiányosságai

Az integrálszámítás alaptételének I. része a következő:

3.1. Tétel: Tegyük fel, hogy $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, és f' integrálható $[a,b]$-n. Ekkor:

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

A tétel feltétele, hogy f' integrálható legyen, nem hagyható el, mert f' nem mindig Riemann- vagy Lebesgue-integrálható. Természetes elvárás lenne, hogy a tétel minden f' deriváltfüggvényre teljesüljön. Nézzünk két példát, amikor nem teljesül a feltétel:

- A Riemann-integrálnál a fenti képlet csak akkor igaz, ha teljesül az a feltétel, hogy f' Riemann-integrálható.

  Tekintsük a következő példát: $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, és

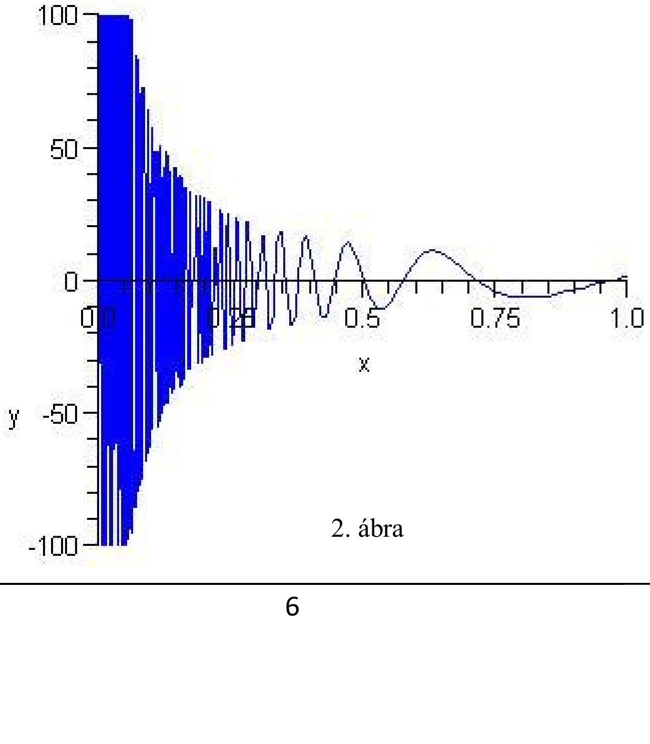
  $$f(x) = \begin{cases} x^2 cos\dfrac{\pi}{x^2} & ha\ 0 < x \leq 1 \\ 0 & ha\ x = 0 \end{cases}.$$

  Ekkor f differenciálható a $[0,1]$ intervallumon, és a deriváltja:

  $$f^{'}(x) = \begin{cases} 2xcos\dfrac{\pi}{x^2} + \dfrac{2\pi}{x} sin\dfrac{\pi}{x^2} & ha\ 0 < x \leq 1 \\ 0 & ha\ x = 0 \end{cases}.$$

  mivel az f' nem korlátos a $[0,1]$ intervallumon, ezért f' nem Riemann-integrálható, azaz nem teljesül a képlet.

  Az 2. ábrán az $f^{'}(x)$ függvény látható, Maple-ben ábrázolva.



2. ábra

- A Lebesgue-integrálnál is hasonló a helyzet. A fenti képlet szükséges feltétele, hogy f' Lebesgue integrálható legyen.

  Nézhetjük most is az előző példát.

  Ha $0 < a < b < 1$, akkor f' folytonos $[a, b]$-n, ezért Riemann-integrálható, és

$$\int_a^b f' = b^2 cos\frac{\pi}{b^2} - a^2 cos\frac{\pi}{a^2}.$$

  Legyen $b_k = \frac{1}{\sqrt{2k}}$, és $a_k = \sqrt{\frac{2}{4k+1}}$, ekkor $\int_{a_k}^{b_k} f' = \frac{1}{2k}$.

  Mivel az $[a_k, b_k]$ intervallumok páronként diszjunktak,

$$\int_0^1 |f'| \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} |f'| \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \infty.$$

  Ebből következik, hogy f' nem abszolút integrálható $[0,1]$-n, így nem Lebesgue-integrálható, vagyis ebben az esetben sem teljesül a fenti képlet.

A fenti két példa bizonyítja, hogy az integrálszámítás alaptételének I. része nem teljesül minden f' függvényre, azaz az integrálszámításnak ilyen értelemben hiányosságai vannak.

4. fejezet

A Denjoy és Perron integrál

Matematikusok úgy gondolták, hogy szükség lenne olyan integrálelméletre, amelyre teljesül az integrálszámítás alaptételének I. része teljes általánosságba, azaz olyan integrálszámítás kellene, amelyre minden derivált integrálható.

A.Denjoy (1884-1974) 1912-ben bevezetett egy új integrálási elméletet, ami annyira bonyolultnak bizonyult, hogy nem is nagyon használták. Lusin később adott egy sokkal alaposabb jellemzést a Denjoy integrálról, ami majdnem ugyanannyira nehéz.

1914-ben O.Perron bevezetett egy másik integrál elméletet, amelyre az integrálszámítás alaptételének I. része teljes általánosságban fenn áll. A Perron integrál definíciója alig tér el a Denjoy integráltól. A két elmélet ekvivalenciáját Alexandrow és Looman be is bizonyították.

A Perron integrál (vázlatos) definíciója előtt néhány fogalmat is be kell vezetni:

4.1. Definíció: Legyen $f\colon [a.b] \to \mathbb{R}$ és $x \in [a,b]$. Az f függvény felső deriváltja az x helyen:

$$\overline{D}f(x) = \lim_{t\to x} sup \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

Hasonlóan, f alsó deriváltja:

$$\underline{D}f(x) = \lim_{t\to x} inf \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

Így f deriválható az x helyen akkor és csak akkor, ha $\overline{D}f(x) = \underline{D}F(x)$, és mindkét derivált véges.

4.2. Definíció: Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^*$, ahol $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Egy $U\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt az f függvény felső (major) függvényének nevezzük, ha U folytonos $[a,b]$-n, $U(a) = 0$, $\underline{D}U(x) > -\infty$, és $\underline{D}U(x) \geq f(x)$ minden $x \in [a,b]$-re. Egy $u\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt az f függvény alsó (minor) függvényének nevezzük, ha u folytonos $[a,b]$-n, $u(a) = 0$, $\overline{D}u(x) < \infty$ és $\overline{D}u(x) \leq f(x)$ minden $x \in [a,b]$-re.

A definícióból következik, hogy ha f differenciálható $[a, b]$-n, akkor $f - f(a)$ egyszerre felső és alsó függvénye f'-nek. Ha U egy felső, u pedig egy alsó függvénye f-nek, akkor belátható, hogy $U - u$ növekvő függvény. Ezért:
$-\infty < sup\{u(b): u$ alsó függvénye f-nek $\} \leq inf\{U(b): U$ felső függvénye f-nek $\} < \infty$.

A Perron integrál:

4.3. Definíció: Egy $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényt Perron integrálhatónak nevezünk $[a, b]$-n akkor és csak akkor, ha f-nek van legalább egy felső és egy alsó függvénye $[a, b]$-n, és $sup\{u(b): u$ alsó függvénye f-nek $\} = inf\{U(b): U$ felső függvénye f-nek $\}$. Az f függvény Perron integrálja $[a, b]$-n definíció szerint az egyenlőség értéke. Ha egy $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény deriváltja véges $[a, b]$-n, akkor a definícióból következik, hogy f' Perron integrálható $[a, b]$-n, és az integrál értéke $f(b) - f(a)$. Tehát az integrálszámítás alaptételének I. része valóban fennáll teljes általánosságban a Perron integrál esetén.

Ez csak egy vázlatos definíciója volt a Perron integrálnak (hiszen a definíció következményeit nem bizonyítottuk). A Perron integrállal ennél többet nem is foglalkozunk, mert igaz, hogy a definíció nem olyan bonyolult, de alkalmazni már nehezebb.

Tehát még mindig nem kaptunk megfelelő integrálelméletet. Az előbb bemutatott integrálszámításra igaz az integrálelmélet alaptételének I. része, de szerettek volna ennél egyszerűbbet, amit könnyebben lehet használni. Henstock és Kurzweil előállt egy integrálelmélettel, ami egy kibővített változata a Riemann-integrálnak és teljes általánosságban igaz rá az integrálszámítás alaptételének I. része. Ez az integrálszámítás jóval egyszerűbb, mint a Perron vagy a Denjoy, mégis ekvivalensek.

5. fejezet

A Henstock-Kurzweil integrál

Mielőtt definiálnánk a Henstock-Kurzweil integrált, be kell vezetnünk néhány fogalmat.

5.1. Definíció: Adott egy $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallum. Az I egy kijelölt pontokkal rendelkező felosztásán, a $D = \{(t_i, I_i) : i = 1, \ldots, m\}$ rendezett párokból álló véges halmazt értjük, ahol I_i az $[a, b]$ zárt részintervalluma, $t_i \in I_i$, $\bigcup_{i=1}^{m} I_i = [a, b]$, és $I_i \cap I_j$ legfeljebb egy pontú, ha $i \neq j$. A t_i pont az I_i intervallumhoz tartozó kijelölt pont. Más szóval, egy ilyen kijelölt pontokkal rendelkező felosztás tartalmaz mindegyik intervallumból egy-egy pontot.

5.2. Definíció: Legyen adott egy $I = [a, b]$ intervallum. Az I intervallumon értelmezett γ függvényt normának nevezünk, ha van olyan $\delta: [a, b] \to (0, \infty)$ függvény, hogy $\gamma(t) = (t - \delta(t), t + \delta(t))$. Ha $D = \{(t_i, I_i) : i = 1, \ldots, m\}$ egy kijelölt pontokkal rendelkező felosztása I-nek, és γ egy norma az I intervallumon, azt mondjuk, hogy D γ-finomságú felosztás, ha $I_i \subset \gamma(t_i)$ minden i-re. Mondhatjuk úgy is, hogy a D felosztás egy γ-finomságú felosztása I-nek.

