Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

SOROK KONVERGENCIAKRITÉRIUMAI

Szakdolgozat

Írta: **Koreczki Bence**
Matematika B.Sc., Matematikai elemző szakirány

Témavezető: **Pfeil Tamás**, adjunktus
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2010

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Szakdolgozatom témájául a konvergenciakritériumok bemutatását, összehasonlítását választottam.

Egyetemi tanumányaim során megtanultam a fontosabb kritériumokat, így célom e témakör mélyebb feldolgozása, megismerése. Ezen kritériumok segítenek eldönteni egy sorról, hogy konvergens, vagy divergens. Vannak jobban, ill. kevésbé használhatóak, speciális sorokra vonatkozóak. A kritériumok gyűjtésekor a felhasználhatóságukat vettem figyelembe, azaz azt, hogy a gyakorlatban mennyire alkalmazhatóak. Az egyes kritériumok közti kapcsolatokat, különbségeket feladatokon keresztül mutatom be.

A szakdolgozatban rövid történeti áttekintés után a kritériumok tárgyalásához szükséges tételeket, definíciókat vezetem be. Ezek után következnek a konvergenciakritériumok, melyeket leginkább feltételeik és ismertségük alapján csoportosítottam. Majd a végtelen sorok speciális eseteivel, a hatványsorok konvergenciájának szükséges és elégséges feltételével foglalkozom. A függelékben pedig azon matematikusok életrajza lelhető fel, kikről konvergenciakritériumot neveztek el.

2. Történeti áttekintés

Az egynél kisebb kvóciensű mértani sorozat tagjaiból álló végtelen összegek korán megjelentek a matematikában.

Végtelen sok szám összegével kapcsolatos gondolatok először az ókori görögöknél alakultak ki. Leghíresebb a *Zénon* (i.e. 490-430) nevével fémjelzett paradoxon. Több hasonló paradoxon közül a legismertebb *Akhilleusz* és a teknős futóversenye. *Akhilleusz* és a teknős versenyezni készülnek. A teknős, mivel sokkal lassabb ellenfelénél, kap egy méter előnyt. A verseny kezdetét veszi, *Akhilleusz* pár lépéssel ott terem, ahonnan a teknős indult, de mialatt odaért, a hüllő is haladt egy keveset, így *Akhilleusz*nak azt a távolságot is meg kell tennie. Mire odaér, a teknős ismét haladt valamennyit. Ebből a gondolatmenetből *Zénon* arra következtetett, hogy *Akhilleusz* soha sem éri utol a teknőst. Ma már tudjuk, hogy végtelen sok pozitív szám összege lehet véges érték is. Ha összeadjuk a paradoxonban szereplő időszeleteket, amit az egyes lépések igénybe vesznek, véges időt kapunk. Ez annyi, amennyi ahhoz szükséges, hogy *Akhilleusz* utolérje a teknőst. A paradoxon feloldása a következő. Ha *Akhilleusz* sebessége k szorosa ($k > 1$) a teknősének, 1 méter előny esetén $1, \frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}, \ldots, \frac{1}{k^n}$ távot kell megtennie a futónak, vagyis a verseny $1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \ldots + \frac{1}{k^n}$ ideig tart, ahol időegységnek vettük azt az időt, ami alatt *Akhilleusz* ledolgozza a hátrányát. Először *Arisztotelész* (i.e. 384-322) jött rá, hogy az egynél kisebb kvóciensű mértani sornak lehet véges összege. Később bizonyították, hogy e végtelen sor összege $\frac{k}{k-1}$.

A középkori matematikusoknál egy-egy fizikai probléma megoldása során fellelhetők végtelen összegek, de ezek nem számottevő eredmények. A XV. században a csillagászatban, a kerület- és területszámításnál alkalmazták a végtelen sorokat. A XVI. században *Francois Viete* (1540-1603) adta meg az első képletet a mértani sor összegére vonatkozóan. A $XVII$. században *Gregory De Saint Vincent* (1584-1667) foglalkozott *Zénon* paradoxonaival, és rámutatott, hogy a végtelen mértani sor összege véges, ha a kvóciense kisebb, mint 1.

