Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Mátrix szeletelés elmélet

Szakdolgozat

Koltay Anita
Matematika B.Sc., elemző szakirány

Témavezető: **Mincsovics Miklós**, tanársegéd
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest
2010

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Számos matematikai probléma modellezhető lineáris algebrai egyenletrendszerekkel, például nemlineáris egyenletrendszerek, differenciál- és integrálegyenletek, interpolációs és optimalizációs feladatok. Egyenletrendszerekre vezethető le továbbá sok fizikai (pl. mechanikai, villamosságtani) feladat, ökológiai, gazdasági elemzés.
A lineáris algebrai egyenletrendszerek megoldhatók direkt és iterációs módszerekkel is. A direkt módszereknél olyan algoritmust adunk meg, mely véges sok lépésben kiszámolja a pontos megoldást, pontos kiindulási adatokat feltételezve és a kerekítési hibáktól eltekintve (Gauss-elimináció, LU- és Cholesky-felbontás). Gyakorlati feladatoknál a kapott eredmény persze hibával terhelt lesz, mivel már a kezdeti adatok sem pontosak (mérési, modellezési hibák). A direkt módszereket főleg kis és közepes méretű, illetve sávmátrixok és teli mátrixok esetén használják. A gyakorlatban sok nagyméretű, ritka mátrixú egyenletrendszer keletkezik, ezeknél a direkt módszerek hátránya a nagy tárigény, valamint nagy együtthatómátrixoknál az inverz kiszámítása is nehéz és költséges, ezért ilyen típusú mátrixokra iterációs módszert alkalmaznak.
Az iterációs módszerek egy (általunk megadott) kiindulási vektorból egy vektorsorozatot állítanak elő, mely az egyenletrendszer megoldásához konvergál. A gyakorlatban az iterációs lépések számára meg kell adni egy leállási kritériumot, melynek meghatározása újabb problémát vet fel. (Az egyik lehetséges módszer, hogy akkor állítjuk meg az iterációt, amikor az egymást követő vektorok különbsége már kisebb egy általunk megadott ε-nál.)
Ezeknél a módszereknél két fontos szempont van:
- a vektorsorozat elemeit könnyen, "olcsón" tudjuk kiszámolni (hiszen pont ez az előnye a direkt módszerekkel szemben),
- az iteráció gyorsan konvergáljon a megoldáshoz (minél gyorsabb a konvergencia, annál

kevesebb lépésre lesz szükség).
Az iterációs módszereknél az egyenletrendszer együtthatómátrixát olyan mátrixok összegére (ill. különbségére) bontjuk, melyekkel könnyebben és gyorsabban tudunk számolni, mint az eredeti mátrixszal.
A klasszikus iterációs módszereknél olyan egyszerű felbontásokat vizsgálunk, melyeknél az iteráció gyorsan és olcsón számolható, vagyis kicsi a műveletigény, és megnézzük, hogy mely speciális mátrixokra lesznek ezek a felbontások konvergensek.
A nemnegatív mátrix szeletelés elmélet (*nonnegative splitting theory*) a monoton mátrixú lineáris egyenletrendszerek iterációs megoldási módszereit és azok konvergenciájának összehasonlítását mutatja be.

2. fejezet

Példák

Ebben a fejezetben két olyan matematikai problémát mutatok be, melynek megoldását lineáris algebrai egyenletrendszerrel modelleztem. Az egyenletrendszereket direkt módszerrel meg is oldottam (Matlab program segítségével), és ábrákkal szemléltetem a pontos és a numerikus megoldást, valamint a hibafüggvényt.

2.1. Kétpontos peremérték feladat

Tekintsük a következő másodrendű, önadjungált általános differenciálegyenletet

$$-\frac{d^2y(x)}{dx^2} + \sigma(x)y(x) = f(x), \qquad a < x < b, \tag{2.1}$$

a kétpontos peremfeltétellel

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta,$$

ahol α és β valós konstansok adottak, továbbá $f(x)$ és $\sigma(x)$ adott valós, folytonos függvények $x \in$ [a,b] intervallumon és $\sigma(x) \geq 0$.
A feladat folytonos megoldása helyett keressük az alábbi diszkretizációs feladat megoldását. Definiálunk egy $h = \frac{(b-a)}{N+1}$ lépésközt és az $x_j = a + jh, \quad 0 \leq j \leq N+1$ rácspontokat. Bevezetve az $y_i \equiv y(x_i)$ jelölést, y_i körül negyedrendben Taylor-sorba fejtjük annak szomszédos pontjaiban a függvényt (persze ehhez fel kell tennünk, hogy $y(x)$ legalább négyszer folytonosan differenciálható):

$$y_{i\pm1} = y_i \pm hy_i' + \frac{h^2}{2!}y_i'' \pm \frac{h^3}{3!}y_i''' + \frac{h^4}{4!}y_i^{IV}(x_i + \theta_i^{\pm}h), \quad 0 < |\theta_i^{\pm}| < 1.$$

$$-y_i'' = \frac{2y_i - y_{i-1} - y_{i+1}}{h^2} + \frac{h^2}{12} y^{IV}(x_i + \theta_i h), \quad 0 < |\theta_i| < 1.$$

Visszahelyettesítve ezt a 2.1 egyenletbe kapjuk, hogy

$$\frac{2y_i - y_{i-1} - y_{i+1}}{h^2} + \sigma_i y_i = f_i - \frac{h^2}{12} y^{IV}(x_i + \theta_i h), \quad 1 \le i \le N. \tag{2.2}$$

Definiáljuk az $\mathbf{A}$ mátrixot és az $\mathbf{y}$, $\mathbf{k}$, τ vektorokat a következőképpen:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2+\sigma_1 h^2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2+\sigma_2 h^2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 \\ 0 & & & -1 & 2+\sigma_N h^2 \end{bmatrix},$$

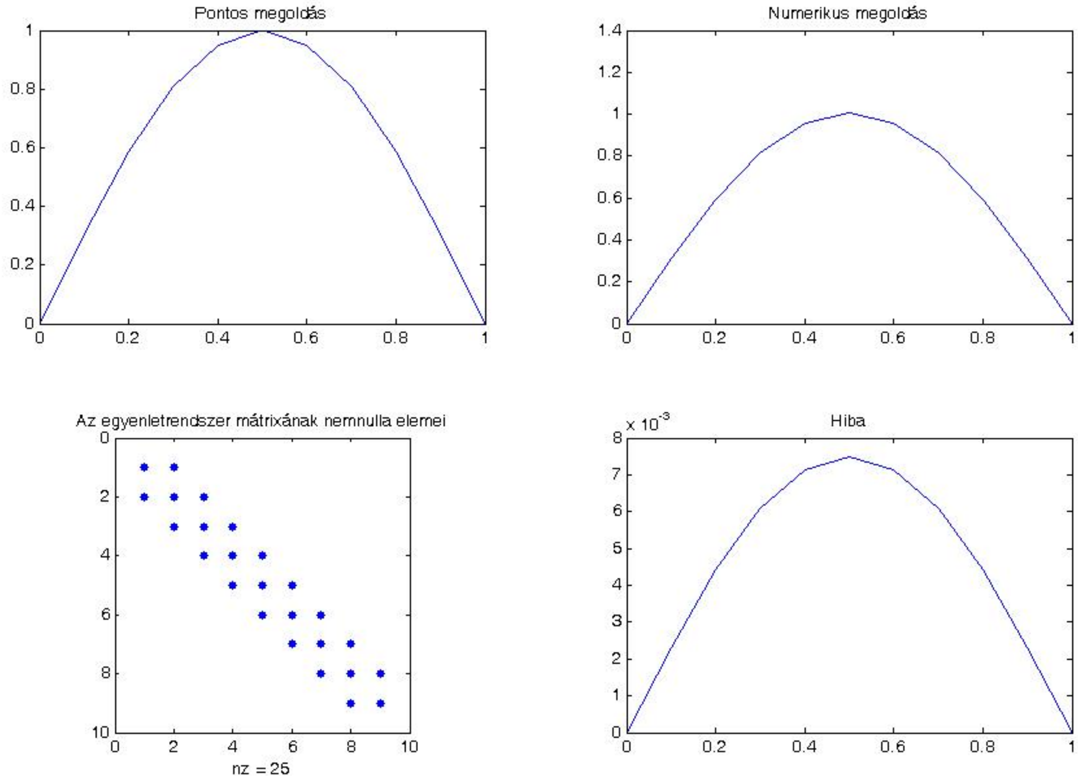
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} f_1 + \frac{\alpha}{h^2} \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N + \frac{\beta}{h^2} \end{bmatrix}, \quad \tau = \frac{-h^2}{12} \begin{bmatrix} y^{IV}(x_1 + \theta_1 h) \\ y^{IV}(x_2 + \theta_2 h) \\ \vdots \\ y^{IV}(x_N + \theta_N h) \end{bmatrix}.$$

Ekkor a 2.2 egyenletünk felírható az alábbi mátrixos alakban

$$\mathbf{Ay} = \mathbf{k} + \tau(y),$$

ahol $\tau(y)$ az $O(h^2)$ rendű hibatag.

Tekintsünk egy konkrét példát és annak megoldását:
Legyen $f(x) = (\pi^2 + 1) sin(x\pi)$, $\sigma(x) = 1$, és a $[0, 1]$ intervallumon $h = \frac{1}{11}$ lépésközzel keressük a diszkretizációs feladat megoldását. Matlab programmal az $\mathbf{Ay} = \mathbf{k}$ egyenletrendszert megoldva, másodrendben közelítjük $y(x)$-et. Az így kapott numerikus eredmény a pontos megoldással ($y(x) = sin(x\pi)$), valamint a hibával együtt a 2.1. ábrán látható (a 3. kép a tridiagonális $\mathbf{A}$ mátrix nemnulla elemeinek elhelyezkedését szemlélteti). A hiba $7 \cdot 10^{-3} \approx 10^{-2}$.



2.1. ábra.

2.2. A Dirichlet-probléma

Keressük azt a zárt egységnégyzeten értelmezett $u(x, y)$ függvényt (ill. annak közelítését), mely kielégíti az alábbi egyenletet az egységnégyzet belsejében

$$-\Big(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\Big) = g(x,y), \quad 0 < x, y < 1,$$

illetve a peremfeltételt

$$u(x, y) = 0, \quad ha \quad (x, y) \in \Gamma,$$

ahol Γ a négyzet határa, $g(x, y)$ pedig $(0{,}1)\times(0{,}1)$-en értelmezett, adott függvény. Definiálunk egy rácshálót az egységnégyzeten $h = \frac{1}{n+1}$ lépésközzel.

A függvény értékét egy belső (x_0, y_0) pontjában (másodrendben) közelítjük a szomszédos pontokban $((x_0 \pm h, y_0), (x_0, y_0 \pm h))$ felvett értékekkel, $u(x, y)$ Taylor-sorba fejtésének segítségével, feltéve, hogy a függvény megfelelően sima, azaz kellően sokszor folytonosan differenciálható (ld. Függelék):

$$u(x_0, y_0) \approx \frac{1}{4}[u(x_0 + h, y_0) + u(x_0 - h, y_0) + u(x_0, y_0 + h) + u(x_0, y_0 - h)] + \frac{h^2}{4} g(x_0, y_0).$$

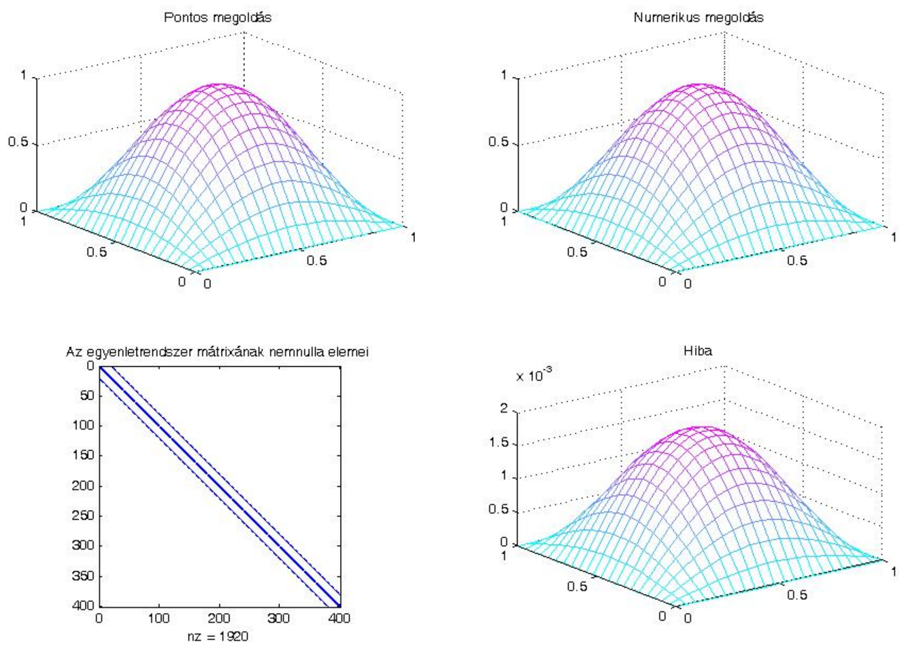
Most egy olyan $\mathbf{Au} = \mathbf{k}$ egyenletrendszert kapunk, melyben $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{h^2} \text{tridiag}[-\mathbf{I}, \text{tridiag}[-1, 4, -1], -\mathbf{I}]$$

alakú blokk-tridiagonális mátrix (n méretű blokkokkal), $\mathbf{u}$ vektorban $u(x, y)$ belső pontokban felvett ismeretlen értékei szerepelnek, $\mathbf{k}$-ban pedig a $g(x_0, y_0)$ értékek, szintén a belső (x_0, y_0) rácspontokban.