5.3. Definíció: $D = \{(t_i, I_i) : i = 1, \ldots, m\}$ egy kijelölt pontokkal rendelkező felosztása I-nek. Az

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{m} f(t_i) l(I_i)$$

összeget a D-re vonatkozó Riemann-féle összegnek hívjuk.

A Riemann-integrált már definiáltuk az emlékeztetőben (2.1 definíció), de definiálhatjuk másféle módon is:

5.4. Definíció: Legyen $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. Az f függvény Riemann integrálható $[a, b]$-n, ha van olyan $A \in \mathbb{R}$ valós szám, hogy minden $\varepsilon > 0$-ra létezik $\delta > 0$, hogy ha $D =$

$\{(t_i, [x_{i-1}, x_i]) : 1 \leq i \leq m\}$ egy kijelölt pontokkal rendelkező felosztása $[a, b]$-nek, melyre $[x_{i-1}, x_i] \subset (t_i - \delta, t_i + \delta)$, akkor

$$|S(f, D) - A| < \varepsilon.$$

Ezek után már definiálhatjuk a Henstock-Kurzweil féle integrált:

5.5. Definíció: Legyen $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. Az f függvényt Henstock-Kurzweil integrálhatónak nevezzük $I = [a, b]$-n, ha létezik $A \in \mathbb{R}$ úgy, hogy minden $\varepsilon > 0$-ra létezik γ függvény úgy, hogy minden γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező D felosztásra $[a, b]$-n

$$|S(f, D) - A| < \varepsilon.$$

Az A számot az f függvény Henstock-Kurzweil integráljának nevezzük. Jelölés: $A = \int_a^b f$.

A Henstock-Kurzweil integrált általánosított Riemann-integrálnak is nevezik.

5.1. A Riemann-integrál, és a Henstock-Kurzweil integrál kapcsolata:

5.6. Tétel: Ha $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény, akkor f Henstock-Kurzweil integrálható, és a két integrál megegyezik.

A tétel nem olyan meglepő az előző két definíció alapján. Az viszont nem olyan egyértelmű, hogy miért is ekvivalens a Riemann-integrál előbbi definíciója és az emlékezetőben definiált Riemann-integrál. A következő bizonyítás ehhez kapcsolódik:

Bizonyítás: (vázlat) Tegyük fel, hogy f Riemann-integrálható. Legyen δ egy ε-nak megfelelően választott, a Riemann-integrál definíciója szerint, és $\gamma(t) = (t - \frac{\delta}{2}, t + \frac{\delta}{2})$. Ekkor minden γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztásnak a mértéke kisebb lesz, mint δ.

A tétel megfordítása nem igaz, azaz ha egy függvény Henstock-Kurzweil integrálható, abból még nem következik, hogy Riemann-integrálható is.

Példa: azt már korábban bebizonyítottuk, hogy az

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\cos\frac{\pi}{x^2} + \frac{2\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x^2} & ha\ 0 < x \leq 1 \\ 0 & ha\ x = 0 \end{cases}$$

függvény nem Riemann-integrálható. Azt, hogy Henstock-Kurzweil integrálható, később bebizonyítjuk.

5.2. Az integrálszámítás alaptételének I. része

Azt már az elején is említettük, hogy a Henstock-Kurzweil integrálra teljes általánosságban igaz az integrálszámítás alaptételének I. része, azonban ezt még nem láttuk be. A bizonyításhoz szükségünk van egy lemmára, amelyet a bizonyítás bonyolultsága miatt nem bizonyítunk.

5.7. Közrefogó Lemma: Legyen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ egy differenciálható függvény $y \in [a,b]$-ban. Minden $\varepsilon > 0$-ra létezik $\delta > 0$, y-tól függő érték úgy, hogy minden u,$v \in [a,b]$-re

$$\left|f(v) - f(u) - f'(y)(v-u)\right| \leq \varepsilon(v-u),$$

ahol $y - \delta < u \leq y \leq v < y + \delta$.

5.8. Tétel: (az integrálszámítás alaptételének I. része) Tegyük fel, hogy $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ differenciálható $[a,b]$-n. Akkor f' Henstock-Kurzweil integrálható $[a,b]$-n, és

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

Bizonyítás: Adott $\varepsilon > 0$. Minden $t \in [a,b]$-re választunk egy $\delta(t) > 0$-t a Közrefogó Lemma alapján, valamint definiálunk egy γ normát $[a,b]$-n: $\gamma(t) = (t - \delta(t), t + \delta(t))$. Feltesszük, hogy $D = \{(t_i, [x_{i-1}, x_i]) : 1 \leq i \leq m\}$ egy γ-finomságú felosztása $[a,b]$-nek. Az I_i intervallumokat rendezzük úgy, hogy az I_{i-1} intervallum jobboldali végpontja egyezzen az I_i baloldali végpontjával, és legyen $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, minden i-re. Ekkor:

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{m} [f(x_i) - f(x_{i-1})].$$

A Közrefogó Lemma alapján

$$\left|S(f',D) - \left(f(b) - f(a)\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{m}\{f'(t_i)(x_i - x_{i-1}) - [f(x_i) - f(x_{i-1})]\}\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \varepsilon(\,x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b-a).$$

Így, f' Henstock-Kurzweil integrálható, és teljesíti az $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$ egyenlőséget. Ami azt jelenti, hogy minden derivált Henstock-Kurzweil integrálható.

A következőkben megmutatjuk, hogy a Henstock-Kurzweil integrál egyértelmű. Előbb azonban azt kell bebizonyítanunk, hogy minden I intervallumnak van γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása.

5.9. Tétel: Legyen γ egy norma az $I = [a,b]$-n. Ekkor létezik γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása I-nek.

Bizonyítás: Legyen $E = \{t \in (a,b]: [a,t]$-nek van egy γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása$\}$. Meg kell mutatnunk, hogy $b \in E$. Tudjuk, hogy $E \neq \emptyset$, legyen $x \in \gamma(a) \cap (a,b)$, így $\{(a,[a.x])\}$ egy γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása $[a,x]$-nek. Tehát $x \in E$, és $E \neq \emptyset$.

Bebizonyítjuk, hogy $y = supE$, az E egyik eleme. A definíció alapján $y \in [a,b]$-nek, tehát γ y által meghatározott. Válasszunk egy $x \in \gamma(y)$-t úgy, hogy $x < y$, és $x \in E$, és D egy γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása $[a,x]$-nek. Ekkor $D' = D \cup \{(y,[x,y])\}$ egy γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása $[a,y]$-nak. Ezért $y \in E$. Végül megmutatjuk, hogy $y = b$. Tegyük fel, hogy $y < b$. Válasszunk egy $w \in \gamma(y) \cap (y,b)$-t. Legyen D egy γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása $[a,y]$-nak. Ezért $D' = D \cup \{(y,[y,w])\}$ egy γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása $[a,w]$-nek. Mivel $y < w$, ez ellentmond y megválasztásának, így $y = b$.

5.10. Tétel: Egy függvény Henstock-Kurzweil integrálja egyértelmű, azaz egyetlen érték.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy f Henstock-Kurzweil integrálható az $[a,b]$ intervallumon, és A-ra és B-re igaz a Henstock-Kurzweil integrál definíciója, azaz f Henstock-Kurzweil integrálja A illetve B. Rögzített $\varepsilon > 0$-ra választunk γ_1-t, és γ_2-t, A-nak, és B-nek megfelelően. Legyen $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen $\gamma(t) = \gamma_1(t) \cap \gamma_2(t)$, és tegyük fel, hogy D egy γ-finomságú felosztás, emiatt D γ_1-finomságú és γ_2-finomságú. Ekkor:

$$|A - B| \leq |A - S(f, D)| + |S(f, D) - B| < \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges választott, következik, hogy $A = B$. Így, a Henstock-Kurzweil integrál értéke egyértelmű, azaz egyetlen érték.

Az eddigiek során a Henstock-Kurzweil integrálról csak annyit láttunk be, hogy minden olyan függvény, amelynek létezik a deriváltja minden pontban, annak a derivált függvénye Henstock-Kurzweil integrálható is. Azt az esetet viszont még nem vizsgáltuk, hogy mi történik akkor, ha a differenciálhányados nem létezik egy véges ponthalmazon. A Henstock-Kurzweil integrál annyira „kibővített" integrál, hogy még ebben az esetben is teljesül rá az integrálszámítás alaptételének I. része.

5.11. Tétel: (az integrálszámítás általánosított alaptétele I.) Legyen $F, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy F folytonos, és $F' = f$ megszámlálhatóan sok pont kivételével az $[a, b]$-n. Ekkor f Henstock-Kurzweil integrálható $[a, b]$-n, és

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Bizonyítás: Legyen $C = \{c_n\}_{n \in \sigma}$ azon pontok halmaza, ahol F' vagy nem létezik, vagy létezik, de nem egyenlő f-fel. Legyen $\varepsilon > 0$. Ha $t \in [a, b] \setminus C$, válasszuk $\delta(t) > 0$-t ε-nak megfelelően, a Közrefogó Lemma alapján. Ha $t \in C$, akkor $t = c_k$ alkalmas k-ra. Válasszuk $\delta(t) = \delta(c_k) > 0$-t úgy, hogy $|x - c_k| < \delta(c_k)$ esetén teljesüljön:

(1)$|F(x) - F(c_k)| < \varepsilon \cdot 2^{-(k+3)}$,

(2)$|f(c_k)||x - c_k| < \varepsilon \cdot 2^{-(k+3)}$.

