Szakdolgozat

Fejezetek az algebra történetéből
Egyenletek megoldása Galois előtt

Készítette:
Dávid Bettina
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Matematika BSc
Elemző szakirány

Témavezető:
Ágoston István
Egyetemi docens
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest
2009

Tartalomjegyzék

1. Bevezető **3**

2. Ókor **5**

2.1. Babiloni számírás 5

2.2. Babiloni algebra 6

2.3. Az egyiptomi Rhind papirusz 8

2.4. Óegyiptomi algebra 8

2.5. Görög újítások 9

2.6. Görög számírás 9

2.7. Geometriai algebra 10

3. Középkor **13**

3.1. Kínai matematika és számírás 13

3.2. Matematika kilenc könyvben 13

3.3. A kínai algebra virágkora 17

3.4. A hindu matematika és számírás 17

3.5. Algebrai számítások, azonosságok 17

3.6. Első- és másodfokú egyenletek, egyenletrendszerek 19

3.7. A kuttaka módszer 20

3.8. A Közel- és Közép-Kelet országainak matematikája 20

3.9. Hvárizmi algebrája 21

3.10. Abu Kámil algebrája 22

3.11. Harmadfokú egyenletek 22

4. Európai matematika **24**

4.1. A harmad- és negyedfokú egyenletek megoldása 24

4.2. Racionális gyökteszt 29

4.3. Tschirnhaus módszere 30

5. Új szemlélet **35**

5.1. Étienne Bézout 35

5.2. Joseph Louis Lagrange 37

5.3. Abel-Ruffini tétel 38

6. Életrajzok **40**

1. Bevezető

Az *algebra* arab eredetű szó. Az al-dzsabr szó latin fordításából ered, melynek jelentése helyreállítás. Ez annak a műveletnek felel meg, amellyel egy egyenletben egy tagot átviszünk a másik oldalra. Így nem meglepő, hogy a XX. század elejéig az algebra az algebrai egyenletek és egyenletrendszerek megoldásának tudománya volt. De mit is nevezünk algebrai egyenletnek? Az algebrai egyenlet olyan egyenlőség, amelynek mindkét oldalán ismert és ismeretlen számok jelei szerepelnek kizárólag a négy alapművelet véges számú jelével összekapcsolva. Hogy mit fogadunk el ismert számoknak, az csak is tőlünk és tudásunktól függ. Az ismert számok azon halmazát, amelyben a négy alapművelet mindig elvégezhető, azaz a műveletek nem vezetnek ki a halmazból, testnek nevezzük. Az egyenletek megoldhatósága szempontjából célszerű volt a lehető legbővebb testet, azaz a komplex számok testét választani. Ugyanis ebben a testben minden egyismeretlenes algebrai egyenlet megoldható.
Az ismeretek ezen pontján a klasszikus algebrából egy hatalmasabb, önállóbb tudomány kezdett kibontakozni, a modern algebra. Ugyanis a matematikusok rájöttek, hogy az algebrai egyenletek megoldhatósága szoros kapcsolatban áll az alapul vett test szerkezeti tulajdonságaival. Innentől kezdve már nem az egyenletek megoldásával, hanem az összes lehetséges test (számtest, absztrakt test) szerkezetének vizsgálatával foglalkoztak. A XX. század második negyedében már nemcsak testeket vizsgáltak, hanem más algebrai struktúrákat is. Ezek közé tartoznak például a gyűrűk, ferdetestek, csoportok. Emiatt napjainkban az algebrát már a matematika azon ágának tekintjük, amely algebrai struktúrákkal foglalkozik.

A fent említetteket figyelembe véve szakdolgozatom témája az egyenletek gyökjelekkel való megoldhatósága, hiszen ez az a probléma, amely egészen az algebra születésétől kezdődően foglalkoztatta a tudósokat és melynek köszönhetően kialakult a mai absztrakt algebra. Számos algebrai fogalom kialakulása szorosan összefügg az egyenletek elméletének fejlődésével, ezek közé tartozik például a determináns, a komplex számok, a testek valamint a csoportok fogalma.
Szakdolgozatom betekintést nyújt az egyenletek megoldási módszereinek fejlődésébe és az általános elmélet kialakulásába, kezdve az ókori babiloni, egyiptomi illetve görög tudósok munkájával, majd a középkori kínai, hindu felfedezéseken át, egészen az európai matematikusok ma már jól ismert elméletéig.

A dolgozat első felében fontos szerepet játszanak a számrendszerek, algebrai jelek, számjelek kialakulása, ugyanis mindezek egységesítése és tisztázása elősegítette a középkori európai algebra gyors és nagyszerű fejlődését. A dolgozat második felében ennek a fejlődésnek jelentős szereplőit és munkáikat mutatom be, úgy mint Cardano és Ferrari megoldóképleteit, Lagrange módszerét, valamint Abel és Ruffini tételét.
Az egyenletek megoldhatóságának kérdését a Galois-elmélet egyenletekre vonatkozó tételével zárom, melynek segítségével már minden egyenletről eldönthető, hogy az megoldható-e gyökjelekkel.

Munkám a témához kapcsolódó irodalom, elsősorban Jear-Pierre Tignol, Sain Márton és A.P. Juskevics könyveinek feldolgozásán alapul, összegezve, helyenként kiegészítve a bennük leírtakat.

2. Ókor

I.e. 10000-től i.e. 3000-ig tehető az ember fejlődésének azon szakasza, mikor a gyűjtögetés, vadászat, és halászat helyett áttért a földművelő életmódra. Ennek köszönhető az ókori városok, mint például Babilon kialakulása, ahol gabonatermesztéssel, állattenyésztéssel foglalkoztak. A földművesek mellett megjelentek különféle mesterséget gyakorló kézművesek, iparosok, és kialakult a kereskedelem. Ekkor már nélkülözhetetlenné váltak a számok, ugyanis az új életmód megkövetelte bizonyos dolgok mérését, szükségessé vált a hosszúság, a terület, a térfogat és a tömeg mértékegységeinek ismerete, ugyanis a megtermelt, a raktározott és az elfogyasztott vagy eladott javakat nyilván kellett tartani. Így i.e. 4000-3000 táján először a számok leírására alkalmas jelek, majd maguk a számjegyek is megszülettek. Kezdetben a számoláshoz különféle segédeszközöket, akár saját ujjaikat, testrészeiket alkalmazták. Ezen számolások segítették elő a különféle számrendszerek kialakulását. A legrégibb számírásos emlékek Mezopotámiából és Kínából származnak.

2.1. Babiloni számírás

A Tigris és az Eufrátesz folyók által határolt területen rengeteg ékírásos agyagtáblát találtak, melyek között sok a matematikai tartalmú. Ezeknek köszönhetően megismerhetjük a mezopotámiai számírást és számolási technikát.
A helyiértékes 60-as számrendszert alkalmazták: a számokat 1-től 59-ig különböző alakú és helyzetű ékjelekkel írták le, de a 60 leírására már ugyanazt a jelet használták, mint az 1 leírására.

$$\blacktriangledown = 1 \quad \blacktriangledown\blacktriangledown = 2 \quad \blacktriangledown\blacktriangledown\blacktriangledown = 3 \ldots \blacktriangleleft = 10 \quad \blacktriangleleft\,\blacktriangledown = 11 \ldots \blacktriangleleft\blacktriangleleft = 20 \ldots \blacktriangledown = 60$$

Az egyes helyi értékek meghatározása, valamint a 0 jel hiánya nehézségeket okoztak a számok olvasásában. Egy szám nagyságrendjére gyakran csak a szövegből lehetett következtetni. A pontatlanság elkerülése érdekében később bevezették a zérus jelét, két, egymás alá írt 10-es jelet. Nézzünk egy példát:

$$\blacktriangledown\blacktriangledown \;\; \begin{smallmatrix}\blacktriangleleft\\ \\ \blacktriangleleft\end{smallmatrix} \;\; \blacktriangleleft\,\blacktriangledown = 2 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 11 = 7211$$

2.2. Babiloni algebra

A babiloni matematikusok gondolkodásmódja kifejezetten algebrai volt. Ismertek alapvető algebrai azonosságokat, azonban a mai jelöléseket még nem alkalmazták, így tudásukat szavakban, szabályokban fogalmazták meg. Sok időt töltöttek első- és másodfokú egyenletek megoldásával, vizsgálatával, mivel ezek rengeteg gyakorlati problémára adtak megoldást. Ezt mutatja az is, hogy az ékírásban külön ékjel írta le azt a szót, hogy hosszúság, és egy másik ékjel azt, hogy szélesség. Az egyenletek megoldására nem megoldóképleteket, inkább recepteket adtak. Minden ilyen recept végén megjelenik az eredmény ellenőrzése, ami már a bizonyítás igényét mutatja.
Egy gyakran és rutinszerűen használt sablon a következő:
Tekintsük az

$$\begin{cases} x \cdot y = a \\ x + y = b \end{cases}$$

alakú egyenletrendszert. Ennek megoldására a babiloni matematikusok olyan módszert alkalmaztak, amely mindig jól használható, ha $x+y$ értéke adott. Első lépésben egy harmadik ismeretlent vezettek be, u-t, ennek segítségével fejezték ki x-t és y-t.

$$x = \frac{b}{2} + u \qquad y = \frac{b}{2} - u$$

Ezt az első egyenletbe helyettesítve:

$$\left(\frac{b}{2} + u\right) \cdot \left(\frac{b}{2} - u\right) = a$$

$$\frac{b^2}{4} - u^2 = a$$

$$u = \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}$$

A negatív számokat még nem ismerték, így u-ra egy pozitív számot kaptak, amellyel x és y értékét könnyen meg tudták határozni:

$$x = \frac{b}{2} + u = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}$$

$$y = \frac{b}{2} - u = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}$$

Észrevehetjük, hogy már itt is a ma jól ismert másodfokú megoldóképletet használják. Ugyanis az egyenletrendszer második egyenletéből, ha kifejezzük y-t, majd azt az első egyenletbe írjuk, akkor az

$$x^2 - bx + a = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, melynek megoldóképlete

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}.$$

Ebből a példából is látszik, hogy már az ókori Mezopotámiában képesek voltak gyököt vonni. Ismertek egy iterációs eljárást, mely igen jó közelítést adott $\sqrt{a}$ értékére, $a > 1$ esetén:

Válasszunk egy x_0 közelítést úgy, hogy $\sqrt{a} > x_0 > 1$ és a hiba, azaz $h_0 = \sqrt{a} - x_0 < 1$ legyen.