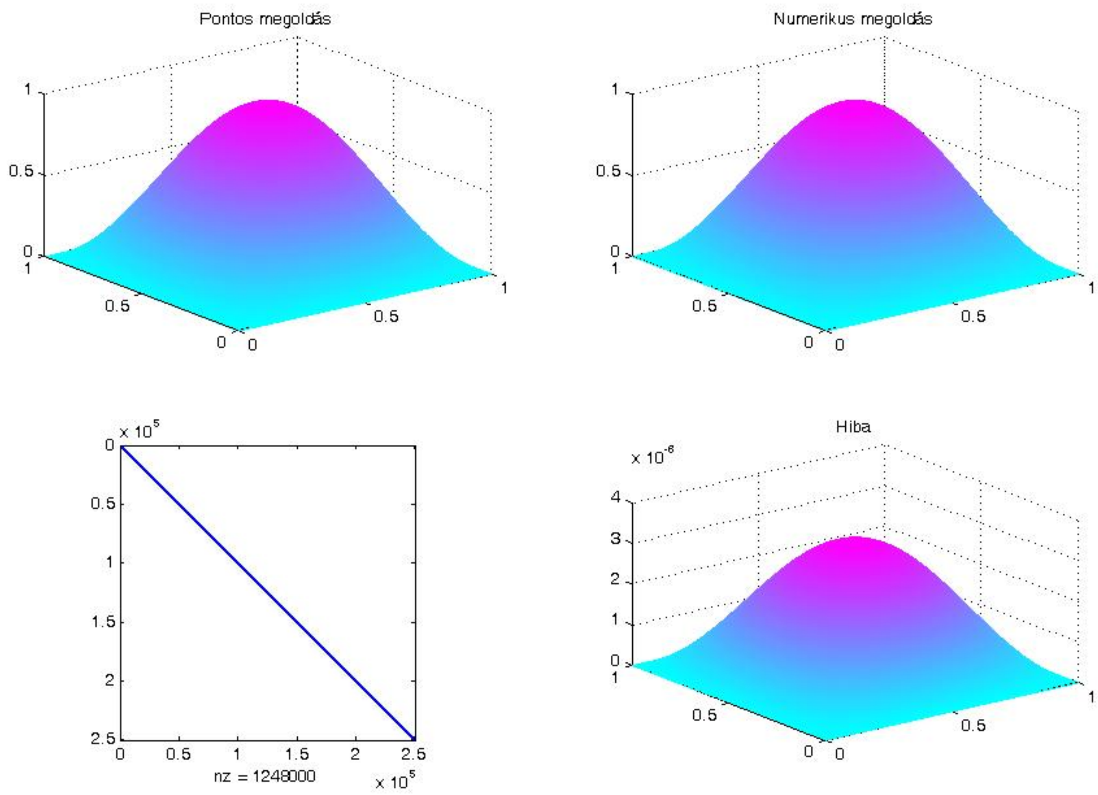
1. példa

Legyen $f(x, y) = 2\pi^2 sin(x\pi) sin(y\pi)$, $n = 20$ esetén a hiba 10^{-3} nagyságú
(ekkor a pontos megoldás: $u(x, y) = sin(x\pi) \cdot sin(y\pi)$):



2.2. ábra.

Ha kisebb lépésközzel ($n = 500$) közelítjük a függvényt, pontosabb eredményt kapunk (10^{-6} nagyságrendű lesz csak a hiba):



2.3. ábra.

A diszkretizációs feladatnál minél kisebb lépésközt választunk, annál nagyobb lesz a lineáris algebrai egyenletrendszer együtthatómátrixa és annál nehezebben számolható ki a megoldás direkt módszerekkel. A 2.3. ábrán látható, hogy már $n = 500$ esetén is $2.5 \cdot 10^5 \times 2.5 \cdot 10^5$ nagyságú a mátrix. Ha háromdimenziós tartományban kell megoldanunk egy, a Dirichlet-problémához hasonló egyenletet, akkor a mátrix mérete n^2-szeresére nő. A gyakorlatban még pontosabb közelítés esetén ennél jóval nagyobb mátrixokkal is kell számolnunk, ekkor a tárhely és a műveletigény is jelentősen megnő, és nem biztos, hogy célszerű direkt módszereket alkalmaznunk ilyenkor.

3. fejezet

Klasszikus iterációs módszerek

Tekintsük az $\mathbf{Ax} = \mathbf{k}$ lineáris algebrai egyenletrendszert, ahol $\mathbf{A}$ egy adott $n \times n$-es valós, reguláris mátrix, $\mathbf{x}$ és $\mathbf{k}$ pedig n komponensű oszlopvektorok ($\mathbf{k}$ adott). Keressük az egyenletrendszer $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{k}$ megoldását.
Az $\mathbf{A}$ mátrixnak egy $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ felbontását, ahol $\mathbf{M}$ reguláris, egyszerű felbontásnak nevezzük, és a fenti egyenletbe behelyettesítve egy általános iterációs módszert kapunk:

$$\mathbf{M}\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{N}\mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{k}, \qquad m = 0, 1, 2..., \tag{3.1}$$

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{k}, \qquad m = 0, 1, 2... \tag{3.2}$$

(A gyakorlatban az iterációs lépéseknél 3.1 egyenletrendszert oldják meg direkt módszerekkel, azonban ennek költsége arányos $\mathbf{M}^{-1}$ kiszámításával, ezért mi a továbbiakban csak a 3.2 egyenletrendszert vizsgáljuk.)
Minél közelebb van $\mathbf{A}$-hoz az $\mathbf{M}$ mátrix, a 3.2 iteráció annál gyorsabban konvergál $\mathbf{x}$-hez, ugyanakkor annál költségesebb is kiszámolni a vektorsorozat elemeit. Ha például $\mathbf{M} = \mathbf{A}$, akkor csupán egyetlen lépésre van szükség a megoldáshoz, viszont $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$-t kell "kiszámolnunk", miközben pont ennek a nehézsége indolkolja az iterációs módszer alkalmazását.
A cél tehát az, hogy egy adott mátrixnál olyan felbontásokat találjunk, melyekben $\mathbf{M}^{-1}$ lényegesen könnyebben számolható mint $\mathbf{A}^{-1}$, és sok iterációs lépés esetén is kisebb legyen a műveletigény, mint ha az eredeti egyenletrendszert oldanánk meg. Ugyanakkor teljesülnie kell a konvergenciának is, és persze annak gyorsasága sem elhanyagolható.

3.1. Iterációs módszerek konvergenciája

Az iterációs módszerek egy kezdeti vektorból kiindulva lépésről-lépésre közelítik a lineáris algebrai egyenletrendszerek megoldását. A gyakorlatban legtöbbször a $\mathbf{0}$ vektorról indítják az iterációt. A kezdeti vektor ugyan nem befolyásolja egy módszer konvergenciáját, viszont, főleg rosszul kondícionált egyenletrendszereknél, lelassíthatja azt.
Térjünk vissza a 3.2 iterációs módszerhez:

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{T}\mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{g}, \qquad m = 0, 1, 2..., \tag{3.3}$$

ahol $\mathbf{T} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$ az iterációs mátrix és $\mathbf{g} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{k}$. A módszer konvergens, ha

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x} \qquad \forall\, \mathbf{x}^{(0)} \text{ kezdeti vektor esetén,}$$

azaz

$$\lim_{m\to\infty} \|\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}\| = 0,$$

ahol $\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} = \mathbf{x}^{(m)} - \mathbf{x}$ az m. hibavektor.
Az $f(\mathbf{x}) = \mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{g}$ függvény kontrakció (ld. Függelék), ha $\|\mathbf{T}\| < 1$, mivel

$$\|\mathbf{T}\mathbf{x}_1 + \mathbf{g} - \mathbf{T}\mathbf{x}_2 - \mathbf{g}\| = \|\mathbf{T}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\| \leq \|\mathbf{T}\|\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|.$$

A Banach-féle fixponttételből (ld. Függelék) kapjuk, hogy $f(\mathbf{x})$-nek ekkor egyértelműen létezik fixpontja és az iteráció tetszőleges kezdeti vektorból indulva ehhez a fixponthoz tart.
Tehát a $\|\mathbf{T}\| < 1$ feltétel biztosítja a 3.3 módszer konvergenciáját.
Másrészt a 3.3 egyenletből kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} = \mathbf{T}\boldsymbol{\varepsilon}^{(m-1)} = ... = \mathbf{T}^m\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}, \qquad m = 0, 1, 2...,$$

vagyis

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} \to \mathbf{0} \quad \forall\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}\text{-ra} \iff \lim_{m\to\infty} \mathbf{T}^m = \mathbf{0}.$$

Egy mátrix konvergenciájában alapvető szerepe van a spektrálsugárnak, ezért ezt kicsit részletesebben tárgyaljuk.

A spektrálsugár

3.1. Definíció. *Egy* $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ $n \times n$*-es komplex mátrix spektrálsugarának nevezzük a sajátértékei közül abszolút értékben maximálisat:*

$$\rho(\mathbf{A}) \equiv \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i|.$$

3.1. Tétel. *1. Bármely vektornorma által indukált mátrixnormára (ld. Függelék):*
$\rho(\mathbf{A}) \le \|\mathbf{A}\|$.
2. Ha $\mathbf{A}$ *szimmetrikus mátrix, akkor* $\|\mathbf{A}\|_2 = \rho(\mathbf{A})$.
3. Ha $\mathbf{A}$ *diagonizálható mátrix, akkor létezik olyan normája, melyre* $\|\mathbf{A}\| = \rho(\mathbf{A})$.
4. Minden $\mathbf{A}$ *mátrixhoz tetszőleges* $\epsilon > 0$ *esetén létezik olyan norma, melyre*
$\rho(\mathbf{A}) \le \|\mathbf{A}\| \le \rho(\mathbf{A}) + \epsilon$.

3.1. Bizonyítás. *1.Az* $\mathbf{A}$ *mátrix* $|\lambda| = \rho(\mathbf{A})$ *sajátértékéhez tartozó* $\mathbf{v} \ne \mathbf{0}$ *sajátvektorra*

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}, \quad |\lambda| \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{v}\|, \quad \textit{vagyis } \rho(\mathbf{A}) = |\lambda| \le \|\mathbf{A}\|.$$

2. $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T\mathbf{A})} = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^2)} = \rho(\mathbf{A})$.
3. Ha $\mathbf{S}$ *reguláris mátrix és* $\|\cdot\|_0$ *tetszőleges vektornorma, akkor* $\|\mathbf{x}\| := \|\mathbf{S}\mathbf{x}\|_0$ *egy másik vektornorma, és a megfelelő mátrixnormákra teljesül a következő egyenlőség:*
$\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{S}^{-1}\|_0$.
Mivel $\mathbf{A}$ *diagonizálható, létezik* $\mathbf{S}$ *reguláris mátrix, melyre* $\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{S}^{-1}$ *diagonális és főátlójában éppen* $\mathbf{A}$ *sajátértékei vannak. Ha a* ∞*-normát választjuk* $\|\cdot\|_0$*-nak, akkor az előző egyenlőségből kapjuk, hogy* $\|\mathbf{A}\| = \rho(\mathbf{A})$.
4. Bizonyítása hasonló 3.-hoz, de itt $\mathbf{J} = \mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{S}^{-1}$ *az* $\mathbf{A}$*-nak az a Jordan-féle kanonikus alakja, melynek főátlójában* $\mathbf{A}$ *sajátértékei állnak, a diagonális fölött pedig* ϵ*-ok (a többi elem 0). Az* $\|\mathbf{x}\|$*-normát továbbra is* $\|\mathbf{x}\| := \|\mathbf{S}\mathbf{x}\|_\infty$*-ként definiálva kapjuk, hogy*
$\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{J}\|_\infty \le \rho(\mathbf{A}) + \epsilon$.