Biztos, hogy van ilyen δ, hiszen (1) garantálható az F függvény c_k-beli folytonossága miatt, (2) pedig $f(c_k) = 0$ esetén világos, különben pedig $\delta(c_k) < \varepsilon \cdot \frac{2^{-(k+3)}}{f(c_k)}$ garantálja (2)-t. Definiáljunk egy γ normát $[a, b]$-n úgy, hogy $\gamma(t) = \big(t - \delta(t), t + \delta(t)\big)$ minden $t \in [a, b]$-re. Tegyük fel, hogy $D = \{(t_i, I_i) : i = 1, \dots, m\}$ egy γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása $[a, b]$-nek, ahol $I_i = [a_i, b_i]$ minden i-re. Legyen D_1 a D azon elemeinek halmaza, amelynek a kijelölt pontjai $[a, b] \setminus C$-ben találhatóak, és D_2 a D azon elemei, amelynek a kijelölt pontjai C-be tartoznak. A Közrefogó Lemma alapján:

$$\sum_{(t_i,I_i)\in D_1} |F(b_i) - F(a_i) - f(t_i)(b_i - a_i)| \leq \sum_{(t_i,I_i)\in D_1} \varepsilon\,(b_i - a_i) \leq \varepsilon(b - a).$$

Ha $t_i = c_k$ alkalmas k-ra, akkor (1) és (2) alapján:

$$\begin{aligned} &|F(b_i) - F(a_i) - f(t_i)(b_i - a_i)| \\ &\leq |F(b_i) - F(c_k)| + |F(c_k) - F(a_i)| + |f(c_k)(b_i - a_i)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2^{k+3}} + \frac{\varepsilon}{2^{k+3}} + \frac{\varepsilon}{2^{k+3}} < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

Következésképpen:

$$\sum_{(t_i,I_i)\in D_2} |F(b_i) - F(a_i) - f(t_i)(b_i - a_i)| < 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon,$$

mivel minden c_k lehet egy kijelölt pont a D intervallumhalmaz mindkét részhalmazában. Mivel minden végpont, a-t, és b-t kivéve előfordulhat, mint bal, vagy jobboldali végpont,

$$\begin{aligned} |S(f,D) - [F(b) - F(a)]| &= \left| \sum_{(t_i,I_i)\in D} \{F(b_i) - F(a_i) - f(t_i)(b_i - a_i)\} \right| \\ &\leq \varepsilon(b - a) + \varepsilon = (1 + b - a)\varepsilon, \end{aligned}$$

és ezzel igazoltuk a tételt.

5.3. Alaptulajdonságok

Linearitás:

5.12. Állítás: Legyen $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$, és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ha f és g Henstock-Kurzweil integrálhatók, akkor $\alpha f + \beta g$ is Henstock-Kurzweil integrálható, és

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \cdot \int_a^b f + \beta \cdot \int_a^b g.$$

Bizonyítás: Adott $\varepsilon > 0$, és γ_f-t válasszuk úgy, hogy ha D egy γ_f-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása $[a,b]$-nek, akkor

$$\left| S(f,D) - \int_a^b f \right| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |\alpha|)}.$$

Hasonlóan, válasszunk $\gamma_g > 0$-t úgy, hogy ha D egy γ_g-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása $[a,b]$-nek, akkor

$$\left|S(g, D) - \int_a^b g\right| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |\beta|)}.$$

Legyen $\gamma(t) = \gamma_f(t) \cap \gamma_g(t)$, és tegyük fel, hogy D egy γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása $[a, b]$-nek. Ekkor:

$$\begin{aligned}
&\left|S(\alpha f + \beta g, D) - \left(\alpha \cdot \int_a^b f + \beta \cdot \int_a^b g\right)\right| \\
&= \left|\left(\alpha \cdot S(f, D) + \beta \cdot S(g, D)\right) - \left(\alpha \cdot \int_a^b f + \beta \cdot \int_a^b g\right)\right| \\
&= \left|\alpha \cdot \left(S(f, D) - \int_a^b f\right) + \beta \cdot (S(g, D) - \int_a^b g)\right| \\
&\leq |\alpha| \left|S(f, D) - \int_a^b f\right| + |\beta| \left|S(g, D) - \int_a^b g\right| \\
&< \frac{\varepsilon|\alpha|}{2(1 + |\alpha|)} + \frac{\varepsilon|\beta|}{2(1 + |\alpha|)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Mivel ε tetszőlegesen választható, következik, hogy $\alpha f + \beta g$ is Henstock-Kurzweil integrálható, és

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \cdot \int_a^b f + \beta \cdot \int_a^b g.$$

Pozitivitás:

5.13. Állítás: Legyen $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy f nemnegatív, és Henstock-Kurzweil integrálható függvény. Ekkor:

$$\int_a^b f \geq 0.$$

Bizonyítás: Adott $\varepsilon > 0$, és válasszunk egy γ normát úgy, hogy megfeleljen a definíciónak. Ekkor, ha D egy γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása $[a, b]$-nek, akkor

$$\left|S(f, D) - \int_a^b f\right| < \varepsilon.$$

Következésképpen, mivel $S(f, D) \geq 0$,

$$\int_a^b f > S(f, D) - \varepsilon > -\varepsilon,$$

bármely pozitív ε-ra. Ebből következik, hogy $\int_a^b f \geq 0$.

Parciális integrálás:

5.14. Tétel: Legyen $F, G, f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy F és G folytonos, és $F' = f$, $G' = g$ megszámlálhatóan sok pont kivételével. Ekkor $Fg + fG$ is Henstock-Kurzweil integrálható, és

$$\int_a^b (Fg + fG) = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Ezenkívül, Fg is Henstock-Kurzweil integrálható akkor és csak akkor, ha fG is Henstock-Kurzweil integrálható, és ekkor:

$$\int_a^b Fg + \int_a^b fG = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Bizonyítás: A tétel első fele az 5.11. tételből adódik, hiszen: $(FG)' = FG' + F'G = Fg + fG$ megszámlálhatóan sok pont kivételével, így

$$\int_a^b (Fg + fG) = \int_a^b (FG)' = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

A tétel második felének bizonyítása: mivel $(FG)' = Fg + fG$ megszámlálhatóan sok pont kivételével, az integrálszámítás általánosított alaptétele I. alapján $(FG)'$ is Henstock-Kurzweil integrálható, és fennáll az

$$\int_a^b (Fg + fG) = F(b)G(b) - F(a)G(a)$$

egyenlőség.

5.3.1. A Cauchy kritérium

Tegyük fel, hogy az $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény Henstock-Kurzweil integrálható $[a, b]$-n, és $\varepsilon > 0$. Ekkor van olyan γ norma amelyre, ha D egy γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása $[a, b]$-nek, akkor:

$$\left| S(f, D) - \int_a^b f \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyen D_1 és D_2 egymástól különböző γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása $[a, b]$-nek. Ekkor:

$$|S(f, D_1) - S(f, D_2)| \le \left| S(f, D_1) - \int_a^b f \right| + \left| \int_a^b f - S(f, D_2) \right| < \varepsilon,$$

amely egyben a Cauchy kritérium. A Riemann- integrálhoz hasonlóan a Henstock-Kurzweil integrál is jellemezhető a Cauchy kritérium feltételeivel.

5.15. Tétel: Egy $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ függvény Henstock-Kurzweil integrálható $[a,b]$-n, akkor és csak akkor, ha minden $\varepsilon>0$-ra van γ norma úgy, hogy ha D_1 és D_2 két γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása $[a,b]$-nek, akkor

$$|S(f,D_1)-S(f,D_2)|<\varepsilon.$$

Bizonyítás: Feltesszük, hogy a Cauchy kritérium fennáll, és azt fogjuk bizonyítani, hogy az f függvény Henstock-Kurzweil integrálható.

Minden $k\in\mathbb{N}$-re válasszunk $\gamma_k>0$ normát úgy, hogy bármely két, γ_k-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező D_1, D_2 felosztására $[a,b]$-nek,

$$|S(f,D_1)-S(f,D_2)|<\frac{1}{k}.$$

Ha γ_k-t $\bigcap_{j=1}^{k}\gamma_j$-vel helyettesítjük, feltehetjük, hogy $\gamma_{k+1}\subset\gamma_k$. Minden k-ra rögzítjük a γ_k-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező D_k felosztást. Megjegyezzük, hogy ha $j>k$, mivel $\gamma_j\subset\gamma_k$, D_j is egy γ_k-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása $[a,b]$-nek. Ezért

$$\left|S(f,D_k)-S(f,D_j)\right|<\frac{1}{k},$$

amiből következik, hogy az $\{S(f,D_k)\}_{k=1}^{\infty}$ sorozat egy Cauchy sorozat a valós számok halmazán, ezért konvergens. Legyen A ennek a sorozatnak a határértéke. Az előbbi egyenlőtlenségből következik, hogy

$$|S(f,D_k)-A|\leq\frac{1}{k}.$$

Be kell még bizonyítani, hogy A-ra igaz a Henstock-Kurzweil integrálhatóság definíciója. Legyen $\varepsilon>0$ rögzített, és válasszuk meg k-t úgy, hogy $k>\frac{2}{\varepsilon}$. Legyen D egy γ_k-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása $[a,b]$-nek. Ekkor

$$|S(f,D_k)-A|=\ |S(f,D)-S(f,D_k)|+|S(f,D_k)-A|<\frac{1}{k}+\frac{1}{k}<\varepsilon.$$

Ebből következik, hogy f Henstock-Kurzweil integrálható $[a,b]$-n. Ezzel be is bizonyítottuk a tételt.

5.3.2. Az integrál, mint függvényhalmaz

Tegyük fel, hogy $f: I = [a,b] \to \mathbb{R}$ Henstock-Kurzweil integrálható $[a,b]$-n, és J az $[a,b]$ egy részintervalluma. Ekkor igaz az alábbi tétel:

5.16. Tétel: Legyen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ egy Henstock-Kurzweil integrálható függvény $[a,b]$-n. Ha $J \subset [a,b]$ egy zárt részintervalluma $[a,b]$ -nek, akkor f Henstock-Kurzweil integrálható a J-n.