Mivel

$$\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a},$$

ezért

$$\frac{a}{x_0} > \sqrt{a}.$$

Így $\sqrt{a}$ értékére kapunk egy alsó- és felsőkorlátot:

$$x_0 < \sqrt{a} < \frac{a}{x_0} = x_0'$$

Innentől a felső korlátokat mindig vesszővel, az alsó korlátokat vessző nélkül jelölöm. E két korlát számtani közepe

$$x_1' = \frac{1}{2} \cdot \left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right)$$

egy újabb közelítő érték h_1' hibával.

$$h_1' = |x_1' - \sqrt{a}| = \left|\frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right) - \sqrt{a}\right| =$$

$$= \left|\frac{x_0^2 - 2x_0\sqrt{a} + a}{2x_0}\right| = \frac{(x_0 - \sqrt{a})^2}{2 \cdot x_0} < \frac{(x_0 - \sqrt{a})^2}{2}$$

Tehát

$$h_1' < \frac{(x_0 - \sqrt{a})^2}{2} = \frac{h_0^2}{2} < \frac{h_0}{2}, \quad \text{hiszen} \quad h_0 < 1.$$

x_1' hibája kisebb, tehát ez jobb közelítése $\sqrt{a}$-nak, mint x_0. Az eljárás következő lépése, hogy x_1' felső korláthoz egy $x_1 = \dfrac{a}{x_1'}$ alsó korlátot választunk. x_1' és x_1

számtani közepe, azaz x_2' ismét közelebb lesz $\sqrt{a}$-hoz. Ebből látszik, hogy minél többször ismételjük az eljárást, annál pontosabb értékhez jutunk.
Gyökvonás segítségével képesek voltak másodfokú egyenleteket megoldani. Ezek megoldásának receptjét azonban egyetlen ókori lelet sem tartalmazza, de a kutatók valószínűnek tartják, hogy a teljes négyzetté alakítás módszerét alkalmazták.
A babiloniaiak még igen gyakorlatias metematikát alkalmaztak, ez azonban igen jó alapot nyújtott a további fejlődéshez.

2.3. Az egyiptomi Rhind papirusz

A Nílus völgyében elterülő Egyiptom matematikájának megismerésében két lelet, a Rhind- és a moszkvai papirusz van segítségünkre. Előbbi Henry Rhind skót régiségkereskedőről kapta nevét, ki 1858 telén vásárolta a papiruszt, felismerve annak értékét. A tekercs hiányzó része 50 év múlva került elő. Ez az első matematikai tartalmú, egyiptomi emlék.
Mindkét papirusz ugyanúgy, mint Mezopotámiában, a mindennapi élettel kapcsolatos számolásokat tartalmaznak hieratikus írással, azaz a számokat apró jelekkel, parányi rajzokkal írták. Ezek a jelek koronként változtak, így a számjegyekből az írás idejére is következtethetünk.

2.4. Óegyiptomi algebra

Az egyiptomi matematikusoknak is sok olyan problémát kellett megoldaniuk, amelyek elsőfokú és tiszta másodfokú egyenletekre vezettek. Ezek a feladatok azonban néha már elszakadtak a gyakorlati alkalmazástól, volt, hogy csak önmaguk szórakoztatására végeztek számításokat.
Gyakran alkalmazták az ún. "regula falsi"-t, azaz a hamis szabály módszerét. Ekkor az ismeretlen helyére egy hamis értéket választottak, majd ezzel számolták végig a feladatot. Végül az eredményül kapott számot összehasonlították a feladat adataival, és azt a megfelelő módon helyesbítették.
Az alábbi példa a "regul falsi" alkalmazását mutatja be:
"Egy négyzetnek, meg egy másiknak, melynek oldala az első négyzet oldalának $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$ része, területe összesen: 100. Mondd meg nekem!"
Feladatunk mai megfogalmazása: Számítsuk ki a megadott adatok alapján az eredeti

négyszög oldalhosszát. A szöveg alapján kapott egyenlet:

$$x^2 + \left(\frac{3}{4} \cdot x\right)^2 = 100$$

Tegyük fel, hogy $x = 1$. Tehát a keresett négyzet oldalhossza 1, a másik négyzet oldalhossza $\frac{3}{4}$. Területük összege: $1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$. Ennek négyzetgyöke $\frac{5}{4} \neq 10$. Ebből következik, hogy az eredeti négyzet oldala nem 1, hanem annyiszor nagyobb, ahányszor a 10 nagyobb az $\frac{5}{4}$-nél, azaz 8-szor. Tehát az eredeti négyzet oldalhossza 8, a másik négyzet oldalhossza 6, területük összege pedig tényleg 100.

Igaz, hogy ezek a számítások kielégítették az akkori szükségleteket, de eddigi ismereteink alapján az egyiptomi matematikai módszerek körülményessége, azok rossz irányból való megközelítése mind akadályozták a továbbfejlődést.

2.5. Görög újítások

A görög matematikusok babiloni és egyiptomi elődeikkel ellentétben nemcsak átvették és alkalmazták az ismereteket, hanem mertek újítani, gondolkodásmódjuk egyéni és szabad volt. Alapismereteiket természetesen a fennmaradt írásokból szerezték, azokat azonban igen hamar továbbfejlesztették. Ezt mutatja az is, hogy a ránk maradt írásos emlékekben már nem lehet felismerni a babiloni illetve egyiptomi alapokat.
Tőlük, pontosabban a püthagoreusoktól származik a matematika szó, ugyanis a számelméletet mathémának, tanulmánynak nevezték. Náluk jelenik meg először a tényleges bizonyítás. Az első görög tudós, aki először bizonyított az Thalész (Kr.e. 624–546), a görög matematika atyja.

2.6. Görög számírás

A görögök a nem helyiértékes 10-es számrendszert és az alfabetikus számírást használták. Kezdetben görög nagybetűket, majd később az ión írás kisbetűit alkalmazták a számok jelölésére. A félreértések elkerülése érdekében a számokat jelölő betűket felülhúzták. Erre egy példa:

$$\overline{\varphi\xi\zeta} = 567$$

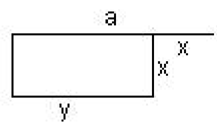
Az ő érdemük a zérus számjegy, mint üres helyiérték bevezetése is, melyet az o (omikron) betűvel jelöltek.

2.7. Geometriai algebra

A görög matematika az eleai filozófiára támaszkodva, miszerint az 1 egységes és oszthatatlan, teljesen geometriaivá vált. Ugyanis ők már ismerték az irracionális számokat, azonban számmal kifejezni nem tudták azokat, de a megfelelő szerkesztést mindig végre tudták hajtani. Náluk az algebrai jelölések nem alakultak ki, ab-t téglalapnak, a^2-t négyzetnek, a^3-t kockának tekintették.
A babiloni algebra görög geometriává válását mutatja az alábbi feladat:

$$\begin{cases} x + y = a \\ x \cdot y = b^2 \end{cases}$$

A görögök ezt a feladatot hiánnyal való illesztésnek nevezték, ugyanis az ő gondolkodásukban ez az egyenletrendszer az alábbi problémával ekvivalens:
"Illesszünk az a szakaszhoz b^2 területű téglalapot egy négyzet hiánnyal."



Ezt a feladatot geometriai úton megoldva a következő összefüggést kapták:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = b^2$$

Ha ezt egy $\frac{a}{2}$ átfogójú, b és $\frac{a}{2} - x$ befogójú háromszögre felírt Pitagorasz-tételnek tekintjük, akkor ez a háromszög $\frac{a}{2} > b$ esetén megszerkeszthető. Ekkor az $\frac{a}{2}$ átfogónak és az $\frac{a}{2} - x$ befogónak különbsége adja x-t. Innen y már könnyen kiszámolható.
Bizonyos geometriai feladatok, például a szabályos, adott k oldalú sokszög kerületének kiszámítása szükségessé tette $\sqrt{c}$ minél pontosabb közelítését. A görög matematikusok, köztük Arkhimédész ekkor használta a lánctörtek módszerét:
Tegyük fel, hogy

$$\sqrt{a^2 + b} = a + x.$$

Ekkor

$$x(2a + x) = b,$$

amiből
$$x = \frac{b}{2a+x}.$$
Az egyenlőség jobb oldalán szereplő x helyébe folytatólagosan behelyettesítve $\frac{b}{2a+x}$-t végtelen lánctörtet kapunk:
$$\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ldots}}}$$
A klasszikus görög matematika alkotásai között szembetűnik Diophantosz (Kr.u. 250 körül) Aritmetika című 13 kötetes könyve, mely teljes egészében egyenletek megoldását tartalmazza. A mű hanyagolja a geometriai algebrát, tényleges algebrai módszereket és jelöléseket használ. Egy egyenlet mai és ókori alakja:
$$5x^3 + 5x^2 + 2x + 8 = 33$$
$$K^Y\overline{\epsilon} \quad \Delta^Y\overline{\epsilon} \quad \varsigma\varsigma\overline{\beta} \quad \dot{M}\eta \quad \iota \quad \dot{M}\overline{\lambda\gamma}$$
Diophantosz még nem ismerte a határozatlan egyenletek általános megoldásait, de sajátos ötletei igen célravezetőek voltak. A több feltétellel rendelkező feladatok megoldása során úgy választotta meg az ismeretlenek értékét, hogy azok egy kivételével minden kritériumnak eleget tegyenek, és az általuk felírt másodfokú egyenletnek ne legyen konstans vagy pedig négyzetes tagja. Erre mutat példát az alábbi feladat:
"Egy adott számot, amely két négyzetnek az összege, bontsunk fel két másik négyzet összegére!"
Legyen az adott szám
$$13 = 2^2 + 3^2.$$
Legyen egy másik felbontása
$$13 = (x+2)^2 + (2x-3)^2 = x^2 + 4x + 4 + 4x^2 - 12x + 9 = 5x^2 - 8x + 13.$$
Tehát a kapott másodfokú egyenlet:
$$5x^2 - 8x + 13 = 13$$
$$5x^2 - 8x = 0$$
$$x(5x-8) = 0$$

Mivel a 0 megoldást nem vette figyelembe, ezért a kapott eredmény $x = \frac{8}{5}$, azaz a keresett felbontás: $\left(\frac{18}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 13$.
Már ismerte az $ax^2 = 2bx + c$ alakú egyenlet megoldásának

$$x = \frac{b + \sqrt{b^2 + ac}}{a}$$

képletét, melyről azt is tudta, hogy csak akkor ad racionális megoldást, ha $b^2 + ac$ racionális szám négyzete. Ő vezette be a harmadfokúnál magasabb fokú ismeretleneket, mint a négyzetszer négyzetet, négyzetszer köböt, köbször köböt.
Mindezek ellenére az i.e. III–II.-ban fellépő politikai viszályok, háborúk következtében a tudományok anyagi és eszmei támogatása megszűnt, melynek hatására a görög matematika hanyatlásnak indult. A matematika további fejlődésére főleg csak a középkori keleti országokban volt lehetőség.

3. Középkor

3.1. Kínai matematika és számírás

A legkorábbi kínai matematika fejlődéséről szóló emlékek időszámításunk kezdetéből származnak. Ezek még mindig a mindennapi élet problémáira – paloták építése, adók kivetése, örökösödés – adnak megoldást. Feladatok jöttek létre az arányosságokra, a lineáris egyenletekre és egyenletrendszerekre, négyzet- és köbgyökvonásra, és némely bonyolultabb esetben másod-, sőt harmadfokú egyenletekre.
A kínaiak már a tízes alapú számrendszert alkalmazták. A számokat 1-től 9-ig függőleges, 10-től 90-ig vízszintes vonalakkal jelölték. Az egyeseket jelölő számjegyek szolgáltak a százasok, tízezresek stb., a tízesek számjegyei pedig az ezresek, százezresek stb. megjelölésére is. Például a 6728 kínai jelölése:

A 0-t kezdetben nem alkalmazták, későbbi jelét, egy kört először csak egy 1247-ben megjelent matematikai témájú műben találjuk meg.
Számításaikat számolótáblán pálcikák segítségével végezték.