Most visszatérünk arra, hogy mikor konvergens egy mátrix.

3.2. Tétel. *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy* $n \times n$*-es valós mátrix.*

$$\lim_{m \to \infty} \mathbf{A}^m = \mathbf{0} \iff \rho(\mathbf{A}) < 1.$$

3.2. Bizonyítás. $\|\mathbf{A}^m\| \ge \rho(\mathbf{A}^m) = \rho(\mathbf{A})^m$*, ezért ha* $\rho(\mathbf{A}) \ge 1$*, akkor* $\mathbf{A}^m$ *nem konvergál* $\mathbf{0}$*-hoz. Ugyanakkor, ha* $\rho(\mathbf{A}) < 1$*, akkor bármely* $\bar{\rho} \in (\rho(\mathbf{A}), 1)$*-re* $\mathbf{A}$*-nak létezik olyan normája, melyre* $\|\mathbf{A}\| \le \bar{\rho}$*, ezért* $\|\mathbf{A}^m\| \le \|\mathbf{A}\|^m \le \bar{\rho}^m \to 0$.

3.1. Következmény. *A 3.3 iterációs módszer akkor és csak akkor konvergens, ha az iterációs mátrix spektrálsugara,* $\rho(\mathbf{T}) < 1$.

A $\rho(\mathbf{T}) < 1$ feltétel azonban nem biztosítja a numerikus konvergenciát, az iterácó a számítógépen túlcsordulás miatt leállhat, mivel a $\mathbf{T}^m \to \mathbf{0}$ konvergencia általában nem monoton. Ezért numerikus szempontból, a számítógépen a $\|\mathbf{T}\| < 1$ a biztos feltétel.

A továbbiakban a különböző iterációs módszerek konvergenciájának sebességét szeretnénk összehasonlítani.

3.2. Definíció. *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy konvergens* $n \times n$*-es komplex mátrix,* $R_\infty(\mathbf{A}) \equiv -ln\rho(\mathbf{A})$*-t a konvergencia aszimptotikus sebességének nevezzük.*

3.3. Tétel. *(Gelfand-formula)*
Bármely mátrixnormára

$$\rho(\mathbf{A}) = \lim_{m\to\infty} \|\mathbf{A}^m\|^{\frac{1}{m}}.$$

Egy mátrix spektrálsugara a gyakorlatban sokszor nehezen számolható ki, ezért bevezetünk egy könnyebben kezelhető fogalmat is az iterációk összehasonlításához.

3.3. Definíció. *Legyen* $\mathbf{A}$ *és* $\mathbf{B}$ *két* $n \times n$*-es komplex mátrix. Ha van olyan pozitív valós* m*, melyre* $\|\mathbf{A}^m\| < 1$*, akkor*

$$R(\mathbf{A}^m) \equiv -ln[(\|\mathbf{A}^m\|)^{1/m}] = \frac{-ln\|\mathbf{A}^m\|}{m}$$

az $\mathbf{A}$ *mátrix konvergenciájának átlagos sebessége* m *iteráció esetén. Ha* $R(\mathbf{A}^m) < R(\mathbf{B}^m)$*, akkor azt mondjuk, hogy* $\mathbf{B}$ *gyorsabban iterál* m *lépés esetén mint* $\mathbf{A}$.

$R(\mathbf{A}^m)$ jelentése a következő:
Iterációnként a kezdeti hiba átlagos csökkenése (normában):

$$\sigma \equiv \left(\frac{\|\varepsilon^{(m)}\|}{\|\varepsilon^{(0)}\|}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Ha $\|\mathbf{A}^m\| < 1$, akkor

$$\sigma \le (\|\mathbf{A}^m\|)^{\frac{1}{m}} = e^{-R(\mathbf{A}^m)},$$

azaz

$$\sigma^{(R(\mathbf{A}^m))^{-1}} \le \frac{1}{e},$$

tehát $N_m \equiv (R(\mathbf{A}^m))^{-1}$ megadja, hogy hány iterációs lépés kell ahhoz, hogy a hiba a kezdeti hiba e-adnyi részére csökkenjen.
Előfordulhat azonban, hogy egy $\boldsymbol{\varepsilon}$ vektorra $\|\mathbf{B}^m\boldsymbol{\varepsilon}\| < \|\mathbf{A}^m\boldsymbol{\varepsilon}\|$, noha $\|\mathbf{A}^m\| < \|\mathbf{B}^m\|$.
Példa:
Legyenek $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\boldsymbol{\varepsilon}$ a következők:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{100} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ekkor $\boldsymbol{\varepsilon}$ kezdeti hiba esetén

$$\mathbf{A}^m\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ (\frac{1}{2})^m \end{bmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{B}^m\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ (\frac{1}{100})^m \end{bmatrix},$$

vagyis a $\mathbf{B}$ mátrixú iterációnál $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ kisebb lesz, noha definíció szerint $\mathbf{A}$ gyorsabb m lépésben.

Továbbá az is előfordulhat, hogy m_1 iteráció esetén az $\mathbf{A}$ mátrix gyorsabb a $\mathbf{B}$ mátrixnál, de m_2 iterációnál már $\mathbf{B}$ a gyorsabb.
Példa:
Legyenek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok a következők:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 4 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ekkor $m_1 = 6$ iteráció esetén $0.023 = \|\mathbf{A}^6\| > \|\mathbf{B}^6\| = 0.015$, azonban $m_2 = 7$ iterációnál $6.8 \cdot 10^{-3} = \|\mathbf{A}^7\| < \|\mathbf{B}^7\| = 7.8 \cdot 10^{-3}$.

3.1. Megjegyzés. *Van azonban olyan mátrixosztály, melyre teljesül $\|\mathbf{A}^m\|$ monotonitása. Ha $\mathbf{A}_1$ és $\mathbf{A}_2$ hermitikus (vagy normális) mátrixok (ld. Függelék), akkor*

$$\|\mathbf{A}_i^m\| = (\rho(\mathbf{A}_i))^m,$$

ezért, ha $\rho(\mathbf{A}_1) < \rho(\mathbf{A}_2) < 1$, akkor

$$\|\mathbf{A}_1^m\| < \|\mathbf{A}_2^m\| < 1, \qquad \forall \quad m = 1, 2, \ldots\text{-re.}$$

Az aszimptotikus és az átlagos sebesség kapcsolatát mutatja a következő tétel.

3.4. Tétel. *Legyen $\mathbf{A}$ egy konvergens $n \times n$-es komplex mátrix. Ekkor*

$$\lim_{m\to\infty} R(\mathbf{A}^m) = R_\infty(\mathbf{A}).$$

3.3. Bizonyítás. *$R(\mathbf{A}^m)$ és $R_\infty(\mathbf{A})$ definíciójából, valamint a Gelfand-formulából adódik.*

3.2. Következmény. *Mivel $\|\mathbf{A}^m\| \geq (\rho(\mathbf{A}))^m$, ha $\mathbf{A}$ egy konvergens mátrix, akkor*

$$R_\infty(\mathbf{A}) \geq R(\mathbf{A}^m),$$

minden olyan pozitív egész m-re, melyre $\|\mathbf{A}^m\| < 1$.

Előfordulhat, hogy $R(\mathbf{A}^m)$ nagyon lassan konvergál $R_\infty(\mathbf{A})$-hoz, és ilyenkor az aszimptotikus sebesség félrevezető információt adhat nekünk.
Tekintsük a következő példát:
Legyen $\mathbf{A}$ mátrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.99 & 4 \\ 0 & 0.99 \end{bmatrix} \quad \text{alakú.}$$

Ekkor $R_\infty(\mathbf{A}) = 0.01005$ és $N_\infty = 99.5$, ami azt sugallja nekünk, hogy 100 iterációs lépés már elég ahhoz, hogy a kezdeti hibát e-adnyi részére csökkentsük. Azonban $\|\mathbf{A}^m\|$ kezdetben növekszik, és $m < 805$ esetén $\|\mathbf{A}^m\| \geq 1$. Ahhoz, hogy $\|\mathbf{A}^m\| \leq \frac{1}{e}$ legyen, legalább 918 iterációra van szükség.

3.2. A Richardson-, a Jacobi-, a Gauss-Seidel és a SOR-módszer

A Richardson-iteráció

Az egyik legkorábbi és legkisebb műveletigényű módszer a Richardson-iteráció, hiszen itt még inverzet sem kell számolnunk.
Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{k}$ egyenlet mindkét oldalához hozzáadva $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}$-et, a kapott módszer a következő:

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{k}, \qquad m = 0, 1, 2...$$

(Valójában tekinthető úgy, hogy az $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ felbontásban $\mathbf{M} = \mathbf{I}$ és $\mathbf{N} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$.)
Az iteráció konvergens, ha $\rho(\mathbf{I} - \mathbf{A}) < 1$.
A módszert javíthatjuk, ha bevezetünk egy paramétert:

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = (\mathbf{I} - p\mathbf{A})\mathbf{x}^{(m)} + p\mathbf{k}, \qquad m = 0, 1, 2...,$$

és ekkor p megfelelő megválasztásával biztosíthatjuk, sőt gyorsíthatjuk is a konvergenciát.

3.1. Állítás. *A Richardson-iteráció szimmetrikus, pozitív definit mátrixokra konvergens, ha* $p < \frac{2}{\lambda_{max}}$*, ahol* λ_{max} *az* $\mathbf{A}$ *mátrix maximális sajátértéke.*

Tekintsük az $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ mátrix néhány olyan klasszikus, egyszerű felbontását, amikor $\mathbf{M}^{-1}$ kiszámítása (speciális alakjának köszönhetően) könnyű.
A továbbiakban mindig feltesszük, hogy $\mathbf{A}$ reguláris mátrix, sőt, $\mathbf{A}$ minden diagonális eleme nemnulla.

A Jacobi-módszer

Vegyük $\mathbf{A}$ mátrixnak azt a felbontását, amikor $\mathbf{M} = \mathbf{D} = \mathrm{diag}(a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n})$ és $\mathbf{N} = \mathbf{E} + \mathbf{F}$, ahol $\mathbf{E}$ és $\mathbf{F}$ szigorú alsó ill. felső háromszögmátrixok, melyek elemei $\mathbf{A}$ megfelelő elemeinek ellentettjei:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{E} - \mathbf{F}.$$

Behelyettesítve ezt az $\mathbf{Ax} = \mathbf{k}$ egyenletbe kapjuk, hogy

$$\mathbf{Dx} = (\mathbf{E} + \mathbf{F})\mathbf{x} + \mathbf{k},$$

vagyis

$$a_{i,i}x_i^{(m+1)} = -\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} a_{i,j}x_j^{(m)} + k_i, \quad i = 1, ..., n, \quad m = 0, 1, 2...,$$

ahol $x_i^{(m)}$-mel jelöljük az m-edik iterációs vektor i. komponensét. Mivel feltettük, hogy **A** mátrix diagonális elemei nemnullák, ezért

$$x_i^{(m+1)} = -\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \left(\frac{a_{i,j}}{a_{i,i}}\right)x_j^{(m)} + \frac{k_i}{a_{i,i}}, \quad i = 1, ..., n, \quad m = 0, 1, 2... .$$

Mátrixos alakban pedig az előzőekkel ekvivalens egyenletek

$$\mathbf{D}\mathbf{x}^{(m+1)} = (\mathbf{E} + \mathbf{F})\mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{k}, \quad m = 0, 1, 2...,$$

illetve

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{E} + \mathbf{F})\mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{k}, \quad m = 0, 1, 2..., \tag{3.4}$$

ahol $\mathbf{B} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{E} + \mathbf{F})$-et Jacobi-mátrixnak nevezzük.
Mivel **M** itt diagonális mátrix, inverze könnyen kiszámolható, így $\mathbf{x}^{(m+1)}$ gyorsan előállítható $\mathbf{x}^{(m)}$-ből.

A Gauss-Seidel módszer

A Gauss-Seidel módszer egyik előnye a Jacobival szemben, hogy $\mathbf{x}^{(m+1)}$ kiszámításához nem kell eltárolni $\mathbf{x}^{(m)}$ összes elemét, minden komponensnek csak egy iterációját tároljuk egyszerre.

$$a_{i,i}x_i^{(m+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j^{(m)} + k_i, \quad i = 1, ..., n, \quad m = 0, 1, 2...$$

Tehát az $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{E} - \mathbf{F}$ felbontásnál most $\mathbf{M} = \mathbf{D} - \mathbf{E}$ és $\mathbf{N} = \mathbf{F}$, azaz az iteráció:

$$(\mathbf{D} - \mathbf{E})\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{F}\mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{k}, \quad m = 0, 1, 2... .$$

Mivel a $\mathbf{D} - \mathbf{E}$ mátrix reguláris,

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = (\mathbf{D} - \mathbf{E})^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}^{(m)} + (\mathbf{D} - \mathbf{E})^{-1}\mathbf{k}, \quad m = 0, 1, 2..., \tag{3.5}$$

ahol $(\mathbf{D} - \mathbf{E})^{-1}\mathbf{F}$ a Gauss-Seidel mátrix.