Bizonyítás: Legyen $\varepsilon > 0$ és γ egy norma az $[a,b]$ intervallumon úgy, hogy ha D_1 és D_2 két, γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása $[a,b]$-nek, akkor

$$|S(f,D_1) - S(f,D_2)| < \varepsilon.$$

Legyen $J = [c,d]$ zárt részintervalluma $[a,b]$-nek, $J_1 = [a,c]$ és $J_2 = [d,b]$ két részintervallum. Legyen $\bar{\gamma} = \gamma|_J$ és $\gamma_i = \gamma|_{J_i}$. Tegyük fel, hogy D és ϵ $\bar{\gamma}$-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása J-nek, és D_i is γ_i-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása J_i-nek, $i = 1,2$. Ekkor $D' = D \cup (D_1 \cup D_2)$, és $\epsilon' = \epsilon \cup (D_1 \cup D_2)$ γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása I-nek. Mivel D' és ϵ' ugyanazokat a (z_j, I_i) párokat tartalmazza a J intervallumon kívül,

$$|S(f,D) - S(f,\epsilon)| = |S(f,D') - S(f,\epsilon')| < \varepsilon.$$

Így, a Cauchy kritérium alapján f Henstock-Kurzweil integrálható J-n.

Tehát ha egy függvény Henstock-Kurzweil integrálható egy I intervallumon, akkor Henstock-Kurzweil integrálható az I minden részintervallumán, és az $F(J) = \int_J f$ számhalmaz minden $J \subset I$ zárt részintervallumon értelmezett.

A kérdés az, hogy igaz-e az, hogy ha f Henstock-Kurzweil integrálható minden zárt $J \subset I$ részintervallumon, akkor f Henstock-Kurzweil integrálható I-n. Ehhez kapcsolódik a következő tétel:

5.17. Tétel: Legyen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ és $\{I_j\}_{j=1}^m$ véges számú zárt intervallum, melyeknek nincs közös belső pontjuk, de $\bigcup_{j=1}^m I_j = [a,b]$. Ha f Henstock-Kurzweil integrálható minden I_j-n, akkor f Henstock-Kurzweil integrálható $[a,b]$-n, és

$$\int_a^b f = \sum_{j=1}^{m} \int_{I_j} f.$$

Bizonyítás: Először csak $m = 2$-re bizonyítjuk. Feltesszük azt, hogy $[a,b]$ fel van osztva két részintervallumra: $I_1 = [a,c]$ és $I_2 = [c,b]$, és f Henstock-Kurzweil integrálható mindkét intervallumon. Rögzített $\varepsilon > 0$-ra, és i=1,2-re választunk γ_i normát az I_i intervallumon úgy, hogy ha D egy γ_i-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása I_i-nek, akkor $\left|S(f,D) - \int_{I_i} f\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ha $x < c$, akkor a hosszabb intervallum, amelynek x a középpontja, és c-t nem tartalmazza: $(x - |x-c|, x + |x-c|) = (x - |x-c|, c)$, hasonlóan, ha $x > c$, akkor a hosszabb intervallum $(c, x - |x-c|)$. Definiálunk egy normát az I egészére a következőképpen:

$$\gamma(x) = \begin{cases} \gamma_1(x) \cap (x - |x-c|, c) & ha\, x \in [a,c) \\ \gamma_2(x) \cap (c, x - |x-c|) & ha\, x \in (c,b] \\ \gamma_1(c) \cap \gamma_2(c) & ha\, x = c \end{cases}.$$

Mivel $c \in \gamma(x)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x = c$, ezért c kijelölt pontja minden γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztásnak. Tegyük fel, hogy D egy γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása $[a,b]$-nek. Ha $(c,J) \in D$, és J metszete az I_1, I_2 intervallumokkal nem üres, akkor J-t két intervallumra osztjuk: $J_i = J \cap I_i$, $J_i \subset \gamma_i(c)$, $i = 1,2$. Ekkor $f(c)l(J) = f(c)l(J_1) + f(c)l(J_2)$. D helyett $D_1 \cup D_2$-t írunk, ahol $D_i = \{(x,J) \in D : J \in I_i\}$. A γ norma definíciójából adódik, hogy D_i γ_i-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása I_i-nek. Miután a c kijelölt ponthoz kapcsolódóan felosztottuk az intervallumot, ha szükséges, mondhatjuk, hogy $S(f,D) = S(f,D_1) + S(f,D_2)$. Így

$$\left|S(f,D) - \left\{\int_{I_1} f - \int_{I_2} f\right\}\right| \le \left|S(f,D_1) - \int_{I_1} f\right| + \left|S(f,D_2) - \int_{I_2} f\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Így f Henstock-Kurzweil integrálható $[a,b]$-n, és

$$\int_a^b f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f.$$

Az $m = 2$ esetből teljes indukcióval adódik az általános eset.

Ehhez a témához kapcsolódik egy fontos, ugyanakkor nem meglepő tétel is:

5.18. Tétel: Legyen $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos $[a,b]$-n. Ekkor f Henstock-Kurzweil integrálható $[a,b]$-n.

Bizonyítás: Azt már tudjuk, hogy egy folytonos függvény Riemann-integrálható (2.2. tétel), valamint hogy minden Riemann-integrálható függvény Henstock-Kurzweil integrálható is (5.6. tétel). Ebből a két tételből következik a fenti tétel.
A tételt be lehet bizonyítani úgy is, hogy nem hivatkozunk a Riemann-integrálra, hanem közvetlenül a tételt bizonyítjuk. Ettől a bizonyítástól most azonban eltekintünk.

5.4. Nem korlátos intervallumok

A Henstock-Kurzweil integrálhatóságot eddig csak egy korlátos zárt intervallumon értelmeztük. Mi történik, ha ki szeretnénk terjeszteni egy nem korlátos intervallumra?

Legyen f egy $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett függvény. Kiterjesztjük az f függvényt az egész $\mathbb{R}$-re a következőképpen: legyen f az I intervallumon kívül mindenütt 0. Az így kapott függvénynek ugyanaz lesz a Riemann- integrálja, mint az eredetinek, de ez már az egész $\mathbb{R}$-en értelmezett.

Az $\mathbb{R}$ halmaz egy felosztása egy véges rendezett ponthalmaz: $P = \{-\infty = x_0, x_1, \dots, x_n = \infty\}$.

Ha ki szeretnénk terjeszteni a Henstock-Kurzweil integrált az $\mathbb{R}$ halmazra, problémák merülnek fel:

1. $\mathbb{R}$-nek minden kijelölt pontokkal rendelkező felosztása tartalmaz legalább egy (általában két) végtelen hosszúságú részintervallumot. Ha I egy nem korlátos részintervallum, akkor azt mondjuk, hogy $l(I) = \infty$, ahol $l(I)$ jelöli az I intervallum hosszát. Megállapodunk abban, hogy $0 \cdot \infty = 0$. A probléma kiküszöbölése érdekében a következőt csináljuk: feltesszük, hogy f értelmezett a számegyenes $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ meghosszabbításán, és definiáljuk az $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy $f(\infty) = f(-\infty) = 0$. Az $[a, \infty]$, és $[-\infty, a]$ intervallumokat zártaknak tekintjük, amelyek tartalmazzák $-\infty$-t, és ∞-t. Az

$(a, \infty]$, $[-\infty, a)$ intervallumok nyíltak, amelyek tartalmazzák $-\infty$-t, és ∞-t. Ha $a_1 = -\infty$, és $a_n = \infty$, akkor kiküszöböltük a problémát, azzal, hogy megállapodtunk, hogy $0 \cdot \infty = 0$.

2. Azért, hogy kezelni tudjuk a végtelen hosszúságú intervallumokat, olyan normát kell választanunk, amelyben annak az intervallumnak a kijelölt pontja, amely a ∞-t, vagy a $-\infty$-t tartalmazza, az maga legyen a ∞, vagy a $-\infty$. Valós t számokra egy norma úgy volt értelmezve, mint egy t középpontú nyílt intervallum $(t - \delta(t), t + \delta(t))$. Ez az értelmezés nem működik, ha $t = \infty$, tehát ezt ki kell javítani.

Előbb azonban vezessünk be néhány új fogalmat, illetve az eddigieket terjesszük ki $\mathbb{R}^*$-ra:

Tegyük fel, hogy $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Kiterjesztjük f-et $\mathbb{R}^*$-ra, úgy, hogy $f(x) = 0$, ha $x \notin I$, azaz $f = 0$, ha $x = \infty$ vagy $-\infty$. A következőkben kikötjük, hogy ha az f függvény a ∞-ben, vagy a $-\infty$-ben definiálva van, akkor ott csak 0 lehet az értéke.

Legyen $I \subset \mathbb{R}^*$ egy zárt intervallum. I-nek egy felosztását úgy definiáljuk, mint egy véges $\{I_1, \dots, I_m\}$ zárt intervallumhalmaz, melyek nem fedik egymást, de $\bigcup_{i=1}^{m} I_i = I$. Egy kijelölt pontokkal rendelkező felosztása az I intervallumnak véges sok rendezett pár $D = \{(t_i, I_i) : i = 1, \dots, m\}$, ahol $\{I_i : i = 1, \dots, m\}$ egy felosztása $[a, b]$-nek, és $t_i \in I_i$, $i = 1, \dots, m$. A t_i pontot az I_i intervallumhoz tartozó kijelölt pontnak nevezzük.

Legyen I egy zárt részintervalluma $\mathbb{R}^*$-nak, és tegyük fel, hogy $f: I \to \mathbb{R}$. Legyen $D = \{(t_i, I_i) : i = 1, \dots, m\}$ egy kijelölt pontokkal rendelkező felosztása I-nek. Az f függvény D felosztásának megfelelő Riemann összeg:

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{m} f(t_i) l(I_i).$$

Ha minden végtelen hosszú intervallumhoz a ∞ vagy a $-\infty$ a kijelölt pont, akkor ez az összeg jól értelmezett, és véges.