3.2. Matematika kilenc könyvben

A legrégebbi kínai matematikai mű keletkezésének pontos ideje és szerzői ismeretlenek. Összegzi az i.e. I. évezredben élt matematikusok munkáját 246 feladatban, melyekhez megoldás is tartozik, olykor általános formában. Az alábbiakban az egyenletek szempontjából lényeges könyvekkel, és azok megoldási eljárásaival foglalkozom.
A IV. könyv feladatainak megoldásához már szükség van négyzet- ill. köbgyökvonásra. Ennek elvégzésére a fang-fa módszert alkalmazták, melyet ma a kínai-Horner-módszernek nevezhetnénk. A módszert valójában arra hazsnálták, hogy x valamely polinomját átrendezzék $(x+p)$ szerint. Ha tehát az átrendezendő polinom

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

akkor az átrendezett polinom

$$P_n(x) = b_n(x+p)^n + b_{n-1}(x-p)^{n-1} + \cdots + b_1(x-p) + b_0 = (x+p)P_{n-1}(x) + b_0,$$

ahol b_i együttható a $P_i(x) : (x+p)$ osztási maradéka. A módszer elegendő számú ismétlésével a gyökvonás tetszőleges pontossággal elvégezhető. Ezt mutatja az alábbi példa:
Határozzuk meg $\sqrt{620}$ értékét, azaz oldjuk meg $x^2 - 620 = 0$ egyenletet!
Mivel $24 < x < 25$, ezért tegyük fel, hogy $x = 24 + y$, ahol $0 < y < 1$. Az egyenletet most y, azaz $(x-24)$ szerint rendezzük, ahol az együtthatók meghatározására használjuk a Horner-elrendezést:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -620 \\ & 24 & 576 \\ 1 & 24 & \underline{-44} \\ & 24 & \\ 1 & \underline{48} & \\ \underline{1} & & \end{array}$$

Tehát a kapott egyenlet

$$y^2 + 48y - 44 = 0, \quad \text{ahol} \quad 0 < y < 1.$$

$y = 0,8$ esetén az egyenlet bal oldala $-4,96$-tal, $y = 0,9$ esetén pedig $0,01$-gyel egyenlő. Ebből következik, hogy $0,8 < y < 0,9$, vagyis $y = 0,8 + z$, ahol $0 < z < 0,1$. z egyenletének felírására is a Horner-módszert alkalmazva, az alábbit kapjuk:

$$z^2 + 49,6z - 4,96 = 0$$

Újabb próbálgatás során derül ki, hogy $0,09 < z < 0,1$, tehát tegyük fel, hogy $z = 0,09 + t$. Az eljárást ismételve kapjuk, hogy $0,009 < t < 0,01$. Itt megállva az alábbi eredményt kapjuk:

$$x = 24 + y = 24 + 0,8 + z = 24,8 + 0,09 + t \approx 24,899 \approx 24,9$$

$$24,9^2 = 620,01$$

Köbgyökvonásra az alábbi közelítő formulát alkalmazták:

$$\sqrt[3]{a^3 + b} \approx a + \frac{b}{3a^2 + 1}$$

A VII. könyv többlet és hiány módszerét két egyenletből álló, kétismeretlenes elsőfokú egyenletrendszerek megoldására alkalmazták. Első esetben az egyik ismeretlen együtthatója legyen 1 vagy -1.

$$\begin{cases} a_1x - y = c_1 \\ a_2x - y = c_2 \end{cases}$$

Ekkor az alábbi táblázatot írták fel, melyen keresztbe szorzásokat végeztek.

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix}$$

Ezek segítségével írták fel az x-t és y-t megadó képleteket:

$$x = \frac{c_2 - c_1}{a_2 - a_1} \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_2 - a_1}$$

Érdekes, hogy ezt az eredményt a ma Cramer-szabálynak nevezett eljárással megkaphatjuk.
Most tegyük fel, hogy y együtthatója nem ± 1. Ekkor az

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldása a következő volt: az első egyenletből kifejezték y-t, majd azt a második egyenletbe írva, egy

$$Ax + B = C \quad (1)$$

alakú egyenletet kaptak, ahol

$$A = a_2b_1 - a_1b_2, \qquad B = b_2c_1, \qquad C = b_1c_2.$$

Ezt követően a 2 hamis feltevés módszerét alkalmazták:

$$\text{ha} \quad x = x_1, \quad \text{akkor} \quad Ax_1 + B = b_1c_2' = C_1 \quad (2)$$

$$\text{ha} \quad x = x_2, \quad \text{akkor} \quad Ax_2 + B = b_1c_2'' = C_2 \quad (3)$$

Ekkor

$$C - C_1 = b_1(c_2 - c_2') = b_1k_1 \qquad \text{és} \qquad C - C_2 = b_1(c_2 - c_2'') = b_1k_2.$$

Az (1) egyenletből kivonták (2)-t illetve (3)-at, így a követekezőket kapták:

$$A(x - x_1) = C - C_1 = b_1k_1 \quad \text{ill.} \quad A(x - x_2) = C - C_2 = b_1k_2$$

Ezeket egymással elosztva

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{b_1 k_1}{b_1 k_2},$$

amiből következik, hogy

$$x = \frac{k_2 x_1 - k_1 x_2}{k_2 - k_1}.$$

Ezt az egyenletrendszer valamelyik egyenletébe helyettesítve y értéke is kiszámolható.

A VIII. könyv tartalmazza a lineáris egyenletrendszerek megoldására alkalmas fang-cseng módszert, amely egy bizonyos mátrixos megoldási eljárás. Az egyenletrendszer együtthatóiból egy táblázatot, azaz egy mátrixot képeztek úgy, hogy az utolsó egyenlet együtthatói az első oszlopban szerepeljenek, és így tovább. Tudták, hogy a mátrix bármely oszlopának valahányszorosát hozzáadhatják vagy kivonhatják bármely másik oszlopból anélkül, hogy az egyenletrendszer gyökei megváltoznának. Tehát a mátrixot addig alakították, míg az $a_{11} - a_{nn}$ diagonális fölött csupa 0-t nem kaptak:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & b_{11} \\ 0 & 0 & \dots & b_{22} & b_{12} \\ . & & & & \\ . & & & & \\ . & & & & \\ b_{nn} & b_{n-1,n} & \dots & b_{2n} & b_{1n} \\ e_n & e_{n-1} & \dots & e_2 & e_1 \end{pmatrix}$$

Ennek a mátrixnak megfelelő egyenletrendszer segítségével az ismeretlenek már lépésenként meghatározhatóak.

A fang-cseng módszer volt a kezdete a mátrixokkal és determinánsokkal való számolásnak, és ennek kapcsán vezették be a negatív számokat is. A módszer valójában megegyezik a ma használatos Gauss-eliminációval.

A IX. könyvben szereplő problémák másodfokú egyenletekre vezetnek, melyek megoldási módszere megegyezik a babiloni recepttel, miszerint egy új változót vezetnek be és ennek segítségével fejezik ki az ismeretleneket.

3.3. A kínai algebra virágkora

A XIII. században élő kínai matematikusok továbbfejlesztették az addigi algebrai módszereket és jelrendszert. Foglalkoztatta őket a magasabb fokú egyenletek, egyenletrendszerek megoldása. Még ők is a kínai-Horner-módszert alkalmazták, de már általánosítva tetszőleges, pozitív gyökű egyenletekre. Li Je, kínai algebrista ezt a módszert tien-jüan módszernek, azaz égi elemek módszerének nevezte el. Abban az időben ez az eljárás a számítások szempontjából hasznosabb volt, mint a gyökjelekkel való megoldás. Így azonban nem jutottak el olyan problémákhoz, melyek megoldása az algebra további fejlődését hozta volna.

3.4. A hindu matematika és számírás

India matematikájára már a görög, babiloni és kínai ismeretek is hatással voltak. A hindu matematikusok gondolkodása eredeti volt, törekedtek új módszerek kialakítására. Azonban nagyszerű eredményeik mellett nyilvánvaló tévedések is megtalálhatók.

Az algebrát igen nagyra becsülték. Két nagy területével foglalkoztak: az algebrai számításokkal és az első- és másodfokú egyenletek megoldásával. Érdekes, hogy szabályaikat versekben fogalmazták meg, melyeket kívülről megtanultak. Nagyot léptek előre a szimbolikus algebra kialakításában is, bár jelöléseik még igen bonyolultak voltak.

Az indiai számjelek már nagy jelentőséggel bírnak, ezekből alakultak ki a ma használt számjegyek. Ezt az átalakulást nagyban segítette, hogy ezek az indiai számjelek már csak egyetlen, azaz nem összetett jelből álltak. Kezdetben a számaikat a helyiértékes 10-es számrendszer szerint írták jobbról balra, ez a sorrend 537 körül fordult meg Dzsinabhadra Gani (VI. század) jóvoltából. Ekkor már nélkülözhetetlenné vált a 0 használata, melynek jelét vagy a görögöktől vagy a kínaiaktól vették át.

3.5. Algebrai számítások, azonosságok

Számításaikban már igen ügyesen bántak a negatív és irracionális számokkal, valamint a négyzetgyökös kifejezésekkel. Ismerték a negatív számok műveleteinek összes alapszabályát és bizonyos négyzetgyökös azonosságokat:

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b,$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

Az első egy ma is jól ismert azonosság, míg a második helyessége négyzetreemeléssel ellenőrizhető.

Foglalkoztak egytagú algebrai kifejezések és polinomok szorzásának és osztásának szabályaival. Ennek köszönhető az alábbi összefüggés:

$$\left(\sum_1^n a_k\right)^2 = \sum_1^n a_k^2 + 2\sum_{i \neq j} a_i a_j$$

Egy szám négyzetgyökének meghatározására az eddig ismert módszerektől igen különböző eljárást alkalmaztak. Srídhara gyökvonás-szabályát a $\sqrt{186624}$ példáján szemléltetem:

Szükség van a páratlan, ill. páros helyek függőleges, ill. vízszintes vonalakkal való jelölésére.

$$\begin{array}{cccccc} - & | & - & | & - & | \\ 1 & 8 & 6 & 6 & 2 & 4 \end{array}$$

Most a 18-nál kisebb legnagyobb négyzetszámot, a 16-ot levonjuk 18-ból, az utolsó páratlan helyről, majd 16 gyökének kétszeresét a következő számjegy alá írjuk:

$$\begin{array}{ccccc} | & - & | & - & | \\ 2 & 6 & 6 & 2 & 4 \\ & 8 & & & \end{array}$$

Osszuk el 26-ot 8-cal, a maradékot írjuk 26 helyébe és a 3 hányadost a kétszeres gyök sorába írjuk:

$$\begin{array}{cccc} - & | & - & | \\ 2 & 6 & 2 & 4 \\ 8 & 3 & & \end{array}$$

26-ból vonjuk ki 3 négyzetét, majd 3 helyébe írjunk $2 \times 3 = 6$-ot és a második sort toljuk el egy hellyel:

$$\begin{array}{cccc} - & | & - & | \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ & 8 & 6 & \end{array}$$

Most 172-t osszuk el 86-tal, 172-t helyettesítsük a maradékkal, ami ebben az esetben 0, majd a hányadost írjuk a második sorba:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{\textbar} \\ & & 4 \\ 8 & 6 & 2 \end{array}$$

A 4-ből kivonjuk a hányados négyzetét, majd a hányados helyébe önmaga kétszeresét írjuk, így kapjuk 864-et. Itt a gyökjel alatti szám elfogy, tehát az eljárás szerint a második sorban kapott szám fele a keresett négyzetgyök, ami ebben az esetben 432. A kapott eredmény helyes, ugyanis $432^2 = 186624$.
A gyökvonással kapcsolatban tudták, hogy pozitív szám négyzetgyöke pozitív is, meg negatív is, azonban egy negatív szám négyzetgyökét még nem értelmezték.