Ennél a módszernél $\mathbf{M}^{-1} = (\mathbf{D} - \mathbf{E})^{-1}$ kiszámolása már kicsit nehezebb, mint a Jacobinál, hiszen itt egy alsó háromszögmátrixról van szó, azonban, mint később látni fogjuk, a vektorsorozat gyorsabban konvergál $\mathbf{x}$-hez.

A SOR-módszer

A SOR-módszer definiálásához először bevezetünk egy segédvektort:

$$a_{i,i}\tilde{x}_i^{(m+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j^{(m)} + k_i, \quad i = 1, ..., n, \quad m = 0, 1, 2... \,. \tag{3.6}$$

Az $(m+1)$. iteráció i. komponensét egy súlyozott átlagként kapjuk meg:

$$x_i^{(m+1)} = (1-\omega)x_i^{(m)} + \omega\tilde{x}_i^{(m+1)}, \tag{3.7}$$

ahol $\omega \geq 0$ az iterációs paraméter (súly). Az 3.6 és 3.7 egyenletekből

$$a_{i,i}x_i^{(m+1)} = a_{i,i}x_i^{(m)} + \omega\Big\{ -\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j^{(m)} + k_i - a_{i,i}x_i^{(m)}\Big\},$$

illetve

$$(\mathbf{D} - \omega\mathbf{E})\mathbf{x}^{(m+1)} = \{(1-\omega)\mathbf{D} + \omega\mathbf{F}\}\mathbf{x}^{(m)} + \omega\mathbf{k}, \quad m = 0, 1, 2...,$$

továbbá, mivel $(\mathbf{D} - \omega\mathbf{E})$ reguláris mátrix,

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = (\mathbf{I} - \omega\mathbf{L})^{-1}\{(1-\omega)\mathbf{I} + \omega\mathbf{U}\}\mathbf{x}^{(m)} + \omega(\mathbf{I} - \omega\mathbf{L})^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{k},$$

ahol $\mathbf{L} \equiv \mathbf{D}^{-1}\mathbf{E}$, $\mathbf{U} \equiv \mathbf{D}^{-1}\mathbf{F}$, $(\mathbf{I} - \omega\mathbf{L})^{-1}\{(1-\omega)\mathbf{I} + \omega\mathbf{U}\}$ pedig a SOR-módszer mátrixa. A Gauss-Seidel az $\omega = 1$ speciális esete a SOR-módszernek. Azonban az ω paramétert jól megválasztva gyorsabb konvergenciát is elérhetünk a Gauss-Seidelnél.

A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy a fent definiált iterációs módszerek milyen mátrixokra lesznek konvergensek, és összehasonlítjuk a konvergenciájuk gyorsaságát.

3.5. Tétel. ***(A Stein-Rosenberg tétel)***

Legyen a Jacobi-mátrix $\mathbf{B} \equiv \mathbf{L} + \mathbf{U}$ *alakú nemnegatív,* $n \times n$*-es mátrix* 0 *diagonális elemekkel,* $\mathbf{G} = (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}$ *pedig a Gauss-Seidel mátrix. Ekkor a következő állítások közül mindig pontosan egy teljesül:*

1. $\rho(\mathbf{B}) = \rho(\mathbf{G}) = 0.$

2. $0 < \rho(\mathbf{G}) < \rho(\mathbf{B}) < 1.$

3. $1 = \rho(\mathbf{B}) = \rho(\mathbf{G}).$

4. $1 < \rho(\mathbf{B}) < \rho(\mathbf{G}).$

Tehát a Jacobi- és a Gauss-Seidel mátrixok mindegyike egyszerre konvergens vagy divergens adott $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$ *mátrix esetén.*

3.3. Következmény. *Ha egy nemnegatív Jacobi-mátrix spektrálsugarára* $0 < \rho(\mathbf{B}) < 1$*, akkor*

$$R_\infty(\mathbf{G}) > R_\infty(\mathbf{B}).$$

3.6. Tétel. *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy szigorúan vagy irreducibilisen diagonálisan domináns (ld. Függelék)* $n \times n$*-es mátrix. Ekkor a megfelelő Jacobi- és Gauss-Seidel mátrix is konvergens, tehát a 3.4 és 3.5 iterációs módszerek az* $\mathbf{Ax} = \mathbf{k}$ *egyenletrendszerre konvergensek lesznek bármely* $\mathbf{x}^{(0)}$ *kezdeti vektor esetén.*

3.4. Bizonyítás. *A* 6.6. *definícióból és* 6.2. *tételből tudjuk, hogy* $\mathbf{A}$ *reguláris és diagonális elemei nemnullák.*

A Jacobi-mátrix $b_{i,j}$ *elemei a következőképpen írhatók fel* $\mathbf{A}$ *komponenseinek segítségével:*

$$b_{i,j} = \left\{ \begin{array}{cc} 0, & i = j \\ -\frac{a_{i,j}}{a_{i,i}}, & i \neq j \end{array} \right\}.$$

A 6.6. *definícióból következik, hogy szigorúan diagonálisan domináns* $\mathbf{A}$ *esetén*

$$\sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}| < 1 \qquad i = 1, ..., n\text{-re},$$

irreducibilisen diagonálisan domináns $\mathbf{A}$ *mátrix esetén pedig*

$$\sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}| \leq 1 \qquad i = 1, ..., n\text{-re},$$

és legalább egy i*-re szigorú egyenlőtlenség van.*

Ekkor $|\mathbf{B}| = (|b_{i,j}|)$ *mátrixra teljesül, hogy* $\rho(|\mathbf{B}|) < 1$*. A* 6.5. *tételt alkalmazva kapjuk, hogy* $\rho(\mathbf{B}) \leq \rho(|\mathbf{B}|) < 1$*, vagyis a Jacobi-módszer konvergens, és a Stein-Rosenberg tételből következik, hogy ekkor a Gauss-Seidel módszer is konvergens.*

Szükséges és elégséges feltételek a SOR-módszer (és Gauss-Seidel módszer) konvergenciájához

3.7. Tétel. ***(Kahan tétele)*** *Legyen* $\mathbf{B} \equiv \mathbf{L}+\mathbf{U}$ *egy* $n \times n$*-es komplex mátrix* 0 *diagonális elemekkel, ahol* $\mathbf{L}$ *és* $\mathbf{U}$ *szigorú alsó és felső háromszögmátrixok. Ha*

$$\mathbf{L}_\omega \equiv (\mathbf{I} - \omega\mathbf{L})^{-1}\{\omega\mathbf{U} + (1-\omega)\mathbf{I}\},$$

akkor minden valós ω *-ra*

$$\rho(\mathbf{L}_\omega) \geq |\omega - 1|,$$

ahol egyenlőség csak akkor teljesül, ha $\mathbf{L}_\omega$ *minden valós sajátértéke* $|\omega - 1|$.

Kahan tételéből következik, hogy a SOR-módszer csak $0 < \omega < 2$ esetén lehet konvergens. Nézzük azt az esetet, amikor az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{k}$ egyenletrendszerben $\mathbf{A}$ egy $n \times n$-es hermitikus mátrix és a következő alakban írható fel

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{E} - \mathbf{E}^*,$$

ahol $\mathbf{D}$ és $\mathbf{E}$ $n \times n$-es mátrixok és $\mathbf{D}$ pozitív definit hermitikus mátrix. Továbbá feltesszük, hogy $\mathbf{D} - \omega\mathbf{E}$ reguláris minden $0 \leq \omega \leq 2$ esetén. Ekkor az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{k}$ egyenletrendszert átírva kapjuk a következő iterációs módszert:

$$(\mathbf{D} - \omega\mathbf{E})\mathbf{x}^{(m+1)} = \{\omega\mathbf{E}^* + (1-\omega)\mathbf{D}\}\mathbf{x}^{(m)} + \omega\mathbf{k}, \quad m = 0, 1, 2....$$

Bevezetve az $\mathbf{L} \equiv \mathbf{D}^{-1}\mathbf{E}$ és $\mathbf{U} \equiv \mathbf{D}^{-1}\mathbf{E}^*$ jelöléseket kapjuk, hogy

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{L}_\omega\mathbf{x}^{(m)} + \omega(\mathbf{D} - \omega\mathbf{E})^{-1}\mathbf{k}, \quad m = 0, 1, 2...,$$

ahol $\mathbf{L}_\omega = (\mathbf{I} - \omega\mathbf{L})^{-1}\{\omega\mathbf{U} + (1-\omega)\mathbf{I}\}$, hasonlóan a SOR-módszerhez, azonban itt $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ nem szigorú alsó és felső háromszögmátrixok.
Erre az iterációs módszerre vonatkozik a következő tétel:

3.8. Tétel. ***(Ostrowski tétele)*** *Legyen* $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{E} - \mathbf{E}^*$ *egy* $n \times n$*-es hermitikus mátrix, ahol* $\mathbf{D}$ *pozitív definit hermitikus mátrix és* $\mathbf{D} - \omega\mathbf{E}$ *reguláris minden* $0 \leq \omega \leq 2$ *esetén. Ekkor* $\rho(\mathbf{L}_\omega) < 1$ *akkor és csak akkor, ha* $\mathbf{A}$ *pozitív definit és* $0 < \omega < 2$.

3.4. Következmény. *Legyen* $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{E} - \mathbf{E}^*$ *egy* $n \times n$*-es hermitikus mátrix, ahol* $\mathbf{D}$ *pozitív definit hermitikus mátrix és* $\mathbf{D} - \mathbf{E}$ *reguláris. Ekkor a Gauss-Seidel módszer konvergens akkor és csak akkor, ha* $\mathbf{A}$ *pozitív definit.*

Az ebben a fejezetben leírtak, az itt nem szereplő bizonyításokkal együtt, bővebben megtalálhatóak Richard S. Varga: Matrix Iterative Analysis [2] című könyvének 3. fejezetében.

4. fejezet

Nemnegatív mátrix szeletelés

A nemnegatív mátrix szeletelés elmélete a Perron-Frobenius tételeken alapul, és a Richard S. Vargától származó reguláris felbontásnak egy általánosítása, melyet később tovább fejlesztettek a prefaktorizációs módszerek (AGA, EWA) kialakításánál. Az előző fejezetben tárgyalt módszerektől eltérően, most az egyenletrendszer együtthatómátrixának felbontását nem határozzuk meg egyértelműen, azonban néhány, nemnegativitásra vonatkozó kikötést teszünk $\mathbf{A}$, $\mathbf{M}$ és $\mathbf{N}$ mátrixokra, melyekkel biztosítjuk az iteráció konvergenciáját.

4.1. Mátrix szeletelés

A továbbiakban $\mathbf{A} = (a_{i,j}) \geq \mathbf{0}$ mindig nemnegativitást fog jelenteni, vagyis minden $a_{i,j} \geq 0$ és legalább egy $a_{i,j} > 0$. $\mathbf{A} = (a_{i,j}) > \mathbf{0}$ pozitív mátrix, ha minden $a_{i,j} > 0$.

A Perron-Frobenius elmélet sok összehasonlító tételt ad a nemnegatív mátrixok sajátértékeire és sajátvektoraira vonatkozóan, ezek közül a legfontosabbak:

4.1. Tétel. *(I.) Ha* $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ *mátrix, akkor*

1. $\mathbf{A}$*-nak van a spektrálsugarával egyenlő, nemnegatív valós sajátértéke.*

2. $\rho(\mathbf{A}) > 0$*-hoz tartozik egy* $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ *sajátvektor.*

3. ha az $\mathbf{A}$ *mátrix bármelyik elemét növeljük,* $\rho(\mathbf{A})$ *nem csökken.*

4.2. Tétel. *(II.) Ha* $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ *irreducibilis mátrix, akkor*

1. $\mathbf{A}$*-nak van a spektrálsugarával egyenlő, pozitív valós sajátértéke.*

2. $\rho(\mathbf{A}) > 0$*-hoz tartozik egy* $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ *sajátvektor.*

3. ha az $\mathbf{A}$ mátrix bármelyik elemét növeljük, $\rho(\mathbf{A})$ is nő.

4. $\rho(\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ mátrixnak egyszeres sajátértéke.