5.19. Definíció: Adott egy $I \subset \mathbb{R}^*$ intervallum. Egy I intervallumon értelmezett intervallum értékű γ függvényt normának nevezünk, ha minden $t \in I$ esetén $\gamma(t)$ egy nyílt intervallum $\mathbb{R}^*$-n, amely tartalmazza t-t. Ha $D = \{(t_i, I_i) : i = 1, \dots, m\}$ egy kijelölt pontokkal rendelkező felosztása I-nek, és γ egy norma I-n, azt mondjuk, hogy D γ-finomságú, ha $I_i \subset \gamma(t_i)$ minden i-re, azaz D egy γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása I-nek.

5.20. Definíció: Legyen I egy zárt intervalluma $\mathbb{R}^*$-nak, és $f: I \to \mathbb{R}$. Az f függvényt Henstock-Kurzweil integrálhatónak nevezzük I-n, ha van olyan $A \in \mathbb{R}$, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén van γ norma I-n, hogy minden γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező D felosztására $[a, b]$-nek

$$|S(f, D) - A| < \varepsilon.$$

A fenti definíció a korábbi Henstock-Kurzweil integrál kiterjesztését adja $\mathbb{R}^*$-ra. Ha egy függvény az eddigi definíció szerint Henstock-Kurzweil integrálható, akkor az új szerint is, és az integrálok megegyeznek. Az alaptulajdonságok ugyan úgy igazak itt is, mint korlátos zárt intervallumon.

5.5. Henstock lemma

5.21. Definíció: Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum. A $\{J_i\}_{i=1}^k$ legfeljebb egy pontban metsző, zárt intervallumokból álló halmaz egy részfelosztása I-nek, ha $J_i \subset I$ minden $i = 1, .. k$ -ra. I-nek egy kijelölt pontokkal rendelkező részfelosztása egy olyan $S = \{(t_i, J_i) : i = 1, .., k\}$ rendezett pontokból álló véges halmaz, melyben $\{J_i\}_{i=1}^k$ egy részfelosztása I-nek, és $t_i \in I_i$ minden i-re. Egy kijelölt pontokkal rendelkező részfelosztás γ-finomságú, ha $I_i \subset \gamma(t_i)$ minden i-re.

5.22. Henstock-lemma: Legyen $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Henstock-Kurzweil integrálható függvény I-n. Ha $\varepsilon > 0$, legyen γ egy norma úgy, hogy ha D egy γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása I-nek, akkor

$$\left| S(f, D) - \int_I f < \varepsilon \right|.$$

Tegyük fel, hogy $D' = \{(x_1, J_1), \dots, (x_k, J_k)\}$ egy γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező részfelosztása I-nek. Ekkor:

$$\left|\sum_{i=1}^{k}\left\{f(x_i)l(J_i)-\int_{J_i} f\right\}\right| \leq \varepsilon \quad és \quad \sum_{i=1}^{k}\left|f(x_i)l(J_i)-\int_{J_i} f\right| < 2\varepsilon.$$

Bizonyítás: Legyen $\varepsilon > 0$ és γ egy norma, mely teljesíti a feltételt. Az $I \setminus \bigcup_{i=1}^{k} J_i$ halmaz diszjunkt intervallumok véges egyesítése. Legyenek $K_1, \ldots, K_m$ ezen intervallumok a zárt végeikkel együtt. Rögzítjük $\eta > 0$-t. Mivel f Henstock-Kurzweil integrálható mindegyik K_j-n, van olyan D_j γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása K_j-nek, hogy

$$\left|S(f, D_j) - \int_{K_j} f\right| < \frac{\eta}{m}.$$

Ehhez előbb veszünk egy γ_j normát az előírt $\frac{\eta}{m}$ hibahatárhoz a K_j intervallumon, majd veszünk egy $\gamma \cap \gamma_j$ finomságú felosztást. Legyen $D = D' \cup D_1 \cup \ldots \cup D_m$. Ekkor D egy γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása I-nek. Mivel $S(f, D) = S(f, D') + \sum_{j=1}^{m} S(f, D_j)$, adódik:

$$\left|S(f, D') - \sum_{i=1}^{k}\int_{J_i} f\right|$$

$$= \left|S(f, D') - \sum_{i=1}^{k}\int_{J_i} f + \sum_{j=1}^{m}\left\{S(f, D_j) - \int_{K_j} f\right\} - \sum_{j=1}^{m}\left\{S(f, D_j) - \int_{K_j} f\right\}\right|$$

$$\leq \left|S(f, D) - \int_{I} f\right| + \sum_{j=1}^{m}\left|S(f, D_j) - \int_{K_j} f\right| < \varepsilon + m\frac{\eta}{m} = \varepsilon + \eta.$$

Mivel $\eta > 0$ tetszőleges, következik, hogy

$$\left|\sum_{i=1}^{k}\left\{f(x_i)l(J_i)-\int_{J_i} f\right\}\right| = \left|S(f, D') - \sum_{i=1}^{k}\int_{J_i} f\right| \leq \varepsilon.$$

Hogy bebizonyítsuk a másik becslést is, legyen

$$D^+ = \left\{(x_i, J_i) \in D' : f(x_i)l(J_i) - \int_{J_i} f \geq 0\right\},$$

és $D^- = D' \setminus D^+$. Megjegyezzük, hogy D^-, és D^+ is γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező részfelosztása I-nek úgy, hogy teljesül rá az előző becslés. Így

$$\sum_{i=1}^{k}\left|f(x_i)l(J_i)-\int_{J_i} f\right|$$

$$=\sum_{(x_i,J_i)\in D^+}\left\{f(x_i)l(J_i)-\int_{J_i} f\right\}+\sum_{(x_i,J_i)\in D^-}\left\{f(x_i)l(J_i)-\int_{J_i} f\right\}\leq 2\varepsilon.$$

Ezzel bebizonyítottuk a tételt.

A Henstock-lemmát felhasználva bebizonyítunk két fontos tételt, a Henstock-Kurzweil integrállal kapcsolatban.

Tegyük fel, hogy I egy részintervalluma $\mathbb{R}$-nek, és $a \in I$. Tegyük fel, hogy $f: I \to \mathbb{R}$ Henstock-Kurzweil integrálható, tehát f integrálható I-nek minden részintervallumán. Definiáljuk az f függvény F határozatlan integrálját a következőképpen: $F(x) = \int_a^x f$ minden $x \in I$-re.

5.23. Tétel: Ha $f: I \to \mathbb{R}$ Henstock-Kurzweil integrálható I-n, akkor F folytonos I-n.

Bizonyítás: Adott $a \in I$ és $x \in I$. Legyen $\varepsilon > 0$. Válasszunk egy γ normát úgy, hogy $\left|S(f,D) - \int_I f\right| < \varepsilon$ minden D γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztására I-nek. Ha $\gamma(x) = (\alpha, \beta)$, legyen $\delta = min\left\{\beta - x, x - \alpha, \frac{\varepsilon}{1+|f(x)|}\right\}$, és tegyük fel, hogy $y \in I$, és $|y - x| < \delta$. Legyen J egy részintervalluma I-nek, melynek végpontjai x és y. Alkalmazva a Henstock-lemmát az $\{(x,J)\}$ γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező részfelosztásra, következik, hogy

$$\left|f(x)l(J) - \int_J f\right| \leq \varepsilon.$$

Ebből következik, hogy

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_J f\right| \leq \varepsilon + |f(x)|l(J) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Így F folytonos az x helyen. Mivel $x \in I$ tetszőleges, ezért F folytonos I-n.

5.24. Tétel: Legyen $f: I = [a,b] \to \mathbb{R}$ egy Henstock-Kurzweil integrálható függvény I-n. Ha $\int_a^c f = 0$ minden $c \in [a,b]$-ra, akkor $|f|$ is Henstock-Kurzweil integrálható, és $\int_I |f| = 0$.

Bizonyítás: A feltétel alapján, ha $a \leq c < d \leq b$, akkor $\int_c^d f = \int_a^d f - \int_a^c f = 0$, tehát $\int_J f = 0$ minden $J \subset I$-re. Legyen $\varepsilon > 0$ és válasszunk egy γ normát úgy, hogy

$$\left| S(f,D) - \int_I f \right| < \varepsilon,$$

minden D γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztásra. Legyen $D = \{(t_i, I_i): i = 1,..,m\}$ egy ilyen felosztás. A Henstock-lemma alapján:

$$\sum_{i=1}^{m} |f(x_i)| l(I_i) = \sum_{i=1}^{m} \left| f(x_i) l(I_i) - \int_{I_i} f \right| \leq 2\varepsilon\,,$$

amiből következik, hogy $|f|$ Henstock-Kurzweil integrálható, és $\int_I |f| = 0$.

A következő két tételt nem bizonyítjuk, a bizonyítás bonyolultsága miatt.

5.25. Tétel: Tegyük fel, hogy f olyan $[a,b] \to \mathbb{R}$ függvény, amely Henstock-Kurzweil integrálható a $[c,b]$ intervallumon, bármely $a < c < b$ esetén. Ekkor, az f függvény akkor és csak akkor Henstock-Kurzweil integrálható $[a,b]$-n, ha $\lim_{c \to a^+} \int_c^b f$ létezik. Ebben az esetben

$$\int_a^b f = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f.$$

A előző alapján már be tudjuk bizonyítani, hogy az

$$f'(x) = \begin{cases} 2xcos\dfrac{\pi}{x^2} + \dfrac{2\pi}{x} sin\dfrac{\pi}{x^2} & ha\ 0 < x \leq 1 \\ 0 & ha\ x = 0 \end{cases}$$

függvény Henstock-Kurzweil integrálható. A tétel alapján az $f'(x)$ Henstock-Kurzweil integrálható a $[0,1]$ intervallumon, ha a $\lim_{c \to 0^+} \int_c^1 f'(x)$ határérték létezik. Ebben az esetben az integrál értéke megegyezik ezzel a határértékkel. $\int_c^1 f'(x) = \left[x^2 \cos\frac{\pi}{x^2}\right]_c^1 = -1 - c^2 \cos\frac{\pi}{c^2}$. Ezek után meg kell néznünk, hogy $\lim\limits_{c \to 0^+} -1 - c^2 \cos\frac{\pi}{c^2}$ létezik-e.

$$\lim_{c \to 0^+} -1 - c^2 \cos\frac{\pi}{c^2} = -1.$$

Azaz, létezik a határérték, tehát az $f'(x)$ függvény a $[0,1]$ intervallumon Henstock-Kurzweil integrálható, és az integrálja -1.