3.6. Első- és másodfokú egyenletek, egyenletrendszerek

Az elsőfokú egyenletek megoldására Indiában is a fentebb már ismertetett hamis feltevés szabályát alkalmazták.
Az egyszerűbb elsőfokú egyenletrendszerek megoldása során, egy tetszés szerint kiválasztott ismeretlent mindegyik egyenletből kifejezték, majd ezeket a kifejezéseket egymással páronként egyenlővé tették. Ezt az eljárást addig ismételték az új egyenletrendszerekkel, míg végül egy egyenletet nem kaptak. Innen visszafele haladva az ismeretlenek meghatározhatók.
Az alábbi típusú egyenletrendszerek vizsgálatával is foglalkoztak:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \pm b x_i = c_i, \quad \text{ahol} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$a_i \sum_{k=1}^{n} x_k - b_i x_i = c_i, \quad \text{ahol} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Míg az ókorban az $ax^2 + bx = c, \quad ax^2 = bx + c, \quad ax^2 + c = bx$ alakú egyenleteket különbözőnek tekintették, addig Brahmagupta (598 – 665), india matematikus már általános szabályt ad az

$$ax^2 + bx + c = 0$$

alakú egyenlet megoldására:

$$x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}$$

Ebből azonban látszik, hogy szerinte a másodfokú egyenletnek csak egy gyöke lehet. Egy másik tudós, Mahavíra viszont később már tudott a két megoldás létezéséről, Bhászkara (520 körül) pedig már feltételt is adott két pozitív gyök létezésére.
Ezen felül magasabb fokú egyenletek általános megoldását nem sikerült megtalálniuk.

3.7. A kuttaka módszer

Ezt az eljárást az $ax + c = by$ alakú egyenletek egész értékű megoldásainak kiszámolására alkalmazták. Vizsgáljuk meg Bhászkara II. megoldását $c > 0$ esetén!
Legyen $(a, b) = 1$, $a > b$, és $\frac{a}{b}$ legyen kifejezhető a következő lánctörttel, ahol q_k az (a, b) euklideszi algoritmussal való meghatározásakor a megfelelő osztások hányadosaként adódik:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \dots}}}, \quad \text{ezt jelölje} \quad [q_0, q_1, \dots, q_{n-1}, q_n]$$

Ha $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ az $n-1$-edik közelítő lánctört, azaz $[q_0, q_1, \dots, q_{n-1}]$, akkor az egyenlet összes megoldása az alábbi egyenletekkel fejezhető ki:

$$\begin{aligned} x &= (-1)^n c Q_{n-1} + bt \\ y &= (-1)^n c P_{n-1} + at \end{aligned} \qquad \text{ahol } t \text{ tetszőleges egész.}$$

A VIII. század végére az indiai tudósok felfedezései, algebrai eljárásaik valamint a 10-es alapú helyiérték-rendszer már az arab országokban is elterjedt.

3.8. A Közel- és Közép-Kelet országainak matematikája

Az iszlám országok matematikai kultúrája a görög, valamint a keleti tudományos művek arabra fordításával, majd később ezek kommentálásával kezdődött. Az addigi ismeretek feldolgozása után számos új felfedezést tettek, beleértve az algoritmusokon alapuló megoldási eljárások továbbfejlesztését és a harmadfokú egyenletek kúpszeleteken alapuló geometriai megoldását.
Műveikben már sok figyelmet fordítottak a bizonyításokra, az anyag leírása teljes, elrendezése jól átgondolt.
Számaikat a keleti arab számjegyekkel írták, a 0-t speciálisan egy ponttal jelölték.

Ezeknek a számjegyeknek az elterjedése azonban éppúgy hosszú folyamat volt, mint a 10-es helyiértékes számrendszeré, ezt mutatja, hogy sok tudós műveiben szavakkal fejezte ki a számokat. (Európában a számok mai írásmódja később jelent meg, mint az araboknál, de elterjedése gyorsabb volt.) Náluk a racionális számok már az elméleti kutatás tárgyává váltak, ennek köszönhetően pedig már eljutottak a racionális és irracionális pozitív számokat felölelő valós számok fogalmához.

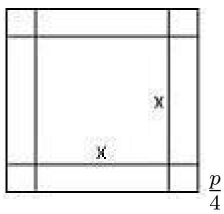
3.9. Hvárizmi algebrája

Hvárizmi (780–850) algebrai munkájának fő témája az első- és másodfokú szám-együtthatós egyenletek megoldása. Elméletének alapja, hogy az egyenleteket normálalakra kell hozni az alábbi 6 típus szerint:

$$ax^2 = bx, \qquad ax^2 = c, \qquad ax = c,$$

$$ax^2 + bx = c, \qquad ax^2 + c = bx, \qquad bx + c = ax^2$$

Az első három egyenlettípus megoldásánál érdekes, hogy nemcsak az egyenlet gyökét, de annak négyzetét is mindig meghatározta. Ebben a munkájában az egyik átalakítás a dzsabr nevet viseli, ebből, pontosabban az al-dszabr kifejezésből alakult ki a mai algebra szó.
A teljes másodfokú egyenletek megoldására külön módszert alkalmazott. Először szóban fejezte ki, hogyan írható fel az egyenlet gyöke négyzetgyökös mennyiségekkel, majd ezt geometriai úton bizonyította. Lássuk az $x^2 + px = q$ egyenlet megoldását: egy négyzet minden oldalához illesszünk egy téglalapot $\frac{p}{4}$ magassággal, majd az alakzat sarkait egészítsük ki 4 darab $\frac{p}{4}$ oldalú négyzettel.



Mindez formulával:

$$x^2 + 4\left(\frac{p}{4}\right)x + 4\left(\frac{p}{4}\right)^2 = q + 4\left(\frac{p}{4}\right)^2$$

A bal oldalt négyzet alakba írjuk:

$$\left(x + 2 \cdot \frac{p}{4}\right)^2 = q + 4\left(\frac{p}{4}\right)^2,$$

amiből

$$x = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}.$$

Hvárizmi egyenletekre vonatkozó példái egyébként mind racionális együtthatójúak, megoldásaik gyakran egész számok.

3.10. Abu Kámil algebrája

Hvárizmi után Abu Kámil (850–930) volt az, aki jelentős haladást ért el az algebra területén. Az ő munkája is a másodfokú egyenletek megoldásáig terjed, melyben külön szabályokat ad a különböző normálalakú egyenletek kapcsán x^2 kiszámítására:

$$x^2 + px = q \Rightarrow \quad x^2 = \frac{p^2}{2} + q - \sqrt{p^2 q + \left(\frac{p^2}{2}\right)^2}$$

$$x^2 + q = px \Rightarrow \quad x^2 = \frac{p^2}{2} - q \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{2}\right)^2 - p^2 q}$$

$$px + q = x^2 \Rightarrow \quad x^2 = \frac{p^2}{2} + q + \sqrt{p^2 q + \left(\frac{p^2}{2}\right)^2}$$

Mindhárom szabályt geometriai úton bizonyítja. Feladatai között már olyan egyenleteket is találhatunk, melyek az ismeretlen valamely hatványában másodfokúak.

3.11. Harmadfokú egyenletek

Az arab matematikusok már a IX. században elkezdtek foglalkozni a harmadfokú egyenletekkel. Figyelmüket Arkhimédész kockakettőzéséről és a gömb feldarabolásáról szóló feladatai keltették fel. Ezt követően újabb és újabb feladatok bukkantak fel, melyek harmadfokú egyenletekre vezettek. Mindezek egy általánosabb elmélet illetve egy numerikus megoldási módszer megteremtését szorgalmazták. Omar Hajjám (1048–1131) algebrai műve a harmadfokúakig bezárólag tartalmazza az egyenletek osztályozását: összesen 25 kanonikus formát és ezek geometriai szerkesztéssel kapott megoldását adja meg. Szerinte a harmadik hatványokat tartalmazó egyenletek megoldása csak kúpszeletek segítségével található meg, és előfordulhat olyan eset, amikor a görbék két pontban metsszik egymást. Tehát Hajjám két gyök létezésének lehetőségét állapítja meg. Végül megjegyzi, hogy negyedfokú egyenletek megoldási módszere nem ismeretes.

4. Európai matematika

A XI.-XIII. század tudósai számos görög és arab tudományos művet fordítottak latinra. Ennek köszönhető a tudományok elterjedése és a tanulás lehetősége Európában. Már a XVI. századra matematikai központok alakultak ki, beleértve Itália nagyvárosait. Az itáliai matematikusok, del Ferro, Tartaglia, Cardano és Ferrari új matematikát hoztak létre, figyelmük az egyenletek megoldására terelődött, módszereik szükségessé tették a számkör kibővítését és a számfogalom kiépítését.
Az alábbiakban a magasabb fokú egyenletek megoldhatóságával foglalkozom.

4.1. A harmad- és negyedfokú egyenletek megoldása

Kezdetben csak pozitív együtthatójú egyenletekkel foglalkoztak, ezért a harmadfokú egyenleteket az alábbi három típusba sorolták:

$$x^3 + px = q, \quad x^3 = px + q, \quad x^3 + q = px$$

Az $x^3 + px = q$ alakú egyenlet megoldását elsőként 1515 körül Scipione del Ferro (1465–1526), bolognai matematikus találta meg, eredményeit azonban nem publikálta, csak professzortársának Fiorenak árulta el, ki e tudás birtokában nyilvános matematikai párbajra hívta Niccoló Fontanat (1499–1557), azaz Tartagliát. Azonban Tartaglia minderről tudomást szerzett, és kemény munka árán ő is megtalálta az általános megoldást, melynek segítségével a párbajt végülis megnyerte. Ekkor határozta el Girolamo Cardano (1501–1576), hogy akkor készülő művében közzé teszi a fent említett harmadfokú egyenlet megoldását, melyet Tartagliától próbált megszerezni. Kezdetben Tartaglia elutasította Cardanot, de később meggondolta magát, és titoktartást követelve átadta az alábbi megoldást:
Tegyük fel, hogy $x^3 + px = q$ megoldása $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$ alakban írható. Ennek köbe

$$x^3 = u - 3\sqrt[3]{u^2 v} + 3\sqrt[3]{uv^2} - v.$$

Mivel fenáll az alábbi egyenlőség, miszerint

$$3\sqrt[3]{uv} \cdot x = 3\sqrt[3]{u^2 v} - 3\sqrt[3]{uv^2},$$

ezért

$$x^3 = u - 3\sqrt[3]{uv} \cdot x - v,$$

azaz

$$x^3 + 3\sqrt[3]{uv} \cdot x = u - v.$$

Ezt az eredeti egyenlettel összehasonlítva látjuk, hogy

$$\begin{cases} u - v = q \\ 3\sqrt[3]{uv} = p. \end{cases}$$

Ebből v-t kiküszöbölve u-ra kapjuk, hogy

$$p^3 = 27u(u - q),$$

amiből

$$u^2 - qu - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0.$$

A másodfokú megoldóképlet alapján

$$u = \frac{q + \sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2} = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Az egyenletrendszerből következik, hogy

$$v = u - q = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Tehát a feltételezés szerint

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

amely képlet tényleg megadja az eredeti egyenlet megoldását. A másik két típusú egyenlet megoldása ugyanilyen módon az $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$ helyettesítéssel kapható meg. Cardano 1545-ben kiadta Ars Magna című művét, melyben szavát megszegve közölte az addig titkolt képletet, sőt annak továbbfejlesztését is. Összesen 13 típusú harmadfokú egyenlettel foglalkozott, fő eredménye az általános

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

alakú egyenlet megoldása: észrevette ugyanis, hogy $y = x + \frac{a}{3}$ helyettesítéssel a fenti egyenlet $y^3 + py + q = 0$ alakra hozható, ahol

$$p = b - \frac{a^2}{3}, \qquad q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c.$$

Tehát a Tartaglia-féle megoldóképlet, melyet ma Cardano-képletnek nevezünk, ebben az esetben is alkalmazható.
Voltak azonban olyan feladatok, mikor tudták, hogy az egyenletnek van valós gyöke, azt azonban a képlettel nem tudták meghatározni, ugyanis a négyzetgyökjel alatt negatív szám állt. Ezt az esetet nevezték *casus irreducibilis*-nek, melynek megoldását az utókorra hagyták és melynek kapcsán már felmerült a komplex számok fogalma.