4.1. Definíció. *Az $\mathbf{A}$ mátrixnak $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ konvergens felbontása, ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{M}$ reguláris mátrixok és $\rho(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}) < 1$.*

4.3. Tétel. *Legyen $\mathbf{A}$-nak $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ egy felbontása. Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{M}$ reguláris mátrixok, akkor*

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{M}^{-1}, \tag{4.1}$$

továbbá $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$ és $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N}$, illetve $\mathbf{N}\mathbf{A}^{-1}$ és $\mathbf{N}\mathbf{M}^{-1}$ kommutáló mátrixok.

4.1. Bizonyítás. $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$*-ből kapjuk, hogy*

$$\mathbf{M}^{-1} = (\mathbf{A} + \mathbf{N})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{N}\mathbf{A}^{-1})^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{N})^{-1}\mathbf{A}^{-1},$$

tehát

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{M}^{-1} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{M}^{-1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{M}^{-1},$$

amiből következik a tétel. A 4.1 egyenletet balról és jobbról megszorozva $\mathbf{N}$-nel kapjuk, hogy az $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$ és $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N}$, illetve $\mathbf{N}\mathbf{A}^{-1}$ és $\mathbf{N}\mathbf{M}^{-1}$ mátrixok kommutálnak.

4.2. Definíció. *Egy $\mathbf{A}$ mátrix monoton, ha reguláris és $\mathbf{A}^{-1} \geq \mathbf{0}$.*

Definiáljuk egy monoton $\mathbf{A}$ mátrixnak néhány felbontását:

4.3. Definíció. *Az $\mathbf{A}$ mátrixnak az $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ reguláris felbontása, ha $\mathbf{M}$ reguláris, $\mathbf{M}^{-1} \geq \mathbf{0}$ és $\mathbf{N} \geq \mathbf{0}$.*

4.4. Definíció. *Az $\mathbf{A}$ mátrixnak az $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ nemnegatív felbontása, ha $\mathbf{M}$ reguláris, $\mathbf{M}^{-1} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} \geq \mathbf{0}$ és $\mathbf{N}\mathbf{M}^{-1} \geq \mathbf{0}$.*

4.5. Definíció. *Az $\mathbf{A}$ mátrixnak az $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ gyengén nemnegatív felbontása, ha $\mathbf{M}$ reguláris, $\mathbf{M}^{-1} \geq \mathbf{0}$ és $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} \geq \mathbf{0}$ vagy $\mathbf{N}\mathbf{M}^{-1} \geq \mathbf{0}$.*

A reguláris felbontás definícióját Varga vezette be. A 4.4. definíció ekvivalens a más szerzők által gyakran használt gyengén reguláris felbontással. Ez utóbbit úgy is definiálják, hogy $\mathbf{M}^{-1} \geq \mathbf{0}$ és $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} \geq \mathbf{0}$ (az $\mathbf{N}\mathbf{M}^{-1} \geq \mathbf{0}$ feltétel nélkül), azonban ebben az esetben további feltevések szükségesek az összehasonlító tételekben.

Triviálisan adódik az előbbi definíciókból az alábbi következmény.

4.1. Következmény. *Egy* $\mathbf{A}$ *mátrix minden reguláris felbontása egyben nemnegatív felbontása is* $\mathbf{A}$*-nak és minden nemnegatív felbontása egyben gyengén nemnegatív felbontása is.*

Vagyis az alábbi, gyengén nemnegatív felbontásokra kimondott tételek mindegyike érvényes a reguláris felbontásokra is.

4.4. Tétel. *Legyen az* $\mathbf{A}$ *mátrixnak* $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ *egy gyengén nemnegatív felbontása. Ha* $\mathbf{A}^{-1} \geq \mathbf{0}$*, akkor*
1. $\mathbf{A}^{-1} \geq \mathbf{M}^{-1}$,
2. $\rho(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}) = \rho(\mathbf{N}\mathbf{M}^{-1}) < 1$,
3. ha $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} \geq \mathbf{0}$*, akkor* $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} \geq \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$*, illetve ha* $\mathbf{N}\mathbf{M}^{-1} \geq \mathbf{0}$*, akkor* $\mathbf{N}\mathbf{A}^{-1} \geq \mathbf{N}\mathbf{M}^{-1}$,
4.
$$\rho(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}) = \frac{\rho(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N})}{1 + \rho(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N})}. \tag{4.2}$$
5. Fordítva is igaz, ha $\rho(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}) < 1$*, akkor* $\mathbf{A}^{-1} \geq \mathbf{0}$.

4.2. Bizonyítás. *(1) A 4.3. tételből kapjuk, hogy*

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{M}^{-1} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{M}^{-1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{M}^{-1},$$

és mivel feltettük, hogy $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} \geq \mathbf{0}$ *vagy* $\mathbf{N}\mathbf{M}^{-1} \geq \mathbf{0}$*, ezért*

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{M}^{-1} \geq \mathbf{0},$$

vagyis $\mathbf{A}^{-1} \geq \mathbf{M}^{-1}$.
(2) Tegyük fel, hogy $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} \geq \mathbf{0}$*, ekkor*

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{M}^{-1} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{M}^{-1} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}(\mathbf{M}^{-1} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{A}^{-1}) =$$

$$= [\mathbf{I} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}]\mathbf{M}^{-1} + (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})^2\mathbf{A}^{-1} = [\mathbf{I} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} + (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})^2]\mathbf{M}^{-1} + (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})^3\mathbf{A}^{-1} =$$
$$= [\mathbf{I} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} + (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})^2 + ... + (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})^{k-1}]\mathbf{M}^{-1} + (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})^k\mathbf{A}^{-1}. \tag{4.3}$$

Mivel $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{M}^{-1}$ *és* $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$ *nemnegatív mátrixok, az*

$$\mathbf{I} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} + (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})^2 + ...$$

sorozat konvergens, és a 6.6 *tételből* $\rho(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}) < 1$. *Hasonlóan kapjuk az* $\mathbf{N}\mathbf{M}^{-1} \geq \mathbf{0}$ *esetre, hogy*

$$\mathbf{I} + \mathbf{N}\mathbf{M}^{-1} + (\mathbf{N}\mathbf{M}^{-1})^2 + ...$$

konvergens. Felhasználva a 6.4. tételt, $\rho(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}) = \rho(\mathbf{N}\mathbf{M}^{-1}) < 1$.
(3) A 4.3 egyenletben $k \to \infty$ *esetén* $(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})^k \to \mathbf{0}$, *és a 6.6. tételből*

$$\mathbf{I} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} + (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})^2 + ... = (\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})^{-1} \geq \mathbf{I} \geq \mathbf{0}.$$

Továbbá, mivel

$$\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})^{-1}\mathbf{M}^{-1}, \tag{4.4}$$

rögtön adódik, hogy

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} \geq \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}. \tag{4.5}$$

A másik eset ($\mathbf{N}\mathbf{M}^{-1} \geq \mathbf{0}$) *hasonlóan levezethető.*
(4) Mivel $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$ *és* $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N}$ *kommutáló mátrixok, azonosak a sajátvektoraik, vagyis*

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i,$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{v}_i = \tau_i\mathbf{v}_i$$

minden $\mathbf{v}_i$ *sajátvektorra. A 4.5 egyenletből*

$$(\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{v}_i = \tau\mathbf{v}_i,$$

azaz

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{v}_i = \frac{\tau_i}{1+\tau_i}\mathbf{v}_i.$$

Ebből a következő összefüggést kapjuk a sajátértékekre:

$$\lambda_i = \frac{\tau_i}{1+\tau_i}.$$

Az $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} \geq \mathbf{0}$ *és* $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} \geq \mathbf{0}$ *feltevésekből, valamint az I. Perron-Frobenius tételből a megfelelő spektrálsugarak kapcsolata:*

$$\rho(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}) = \frac{\rho(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N})}{1+\rho(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N})}.$$

(5) $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} \geq \mathbf{0}$ *és* $\rho(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}) < 1$ *esetén a 6.6. tételből adódik, hogy* $(\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})^{-1} \geq \mathbf{0}$, *és 4.4 egyenletből közvetlenül kapjuk, hogy ekkor* $\mathbf{A}^{-1} \geq \mathbf{0}$. *(Az* $\mathbf{N}\mathbf{M}^{-1} \geq \mathbf{0}$ *és* $\rho(\mathbf{N}\mathbf{M}^{-1}) < 1$ *esetre ugyanígy belátható.)*

4.2. Következmény. *Egy monoton* $\mathbf{A}$ *mátrix minden gyengén nemnegatív felbontása konvergens felbontás, és fordítva, ha* $\mathbf{A}$*-nak létezik gyengén nemnegatív konvergens felbontása, akkor* $\mathbf{A}^{-1} \geq \mathbf{0}$.

A továbbiakban egy mátrix különböző, gyengén nemnegatív felbontásai által kapott iterációk gyorsaságát hasonlítjuk össze, melyhez bevezetünk egy segédtételt.

4.5. Tétel. *Legyen* $\mathbf{A} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{N}_1 = \mathbf{M}_2 - \mathbf{N}_2$ *az* $\mathbf{A}$ *mátrix két gyengén nemnegatív felbontása és* $\mathbf{A}^{-1} \geq \mathbf{0}$. *Ekkor, ha a következő egyenlőtlenségek bármelyike teljesül*

1. $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N}_2 \geq \mathbf{A}^{-1}\mathbf{N}_1 \geq \mathbf{0}$ $\quad$ (*vagy* $\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{N}_2 \geq \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{N}_1 \geq \mathbf{0}$)

2. $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N}_2 \geq \mathbf{N}_1\mathbf{A}^{-1} \geq \mathbf{0}$ $\quad$ (*vagy* $\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{N}_2 \geq \mathbf{N}_1\mathbf{M}_1^{-1} \geq \mathbf{0}$)

3. $\mathbf{N}_2\mathbf{A}^{-1} \geq \mathbf{N}_1\mathbf{A}^{-1} \geq \mathbf{0}$ $\quad$ (*vagy* $\mathbf{N}_2\mathbf{M}_2^{-1} \geq \mathbf{N}_1\mathbf{M}_1^{-1} \geq \mathbf{0}$)

4. $\mathbf{N}_2\mathbf{A}^{-1} \geq \mathbf{A}^{-1}\mathbf{N}_1 \geq \mathbf{0}$ $\quad$ (*vagy* $\mathbf{N}_2\mathbf{M}_2^{-1} \geq \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{N}_1 \geq \mathbf{0}$) , *akkor*

$$\rho(\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{N}_1) \leq \rho(\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{N}_2) < 1. \tag{4.6}$$

4.3. Bizonyítás. *A 6.4. és 6.5. tételből, valamint a 4.4. tétel 4. állításából következik 4.6. A zárójelekben megadott feltételek esetén pedig a 6.4. és a 6.5. tételből rögtön adódik az állítás.*

Először hasonlítsuk össze a felbontásokat az $\mathbf{N}$ mátrix szerint:

4.6. Tétel. *Legyen* $\mathbf{A} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{N}_1 = \mathbf{M}_2 - \mathbf{N}_2$ *az* $\mathbf{A}$ *mátrix két azonos típusú, gyengén nemnegatív felbontása, azaz vagy* $\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{N}_1 \geq \mathbf{0}$ *és* $\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{N}_2 \geq \mathbf{0}$ *vagy* $\mathbf{N}_1\mathbf{M}_1^{-1} \geq \mathbf{0}$ *és* $\mathbf{N}_2\mathbf{M}_2^{-1} \geq \mathbf{0}$, *továbbá legyen* $\mathbf{A}^{-1} \geq \mathbf{0}$. *Ha* $\mathbf{N}_2 \geq \mathbf{N}_1$, *akkor*

$$\rho(\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{N}_1) \leq \rho(\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{N}_2) < 1. \tag{4.7}$$

4.4. Bizonyítás. *Az* $\mathbf{N}_2 \geq \mathbf{N}_1$ *egyenlőtlenségből következik, hogy vagy* $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N}_2 \geq \mathbf{A}^{-1}\mathbf{N}_1 \geq \mathbf{0}$ *vagy* $\mathbf{N}_2\mathbf{A}^{-1} \geq \mathbf{N}_1\mathbf{A}^{-1} \geq \mathbf{0}$, *és a 4.5. tételből adódik 4.7.*

4.1. Megjegyzés. *Evidens, hogy az előbbi két tétel mindegyike érvényes* $\mathbf{A}$ *nemnegatív felbontásaira is.*

Az iterációs módszereknél nem mindig tudjuk az $\mathbf{N}$ mátrixokat összehasonlítani (vagyis sem $\mathbf{N}_1 \geq \mathbf{N}_2$, sem $\mathbf{N}_2 \geq \mathbf{N}_1$ nem teljesül, kivéve pl. a Jacobi- és a Gauss-Seidel módszert), az $\mathbf{M}^{-1}$-eket azonban gyakrabban. Azt várhatjuk, hogy minél közelebb van $\mathbf{M}$ az $\mathbf{A}$-hoz, annál gyorsabb lesz az iteráció. A következőkben megnézzük, hogy $\mathbf{M}^{-1}$ hogyan befolyásolja $\rho(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})$-et.