A $XVII$. század második, ill. a $XVIII$. század első felében két kiváló matematikus, *Isaac Newton* (1642-1727) és *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646-1716) ezirányú munkásságát követhetjük nyomon, akik egymástól függetlenül fedezték fel a differenciál-, és integrálszámítást. Mivel korukban sok esetben csak közelítő számításokat tudtak végezni, megnőtt az igény a függvények ún. „végtelen polinomokkal" való előállítására, mivel ezeket könnyebb integrálni. Az ilyen polinomokat ma hatványsoroknak hívjuk. Alapvető különbség munkásságukban, hogy míg *Newton* a legegyszerűbb függvényeket is felbontotta, addig *Leibniz* a zárt alakot részesítette előnyben. Többek között $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$ felbontását is előállították.

Brook Taylor (1685-1731) hatékony módszert adott a függvények sorbafejtéséhez. A $XVIII$. század második felében élt és alkotott *Leonhard Euler* (1707-1783) és *Pierre Simon Laplace* (1749-1827), kiknek munkássága meghatározó szerepet játszott mind a végtelen sorok, mind a matematika történetében.

Az analízis szabatos, precíz fogalmait (határérték, folytonosság, konvergencia, differenciálás, integrálás) a $XVIII - XIX$. században határozták meg. Számos matematikus segítette elő a tudomány ezirányú fejlődését, köztük volt *Bernard Bolzano* (1781-1848), *Augustin Louis Cauchy* (1789-1857), *Niels Henrik Abel* (1802-1829), *Peter Gustav Lejenue Dirichlet* (1805-1859), *Karl Teodor Wilhelm Weierstrass* (1815-1897). 1810 körül *Carl Fridrich Gauss* (1777-1855) és *Jean Baptiste Joseph Fourier* (1768-1930) már precízen kezdték el kezelni a végtelen sorokat. Legnagyobb szerepe a sorelmélet szabatos megalapozásában mégis *Cauchy*nak volt, aki

1823-ban megjelent munkájában az részletösszeg-sorozat segítségével definiálta egy sor konvergenciáját, összegét és a divergenciát. Meghatározta konvergenciájának pontos feltételét (*Cauchy*-kritérium). Bizonyította a gyök-, hányados-, majoráns-, minoránskritériumokat.

A későbbiekben többek között *Georg Friedrich Bernhard Riemann* (1826-1866), *Simeon Devis Poisson* (1781-1840), *Ulisse Dini* (1845-1918), *Moritz Cantor* (1829-1920), *Henry Louis Lebesgue* (1875-1941), *Fejér Lipót*(1880-1959) foglalkoztak végtelen sorokkal.

A sorelmélet máig szép feladatot ad a matematikai analízis művelőinek.

3. Konvergenciakritériumok sorokra

3.1. Alapvető tételek, definíciók

Ebben a fejezetben a konvergenciakritériumok tárgyalásához szükséges tételeket, definíciókat tekintem át. Ezek hivatkozási alapul szolgálnak majd a későbbiekben.

3.1.1 Definíció. *A $\sum(x_n)$ sor részletösszegein az $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} x_k,\ n \in \mathbb{Z}^+$ számokat értjük. Ha a részletösszegekből képzett (s_n) sorozat konvergens és határértéke A, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum(x_n)$ sor konvergens, és az összege A. Ezt úgy jelöljük, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = A$. Ha a részletösszegekből képzett (s_n) sorozat divergens, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum(x_n)$ sor divergens. Ha $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n) = \infty$, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum(x_n)$ sor összege ∞. Ha $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n) = -\infty$, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum(x_n)$ sor összege $-\infty$.*

3.1.2 Tétel. *Ha a $\sum(x_n)$ sor konvergens, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.*

3.1.3 Definíció. *A $\sum(x_n)$ sort abszolút konvergensnek nevezzük, ha a $\sum|x_n|$ sor konvergens. A sort feltételesen konvergensnek nevezzük, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.*

3.1.4 Tétel. *(i) Minden abszolút konvergens sor konvergens.*

(ii) Egy abszolút konvergens sor bármely átrendezettje is abszolút konvergens, és az összege ugyanaz, mint az eredeti soré.