Az $x^3 + px + q = 0$ alakú harmadfokú egyenlet megoldásával több matematikus is foglalkozott, kik különböző megoldási eljárásokat hoztak létre. Közéjük tartozik Viéte (1540 – 1603), kinek ötlete az $x = \frac{p}{3y} - y$-nal való helyettesítés, mellyel az

$$y^6 - qy^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

egyenletet kapjuk. Ez y^3-re egy másodfokú egyenlet. A másodfokú megoldóképletet és a fenti helyettesítést alkalmazva a megoldás

$$x = \frac{p}{3y} - y,$$

ahol

$$y^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Ha y^3 másik értékét választjuk, miszerint

$$y'^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

x értéke nem változik, ugyanis

$$(yy')^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

amiből következik, hogy

$$\frac{p}{3y} = -y' \quad \text{és} \quad \frac{p}{3y'} = -y.$$

Tehát

$$\frac{p}{3y'} - y' = \frac{p}{3y} - y = x.$$

Azonban ez az eljárás is valójában a Cardano képlethez vezet, ugyanis előbb láttuk, hogy $\frac{p}{3y'} = -y$, tehát

$$\frac{p}{3y'} - y' = -y - y' = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = x.$$

Az Ars Magna utolsó előtti fejezete a negyedfokú egyenletek megoldásával foglalkozik, mely Cardano tanítványának, Ludovico Ferrarinak (1522–1556) munkája. Neki sikerült az általános $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ egyenletet egy harmadfokú egyenletre visszevezetnie, melyet a negyedfokú egyenlet rezolvensének nevezünk:

Ötlete az $y = x + \frac{a}{4}$-gyel való helyettesítés, mely az $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ egyenletet adja, ahol

$$p = b - 6\left(\frac{a}{4}\right)^2, \quad q = c - \frac{a}{2}b + \left(\frac{a}{2}\right)^3, \quad r = d - \frac{a}{4}c + \left(\frac{a}{4}\right)^2 b - 3\left(\frac{a}{4}\right)^4.$$

Rendezzük át a kapott egyenletet:

$$\left(y^2 + \frac{p}{2}\right)^2 = -qy - r + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

Ekkor tetszőleges u-ra fenáll az alábbi egyenlőség:

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + u\right)^2 = -qy - r + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + 2uy^2 + pu + u^2$$

Az alapötlet, hogy az egyenlet jobb oldalát négyzet alakba írjuk, azaz

$$-qy - r + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + 2uy^2 + pu + u^2 = \left(\sqrt{2u} \cdot y - \frac{q}{2\sqrt{2u}}\right)^2.$$

Ez az egyenlőség akkor és csak akkor igaz, ha

$$-r + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + pu + u^2 = \frac{q^2}{8u},$$

azaz

$$8u^3 + 8pu^2 + (2p^2 - 8r)u - q^2 = 0.$$

Ezt a harmadfokú egyenletet nevezzük az eredeti egyenlet rezolvensének. Ha u-t ezen egyenlet egy megoldásának választjuk, akkor

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + u\right)^2 = -qy - r + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + 2uy^2 + pu + u^2 = \left(\sqrt{2u} \cdot y - \frac{q}{2\sqrt{2u}}\right)^2,$$

azaz

$$\left(y^2+\frac{p}{2}+u\right)^2=\left(\sqrt{2u}y-\frac{q}{2\sqrt{2u}}\right)^2,$$

és így

$$y^2+\frac{p}{2}+u=\pm\left(\sqrt{2u}\cdot y-\frac{q}{2\sqrt{2u}}\right).$$

Ez két másodfokú egyenlet, melyeket megoldva megkapjuk y-t, majd ebből x-et:

$$x=\alpha\sqrt{\frac{u}{2}}+\alpha'\sqrt{-\frac{u}{2}-\frac{p}{2}-\frac{\alpha q}{2\sqrt{2}}}+\frac{a}{4},\quad \text{ahol } \alpha \text{ és } \alpha' \text{ értéke } +1 \text{ vagy } -1.$$

Descartes (1596−1650) Ferrari felfedezését követően az alábbi eljárást adta az

$$x^4+px^2+qx+r=0$$

egyenlet megoldására az 1637-ben megjelent La Géométrie című művében: Vezessük be a,b,c,d értékeket úgy, hogy

$$x^4+px^2+qx+r=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=$$

$$=x^4+(a+c)x^3+(b+d+ac)x^2+(ad+bc)x+bd.$$

Az együtthatók egyenlőségéből következik, hogy

$$\begin{aligned} 0&=a+c && (1)\\ p&=b+d+ac && (2)\\ q&=ad+bc && (3)\\ r&=bd. && (4)\end{aligned}$$

Ezeket felhasználva b,c,d könnyen kifejezhető a segítségével:

$$(1)\Rightarrow c=-a \quad (5)$$

$$(3),(5)\Rightarrow q=ad-ab,\quad \text{amiből}\quad d=\frac{q}{a}+b\quad (6),\quad \text{és}\quad b=\frac{q}{a}+d\quad (7)$$

$$(2),(5)\Rightarrow p=b+d-a^2,\quad \text{amiből (6) helyettesítéssel}\quad b=\frac{a^2}{2}+\frac{p}{2}-\frac{q}{2a}$$

$$(2),(5)\Rightarrow p=b+d-a^2,\quad \text{amiből (7) helyettesítéssel}\quad d=\frac{a^2}{2}+\frac{p}{2}+\frac{q}{2a}$$

b-t és d-t (4)-be helyettesítve

$$r=\left(\frac{a^2}{2}+\frac{p}{2}-\frac{q}{2a}\right)\left(\frac{a^2}{2}+\frac{p}{2}+\frac{q}{2a}\right)$$

egyenletet kapjuk, melyre az $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ összefüggést alkalmazzuk:

$$r = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{q}{2a}\right)^2$$

Ebből következik, hogy

$$a^6 + 2pa^4 + (p^2 - 4r)a^2 - q^2 = 0,$$

ami a^2-re harmadfokú, melynek megoldása már ismert. Mivel

$$x^4 + px^2 + qx + r = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = 0$$

és egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért az eljárás az alábbi két egyenlet megoldásával végződik, mely már az együtthatók ismeretében könnyen megy:

$$(x^2 + ax + b) = 0 \quad \text{és} \quad (x^2 + cx + d) = 0$$

4.2. Racionális gyökteszt

Ez a ma is jól ismert eljárás már Albert Girard (1595–1632) francia matematikusnál megjelenik, azonban először Descartes publikálta:
Tekintsük az

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

egyenletet, ahol $a_i \in \mathbb{Q}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Ha szükséges, akkor az együtthatók közös nevezőjével szorozva feltehetjük, hogy $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Az egyenletet a_n^{n-1}-nel szorozva kapjuk, hogy

$$(a_n x)^n + a_{n-1}(a_n x)^{n-1} + a_{n-2} a_n (a_n x)^{n-2} + \cdots + a_1 a_n^{n-2}(a_n x) + a_0 a_n^{n-1} = 0.$$

$a_n x$ helyébe y-t írva egy normált, egész együtthatós egyenletet kapunk:

$$y^n + b_{n-1} y^{n-1} + b_{n-2} y^{n-2} + \cdots + b_1 y + b_0 = 0, \quad \text{ahol} \quad b_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

Descartes tétele szerint egy normált, egész együtthatós egyenlet minden racionális megoldása egész szám, mely osztja a konstans tagot. Első lépésben bizonyítja, hogy minden gyök egész szám:

Legyen $y \in \mathbb{Q}$ egy racionális gyök, melyet $y = \frac{y_1}{y_2}$ alakban írunk, ahol y_1 és y_2 relatív prímek. Tehát

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^n + b_{n-1}\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{n-1} + b_{n-2}\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{n-2} + \cdots + b_1\left(\frac{y_1}{y_2}\right) + b_0 = 0,$$

ahonnan

$$y_1^n = -y_2(b_{n-1}y_1^{n-1} + \cdots + b_1y_1y_2^{n-2} + b_0y_2^{n-1}).$$

Ebből látszik, hogy y_2 együtthatója osztja y_1^n-t, tehát y_1-t is. Mivel y_1 és y_2 relatív prímek, ez csak úgy lehetséges, ha $y_2 = \pm 1$, tehát $y \in \mathbb{Z}$.
Második lépésben bebizonyítja, hogy minden gyök osztja a konstans tagot:

$$y^n + b_{n-1}y^{n-1} + b_{n-2}y^{n-2} + \cdots + b_1y + b_0 = 0$$

egyenletet az alábbi alakba írjuk:

$$b_0 = -y(y^{n-1} + b_{n-1}y^{n-2} + \cdots + b_1)$$

Mivel $(y^{n-1} + b_{n-1}y^{n-2} + \cdots + b_1) \in \mathbb{Z}$, ezért y osztója b_0-nak.
Mindez az eredeti

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

egyenletre azt jelenti, hogy ha $x = \frac{p}{q}$ ennek nem egyszerűsíthető gyöke, akkor $p \mid a_0$ és $q \mid a_n$.