4.7. Tétel. *Legyen* $\mathbf{A} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{N}_1 = \mathbf{M}_2 - \mathbf{N}_2$ *az* $\mathbf{A}$ *mátrix két nemnegatív felbontása és* $\mathbf{A}^{-1} \geq \mathbf{0}$*. Ha* $\mathbf{M}_1^{-1} \geq \mathbf{M}_2^{-1}$*, akkor*

$$\rho(\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{N}_1) \leq \rho(\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{N}_2) < 1. \tag{4.8}$$

4.5. Bizonyítás. *A Perron-Frobenius, a 4.4. és a 6.4. tételekből* $\lambda_1 = \rho(\mathbf{N}_1\mathbf{M}_1^{-1}) = \rho(\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{N}_1) < 1$ *és* $\lambda_2 = \rho(\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{N}_2) < 1$*, a hozzájuk tartozó sajátvektorok,* $\mathbf{x}_1$ *és* $\mathbf{x}_2$ *pedig nemnegatívak. Ezért*

$$\mathbf{N}_1\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0} \tag{4.9}$$

és

$$\mathbf{x}_2^T\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{N}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2^T \geq \mathbf{0}. \tag{4.10}$$

Szorozzuk meg a 4.9 egyenletet balról, a 4.10 egyenletet pedig jobbról $\mathbf{A}^{-1}$*-zel:*

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N}_1\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_1, \tag{4.11}$$

$$\mathbf{x}_2^T\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{N}_2\mathbf{A}^{-1} = \lambda_2\mathbf{x}_2^T\mathbf{A}^{-1}. \tag{4.12}$$

Tudjuk, hogy

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{M}_2^{-1} + \mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{N}_2\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{M}_1^{-1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{N}_1\mathbf{M}_1^{-1}, \tag{4.13}$$

melyet átírva kapjuk, hogy

$$\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{N}_2\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{N}_1\mathbf{M}_1^{-1} = \mathbf{M}_1^{-1} - \mathbf{M}_2^{-1} \geq \mathbf{0}, \tag{4.14}$$

vagyis

$$\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{N}_2\mathbf{A}^{-1} \geq \mathbf{A}^{-1}\mathbf{N}_1\mathbf{M}_1^{-1} \geq \mathbf{0}, \tag{4.15}$$

és a nemnegativitás definíciójából következik, hogy ekkor

$$\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{N}_2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_1 \geq \mathbf{A}^{-1}\mathbf{N}_1\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_1. \tag{4.16}$$

Szorozzuk meg a 4.16 egyenletet balról $\mathbf{x}_2^T$*-tal, a 4.12 egyenletet pedig jobbról* $\mathbf{x}_1$*-gyel:*

$$\mathbf{x}_2^T\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{N}_2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_1 \geq \lambda_1\mathbf{x}_2^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_1, \tag{4.17}$$

$$\mathbf{x}_2^T\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{N}_2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_1 = \lambda_2\mathbf{x}_2^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_1, \tag{4.18}$$

melyekből adódik, hogy

$$\lambda_1\mathbf{x}_2^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_1 \leq \lambda_2\mathbf{x}_2^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_1. \tag{4.19}$$

Mivel $\mathbf{x}_2^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_1 > \mathbf{0}$*, ebből következik, hogy* $\lambda_1 \leq \lambda_2$*, amivel beláttuk az állítást.*

4.2. Megjegyzés. *Az előbbi tételnél erősebb állítás is igaz: ha* $\mathbf{M}_1^{-1} > \mathbf{M}_2^{-1}$, *akkor 4.8-ban szigorú egyenlőtlenség teljesül. A bizonyítás hasonlóan levezethető.*

4.1. Állítás. *Legyen* $\mathbf{A} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{N}_1 = \mathbf{M}_2 - \mathbf{N}_2$ *az* $\mathbf{A}$ *mátrix két gyengén nemnegatív felbontása. Ha* $\mathbf{N}_2 \geq \mathbf{N}_1$, *akkor* $\mathbf{M}_1^{-1} \geq \mathbf{M}_2^{-1} \geq \mathbf{0}$.

Az állítás megfordítása azonban nem igaz, ezért az $\mathbf{M}_1^{-1} \geq \mathbf{M}_2^{-1}$ feltétel gyengébb megkötés az $\mathbf{N}_2 \geq \mathbf{N}_1$-nél.

Gyengén nemnegatív felbontások esetén $\mathbf{M}^{-1}$-ek összehasonlítására az alábbi tételek vonatkoznak:

4.8. Tétel. *Legyen* $\mathbf{A} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{N}_1 = \mathbf{M}_2 - \mathbf{N}_2$ *az* $\mathbf{A}$ *monoton mátrix két különböző típusú gyengén nemnegatív felbontása, azaz vagy* $\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{N}_1 \geq \mathbf{0}$ *és* $\mathbf{N}_2\mathbf{M}_2^{-1} \geq \mathbf{0}$, *vagy* $\mathbf{N}_1\mathbf{M}_1^{-1} \geq \mathbf{0}$ *és* $\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{N}_2 \geq \mathbf{0}$. *Ha* $\mathbf{M}_1^{-1} \geq \mathbf{M}_2^{-1}$, *akkor*

$$\rho(\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{N}_1) \leq \rho(\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{N}_2) < 1. \tag{4.20}$$

4.6. Bizonyítás. *Tekintsük azt az esetet, amikor* $\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{N}_1 \geq \mathbf{0}$ *és* $\mathbf{N}_2\mathbf{M}_2^{-1} \geq \mathbf{0}$. *Ekkor*

$$\mathbf{y}_1^T\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{N}_1 = \lambda_1\mathbf{y}_1^T \tag{4.21}$$

és

$$\mathbf{N}_2\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{y}_2 = \lambda_2\mathbf{y}_2. \tag{4.22}$$

A Perron-Frobenius, 4.2. és a 6.4. tételből kapjuk, hogy $\lambda_1 = \rho(\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{N}_1) < 1$ *és* $\lambda_2 = \rho(\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{N}_2) = \rho(\mathbf{N}_2\mathbf{M}_2^{-1}) < 1$, *valamint a megfelelő sajátvektorok,* $\mathbf{y}_1$ *ill.* $\mathbf{y}_2$ *nemnegatívak. Megszorozva a 4.21 egyenletet jobbról* $\mathbf{A}^{-1}$*-zel, a 4.22 egyenletet pedig balról* $\mathbf{A}^{-1}$*-zel azt kapjuk, hogy*

$$\mathbf{y}_1^T\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{N}_1\mathbf{A}^{-1} = \lambda_1\mathbf{y}_1^T\mathbf{A}^{-1} \tag{4.23}$$

és

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N}_2\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{y}_2 = \lambda_2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}_2. \tag{4.24}$$

A 4.13 és 4.1 egyenletekből, valamint az $\mathbf{M}_1^{-1} \geq \mathbf{M}_2^{-1}$ *feltevésből következik, hogy*

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N}_2\mathbf{M}_2^{-1} \geq \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{N}_1\mathbf{A}^{-1} \geq \mathbf{0} \tag{4.25}$$

és

$$\mathbf{y}_1^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N}_2\mathbf{M}_2^{-1} \geq \mathbf{y}_1^T\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{N}_1\mathbf{A}^{-1} = \lambda_1\mathbf{y}_1^T\mathbf{A}^{-1}. \tag{4.26}$$

Megszorozva 4.26 egyenletet jobbról $\mathbf{y}_2$*-vel, 4.24 egyenletet pedig balról* $\mathbf{y}_1^T$*-tal, azt kapjuk, hogy*

$$\mathbf{y}_1^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{N}_2 \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{y}_2 \geq \lambda_1 \mathbf{y}_1^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}_2 \tag{4.27}$$

és

$$\mathbf{y}_1^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{N}_2 \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{y}_2 = \lambda_2 \mathbf{y}_1^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}_2. \tag{4.28}$$

Mivel $\mathbf{y}_1^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}_2 > \mathbf{0}$, $\lambda_1 \leq \lambda_2$*, amivel beláttuk az állítást. Az* $\mathbf{N}_1 \mathbf{M}_1^{-1} \geq \mathbf{0}$ *és* $\mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{N}_2 \geq \mathbf{0}$ *eset ugyanígy bizonyítható.*

4.3. Megjegyzés. *Az előbbi tételnél erősebb állítás is igaz: ha* $\mathbf{A}^{-1} > \mathbf{0}$ *és* $\mathbf{M}_1^{-1} > \mathbf{M}_2^{-1}$*, akkor* $\rho(\mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{N}_1) < \rho(\mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{N}_2) < 1$*.*

Az előbbi tétel természetesen arra az esetre is igaz, amikor $\mathbf{A}$ egy nemnegatív és egy gyengén nemnegatív felbontását hasonlítjuk össze.

Azonban két azonos típusú gyengén nemnegatív felbontás esetén az $\mathbf{M}^{-1}$-ek összehasonlítása nem ad információt a konvergenciák sebességéről. Ezt szemlélteti a következő példa.

Tekintsük az alábbi monoton $\mathbf{A}$ mátrixot:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{melyre } \mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.29}$$

és annak néhány felbontását:

	$\mathbf{M}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{M}^{-1}$	$\mathbf{NM}^{-1}$	$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$	$\rho(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})$
1	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{12} & \frac{5}{6} & -1 \\ -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}$	0
2	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{3}$
3	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{6}{5} \\ -1 & \frac{2}{5} & \frac{12}{5} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{6}$
4	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\frac{4}{23} & \frac{19}{23} & -\frac{20}{23} \\ -\frac{14}{23} & \frac{9}{23} & \frac{45}{23} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{23} & -\frac{4}{23} & \frac{3}{23} \\ \frac{9}{23} & \frac{9}{23} & -\frac{1}{23} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{9}{5} & \frac{9}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{9}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 1 & \frac{7}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}$	$-\frac{\sqrt{2}}{5}$

	$\mathbf{M}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{M}^{-1}$	$\mathbf{N}\mathbf{M}^{-1}$	$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$	$\rho(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})$
5	$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}$
6	$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\frac{2}{3}$
7	$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$	$\frac{3}{4}$
8	$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\frac{3}{4}$

	$\mathbf{M}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{M}^{-1}$	$\mathbf{N}\mathbf{M}^{-1}$	$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$	$\rho(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})$
9	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}$
10	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}$
11	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
12	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

A táblázatban megfigyelhető, hogy az első négy felbontás azonos típusú ($\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} \geq \mathbf{0}$), míg az ötödik a másik típusú ($\mathbf{N}\mathbf{M}^{-1} \geq \mathbf{0}$) gyengén nemnegatív felbontás, a következő három nemnegatív, az utolsó négy pedig reguláris mátrix szeletelés. Látható, hogy azonos felbontásoknál $\mathbf{M}_1^{-1} \geq \mathbf{M}_3^{-1} > \mathbf{0}$ és $\rho(\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{N}_1) < \rho(\mathbf{M}_3^{-1}\mathbf{N}_3)$, ugyanakkor $\mathbf{M}_2^{-1} \geq \mathbf{M}_3^{-1} > \mathbf{0}$ és $\rho(\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{N}_2) > \rho(\mathbf{M}_3^{-1}\mathbf{N}_3)$.

A korábbi tételekre is példák a fenti szeletelések:
- $\mathbf{M}_{1,2,3,4,5}^{-1} > \mathbf{M}_6^{-1}$ és $\rho(\mathbf{M}_{1,2,3,4,5}^{-1}\mathbf{N}_{1,2,3,4,5}) < \rho(\mathbf{M}_6^{-1}\mathbf{N}_6)$ egy nemnegatív és egy gyengén nemnegatív felbontásra és szigorú egyenlőtlenségre,
-$\mathbf{M}_{1,2,3}^{-1} > \mathbf{M}_5^{-1}$ és $\rho(\mathbf{M}_{1,2,3}^{-1}\mathbf{N}_{1,2,3}) < \rho(\mathbf{M}_5^{-1}\mathbf{N}_5)$ a különböző típusú gyengén nemnegatív felbontásokra és szigorú egyenlőtlenségre,
-$\mathbf{M}_7^{-1} \geq \mathbf{M}_8^{-1}$ és $\rho(\mathbf{M}_7^{-1}\mathbf{N}_7) \leq \rho(\mathbf{M}_8^{-1}\mathbf{N}_8)$ két nemnegatív felbontásra,
-$\mathbf{M}_6^{-1} > \mathbf{M}_{7,8}^{-1}$ és $\rho(\mathbf{M}_6^{-1}\mathbf{N}_6) < \rho(\mathbf{M}_{7,8}^{-1}\mathbf{N}_{7,8})$ két nemnegatív felbontásra és szigorú egyenlőtlenségre.