3.1.5 Definíció (korlátos változású számsorozat). *Az* (x_n) *számsorozatot akkor nevezzük korlátos változásúnak, ha a* $\sum(x_{n+1} - x_n)$ *sor abszolút konvergens.*

3.1.6 Tétel (Riemann átrendezési tétele). *Ha a* $\sum(x_n)$ *sor feltételesen konvergens, akkor az átrendezettjei között van olyan, amelyiknek az összege végtelen, van olyan, amelyiknek az összege mínusz végtelen, minden* $A \in \mathbb{R}$ *számra van olyan, amelyik konvergens és az összege* A*, és olyan is van, amelyik divergens és nincs összege.*

Legyen (x_n) korlátos sorozat. Készítsük el az

$$\alpha_k := \sup\{x_n : \ n \in \mathbb{Z}^+, n \geq k\}, \ k \in \mathbb{Z}^+$$

sorozatot. Mivel $\{x_n : n \in \mathbb{Z}^+, \ n \geq k\} \supset \{x_n : n \in \mathbb{Z}^+, \ n \geq k+1\}$, így a felső határukra igaz, hogy $\alpha_k \geq \alpha_{k+1}$. Ekkor láthatjuk, hogy (α_k) monoton fogyó sorozat. Mivel (α_k) monoton és korlátos, ezért konvergens, és az $\inf\{\alpha_k : \ k \in \mathbb{Z}^+\}$ határértékhez tart.

3.1.7 Definíció. $\limsup x_n := \inf\{\alpha_k : \ k \in \mathbb{Z}^+\}$.

Az előző gondolatmenethez hasonlóan legyen

$$\beta_k := \inf\{x_n : n \in \mathbb{Z}^+, n \geq k\}, \ k \in \mathbb{Z}^+.$$

(β_k) monoton növő és korlátos sorozat, ebből következően konvergens.

3.1.8 Definíció. $\liminf x_n := \sup\{\beta_k : \ k \in \mathbb{Z}^+\}$.

3.1.9 Állítás. Ha az (x_n) sorozat konvergens, akkor

$$\limsup x_n = \liminf x_n = \lim(x_n).$$

3.2. Ismertebb kritériumok

Az alábbi kritérium megadja egy sor konvergenciájának pontos feltételét, viszont a gyakorlatban ritkán alkalmazható a feltétele miatt. Ez a kritérium Cauchy nevéhez fűződik, aki 1823-ban publikálta *Analyse algébrique* című könyvében. A további kritériumokat is egyetemi tanulmányaim során ismertem meg, így ezek bizonyítására nem térek ki.

3.2.1 Tétel (Cauchy-kritérium végtelen sorokra). *A* $\sum(x_n)$ *sor akkor és csak akkor konvergens, ha minden* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *hibakorláthoz létezik olyan* $N \in \mathbb{Z}^+$ *úgy, hogy minden* $N \leq n < m$ *indexre*

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{m} x_k\Big| < \varepsilon.$$

3.2.2 Példa. A $\sum(\frac{1}{n})$ harmonikus sor divergens.

Indirekt módon tegyük fel, hogy a $\sum(\frac{1}{n})$ sor konvergens. Ekkor a Cauchy-kritérium értelmében az $\varepsilon := \frac{1}{2}$ hibakorláthoz is létezik olyan $N \in \mathbb{Z}^+$, hogy minden $N \leq n < m$ indexre

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k} < \frac{1}{2}. \tag{*}$$

Legyen $m := 2n$, ekkor (*) bal oldala csökkenthető úgy, hogy minden tag nevezője helyébe a $2n$ értéket írjuk, azaz

$$\frac{1}{2} = \frac{n}{2n} < \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}, \ n \geq N.$$

Ez azt mutatja, hogy N értékét bármilyen nagynak is választjuk, nem teljesül minden $N \leq n < m$ index esetén (*), így a sor valóban divergens.

3.2.3 Tétel (majoránskritérium). *Ha az* (x_n) *és* (y_n) *sorozatokra teljesül a következő két feltétel:*

(i) valamely N *indextől kezdve minden* $n \geq N$ *esetén* $|x_n| < y_n$*,*

(ii) a $\sum(y_n)$ *sor konvergens,*

ekkor a $\sum(x_n)$ *sor abszolút konvergens.*

3.2.4 Példa. A $\sum \frac{1}{n^2+\ln n}$ sor konvergens, mivel $\frac{1}{n^2+\ln n} < \frac{1}{n^2}$, $n \geq 2$ és $\sum(\frac{1}{n^2})$ konvergens.