4.3. Tschirnhaus módszere

Tschirnhaus (1651 – 1708) német matematikus egy eljárást dolgozott ki az általános

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

egyenlet megoldására. Ötlete, hogy a jól bevált $y = x + \frac{a_{n-1}}{n}$ helyettesítés helyett válasszuk az

$$y = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0$$

helyettesítést. A két fenti egyenletből kifejezve az x-et, y-ra az alábbit kapjuk:

$$y^n + c_{n-1}y^{n-1} + \cdots + c_1y + c_0 = 0$$

Tschirnhaus célja b_i-k alkalmas megválasztása úgy, hogy m darab c_i 0 legyen. Ha $m = n-1$ értéket választjuk, akkor az n-ed fokú valamint a konstans tag kivételével a többi tag mind eltűnik és az

$$y^n + c_0 = 0$$

egyenletet kapjuk, melynek megoldása már könnyen kiszámolható: $y = \sqrt[n]{-c_0}$. Tehát az n-ed fokú egyenletet sikerült visszavezetni az alábbi $(n-1)$-ed fokú egyenletre:

$$\sqrt[n]{-c_0} = x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$$

Leibniz (1646 – 1716) azonban észrevette, hogy azok a feltételek, amelyek $c_1, \ldots, c_{n-1}$ eltűnését biztosítják, egy egyenletrendszert adnak, amely b_i különböző hatványait tartalmazza, és melynek megoldása megegyezik egy $(n-1)!$ fokú egyenlet megoldásával. A módszer célja, hogy a feladatot visszavezessük egy alacsonyabb fokú egyenletre, ez azonban az előbbi észrevétel miatt $n > 3$ esetén már nem működik. Viszont $n = 4$-re egy hatodfokú egyenletet kapunk, melyet meg tudunk oldani.
Alkalmazzuk Tschirnhaus eljárását az

$$x^3 + px + q = 0 \tag{1}$$

harmadfokú egyenletre. Legyen

$$y = x^2 + b_1 x + b_0. \tag{2}$$

(1)-ből és (2)-ből fejezzük ki x-et $x^3 + px + q$ és $x^2 + b_1 x + (b_0 - y)$ polinomok rezultánsának segítségével, azaz határozzuk meg az alábbi determinánst:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q \\ 1 & b_1 & b_0 - y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & b_0 - y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_1 & b_0 - y \end{vmatrix}$$

Itt tegyünk egy kis kitérőt, hogy a fönti determinánst megmagyarázzuk. Két polinom rezultánsa a két polinom együtthatóiból felépülő olyan racionális kifejezés, amelynek a következő tulajdonságai vannak: ha a két polinomnak van közös zérushelye, akkor a rezultáns értéke 0. Ha viszont a rezultáns értéke 0, akkor a két polinomnak van közös zérushelye. Tehát

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = a_0(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$$

$$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m = b_0(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_m)$$

polinomok rezultánsának

$$R(f,g) = a_0^m g(\alpha_1)\cdots g(\alpha_n)$$

kifejezést tekintjük.

A fenti két polinom közös zérushelyének megkeresése megegyezik azzal a feladattal, hogy van-e az

$$f(x) = 0 \quad \text{és} \quad g(x) = 0$$

egyenleteknek közös gyöke. Tegyük fel, hogy $x = \alpha$ közös gyök. Ekkor

$$a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0,$$

$$b_0\alpha^m + b_1\alpha^{m-1} + \cdots + b_{m-1}\alpha + b_m = 0.$$

Szorozzuk meg a felső egyenletet rendre az $\alpha^{m-1}, \alpha^{m-2}, \ldots, \alpha, 1$ számokkal, majd az alsót rendre az $\alpha^{n-1}, \alpha^{n-2}, \ldots, \alpha, 1$ számokkal, és az azonos hatványokat rendezzük egymás alá. Így a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned}
a_0\alpha^{n+m-1} + a_1\alpha^{n+m-2} + \cdots + a_n\alpha^{m-1} &= 0 \\
a_0\alpha^{n+m-2} + \cdots + a_{n-1}\alpha^{m-1} + a_n\alpha^{m-2} &= 0 \\
&\vdots \\
b_0\alpha^{n+m-1} + b_1\alpha^{n+m-2} + \cdots + b_m\alpha^{n-1} &= 0 \\
b_0\alpha^{n+m-2} + \cdots + b_{m-1}\alpha^{n-1} + b_m\alpha^{n-2} &= 0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

A homogén lineáris egyenletrendszerek elmélete szerint a tekintett egyenletrendszer determinánsának értéke 0. Ez szükséges feltétele annak, hogy $f(x) = 0$ és $g(x) = 0$ egyenleteknek legyen közös gyöke. Sőt ez a determináns megegyezik $f(x)$ és $g(x)$ polinomok $R(f,g)$ rezultánsával. Ebből következik, hogy amennyiben a_0 és b_0 egyike sem 0, úgy a determináns eltűnése elégséges feltétele $f(x) = 0$ és $g(x) = 0$ egyenletek közös gyökének létezésére.

Visszatérve, Tschirnhaus eljárásában szereplő determináns értéke

$$c_3y^3 + c_2y^2 + c_1y + c_0,$$

ahol

$$c_3 = -1$$
$$c_2 = 3b_0 - 2p$$
$$c_1 = 4pb_0 - 3qb_1 - 3b_0^2 - pb_1^2 - p^2$$
$$c_0 = q^2 + p^2 b_0 - pqb_1 + 3qb_0b_1 - 2pb_0^2 + b_0^3 - qb_1^3 + pb_0b_1^2.$$

A továbbiakban tehát a

$$c_3y^3 + c_2y^2 + c_1y + c_0 = 0 \tag{3}$$

egyenlettel foglalkozunk, és célunk, hogy c_1 és c_2 0-val legyen egyenlő, azaz

$$0 = 3b_0 - 2p,$$

amiből következik, hogy

$$b_0 = \frac{2p}{3}.$$

Ezt a

$$0 = 4pb_0 - 3qb_1 - 3b_0^2 - pb_1^2 - p^2$$

egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$pb_1^2 + 3qb_1 - \frac{p^2}{3} = 0,$$

amiből

$$b_1 = \frac{3}{p}\left(\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}\right).$$

Már ismerjük b_0 és b_1 értékét, valamint $A := \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}$, tehát

$$c_0 = 2^3A^3\left(\frac{3}{p}\right)^3\left(A - \frac{q}{2}\right).$$

c_0-t és c_3-at (3)-ba helyettesítve az alábbi egyenletet kapjuk

$$-y^3 + 2^3A^3\left(\frac{3}{p}\right)^3\left(A - \frac{q}{2}\right) = 0,$$

melynek megoldása

$$y = \frac{6A}{p}\sqrt[3]{A - \frac{q}{2}}.$$

Az (1) egy megoldását tehát a (2) segítségével, azaz az

$$x^2 + \frac{3}{p}\left(A - \frac{q}{2}\right)x + \frac{2p}{3} = \frac{6A}{p}\sqrt[3]{A - \frac{q}{2}} \tag{4}$$

egyenlet megoldásával kaphatjuk meg. Azonban általában (4) megoldásai közül csak egy megoldása (1)-nek is. A közös gyök megtalálásának céljából keressük meg (1) és (4) legnagyobb közös osztóját, mivel tudjuk, hogy az $f(x) = 0$ és $g(x) = 0$ egyenleteknek akkor és csak akkor van közös gyökük, ha $g(x)$ és $f(x)$ nem relatív prímek, és az összes közös gyököt a $d(x) = 0$ egyenlet gyökei szolgáltatják, amelyre $d(x)$ az $f(x)$ és $g(x)$ polinomoknak legnagyobb közös osztója.

Ha $A \neq 0$ és $B = \sqrt[3]{A - \frac{q}{2}}$, akkor az Euklideszi algoritmus a következő legnagyobb közös osztót adja:

$$2A\left(\frac{3}{p}\right)^2\left(B^2 + \frac{p}{3}\right)\left(Bx + \frac{p}{3} - B^2\right)$$

Ez csak úgy lehet egyenlő 0-val, ha

$$Bx + \frac{p}{3} - B^2 = 0,$$

azaz a megoldás

$$x = \frac{B^2 - \frac{p}{3}}{B} = B - \frac{p}{3B}.$$

Megjegyezzük, hogy ismét a Cardano-képletet kaptuk, ugyanis

$$B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

és

$$-\frac{p}{3B} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}.$$

5. Új szemlélet

A XVIII. század második felében már többé-kevésbé ismert volt a polinomok elmélete, képesek voltak magas szintű számításokat elvégezni, sőt Moivre (1667–1754) munkájában összekapcsolja a komplex számokat a trigonometriával, melynek segítségével meg lehet határozni az n-edik egységgyököket. Mindezek az egyenletekkel kapcsolatos kutatásokat új irányba mozdították. Egy évszázadon belül az egyenletek elmélete gyors fejlődésen ment keresztül, mely drámaian megváltoztatta az egész algebrát.

5.1. Étienne Bézout

E korszak első munkái a 60-as években jelennek meg Euler (1707–1783) és Bézout (1730–783) jóvoltából, kik új eljárásokat dolgoznak ki a legfeljebb 4-ed fokú egyenletek megoldására. Bézout 1765-ben kiadott munkájában már alkalmazza az egységgyököket: ötlete az

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_{n-1} y^{n-1} \\ y^n &= 1 \end{aligned}$$

helyettesítés. Ezekből a 31.-32. oldalon kifejtett rezultáns módszer segítségével kiszámítjuk $R_n(x)$-et. Ha szükséges, $R_n(x)$ főegyütthatójával osztunk és így kijelenthetjük, hogy $R_n(x)$ normált. Ha x és y a fenti egyenletrendszer gyökei, akkor

$$x = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \cdots + a_{n-1} w^{n-1},$$

ahol w n-edik egységgyök, gyöke $R_n(x) = 0$-nak, tehát $R_n(x)$ osztható az

$$x - (a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \cdots + a_{n-1} w^{n-1})$$

kifejezéssel. $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ független határozatlanok, x megfelelő értékeihez különböző n-edik egységgyökök tartoznak, így $R_n(x)$ az alábbi módon írható fel:

$$R_n(x) = \prod (x - (a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \cdots + a_{n-1} w^{n-1})),$$

ahol a szorzat az n különböző n-edik egységgyökön fut végig. Ha $R_n(x)$-nek ezt az alakját fel tudjuk írni, akkor $R_n(x) = 0$ egyenlet megoldásait is megkapjuk. Ezek alapján egy tetszőleges n-ed fokú $P(x) = 0$ alakú egyenlet megoldása során célunk az

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ paramétereket úgy megválasztani, hogy $R_n(x)$ azonos formájú legyen $P(x)$-szel, így a $P(x) = 0$ egyenlet megoldásait $a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \cdots + a_{n-1} w^{n-1}$ alakban kaphatjuk meg.

Alkalmazzuk Bézout módszerét az

$$x^3 + px + q = 0$$

harmadfokú egyenletre. Első lépésben számoljuk ki $R_3(x)$-et

$$-a_2 y^2 - a_1 y + (x - a_0) = 0$$

$$y^3 - 1 = 0$$

egyenletekből:

$$R_3(x) = \begin{vmatrix} -a_2 & -a_1 & x - a_0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & -a_1 & x - a_0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_2 & -a_1 & x - a \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (x - a_0)^3 - 3a_1 a_2 (x - a_0) - (a_1^3 + a_2^3)$$

Most válasszuk meg a_0, a_1, a_2 paramétereket úgy, hogy $R_3(x)$ megegyezzen az

$$x^3 + px + q$$

polinommal:

$$a_0 = 0 \qquad (1)$$

$$-3a_1 a_2 = p \qquad (2)$$

$$-(a_1^3 + a_2^3) = q \qquad (3)$$

(2)-ből fejezzük a_2-t, majd ezt helyettesítsük be (3)-ba:

$$a_1^6 + q a_1^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

Ez egy másodfokú egyenlet a_1^3-re, melynek megoldását már ismerjük. a_1 ismeretében a_2 már könnyen kiszámolható. $R_n(x)$ gyöktényezős alakjából láthatjuk, hogy $R_3(x) = x^3 + px + q$ megoldásai $a_1 w + a_2 w^2$ alakban előállnak, ahol w végigfut a 3. egységgyökökön. Jelölje ς az egyik 1-től különböző 3. egységgyököt. Ekkor a megoldások:

$$a_1 + a_2, \quad \varsigma a_1 + \varsigma^2 a_2, \quad \varsigma^2 a_1 + \varsigma a_2$$

5.2. Joseph Louis Lagrange

Lagrange (1736–1813) 1770-ben kiadott Észrevételek az egyenletek algebrai megoldásával kapcsolatban című műve a korszak legérthetőbb és legátfogóbb műve. Először felülvizsgálja a harmad- és negyedfokú egyenletek ismert megoldási eljárásait, melyeket megpróbál magasabb fokú egyenletekre is kiterjeszteni, majd ezt követően kidolgozza saját elméletét.