5.26. Tétel: Legyen $f: I = [a, \infty] \to \mathbb{R}$ egy Henstock-Kurzweil integrálható függvény az $[a, b]$-n, minden $a < b < \infty$ esetén. Ekkor f egy Henstock-Kurzweil integrálható függvény, akkor és csak akkor, ha $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f$ létezik. Ez esetben

$$\int_a^\infty f = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f.$$

A tételből következik, hogy $[-\infty, \infty]$ intervallumon is tudunk integrálni, ha az intervallumok helyett a $[-\infty, a]$ és $[a, \infty]$ intervallumokon integrálunk, Az integrál értéke független a megválasztástól.

Ebből a két tételből következik egy harmadik:

5.27. Tétel: Legyen $f: [a, b] \subset \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy f abszolút integrálható [a,c]-n minden $a \leq c < b$ esetén.

(1) Tegyük fel, hogy f nemnegatív. Ekkor f akkor és csak akkor Henstock-Kurzweil integrálható $[a, b]$-n, ha $\sup\{\int_a^c f : a \leq c < b\} < \infty$.

(2) Ha van egy $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ Henstock-Kurzweil integrálható függvény, amelyre $|f(t)| \leq g(t)$, minden $t \in I$-re, akkor f abszolút integrálható I-n.

Megjegyzés: b lehet véges, vagy végtelen is.

Bizonyítás: (1) Legyen $F(x) = \int_a^x f$. Az F függvény az $[a, b]$-n növekvő. Így $\sup\{\int_a^c f : a \leq c < b\} = \lim_{c\to b} \int_a^c f$, az eredmény az előző tételből következik.

(2) Definiáljuk az F függvényt úgy, mint az előbb, és legyen $G(x) = \int_a^x g$. Mivel g Henstock-Kurzweil integrálható, G teljesíti a Cauchy feltételt b közelében. Azt állítjuk, hogy F is teljesíti a Cauchy feltételt b közelében. Ehhez megjegyezzük, hogy ha $a < x < y < b$, akkor

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f\right| \leq \int_x^y |f| \leq \int_x^y g = G(y) - G(x).$$

Így f is teljesíti a Cauchy feltételt b közelében és f Henstock-Kurzweil integrálható az előbb be nem bizonyított tételek alapján. Ugyanígy, a $H(x) = \int_a^x |f|$ függvényre, azt kapjuk, hogy $|f|$ Henstock-Kurzweil integrálható, tehát f abszolút integrálható.

5.28. Tétel: Legyen $f: [1, \infty] \to \mathbb{R}$ egy pozitív, csökkenő és Henstock-Kurzweil integrálható függvény az $[1, b]$ intervallumon minden $1 < b < \infty$-re. Az $\int_1^\infty f$ integrál akkor és csak akkor létezik, ha a $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ sorozat konvergens. Ez esetben

$$\int_1^\infty f \leq \sum_{i=1}^\infty f(k) \leq \int_1^\infty f + f(1).$$

Bizonyítás: Mivel f csökkenő, $f(i+1) \leq f(x) \leq f(i)$, ha $i \leq x \leq i+1$, amiből következik, hogy $f(i+1) \leq \int_i^{i+1} f \leq f(i)$. Összegezve i szerint, adódik, hogy

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i+1) \leq \int_1^n f \leq \sum_{i=1}^{n-1} f(i).$$

Az előző tételből, következik, hogy f Henstock-Kurzweil integrálható $[1, \infty]$ intervallum egészén, akkor és csak akkor, ha a sorozat konvergens. Tegyük fel, hogy $n \to \infty$ az előző egyenlőtlenségben, következik, hogy

$$\int_1^\infty f \leq \sum_{i=1}^\infty f(k) \leq \int_1^\infty f + f(1).$$

5.6. Abszolút integrálhatóság

Egy függvényt abszolút integrálhatónak mondunk az $[a, b]$ intervallumon, ha f és $|f|$ is integrálható.

A Lebesgue-integrálnál láttuk, hogy f függvény Lebesgue-integrálható akkor és csak akkor, ha abszolút (Lebesgue)-integrálható, A Riemann-integrálra igaz, hogy ha egy f függvény Riemann-integrálható, akkor f abszolút Riemann-integrálható is.

A Henstock-Kurzweil integrálnál nem szükséges, hogy abszolút integrálható legyen, ezért nem tudjuk, hogy $|f|$ Henstock-Kurzweil integrálható-e.

Mielőtt ezt elkezdenénk vizsgálni, bevezetünk néhány fogalmat:

5.29. Definíció: Legyen $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$. Ha adott egy $P = \{x_0, .., x_m\}$ felosztása [a,b]-nek, ahol $a \leq x_0 < \cdots < x_n \leq b$, a φ függvény változását a P felosztására vonatkozóan a következőképpen értelmezzük:

$$v(\varphi, P) = \sum_{i=1}^{m} |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})|,$$

és φ teljes változása az $[a,b]$ intervallumra:

$$Var(\varphi, [a,b]) = \sup\{v(\varphi, P): P\ egy\ felosztása\ [a,b] - nek\}.$$

Azt mondjuk, hogy φ korlátos változású [a,b]-n, ha $Var(\varphi, [a,b]) < \infty$. Jelölés: $\varphi \in BV([a,b])$

5.30. Tétel: Legyen $f: I = [a,b] \to \mathbb{R}$ egy Henstock-Kurzweil integrálható függvény I-n. Ekkor $|f|$ akkor és csak akkor Henstock-Kurzweil integrálható I-n, ha az f határozatlan integrálja korlátos változású I-n. Ebben az esetben:

$$Var(F, [a,b]) = \int_a^b |f|.$$

A tételt a bizonyítás bonyolultsága miatt nem bizonyítjuk be.

Ennek a tételnek a következménye:

5.31. Állítás: Ha $f, g: I = [a,b] \to \mathbb{R}$ abszolút integrálható függvény I-n, akkor $f + g$ is abszolút integrálható I-n.

5.32. Tétel: Legyen $f, g: I = [a,b] \to \mathbb{R}$ Henstock-Kurzweil integrálható I-n, és feltesszük, hogy $|f(t)| \leq g(t)$, minden $t \in I$-re. Akkor f abszolút integrálható I-n, és

$$\int_I |f| \leq \int_I g.$$

Bizonyítás: Legyen $P = \{x_0, .., x_m\}$ egy felosztása I-nek. Akkor

$$\sum_{i=1}^{m} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f \right| \leq \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g = \int_I g.$$

Így az f függvény F határozatlan integrálja korlátos változású $[a,b]$-n, és az előző tétel alapján $|f|$ integrálható I-n, és

$$\int_I |f| = Var(F, [a,b]) \leq \int_I g.$$

5.7. Az integrálfüggvény differenciálhatósága

Az eddigiek során bebizonyítottuk, hogy minden derivált Henstock-Kurzweil integrálható. Sőt, azt is bebizonyítottuk, hogy ez abban az esetben is igaz, amikor a derivált véges ponthalmazon nem létezik.

Felmerül a kérdés, hogy ennek a megfordítása is igaz-e, azaz, hogy ha f függvény Henstock-Kurzweil integrálható, akkor igaz-e, hogy véges ponthalmaz kivételével az f integrálfüggvény deriválható.

5.33. Tétel: Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Henstock-Kurzweil integrálható $[a,b]$-n, és folytonos $x \in [a,b]$ helyen. Akkor az f függvény határozott integrálja, F differenciálható az x helyen, és $F'(x) = f(x)$.

Bizonyítás: Mivel f folytonos x helyen, minden $\varepsilon > 0$-ra van olyan $\delta > 0$, hogy ha $t \in [a,b]$, és $|t - x| < \delta$, akkor $-\varepsilon < f(t) - f(x) < \varepsilon$.

Ha $0 < h < \delta$, vagyis $x + h \in [a,b]$, akkor

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \big(f(t) - f(x)\big)dt$$

azaz,

$$-\varepsilon \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \leq \varepsilon\,.$$

Hasonlóan, $-\delta < h < 0$-ra :

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \leq \varepsilon.$$

Így, $|h| \leq \delta$ és $x + h \in [a,b]$ esetén:

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \leq \varepsilon\,.$$

Tehát $F'(x) = f(x)$.

Az előző tételben feltettük, hogy f folytonos az x helyen. A kérdés az, hogy vajon akkor is differenciálható-e a függvény, ha csak azt tesszük fel róla, hogy Henstock-Kurzweil integrálható. Erre ad választ a következő tétel.

Előtte azonban definiálnunk kell néhány dolgot:

5.34. Definíció: A null halmaz egy olyan halmaz, amely tetszőlegesen kicsi összhosszúságú véges vagy megszámlálhatóan végtelen intervallumrendszerrel lefedhető.

5.35. Definíció: Azt mondjuk, hogy valami majdnem mindenütt teljesül, ha azon pontok halmaza, amelyekben nem teljesül, null halmaz.

Az integrálszámítás alaptételének II. része:

5.36. Tétel: Tegyük fel, hogy $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ Henstock-Kurzweil integrálható. Akkor F differenciálható majdnem minden $x \in [a, b]$-re, és $F'(x) = f(x)$, ahol F az f függvény integrálfüggvénye.