3.2.5 Példa. A $\sum(\cos\frac{1}{n})^{n^3}$ sor konvergens.

A sor tagjait átalakítva kapjuk, hogy

$$\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3} = \left(\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right)^{n}, \ n \in \mathbb{Z}^+.$$

Ha belátjuk, hogy az alap 1−nél kisebb számhoz konvergál, akkor a vizsgált sor egynél kisebb kvóciensű mértani sorral majorálható. Ezt a következőképpen tesszük meg:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(\cos\frac{1}{n}-1)n^2} = e^{-\frac{1}{2}} < 1,$$

mert

$$\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)n^2 = \frac{\cos\frac{1}{n}-1}{\frac{1}{n^2}} \to -\frac{1}{2}.$$

Ebből következik, hogy egy indextől

$$\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2} < \frac{1+e^{-\frac{1}{2}}}{2} =: q < 1.$$

Innen $\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3} < q^n$ egy indextől kezdve, így a majoránskritérium alapján adódik a sor konvergenciája.

3.2.6 Tétel (minoránskritérium). *Ha az (x_n) és (y_n) sorozatokra teljesül a következő két feltétel:*

(i) valamely N indextől kezdve minden $n \geq N$ esetén $x_n < y_n$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = +\infty$,

akkor $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = +\infty$.

3.2.7 Példa. A $\sum \frac{\ln n}{n}$ sor divergens, mivel $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$, $n \geq 3$ és $\sum\left(\frac{1}{n}\right)$ divergens.

3.2.8 Példa. A $\sum\left(\frac{1}{n^p}\right)$ sor $p < 1$ esetén divergens, mert $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$ minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén, és $\sum\left(\frac{1}{n}\right)$ divergens.

3.2.9 Tétel (Leibniz-kritérium). *Ha az (x_n) sorozat monoton csökkenő és a nullához tart, akkor a $\sum(-1)^{n-1}x_n$ sor és a $\sum(-1)^n x_n$ sor is konvergens.*

3.2.10 Példa. A $\sum(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ sor feltételesen konvergens.

Az $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ sorozat monoton fogyó nullsorozat, ezért a sor a Leibniz-kritérium szerint konvergens. A

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \ln 2\,\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{Z}^+$$

becslés a minoránskritérium alapján azt jelenti, hogy a sor nem abszolút konvergens.

Második megoldás az abszolút konvergencia megcáfolására: Az

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \ln\Big(1+\frac{1}{k}\Big) = \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1)-\ln k\big) = \ln(n+1)$$

átalakítás alapján $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n)=\infty$, tehát $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\big(1+\frac{1}{n}\big)=\infty$.

3.2.11 Példa. A $\sum(-1)^n\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}+(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big)$ sor divergens.

Írjuk fel a sor részletösszeg-sorozatát:

$$s_k := \sum_{n=1}^{k}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{n+1}},\ k\in\mathbb{Z}^+.$$

Itt az első tag konvergens, a második pedig divergens sorozat, hiszen az első Leibniz-típusú sor részletösszeg-sorozata, a másodikat pedig a $\sum\left(\frac{1}{n+1}\right)$ divergens sor minorálja, ezért az eredeti sor divergens. A vizsgált sor váltakozó előjelű, de a tagok abszolút értékéből képzett sorozat nem monoton.

Ez a példa megmutatja, hogy a Leibniz-kritérium szükséges feltétele a tagok abszolút értékéből képzett sorozat monotonitása.

3.3. A gyökkritérium és a Jame-kritérium

Az alábbi kritériumok a sorok abszolút konvergenciájára, ill. divergenciájára adnak elégséges feltételt. A közös bennük az, hogy feltételeik a sorok $n-$edik tagjának $n-$edik gyökét tartalmazzák.

3.3.1 Tétel (Cauchy-féle gyökkritérium). *(i) Ha* $\limsup \sqrt[n]{|x_n|}<1$, *akkor a* $\sum(x_n)$ *sor abszolút konvergens.*

(ii) Ha végtelen sok indexre $\sqrt[n]{|x_n|}\geq 1$, *akkor a* $\sum(x_n)$ *sor divergens.*

Megjegyzések.