Bézout munkájából az alábbi következtetéseket vonja le: ha egy n-ed fokú egyenlet megoldásai

$$a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \cdots + a_{n-1} w^{n-1}$$

alakban előállnak, ahol w végigfut az n-edik egységgyökökön, és ς jelöl egy primitív n-edik egységgyököt, akkor $x_1, \ldots, x_n$ gyökökre az alábbi kifejezéseket kapjuk:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \\ x_2 &= a_0 + a_1\varsigma + a_2\varsigma^2 + \cdots + a_{n-1}\varsigma^{n-1} \\ x_3 &= a_0 + a_1\varsigma^2 + a_2\varsigma^4 + \cdots + a_{n-1}\varsigma^{2(n-1)} \\ &\vdots \\ x_n &= a_0 + a_1\varsigma^{n-1} + a_2\varsigma^{2(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\varsigma^{(n-1)^2} \end{aligned}$$

Tehát az általános alak:

$$x_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \varsigma^{(i-1)j}, \quad \text{ahol} \quad i = 1, \ldots, n.$$

$a_0, \ldots, a_{n-1}$ paraméterek meghatározásához elegendő mindegyik egyenletet megszorozni ς alkalmas hatványával, majd a kapott egyenleteket összeadni. Keressük meg a_k értékét: a szorzást és összeadást követően

$$\sum_{i=1}^{n} \varsigma^{-(i-1)k} x_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \left(\sum_{i=1}^{n} \varsigma^{(j-k)(i-1)} \right) \qquad (1)$$

egyenletet kapjuk. Ha $j \neq k$, akkor $\varsigma^{(j-k)}$ egy egytől különböző egységgyök, tehát megoldása az

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$$

egyenletnek, amiből következik, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \varsigma^{(j-k)(i-1)} = 0.$$

Így (1) jobboldalán minden tag eltűnik, kivéve a keresett tagot, amikor $j = k$, tehát az alábbi egyenlőséget kapjuk:

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \varsigma^{-(i-1)k} x_i\right) = a_k$$

Ebből látható, hogy a_k összes, $x_1, \ldots, x_n$ permutációival megadott értéke különböző, tehát a_k egy $n!$ fokú egyenlet egy megoldása. Azonban Lagrange megmutatta, hogy a_k^n csak $(n-1)!$ értéket vesz fel, sőt ha n prímszám, akkor a_k^n egy megoldása egy $n-1$ fokú egyenletnek, melynek együtthatói meghatározása megegyezik egy $(n-2)!$ fokú egyenlet megoldásával. Így például $n = 5$ esetén a_k^5 meghatározása egy $3! = 6$ fokú egyenlet megoldását igényli. Ha $n = pq$, ahol p prím és $q \mid k$, akkor a_p^k egy megoldása egy $p-1$ fokú egyenletnek, melynek együtthatói meghatározása megegyezik egy $\dfrac{n!}{(p-1)p(q!)^p}$ fokú egyenlet megoldásával. $n = 6$ esetén a_3^2 meghatározása tehát egy 10-ed fokú egyenlet megoldását igényli. Ezek Lagrange-ban kétséget ébresztettek az általános ötödfokú illetve magasabb fokú egyenletek megoldhatósága felől.

Az általa vizsgált eljárásokból levont végső következtetés végülis az, hogy bármely fokú egyenlet a jövőben megoldható lesz egy rezultáns egyenlet segítségével, melynek megoldásai $x_1 + wx_2 + w^2x_3 + \cdots + w^{n-1}x_n$ alakba írhatók, ahol w egy n-edik egységgyök.

Ma ezt a

$$t(w) = x_1 + wx_2 + w^2x_3 + \cdots + w^{n-1}x_n$$

kifejezést nevezzük Lagrange rezolvensnek. Ennek ismeretében egy n-ed fokú egyenlet megoldásai:

$$x_i = \frac{1}{n}\left(\sum_{w} w^{-(i-1)} t(w)\right)$$

5.3. Abel-Ruffini tétel

Lagrange felfedezéseit követően Paolo Ruffini (1765–1822) 1799-ben kiadta Teoria Generale delle Equazioni című munkáját, melyben bebizonyította, hogy a legalább ötödfokú egyenletek nem oldhatók meg gyökjelekkel. Bizonyításának 516 oldala azonban túl hosszú és nehéz volt még a többi matematikus számára is, így munkájára negatív kritikákat kapott. Ezért bizonyítását leegyszerűsítette, de még így sem kapta meg az elismerést. Egyedül Cauchy (1789–1857) támogatta munkája helyességét. Bizonyítása azonban tényleg hibákat, hiányosságokat tartalmazott.

1824-ben Niels Henrik Abel (1802–1829) által új bizonyítás jelent meg, mely már kiküszöbölte Ruffini hibáit.
Az Abel-Ruffini tétel tehát a következő: Az általános n-edfokú egyenlet $n \geq 5$ esetén nem oldható meg gyökjelekkel, azaz az $n \geq 5$ esetén az általános n-edfokú polinom felbontási teste gyökökkel nem elérhető.
Az állítás igazolásának alapvető ötlete, hogy az egyenlet gyökeihez csoportot társítunk, melynek részcsoprtjai alapján a megoldhatóság eldönthető. Ha a részcsoportoknak létezik olyan növekvő lánca, amelyben az egyes tagok az előző részcsoportnak viszonylag egyszerű bővítései, akkor az egyenlet gyökjelekkel megoldható.
A szükséges definíciók a következők:

Definíció: Legyen $K \leq L$ test, és tegyük föl, hogy L tartalmazza egy nem nulla $f \in K[x]$ polinom összes gyökét (vagyis $f(x) = c(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$ alkalmas $\alpha_i \in L$ elemekre, ahol $c \in K$). Ekkor $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ az f polinom felbontási teste K fölött.

Definíció: A K test felett gyökökkel elérhetőnek nevezzük

1. A K testet.

2. Ha az L test a K-nak véges algebrai bővítése, amely K felett gyökökkel elérhető, és $M = L(b)$, ahol b az L felett irreducibilis, prímfokú $x^p - a$ polinom gyöke, akkor M gyökökkel elérhető a K felett.

3. Csak azokat a testeket nevezzük K felett gyökökkel elérhetőnek, amelyek az előző két lépés véges sokszori alkalmazásával állíthatók elő.

Végül Galois (1811–1832) 1829-ben már elégséges feltételt adott egy egyenlet megoldhatóságára: Legyen $K \leq \mathbb{C}$ test, és $f \in K[x]$ egy irreducubilis polinom. Ha f valamelyik (komplex) gyöke fölírható egy olyan képlettel, amely f együtthatóiból a négy alapművelettel és gyökvonásokkal keletkezik, akkor az f polinom K fölötti felbontási testének Galois-csoportja feloldható csoport.

6. Életrajzok

Thalész

Élt Kr. e. 624–546 között. Milétoszban született előkelő családban. Hírnevét politikai tanácsadóként szerezte. A hét bölcs egyike, a matematika és filozófia atyja, a milétoszi iskola első képviselője, a legkorábbi görög természetfilozófus. Ő az első olyan görög matematikus, akinek neve máig fennmaradt. Ő fogalmazta meg a geometria egyik legelső alaptételét, a róla elnevezett Thalész-tételt. Szintén az ő eredménye a párhuzamos szelők tétele. Az olümpiai játékok figyelése közben halt meg.

Diophantosz

Élt Kr. e. 250 körül. Alexandriából származó görög matematikus. Az ókori görög matematika utolsó nagy képviselője. Főműve, az Arithmetica tizenhárom könyvéből csak hat maradt fenn. Első- és másodfokú egyenleteket oldott meg, valamint határozatlan egyenletekkel is foglalkozott. Az olyan feladványokat kedvelte, amelyek megoldása egész szám, ezért az ilyeneket mindmáig diofantikus problémáknak nevezzük.

Brahmagupta

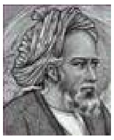
Élt 598–668 között. Bhinmalban született. Indiai matematikus, csillagász. Leghíresebb Brahmasphutasiddhanta c. műve a legkorábbi matematikai mű, melyben a nulla, mint szám szerepel. Brahmagupta negatív számokon végrehajtott műveleteket is leír. Jelentős eredménye az általános másodfokú egyenlet megoldóképlete.

Hvárizmi

Élt 780–850 között. Horezm városában született. Életéről nagyon keveset tudunk. Matematikusok és csillagászok vezető személyisége volt. Aritmetikai és algebrai művei óriási hatást gyakoroltak a matematika továbbfejlődésére. Nevezetes munkája, amely arab nyelven is fennmaradt a Kitáb al-dzsabr val mukabala, azaz a Helyreállítás és egyszerűsítés könyve. Az első - és másodfokú számegyütthatós egyenletek megoldását tárgyalta.

Abu Kámil

Élt 850–930 között. Egyiptomi muszlim matematikus volt, kit az "Egyiptomi számológép"-nek neveztek. Életéről nagyon keveset tudunk. Abu Kámil korának polihisztoraitól eltérően a matematika egy területére, az algebrára összpontosított. Munkái fontos szerepet játszanak a matematika Európában való elterjedésében, ugyanis módszereit később Fibonacci alkalmazta.



Omar Hajjám

Élt 1048–1131 között. Nisapur városában született, tudós perzsa költő, csillagász, matematikus, filozófus. Neve sátorkészítőt jelent. Tudására felfigyelve a szultán egészen fiatalon az udvarába hívja. Később Iszfahánban él, a szultán pártfogoltjaként. Megpróbálkozik az algebra és a geometria élesebb elkülönítésével, és már harmadfokú egyenleteket old meg. Nagyban hozzájárult a számfogalom pontosításához.

Scipione del Ferro

Élt 1465.02.06–1526.11.05. között. Bolognában született. 1496-tól a bolognai egyetem számtan és geometria előadója. Édesapja papírgyártással foglalkozott, melynek köszönhetően del Ferro az oktatás mellett a papír kereskedelmében is részt vett. Megoldotta az $x^3 + px = q$ alakú egyenletet, azonban más munkái nem maradtak fenn, melynek következménye, hogy neve kevésbé ismert. Cardano így ír róla: "Egy ember egyedülálló módon tehetséges ebben a művészetben (algebra)".

Niccoló Fontana Tartaglia

Élt 1499–1557 között. Bresciában született. Olasz matematikus, erődítményeket tervező mérnök, földmérő és a Velencei Köztársaság könyvelője. Több könyve jelent meg, köztük Arkhimédész és Euklidész első olasz fordítása. Édesapját 1505-ben meggyilkolták. Ezután Niccoló két testvérével és édesanyjával élt nagy szegénységben. 1512-ben további tragédia érte, amikor a franciák lemészárolták Brescia lakóit. Ekkor szerezte sérülését, melynek következtében beszédhibás lett, és megkapta a Tartaglia, azaz a "dadogós" nevet.