Ahhoz, hogy ezt a tételt bebizonyítsuk, szükségünk van két lemmára:
Adott I intervallum esetén legyen $3I$ azonos középpontú I-vel, és háromszor olyan hosszú.

5.37. Lemma: Legyen $C = \{I_i : i = 1, \dots, N\}$ egy véges intervallumhalmaz $\mathbb{R}$-en. Akkor léteznek páronként diszjunkt $J_1, \dots, J_k \in C$ halmazok úgy, hogy

$$\frac{1}{3} m\left(\bigcup_{i=1}^{N} I_i\right) \leq m\left(\bigcup_{j=1}^{k} J_j\right).$$

Bizonyítás: Mohó algoritmussal választunk páronként diszjunkt intervallumokat. Sorba rendezzük az intervallumokat, ha szükséges, így feltehetjük, hogy

$$l(I_N) \leq l(I_{N-1}) \leq \cdots \leq l(I_2) \leq l(I_1).$$

Legyen $J_1 = I_1$ és $C_1 = \{I \in C : I_1 \cap I = \emptyset\}$. Megjegyezzük, hogy ha $I_i \in C$, és $I_i \notin C_1$, akkor $I_i \subset 3I_1$. Utána legyen J_2 a C_1 azon eleme, mely a legnagyobb indexszel rendelkezik (azaz a leghosszabb). Legyen $C_2 = \{I \in C_1 : I_2 \cap I = \emptyset\}$ és folytatjuk az előzőkhöz hasonlóan. Mivel C véges halmaz, a J_j intervallumok válogatása néhány véges számú lépés utána véget ér, legyen k a lépések száma. A felépítésből következik, hogy a $\{J_1, \dots, J_k\}$ intervallumok páronként diszjunktak és ha az $I_i \in C$-t nem választottuk, akkor van olyan j, melyre $I_i \subset 3J_j$. Így, $\bigcup_{i=1}^{N} I_i = \bigcup_{j=1}^{k} \bigcup_{I_i \cap J_j \neq \emptyset} I_i \subset \bigcup_{j=1}^{k} 3J_j$, úgy, hogy

$$\frac{1}{3} m\left(\bigcup_{i=1}^{N} I_i\right) \leq \frac{1}{3} m\left(\bigcup_{j=1}^{k} 3J_j\right) \leq \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{k} m(3J_j) = \sum_{j=1}^{k} m(J_j) = m\left(\bigcup_{j=1}^{k} J_j\right).$$

Ezzel bebizonyítottuk az első lemmát.

5.38. Lemma: Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy zárt és korlátos halmaz, és $E \subset I$ egy nem üres halmaz. Legyen γ egy norma I-n. Ekkor létezik egy olyan megszámlálható $\{(t_k, J_k) : k \in \sigma\}$ rendszer, amelyre $\{J_k : k \in \sigma\}$ intervallumai I egymást át nem fedő zárt részintervallumai, $t_k \in J_k \cap E$, $J_k \subset \gamma(t_k)$, és $E \subset \bigcup_{k \in \sigma} J_k \subset I$.

Ezt a lemmát nem bizonyítjuk.

Most következik az integrálszámítás alaptétel II. részének a bizonyítása:

Bizonyítás: Egy rögzített $\mu > 0$-ra azt mondjuk, hogy $x \in (a, b)$ teljesíti a $(*_\mu)$ feltételt, ha bármely környezete x-nek tartalmaz egy $[u, v]$ intervallumot úgy, hogy $x \in (u, v)$, és

$$\left|\frac{F(v) - F(u)}{v - u} - f(x)\right| > \mu.$$

Legyen E_μ minden olyan $x \in (a, b)$ elem halmaza, amely teljesíti a $(*_\mu)$ feltételt, és legyen $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{1/n}$. Tegyük fel, hogy $x \notin E$. Ekkor minden $n \geq 1$-re van olyan U_n környezete x-nek, hogy minden $[u, v] \subset U_n$ intervallumra, ahol $x \in (u, v)$, teljesül, hogy

$$\left|\frac{F(v) - F(u)}{v - u} - f(x)\right| \leq \frac{1}{n}.$$

F folytonosságából adódik (5.23.tétel), hogy ez az egyenlőtlenség fennáll, ha u-t x-re kicseréljük, valamint U_n-et csökkentjük, és $\frac{1}{n}$ helyett $\frac{2}{n}$-et írunk. Így, ha $x \notin E$, akkor F differenciálható x helyen, és $F'(x) = f(x)$.

Elég megmutatni, hogy $E_\mu$null halmaz, minden $\mu > 0$-ra, mivel ekkor $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{1/n}$ null halmaz. Ha $E_\mu = \emptyset$, nincs mit bizonyítanunk, tehát feltesszük, hogy $E_\mu \neq \emptyset$. Rögzítjük $\varepsilon > 0$-t. Mivel f Henstock-Kurzweil integrálható, a Henstock lemma alapján van olyan γ norma $[a, b]$-n, hogy

$$\sum_{i=1}^{l}|F(v_i) - F(u_i) - f(x_i)(v_i - u_i)| < \frac{\varepsilon\mu}{6},$$

minden γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező D részfelosztásra $[a, b]$-n, ahol $D = \{(x_i, [u_i, v_i]): i = 1, \dots, l\}$. Ha $x \in E_\mu$, választunk egy $[u_x, v_x]$ intervallumot, hogy $x \in [u_x, v_x] \subset \gamma(x)$, és

$$\left|\frac{F(v_x) - F(u_x)}{v_x - u_x} - f(x)\right| > \mu$$

fennáll. Utána választunk egy γ_1 normát az E_μ halmazon, hogy $\gamma_1(x) \subset (u_x, v_x)$ minden $x \in E_\mu$. Az 5.38. lemma alapján van megszámlálhatóan sok egymást át nem fedő zárt intervallum: $\{J_k: k \in \sigma\}$ és $\{x_k: k \in \sigma\}$ pontok, hogy $x_k \in J_k \cap E_\mu$, $J_k \subset \gamma_1(x_k) \subset (u_{x_k}, v_{x_k})$, és $E_\mu \subset \bigcup_{k\in\sigma} J_k \subset [a, b]$. Legyen $\alpha = \sum_{k\in\sigma} l(J_k) \leq b - a < \infty$ és vegyük fel N értékét úgy, hogy $\sum_{k=1}^{N} l(J_k) > \frac{\alpha}{2}$. Alkalmazzuk az 5.37. lemmát az $\{(u_{x_k}, v_{x_k}): k = 1, \dots, N\}$ halmazra, hogy olyan $\{(u_{y_1}, v_{y_1}), \dots, (u_{y_k}, v_{y_k})\}$ egymást át nem fedő intervallumhalmazt kapjunk, amelyre

$$\sum_{i=1}^{K} l((u_{y_i}, v_{y_i})) = m\left(\bigcup_{i=1}^{K} (u_{y_i}, v_{y_i})\right)$$

$$\geq \frac{1}{3} m\left(\bigcup_{k=1}^{N} (u_{y_k}, v_{y_k})\right) \geq \frac{1}{3} m\left(\bigcup_{k=1}^{N} l(J_k)\right) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N} l(J_k) > \frac{\alpha}{6}.$$

Mivel $\{(x_i, [u_{x_i}, v_{x_i}]): i = 1, \dots, N\}$ egy γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező részfelosztása $[a.b]$-nek, a $\left|\frac{F(v_x)-F(u_x)}{v_x-u_x} - f(x)\right| > \mu$ és a $\sum_{i=1}^{l}|F(v_i) - F(u_i) - f(x_i)(v_i - u_i)| < \frac{\varepsilon\mu}{6}$ egyenlőtlenségek miatt:

$$\mu\sum_{i=1}^{K} l((u_{y_i}, v_{y_i})) \leq \sum_{i=1}^{N}\left|F(v_{x_i}) - F(u_{x_i}) - f(x_i)(v_{x_i} - u_{x_i})\right| < \frac{\varepsilon\mu}{6},$$

ebből következik, hogy $\varepsilon > \alpha$. Mivel $E_\mu \subset \bigcup_{k\in\sigma} J_k$ és $\sum_{k\in\sigma} l(J_k) = \alpha < \varepsilon$, következik, hogy E_μ null halmaz.

Ezzel bebizonyítottuk az integrálszámítás alaptételének II. részét.

5.8. A Henstock-Kurzweil integrál és a Lebesgue integrál kapcsolata

Az előzőekben már bebizonyítottuk, hogy minden olyan függvény, amely Riemann-integrálható, az Henstock-Kurzweil integrálható is. Az állítás azonban visszafele nem igaz, azaz ha egy függvény Henstock-Kurzweil integrálható, abból még nem következik, hogy Riemann-integrálható. Példa erre az

$$f'(x) = \begin{cases} 2xcos\frac{\pi}{x^2} + \frac{2\pi}{x}sin\frac{\pi}{x^2} & ha\ 0 < x \leq 1 \\ 0 & ha\ x = 0 \end{cases}$$

függvény, ahogy azt korábban már be is bizonyítottuk. Felmerül a kérdés, hogy vajon minden Lebesgue integrálható függvény Henstock-Kurzweil integrálható-e, és igaz e a megfordítás.

Arra, hogy igaz-e a megfordítás, már megkaptuk a választ az előző $f'(x)$ vizsgálatakor. Bebizonyítottuk, hogy nem Lebesgue integrálható, de Henstock-Kurzweil integrálható.

5.39. Tétel: Tegyük fel, hogy $f: I \to \mathbb{R}$. Ekkor f Lebesgue-integrálható akkor és csak akkor, ha abszolút Henstock-Kurzweil integrálható. Ez esetben a két integrál megegyezik.

A tételt nem bizonyítjuk, mert az olyan fogalmakat használ, amelyeket nem definiáltunk.

Látjuk, hogy ugyanazt kaptuk a Lebesgue integrál esetén is, mint a Riemann-integrálnál, azaz ha egy függvény Lebesgue-, Riemann-integrálható, akkor Henstock-Kurzweil integrálható is, és az integrálok megegyeznek. A megfordítás viszont egyik esetben sem igaz.