Azonos típusú gyengén nemnegatív felbontások is összehasonlíthatók $\mathbf{M}^{-1}$ alapján, de csak akkor, ha feltesszük, hogy $\mathbf{A}$ és $\mathbf{M}_1$ vagy $\mathbf{M}_2$ szimmetrikus mátrix.

4.9. Tétel. *Legyen* $\mathbf{A} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{N}_1 = \mathbf{M}_2 - \mathbf{N}_2$ *egy szimmetrikus és monoton* $\mathbf{A}$ *mátrix két gyengén nemnegatív felbontása. Ha* $\mathbf{M}_1^{-1} \geq \mathbf{M}_2^{-1}$*, és* $\mathbf{M}_1$ *vagy* $\mathbf{M}_2$ *szimmetrikus, akkor*

$$\rho(\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{N}_1) \leq \rho(\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{N}_2) < 1.$$

Természetesen még sok összehasonlító tétel létezik gyengén nemnegatív és ezáltal nemnegatív és reguláris felbontásokra is, melyek például felhasználják $\mathbf{A}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ transzponáltjait is, és a különböző mátrixok ill. mátrixszorzatok közötti relációt vizsgálják. (Mindezek, valamint az itt nem szereplő bizonyítások is részletesen megtalálhatók Woznicki: Nonnegative Splitting Theory [1] című jegyzetének 3. fejezetében.)

4.2. Prefaktorizációs iterációs módszerek

A prefaktorizációs iterációs módszerekben a nemnegatív mátrix szeletelés elméletének eredményeit fejlesztették tovább.
Vegyük ismét az $\mathbf{Ax} = \mathbf{k}$ lineáris algebrai egyenletrendszert. Ha $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ az $\mathbf{A}$-nak egy felbontása, akkor az iterációs módszerünk

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{k}, \qquad m = 0, 1, 2, ... \tag{4.30}$$

alakú, és konvergens, ha $\rho(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}) < 1$.
$\mathbf{M}$-et úgy is tekinthetjük, mint $\mathbf{A}$ egy közelítését, melyet általában reguláris mátrixok szorzataként állítanak elő úgy, hogy könnyen kiszámolható és invertálható legyen. $\mathbf{M}$-et $\mathbf{A}$ prefaktorizációjának is nevezik, $\mathbf{N} = \mathbf{M} - \mathbf{A}$-t pedig a különbségmátrixnak (*residual matrix*). Ha $\mathbf{N}$ a nullmátrix, akkor az egyenletrendszer megoldását közvetlenül a Gauss-eliminációs direkt módszerrel kapjuk meg (*strict factorization*). Ha $\mathbf{N}$ nem a nullmátrix, akkor pedig a megoldást iterálva érjük el (*partial factorization*).
Definiáljuk egy reguláris $\mathbf{A}$ mátrix felbontását a következőképpen:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{E} - \mathbf{F}, \tag{4.31}$$

ahol $\mathbf{D}$ egy reguláris és diagonális, $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ pedig szigorú alsó ill. felső háromszögmátrixok. Bevezetünk további szigorú alsó ($\mathbf{H}$) és felső ($\mathbf{Q}$) háromszögmátrixokat, melyek segítségével a faktorizációs módszer $\mathbf{M}$ mátrixa így írható fel:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{I} - (\mathbf{E} + \mathbf{H})\mathbf{K}^{-1}]\mathbf{K}[\mathbf{I} - \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{F} + \mathbf{Q})], \tag{4.32}$$

ahol $\mathbf{K} = \mathbf{D} - \mathrm{diag}\{(\mathbf{E} + \mathbf{H})\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{F} + \mathbf{Q})\}$ egy reguláris, diagonális mátrix, $\mathbf{N}$ pedig

$$\mathbf{N} = \mathrm{offdiag}\{(\mathbf{E} + \mathbf{H})\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{F} + \mathbf{Q})\} - \mathbf{H} - \mathbf{Q}. \tag{4.33}$$

A fenti egyenletekben $\mathrm{diag}\{\mathbf{C}\}$ olyan diagonális mátrixot jelöl, melynek a főátlóbeli elemei megegyeznek $\mathbf{C}$ diagonális elemeivel, a többi eleme pedig 0, és $\mathrm{offdiag}\{\mathbf{C}\} = \mathbf{C}\text{-}\mathrm{diag}\{\mathbf{C}\}$.

Ekkor a 4.30 módszer iterációs mátrixa:

$$\mathbf{F} \equiv \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} = [\mathbf{I} - \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{F} + \mathbf{Q})]^{-1}\mathbf{K}^{-1}[\mathbf{I} - (\mathbf{E} + \mathbf{H})\mathbf{K}^{-1}]^{-1}\mathbf{N}. \tag{4.34}$$

Mivel $\mathbf{I} - (\mathbf{E} + \mathbf{H})\mathbf{K}^{-1}$ és $\mathbf{I} - \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{F} + \mathbf{Q})$ reguláris alsó ill. felső háromszögmátrixok, a módszer könnyen végrehajtható egy ún. *two-sweep*, előre-hátrafelé számoló algoritmussal.

Megszorozva a 4.30 egyenletet balról $\mathbf{I} - \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{F} + \mathbf{Q})$-val, majd ezt átrendezve kapjuk, hogy

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{K}^{-1}\{(\mathbf{F} + \mathbf{Q})\mathbf{x}^{(m+1)} + [\mathbf{I} - (\mathbf{E} + \mathbf{H})\mathbf{K}^{-1}]^{-1}[\mathbf{N}\mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{k}]\}.$$

Bevezetve a következő jelölést

$$\mathbf{c}^{(m+1)} \equiv [\mathbf{I} - (\mathbf{E} + \mathbf{H})\mathbf{K}^{-1}]^{-1}[\mathbf{N}\mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{k}],$$

és megszorozva ezt balról $\mathbf{I} - (\mathbf{E} + \mathbf{H})\mathbf{K}^{-1}$-zel, az eredeti módszerből egy két lépéses iterációt kapunk:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{c}^{(m+1)} &= (\mathbf{E} + \mathbf{H})\mathbf{K}^{-1}\mathbf{c}^{(m+1)} + \mathbf{N}\mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{k}, \\ \mathbf{x}^{(m+1)} &= \mathbf{K}^{-1}[(\mathbf{F} + \mathbf{Q})\mathbf{x}^{(m+1)} + \mathbf{c}^{(m+1)}], \qquad m = 0, 1, 2... \end{aligned}\right\} \tag{4.35}$$

Mivel $(\mathbf{E}+\mathbf{H})\mathbf{K}^{-1}$ és $\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{F}+\mathbf{Q})$ szigorú alsó ill. felső háromszögmátrixok, a $\mathbf{c}^{(m+1)}$ vektor komponenseit index szerinti növekvő sorrendben (*forward elimination sweep*), $\mathbf{x}^{(m+1)}$ elemeit pedig index szerinti csökkenő sorrendben (*backward substitution sweep*) számolja az algoritmus.

A 4.35 egyenletrendszer a prefaktorizációs módszereknek egy általános alakja, melyből $\mathbf{H}$ és $\mathbf{Q}$ mátrixok megválasztásával definiálhatjuk a konkrét iterációkat.

Nézzük, hogy a már korábban megismert speciális módszereket hogyan kapjuk meg a megfelelő mátrixok behelyettesítésével, és hogyan definiáljuk az EWA és AGA iterációkat.

1. A Jacobi-módszer

$\mathbf{H} = -\mathbf{E}, \qquad \mathbf{Q} = -\mathbf{F}, \qquad \mathbf{K}_J = \mathbf{D}$

$\mathbf{M}_J = \mathbf{D}, \qquad \mathbf{N}_J = \mathbf{E} + \mathbf{F}$

$\mathcal{B} = \mathbf{M}_J^{-1}\mathbf{N}_J = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{E} + \mathbf{F}).$

2. A Gauss-Seidel módszer

I. típusú

$\mathbf{H} = -\mathbf{E}, \qquad \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{K}_G = \mathbf{D}$

$\mathbf{M}_G = \mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{F}), \qquad \mathbf{N}_G = \mathbf{E}$

$\mathcal{G} = \mathbf{M}_G^{-1}\mathbf{N}_G = (\mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{E}.$

II. típusú

$\mathbf{H} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{Q} = -\mathbf{F}, \qquad \mathbf{K}_G = \mathbf{D}$

$\widetilde{\mathbf{M}}_G = \mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{E}), \qquad \widetilde{\mathbf{N}}_G = \mathbf{F}$

$\widetilde{\mathcal{G}} = \widetilde{\mathbf{M}}_G^{-1}\widetilde{\mathbf{N}}_G = (\mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{E})^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{F}$.

3. Az EWA-módszer

$\mathbf{H} = \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{K}_E = \mathbf{D} - \mathrm{diag}\{\mathbf{E}\mathbf{K}_E^{-1}\mathbf{F}\}$

$\mathbf{M}_E = (\mathbf{I} - \mathbf{E}\mathbf{K}_E^{-1})\mathbf{K}_E(\mathbf{I} - \mathbf{K}_E^{-1}\mathbf{F}), \qquad \mathbf{N}_E = \mathrm{offdiag}\{\mathbf{E}\mathbf{K}_E^{-1}\mathbf{F}\}$

$\mathcal{E} = \mathbf{M}_E^{-1}\mathbf{N}_E = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_E^{-1}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{K}_E^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{E}\mathbf{K}_E^{-1})\mathbf{N}_E$.

4. Az AGA-módszer

$\mathbf{H} = \mathbf{H}_A, \qquad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_A, \qquad \mathbf{K}_A = \mathbf{D} - \mathrm{diag}\{(\mathbf{E} + \mathbf{H}_A)\mathbf{K}_A^{-1}(\mathbf{F} + \mathbf{Q}_A)\}$

$\mathbf{M}_A = [\mathbf{I} - (\mathbf{E} + \mathbf{H}_A)\mathbf{K}_A^{-1}]\mathbf{K}_A[\mathbf{I} - \mathbf{K}_A^{-1}(\mathbf{F} + \mathbf{Q}_A)]$

$\mathbf{N}_A = \mathrm{offdiag}\{(\mathbf{E} + \mathbf{H}_A)\mathbf{K}_A^{-1}(\mathbf{U} + \mathbf{Q}_A)\} - \mathbf{H}_A - \mathbf{Q}_A$

$\mathcal{A} = \mathbf{M}_A^{-1}\mathbf{N}_A = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_A^{-1}(\mathbf{F} + \mathbf{Q}_A)]^{-1}\mathbf{K}_A^{-1}[\mathbf{I} - \mathbf{K}_A^{-1}(\mathbf{E} + \mathbf{H}_A)]^{-1}\mathbf{N}_A$.

Az AGA módszer az algoritmusok egy széles osztályát reprezentálja. A konkrét iterációt $\mathbf{H}_A$ és $\mathbf{Q}_A$ megválasztása határozza meg, melyekre kikötés, hogy $\mathbf{H}_A + \mathbf{Q}_A \neq \mathbf{0}$ (kivéve a $\mathbf{H}_A = -\mathbf{E}$ és $\mathbf{Q}_A = -\mathbf{F}$ eseteket), és feltétel az is, hogy $\mathbf{N}_A$ nemnulla elemeinek elhelyezkedése nem egyezik meg az $\mathbf{E} + \mathbf{H}_A + \mathbf{F} + \mathbf{Q}_A$ mátrix nemnulla elemeinek elhelyezkedésével.

Mivel $\mathbf{H}_A$ és $\mathbf{Q}_A$ szigorú alsó ill. felső háromszögmátrixok, nemnulla elemeiket közvetlenül ki tudjuk számolni az $(\mathbf{E} + \mathbf{H}_A)\mathbf{K}_A^{-1}(\mathbf{F} + \mathbf{Q}_A)$ implicit alakból. Tehát, ha megadjuk, hogy $\mathbf{H}_A$-nak és $\mathbf{Q}_A$-nak hol helyezkednek el a nemnulla elemei, akkor egy rekurzív, szimultán algoritmussal meg tudjuk határozni $\mathbf{K}_A$, $\mathbf{H}_A$, $\mathbf{Q}_A$, $\mathbf{N}_A$ elemeit úgy, hogy a fenti kikötések teljesüljenek.