Gerolamo Cardano

Élt 1501.09.24.–1576.09.21. között. Olaszországban, Paviában született. Matematikus, fizikus, orvos, asztrológus. Apja ügyvéd volt, de a matematikával is kapcsolatban állt. Cardano a paviai egyetemen tanult orvosnak, ahol később rektorrá választották. 1525-ben megszerezte az orvosi doktorátusát, azonban nem túl sikeres orvosi praxist alakított ki. Nem tudott elég pénzt keresni, ezért a szerencsjátékhoz fordult, de végül szegényházba került. Később óriási szerencséjére megkapta édesapja korábbi posztját és matematikát adhatott elő Milánóban. Ekkor a Fizikusok Kollégiuma is befogadta, és ekkor kezdődött Cardano igazi karrierje. Foglalkozni kezdett a harmad- és negyedfokú egyenletek megoldhatóságával. Főeredménye ma Cardano-képlet néven ismeretes, amelyet az Ars Magna c. könyvében publikált 1545-ben. Vezető, elismert tudóssá vált, és a Fizikusok Kollégiuma rektorrá avatta. 1570-ben Cardano börtönbe került eretnekség vádjával, ugyanis elkészítette Krisztus horoszkópját. Mivel egyéb ügyekben támogatta az egyházat, nem büntették meg súlyosan. Az algebra mellett Cardanónak fontos felfedezései voltak a hidrodinamikában, mechanikában, valószínűség-számításban, geológiában. Cardanóról kapta nevét a hajók iránytűinek fölfüggesztésére szolgáló kardántengely.

Ludovico Ferrari

Élt 1522.02.02.–1565.10.05. között. Bolognában született. Édesapja halála után nagybátyjával élt, kinek köszönhetően Ferrari Cardanóhoz kerülhetett szolgaként. Cardano észrevette, hogy a 14 éves Ferrari tud írni-olvasni, és felmentette őt szolgai feladatai alól, és kinevezte titkárának, majd később matematikát tanított neki. 18 éves korában már tanított, majd 1541-ben a milánói egyetem előadója lett. Ő fedezte fel a negyedfokú egyenlet megoldóképletét. Eredményeinek köszönhetően a császár felkérte fia mellé tanítónak. Azonban ő a jobb fizetés és pozíció reményében Milánó adószakértője lett, melynek köszönhetően fiatalon és gazdagon vonult vissza Bolognába. 1565-ben a bolognai egyetem állást ajánlott neki. Ferrari nem sokkal ez után arzénmérgezésben halt meg.

Francois Viéte

Élt 1540.–1603.12.13. között. Franciaországban született. Foglalkozását tekintve jogász és parlamenti képviselő volt, kedvtelésből űzte a matematikát. Sokoldalúságát a francia udvar is igénybe vette. Megfejtette a spanyolok megfejthetetlennek vélt kódját, ezzel segítve az ellenük vívott háborút. Betűjelöléseket bevezetve lehetővé tette az egyenletek általános alakjának és megoldásának felírását. Megállapította a gyökök és együtthatók összefüggését néhány esetre (Viéte-formulák). Kidolgozta az algebrai mennyiségekkel való műveletek szabályait.

René Descartes

Élt 1596.03.31.–1650.02.11. között. Francia filozófus, természetkutató és matematikus volt. Touraine megye La Haye nevű városában (ma már elnevezték róla Descartes-nak) született nemes, ám sem nem gazdag, sem nem híres családba. Tanulmányait a IV. Henrik által alapított La Fleche-i jezsuita líceumban kezdte, amely egyike volt Európa legkiválóbb iskoláinak. Itt elsajátította a latin nyelvet. 1616-ban jogi licenciátust szerzett, majd 1618-ban pedig Hollandiába utazott, ahol megismerkedett Isaac Beeckman nevű fizikussal, aki a matematika és a fizika felé fordította érdeklődését. 1619-ben hosszabb utazásra indult, melynek során Magyarországra is ellátogatott. 1628-ban újból Hollandiába költözött, és az egyik szolgálóleánytól gyereke született, aki sajnos 1650-ben meghalt. Descartes 1649-ben Stockholmba utazott, és nemsokára, 1650-ben tüdőgyulladásban halt meg. A matematikában elsősorban a geometriai munkássága miatt ismer. La Géométrie című könyve három részre oszlik: az első kettő témája az analitikus geometria, a harmadik könyv algebrai fejtegetéseket tartalmaz.

Ehrenfried Walther von Tschirnhaus

Élt 1651.04.10.–1708.10.11. között. Német matematikus, fizikus, orvos és filozófus volt. 15 éves koráig magántanára volt, majd 1666-ban Görlitzbe járt gimnáziumba, ahol felkészítették az egyetemre, és ahol magas szintű matematikai oktatást kapott. 1668 őszén a leideni egyetem diákja lett, ahol matematikát, filozófiát, fizikát és gyógyszerészetet tanult. Az 1672-ben kitört háború miatt 18 hónapra félbe kellett szakítania tanulmányait, majd 1674-ben európai körútra indult. 1682-ben a párizsi Tudományos Akadémia tagjává választották. 1683-ban megházasodott, és folytatva kutatásait, publikálta saját módszerét az általános harmadfokú egyenlet megoldására. A következő években sok munkája megjelent, valamint a porcelánnak, mint anyagnak az előállításával kísérletezett. Feleségének halálát követően újraházasodott, de a háborúknak köszönhetően nagy szegénységben halt meg. Porcelánjának termelését halála után, 1710-ben kezdték meg.

Étienne Bézout

Élt 1730.03.31.–1783.09.27. között. A franciaországi Nemours-ban született. Nagyapja és édesapja is elöljáró volt, azonban Bézout Euler munkáit olvasva a matematika mellett kötelezte el magát. 1758-ban a párizsi Tudományos Akadémai adjunktusává választották, és tankönyveket kezdett írni. Tankönyvei igen népszerűek voltak, angol fordításban Észak-Amerikában is használták őket. Algebra témájú könyveit is sokan olvasták. Mivel sok időt töltött oktatással, kevés ideje maradt kutatásokra, melyekben általános problémák megoldásait kereste. Algebrai eredményeit az 1779-ben kiadott Théorie générale des équations algébraiques c. mű összegzi. Halála után Nemours-ban egy szobrot állítottak, így emlékezve nagyszerű eredményeire.

Joseph Louis Lagrange

Élt 1736.01.25.–1813.04.10. között. Olasz születésű francia matematikus. Édesapja ügyvédnek szánta, ezért a torinói főiskolán tanult, kedvenc tárgya a klasszikus latin volt, a matematikát unalmasnak találta. Érdeklődését Halley munkája keltette fel, melyben az algebrát az optikában alkalmazta. Első matematikai munkáját 1754-ben adta ki, melyet Luigi De la Grange Tournier néven írt alá. Ezt követően tovább folytatta kutatásait, eredményeiről Euler-t mindig levélben értesítette. Eredményeinek köszönhetően már 19 éves korában a torinói Royal Artillery School matematika professzora lett. 1757-ben szerepe volt a torinói Tudományos Akadémia megalapításában. 1764-ben a Hold librációjával kapcsolatos értekezéséért megkapta a párizsi Tudományos Akadémia díját. 1766-ban Berlinbe ment, hogy átvegye Euler megüresedett helyét az ottani akadémián. 1787-ig élt Berlinben, ahol kidolgozta Észrevételek az egyenletek algebrai megoldásával kapcsolatban c. művét, mely új korszakot nyitott az algebra történetében. Berlin után Párizsba költözött, ahol Napóleon kinevezte szenátorrá, és grófi címet adományozott neki.

Paolo Ruffini

Élt 1765.09.22.–1822.05.10. között. Olasz matematikus és filozófus volt. 1783-ban a modenai egyetem diákja lett, ahol matematikát, gyógyszerészetet, filozófiát és irodalmat tanult. 1787–88-ban még diák volt, de már analízist oktatott az egyetemen. A diploma megszerzése után pedig már az egyetem professzora lett. Mikor Napóleon seregei megszállták Modenát, Ruffini a politikai életben találta magát, és képviselő lett. Később tisztségét elhagyva ismét tanítani szeretett volna, azonban ezt megtagadták tőle. Ruffini nem esett kétségbe, több ideje jutott kutatásaira, beleértve az ötödfokú egyenletek elméletét. 1799-ben kiadott művében kijelenti, hogy az ötödfokú egyenletek nem oldhatók meg radikálokkal, azonban bizonyításában hiba található. Az elutasítást követően 7 évig alkalmazott matematikát tanított a modenai katonai iskolában, majd Napóleon elesése után a modenai egyetem rektorává választották. 1817-ben tífuszos lett, amiből sosem sikerült teljesen felépülnie.

Niels Henrik Abel

Élt 1802.08.05.–1829.04.06. között. Norvég matematikus volt. A 14 éves Abelt szülei a christianiai Cathedral Schoolba küldték tanulni, ahol matematika tanára felfedezte képességeit, és különórákat adott neki. 1821-ben egyetemista lett. Tudását tovább bővítette Newton, Euler, Lagrange és Gauss munkáin keresztül. 1823-ban egyik munkája megjelent egy helyi tudományos lapban. Még ebben az évben Koppenhágába utazott, ahol részt vett a tudományos életben. 1824-ben kiadta az ötödfokú egyenletekről szóló elméletét, azonban elméletének bizonyítása nem volt tökéletes, így a várva várt elismerés elmaradt. 1825-ben lehetőséget kapott az utazásra, így 4 hónapot töltött Berlinben, ahol egy új tudományos lapban publikálhatott, mely Abel munkáinak köszönhetően vezető folyóirattá vált. 1826. júliusában érkezett Párizsba, ahol kidolgozta Párizsi éretkezését, melyet elküldött a Tudományos Akadémiának. Valaszt azonban nem kapott, és élete végéig úgy hitte, munkája örökre elveszett. Párizst szegényen és szomorúan hagyta el, hogy tudását szülőföldjén kamatoztassa. Visszatérve Norvégiába útját kudarcként élte meg, hisz Párizsban nem jelent meg munkája, és Gauss-t sem látogatta meg. Hogy adósságait kifizesse, magántanárnak állt. 1828-ban ideiglenes állást kapott a christianiai egyetemen, ami kicsit javított anyagi helyzetén. Ezt követően Berlinben dolgozott, de rövid idő belül ismét visszatért Christianiába, ahol megbetegedett, és ágyhoz kötötté vált. Utolsó heteiben párizsi munkáját próbálta újraírni. Végül 26 évesen belehalt betegségébe. Elveszettnek hitt munkáját halála után 2 nappal megtalálták és dicséretekkel halmozták el, majd az Akadémia díjával jutalmazták.

Hivatkozások

[1] Sain Márton: *Nincs királyi út: Matematikatörténet*, Gondolat, Budapest, 1986

[2] A.P. Juskevics: *A középkori matematika története*, Gondolat, Budapest, 1982

[3]

[4] Kiss Emil: *Bevezetés az algebrába*, Typotex, Budapest, 2007

[5] Szele Tibor: *Bevezetés az algebrába*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977

[6] http://www.math.u-szeged.hu/~klukovit/Hallgatoknak/AlgTort