5.9. 0 integrálú függvények

5.40. Tétel: Legyen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy Henstock-Kurzweil integrálható függvény, és tegyük fel, hogy $\int_I f = 0$ minden I korlátos intervallumon. Akkor $f = 0$ majdnem mindenütt $\mathbb{R}$-en.

Bizonyítás: Legyen $F(x) = \int_{-n}^{x} f$ minden $x \in [-n, n]$-re. A feltevés miatt $F(x) = 0$ minden $x \in [-n, n]$-re. Az integrálszámítás alaptételének II. része alapján $f(x) = F'(x) = 0$, majdnem minden $x \in [-n, n]$-re. Ebből következik, hogy $f = 0$ majdnem mindenütt $\mathbb{R}$-en.

5.10. Henstock-Kurzweil integrál $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$-en:

Szeretnénk kiterjeszteni a Henstock-Kurzweil féle integrálszámítást, az n-dimenziós Euklideszi téren értelmezett függvényekre. Előtte azonban bevezetünk néhány definíciót, fogalmat:

Egy I intervallumot $(\mathbb{R}^*)^n$-n $\prod_{j=1}^{n} I_j$ szorzatként értelmezünk, ahol minden I_j egy intervallum $\mathbb{R}^*$-en. Azt mondjuk, hogy I nyílt/zárt $(\mathbb{R}^*)^n$-n, akkor és csak akkor, ha minden I_j nyílt/zárt $\mathbb{R}^*$-on.

Egy $I \subset (\mathbb{R}^*)^n$ intervallum terjedelme a következőképpen értelmezett: $v(t) = \prod_{j=1}^{n} l(I_j)$, azzal a megállapodással, hogy $0 \cdot \infty = 0$.

5.41. Definíció: Egy zárt V intervallum felosztása egy véges számú, zárt, egymást át nem fedő részintervallumok halmaza: $\{J_j : j = 1, .., k\}$ I-n, ahol $I = \bigcup_{j=1}^{k} J_j$. Egy kijelölt pontokkal rendelkező felosztása I-nek egy olyan $D = \{(x_i, J_j) : j = 1, \dots, k\}$ rendezett párokból álló véges halmaz, ahol $\{J_j : j = 1, .., k\}$ egy felosztása I-nek, és $x_j \in J_j$ minden j-re. Az x_j pontot a J_j intervallumhoz tartozó kijelölt pontnak nevezzük.

Mint az egy-dimenziós esetben, itt is egy norma $I \subset (\mathbb{R}^*)^n$-en nyílt intervallumot társít I pontjaihoz.

5.42. Definíció: Egy γ norma egy $I \subset (\mathbb{R}^*)^n$ intervallumon egy leképezést jelent I-n, mely hozzárendel minden $x \in I$ ponthoz egy nyílt J_x intervallumot, amely tartalmazza x-et. Egy kijelölt pontokkal rendelkező felosztást, $D = \{(x_i, J_j) : j = 1, \dots, k\}$, γ-finomságúnak mondunk, ha $x_j \in J_j \subset \gamma(J_j)$ minden $j = 1, .., k$-ra.

Ha $f : I \subset (\mathbb{R}^*)^n \to \mathbb{R}$ és $D = \{(x_i, J_j) : j = 1, \dots, k\}$ egy felosztása kijelölt pontokkal I-nek, akkor az f függvény, D felosztáshoz tartozó Riemann összeg definíció szerint:

$$S(f, D) = \sum_{j=1}^{k} f(x_j) v(J_j).$$

Feltesszük azt, hogy egy f függvény értéke 0 minden végtelen pontban (azaz, olyan pontban, amelynek legalább az egyik koordinátája 0), és megállapodás szerint $0 \cdot \infty = 0$.

5.43. Tétel: Legyen I egy zárt intervallum $(\mathbb{R}^*)^n$-n, és γ egy norma I-n. Akkor van I-nek γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása.

Bizonyítás: Először tegyük fel, hogy $\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 \times \dots \times \mathrm{I}_\mathrm{n}$ egy zárt és korlátos intervallum. Feltesszük, hogy nincs γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása I-nek. Felezzük el mindegyik I_j-t, és nézzük az n felezett intervallum szorzatát. Ezek felosztják az I intervallumot 2^n egymást nem átfedő zárt részintervallumra. Ezek közül legalább egynek nem szabad, hogy γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása legyen, mert ha mindegyiknek a 2^n részintervallum közül van γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása, akkor ezek uniója lehet egy γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása I-nek. Legyen J_1 egy részintervallum, γ-finomságú felosztás nélkül. Folytatva a $\{J_i\}_{i=1}^{\infty}$ részintervallumok felezési folyamatát, olyan csökkenő részintervallum sorozatot kapunk, melyek átmérője 0-hoz közelít, és egyik J_i sem tartalmaz γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztást. Legyen $\{x\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} J_i$. Mivel az átmérőjük csökkenő, tartva 0-hoz, van olyan i_0, melyre $J_{i_0} \subset \gamma(x)$, amiből következik, hogy $D = \{(x, J_{i_0})\}$ egy γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása J_{i_0}-nak. Ez az ellentmondás azt mutatja, hogy I-nek van γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása. Ezután, tegyük fel, hogy $I \subset (\mathbb{R}^*)^n$ zárt, nem korlátos intervallum. Értelmezzük a h: $\mathbb{R}^* \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, ha\ x = -\infty \\ arctgx, ha - \infty < x < \infty \\ \frac{\pi}{2}, ha\ x = \infty \end{cases}$$

és $\vec{h}$: $(\mathbb{R}^*)^n \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^n$, $\vec{h}(x) = \vec{h}(x_1, \dots, x_n) = (h(x_1), \dots, h(x_n))$ függvényt.

Megjegyezzük, hogy $\vec{h}$ bijektív, és legyen $\vec{g}$ a $\vec{h}$ inverz függvénye. Akkor $\vec{h}$ és $\vec{g}$ zárt intervallumot, zárt intervallumnak, nyílt intervallumot, nyílt intervallumnak feleltet meg. Következésképpen, $\vec{h}(I)$ egy zárt, korlátos intervallum, és $\vec{h}$°γ egy norma $\vec{h}(I)$-n. Az előző eset alapján $\vec{h}(I)$-nek van $\vec{h}$°γ-finomságú $D = \{(x_i, J_j): j = 1, \dots, k\}$ kijelölt pontokkal rendelkező felosztása. Ebből következik, hogy $\vec{g}(D) = \{(\vec{g}(x_i), \vec{g}(J_j)): j = 1, \dots, k\}$ egy γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztása I-nek.

Bebizonyítottuk, hogy bármely γ normához van legalább egy γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező felosztás $I \subset (\mathbb{R}^*)^n$-n is. Ezek után már definiálhatjuk a Henstock-Kurzweil integrált $(\mathbb{R}^*)^n$ intervallumán értelmezett függvényekre.

5.44. Definíció: Legyen $f: I \subset (\mathbb{R}^*)^n \to \mathbb{R}$. Az f függvényt Henstock-Kurzweil integrálhatónak nevezzük I-n, ha van $A \in \mathbb{R}$, hogy minden $\varepsilon > 0$-ra van olyan γ norma I-n úgy, hogy minden γ-finomságú, kijelölt pontokkal rendelkező D felosztására I-nek,

$$|S(f, D) - A| < \varepsilon.$$

Az A számot f Henstock-Kurzweil integrálnak nevezzük I-n. Jelölés: $A = \int_I^{\cdot} f$.

Az alaptulajdonságok ugyan úgy érvényesek $(\mathbb{R}^*)^n$-ben is (pl.: linearitás, pozitivitás, additivitás).

6.fejezet

Összegzés

A Henstock-Kurzweil integrál valóban többet tud, mint a Riemann-, vagy a Lebesgue:

- Minden olyan függvény, amely Riemann-integrálható, Henstock-Kurzweil integrálható.
- Minden olyan függvény, amely Lebesgue-integrálható, Henstock-Kurzweil integrálható is.
- De vannak olyan függvények, amelyek Henstock-Kurzweil integrálhatók, de nem Lebesgue-, vagy Riemann-integrálhatók.
- Igaz rá az integrálszámítás alaptételének I. része, valamint ennek általánosítása is.
- Igaz rá az integrálszámítás alaptételének II. része is.
- Kiterjeszthető az egész $\mathbb{R}$-re, valamint $\mathbb{R}^n$-re is.

Egyes matematikusok úgy gondolják, hogy a Riemann-, és a Lebesgue integrál mellett jó lenne a Henstock-Kurzweil integrált is tanítani az egyetemeken, hiszen valóban több függvény integrálható vele.

Az, hogy Magyarországon miért nem annyira elterjedt, ismert integrálelmélet, az egy nehéz kérdés. Talán az új dolgoktól való félelem, vagy a régi dolgokhoz való ragaszkodás az egyetlen ok. Tudomásom szerint, tőlünk keletebbre lévő országban, Romániában, tanítják a Henstock-Kurzweil féle integrálelméletet. Azt, hogy ott mennyire elterjedt, vagy bevált, arról sajnos nincsenek információim.

7.fejezet

Irodalomjegyzék

(1) Douglas S Kurtz, Charles W Swartz: Series is Real Analysis-Volume 9, Theories of integration, 2004

(2) Szász Pál: A differenciálszámítás és integrálszámítás elemei II., 1951

(3) Laczkovich Miklós, T. Sós Vera: Analízis II., 2007

8. fejezet

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni a támogatást mindazoknak, aki segítséget nyújtottak abban, hogy ez a szakdolgozat megszülessen. Kiváltképpen köszönetet szeretnék mondani Keleti Tamásnak, aki országhatárokat átívelve, időt, energiát nem sajnálva mindenben a segítségemre volt.