4.4. Megjegyzés. *Ha azt kapjuk, hogy $\mathbf{N}_A$ minden eleme 0 lesz, akkor a Gauss-eliminációval megegyező direkt AGA-módszert definiálja a képlet.*

4.10. Tétel. *Legyen a Jacobi-mátrix $\mathcal{B} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{E} + \mathbf{F})$ egy $n \times n$-es nemnegatív mátrix ($n > 2$), melynek diagonális elemei 0-k, és $\rho(\mathcal{B}) < 1$. Továbbá legyenek $\mathcal{G} = \mathbf{M}_G^{-1}\mathbf{N}_G$, $\mathcal{E} = \mathbf{M}_E^{-1}\mathbf{N}_E$, $\mathcal{A} = \mathbf{M}_A^{-1}\mathbf{N}_A$ a korábban definiált Gauss-Seidel, EWA- és AGA-módszerek iterációs mátrixai.*

Ekkor ezen mátrixok mindegyike konvergens és

$$0 \leq \rho(\mathcal{A}) \leq \rho(\mathcal{E}) \leq \rho(\mathcal{G}) \leq \rho(\mathcal{B}) < 1.$$

A korábbi táblázatban az utolsó négy reguláris felbontás közül a 12. a Jacobi-módszert, a 11. az I. típusú, a 10. pedig a II. típusú Gauss-Seidel módszert szemlélteti, és a 9. EWA-típusú mátrix szeletelés. Látható, hogy a spektrálsugarakra valóban teljesül a tétel:

$$\rho(\mathbf{M}_9^{-1}\mathbf{N}_9) = \rho(\mathbf{M}_{10}^{-1}\mathbf{N}_{10}) < \rho(\mathbf{M}_{11}^{-1}\mathbf{N}_{11}) < \rho(\mathbf{M}_{12}^{-1}\mathbf{N}_{12}).$$

Az $\mathbf{A}$ mátrix 4.29-ben definiált felbontására csak egyetlen AGA-módszer létezik, mivel az algoritmussal azt kapjuk, hogy $\mathbf{N}_A$ a nullmátrix, $\mathbf{M}_A$ pedig az $\mathbf{A}$ mátrix lesz.

A prefaktorizációs iterációs módszerekről részletesebb leírás található Woznicki: Nonnegative Splitting Theory [1] című jegyzetének 4. fejezetében.

5. fejezet

Összefoglalás

A mátrix szeletelés elmélet a lineáris algebrai egyenletrendszerek konvergens iterációs megoldási módszereinek összehasonlítását teszi lehetővé.
A második fejezetben az algebrai egyenletrendszerekkel modellezhető számos matematikai probléma közül mutattam be kettőt, és azok numerikus megoldását ábrákkal szemléltettem. A harmadik fejezetben az iterációs módszerek konvergenciájának fogalmával és összehasonlításával foglalkoztam, majd néhány klasszikus iterációs módszert mutattam be. A negyedik fejezetben a nemnegatív mátrix szeletelés elméletének alapjait és annak egy alkalmazását (prefaktorizációs módszerek) ismertettem.

6. fejezet

Függelék

Taylor-sorfejtés:

Tekintsük az $u(x,y)$ kétváltozós függvényt. Ha $u(x,y)$ legalább $(k+1)$-szer folytonosan differenciálható, akkor egy (x_0,y_0) pont körül Taylor-sorba fejthető:

$$u(x,y) = u(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,y_0) +$$

$$+\frac{(y-y_0)^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0,y_0) + \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) + \ldots$$

$$+\sum_{\substack{k_1,k_2\geq 0\\ k_1+k_2=k}} \frac{(x-x_0)^{k_1}(y-y_0)^{k_2}}{k_1!k_2!}\frac{\partial^k u}{\partial^{k_1}x\partial^{k_2}y}(x_0,y_0) + \sum_{\substack{k_1,k_2\geq 0\\ k_1+k_2=k+1}} \frac{(x-x_0)^{k_1}(y-y_0)^{k_2}}{k_1!k_2!}\frac{\partial^{k+1} u}{\partial^{k_1}x\partial^{k_2}y}(\theta),$$

ahol

$$\sum_{\substack{k_1,k_2\geq 0\\ k_1+k_2=k+1}} \frac{(x-x_0)^{k_1}(y-y_0)^{k_2}}{k_1!k_2!}\frac{\partial^{k+1} u}{\partial^{k_1}x\partial^{k_2}y}(\theta)$$

a Lagrange-féle maradéktag.

A Dirichlet-problémában a rácsháló egy belső pontja, (x_0,y_0) körül Taylor-sorba fejtjük a függvényt annak szomszédos pontjaiban:

$$u(x_0\pm h,y_0) = u(x_0,y_0) \pm h\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,y_0) \pm \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_0,y_0) + \frac{h^4}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_1)$$

$$u(x_0,y_0\pm h) = u(x_0,y_0) \pm h\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0,y_0) \pm \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_0,y_0) + \frac{h^4}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(\theta_2)$$

Ezt a 4 egyenletet összeadva a függvényt másodrendben közelítjük (x_0, y_0) pontban:

$$\frac{1}{h^2}[u(x_0+h,y_0)+u(x_0-h,y_0)+u(x_0,y_0+h)+u(x_0,y_0-h)-4u(x_0,y_0)] =$$

$$= \Big[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,y_0)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0,y_0)\Big] + \frac{h^2}{12}\Big[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_1)+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(\theta_2)\Big]$$

A másod- és annál magasabb fokú tagokat elhagyva, továbbá felhasználva, hogy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,y_0)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0,y_0) = -g(x_0,y_0),$$

kapjuk, hogy

$$u(x_0,y_0) \approx \frac{1}{4}[u(x_0+h,y_0)+u(x_0-h,y_0)+u(x_0,y_0+h)+u(x_0,y_0-h)] + \frac{h^2}{4}g(x_0,y_0).$$

6.1. Definíció. *Legyen (X,ρ) egy metrikus tér ρ metrikával. Egy $f{:}X\to X$ függvény kontrakció, ha létezik olyan $q \in [0,1)$, melyre $\rho(f(x_1),f(x_2)) \le q\cdot\rho(x_1,x_2)$ minden $x_1,x_2 \in X$-re.*

6.1. Tétel. *(Banach-féle fixponttétel)*
Ha (X,ρ) egy teljes metrikus tér és $f{:}X\to X$ egy kontrakció, akkor f-nek létezik egyértelmű fixpontja, és az $x^{(m+1)} = f(x^{(m)})$ iteráció (m=0,1,2...) tetszőleges $\mathbf{x}^{(0)}$ esetén ehhez a fixponthoz konvergál.

Mátrixok típusai

6.2. Definíció. *Egy $n\times n$-es komplex elemű $\mathbf{A}$ mátrix adjungáltjának nevezzük azt az $\mathbf{A}^*$ mátrixot, melyre $a^*_{i,j} = \bar{a}_{j,i}$.*

6.3. Definíció. *Egy $n\times n$-es komplex elemű $\mathbf{A}$ mátrixot hermitikus mátrixnak nevezünk, ha $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$, azaz ha $a_{i,j} = \bar{a}_{j,i}$.*

6.4. Definíció. *Egy $n\times n$-es komplex elemű $\mathbf{A}$ mátrixot normálisnak nevezünk, ha kommutál az adjungáltjával, azaz*

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^*.$$

6.1. Következmény. *Minden hermitikus mátrix normális mátrix.*

6.5. Definíció. *Minden $n \geq 2$-re, egy $n \times n$-es komplex $\mathbf{A}$ mátrix reducibilis, ha létezik olyan $n \times n$-es permutáló $\mathbf{P}$ mátrix, hogy*

$$\mathbf{PAP}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{1,2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{2,2} \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{A}_{1,1}$ egy $r \times r$-es, $\mathbf{A}_{2,2}$ pedig egy $(n-r) \times (n-r)$-es részmátrix ($1 \leq r < n$). Ha nem létezik ilyen $\mathbf{P}$ permutáló mátrix, akkor $\mathbf{A}$ irreducibilis.

6.6. Definíció. *Egy $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ $n \times n$-es komplex mátrix diagonálisan domináns, ha*

$$|a_{i,i}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}| \quad \forall \quad 1 \leq i \leq n\text{-re.}$$

Szigorúan diagonálisan domináns $\mathbf{A}$, ha $|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}| \quad \forall \quad 1 \leq i \leq n$-re. Irreducibilisen diagonálisan domináns $\mathbf{A}$, ha irreducibilis és $|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$ legalább egy i-re.

6.2. Tétel. *Legyen $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ egy $n \times n$-es szigorúan vagy irreducibilisen diagonálisan domináns komplex mátrix. Ekkor $\mathbf{A}$ reguláris.*

6.7. Definíció. *Egy $\mathbf{A}$ $n \times n$-es komplex mátrix konvergens ($\mathbf{0}$-hoz tart), ha az $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$... sorozat a $\mathbf{0}$ mátrixhoz tart.*

Vektor- és mátrixnormák

6.8. Definíció. *Legyen $\mathbf{x}$ egy $\mathbf{C}^n$-beli vektor. Ekkor $\|\cdot\| : \mathbf{C}^n \to \mathbf{R}$ norma $\mathbf{C}^n$-en, ha teljesülnek az alábbiak:*
1. $\|x\| \geq 0$, *és* $\|x\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$ *minden* $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$ *és* $\lambda \in \mathbf{C}$ *esetén.*
3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ *minden* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{C}^n$*-re.*

6.9. Definíció. *Legyen $\mathbf{x}$ egy komplex n-elemű oszlopvektor. Ekkor $\mathbf{x}$ Euklideszi-normája:*

$$\|\mathbf{x}\|_2 \equiv (\mathbf{x}^* \mathbf{x})^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{n} |\mathbf{x}_j|^2 \right)^{1/2}.$$

6.10. Definíció. *Legyen* $\mathbf{x}$ *egy komplex* n*-elemű oszlopvektor. Ekkor* $\mathbf{x}$ ∞*-normája:*

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \equiv \max_{1\le i\le n} |x_i|.$$

6.11. Definíció. *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy* $n\times n$*-es komplex mátrix, ekkor* $\mathbf{A}$*-nak az* $\|\mathbf{x}\|$ *vektornorma által indukált mátrixnormája:*

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

6.3. Tétel. *Ha* $\mathbf{A}$ *egy* $n\times n$*-es mátrix,* $\mathbf{x}$ *egy tetszőleges* n*-elemű vektor, akkor a fent definiált normákra teljesül az alábbi egyenlőtlenség:*

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \le \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{x}\|.$$

Spektrálsugárra vonatkozó tételek

6.4. Tétel. *Legyen* $\mathbf{A}$ *és* $\mathbf{B}$ *két* $n\times n$*-es mátrix. Ekkor* $\rho(\mathbf{AB}) = \rho(\mathbf{BA})$.

6.5. Tétel. *Legyen* $\mathbf{A}$ *és* $\mathbf{B}$ *két* $n\times n$*-es mátrix, melyekre* $\mathbf{0}\le|\mathbf{B}|\le\mathbf{A}$*. Ekkor*

$$\rho(\mathbf{B}) \le \rho(\mathbf{A}).$$

6.6. Tétel. *Ha egy* $\mathbf{G}$ *mátrixra* $\rho(\mathbf{G})<1$*, akkor* $\mathbf{I}-\mathbf{G}$ *reguláris és*

$$(\mathbf{I}-\mathbf{G})^{-1} = \mathbf{I}+\mathbf{G}+\mathbf{G}^2+...,$$

ahol az egyenlet jobb oldalán a sorozat konvergens. Fordítva is igaz: ha a jobb oldali sorozat konvergens, akkor $\rho(\mathbf{G})<1$.

7. fejezet

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek, Mincsovics Miklósnak, hogy segített megismerkedeni ezzel a témával, rámutatott az összefüggésekre, valamint a megfelelő szakirodalom ajánlásával, tanácsaival és ötleteivel hozzájárult a dolgozat elkészüléséhez.
Továbbá köszönöm Chmelik Gábornak a Latex használatában nyújtott sok segítséget.

Nyilatkozat

A szakdolgozat szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Irodalomjegyzék

[1] Zbigniew I. Woznicki: Nonnegative Splitting Theory, *Japan J. Indust, Appl.Math.,11, 289-342*, 1994

[2] Richard S. Varga: Matrix Iterative Analysis, *Prentice-Hall*, New Jersey, 1962

[3] Stoyan Gisbert, Takó Galina: Numerikus módszerek I., *Typotex*, Budapest, 2002 (http://www.tankonyvtar.hu/konyvek/numerikus-modszerek-1/numerikus-modszerek-1-081029-9)

[4] Douglas N. Arnold: A Concise Introduction to Numerical Analysis, 2001 (http://www.ima.umn.edu/ arnold/597.00-01/nabook.pdf)

[5] Gilbert Strang: Linear Algebra and its Applications, *Thomson Learning, 3rd edition*, 1988