1. A $\limsup\sqrt[n]{|x_n|}<1$ feltétel ekvivalens olyan $q\in[0,1)$ létezésével, amelyre $\sqrt[n]{|x_n|}<q$ teljesül minden elég nagy n-re.

2. A gyökkritérium konvergenciafeltétele nem szükséges ahhoz, hogy egy sor konvergens legyen. Például a $\sum\left(\frac{1}{n^2}\right)$ sor konvergens, holott $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=1$.

3. Az $\sqrt[n]{|x_n|} < 1,\ n \geq N$ feltétel önmagában még nem elegendő $\sum (x_n)$ konvergenciájához. Ez csupán annyit jelent, hogy egy indextől $|x_n| < 1$.

4. A divergenciafeltétel teljesül, ha $\limsup \sqrt[n]{|x_n|} > 1$.

5. A $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = 1$ feltételből sem a sor konvergenciája, sem a divergergenciája nem következik. A $\sum \left(\frac{1}{n}\right)$ sor divergens, $\sum \left(\frac{1}{n^2}\right)$ pedig konvergens, miközben $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$.

3.3.2 Példa. A $\sum \frac{n^5}{2^n+3^n}$ sor konvergens. A sor tagjaira

$$\frac{n^5}{2^n+3^n} = \frac{1}{3^n}\frac{n^5}{(\frac{2}{3})^n+1},\ n \in \mathbb{Z}^+,$$

és ekkor

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \frac{1}{3}\sqrt[n]{\frac{n^5}{(\frac{2}{3})^n+1}} = \frac{1}{3}\frac{(\sqrt[n]{n})^5}{\sqrt[n]{(\frac{2}{3})^n+1}} \to \frac{1}{3} < 1.$$

Ezért a gyökkritérium alapján konvergens a sor.

3.3.3 Tétel (Jame-kritérium). *Legyen* $\sum (x_n)$ *nemnegatív tagú sor és*

$$J_n := (1-\sqrt[n]{x_n})\frac{n}{\ln n}.$$

(i) Ha $\liminf J_n > 1$, *akkor a* $\sum (x_n)$ *sor konvergens.*

(ii) Ha egy indextől $J_n \leq 1$, *akkor* $\sum (x_n)$ *divergens.*

Bizonyítás.

(i) Ha $\liminf J_n > 1$, akkor létezik olyan $p \in \mathbb{R},\ p > 1$ és $N \in \mathbb{Z}^+$, melyekre minden $n \geq N$ index esetén teljesül

$$\left(1-\sqrt[n]{x_n}\right)\frac{n}{\ln n} > p.$$

Ennek átalakításával

$$1-\sqrt[n]{x_n} > \frac{p\ln n}{n},\ n \geq N,$$

$$\left(1-\frac{p\ln n}{n}\right)^n > x_n,\ n \geq N$$

adódik. Elég azt megmutatnunk, hogy $\sum\left(1-\frac{p\ln n}{n}\right)^n$ konvergens, hiszen ekkor a majoránskritérum alapján következik $\sum(x_n)$ konvergenciája. Alakítsuk át a felső becslést $n \geq 2$ esetén:

$$\left(1-\frac{p\ln n}{n}\right)^n = \left(\left(1-\frac{p}{\frac{n}{\ln n}}\right)^{\frac{n}{\ln n}}\right)^{\ln n}.$$

Legyen $c_n := \frac{n}{\ln n}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{p}{c_n}\right)^{c_n} = e^{-p}$, vagyis

$$d_n := \left(1-\frac{p}{\frac{n}{\ln n}}\right)^{\frac{n}{\ln n}} \to e^{-p}.$$

A konvergencia definíciójából következik, hogy bármely $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ hibakorláthoz létezik olyan $M \in \mathbb{Z}^+$, $M \geq 2$, melyre minden $n \geq M$ index esetén

$$e^{-p+\varepsilon} > d_n.$$

Ezt felhasználva

$$\left(1-\frac{p\ln n}{n}\right)^n = d_n^{\ln n} < \left(e^{-p+\varepsilon}\right)^{\ln n} = \left(e^{\ln n}\right)^{-p+\varepsilon} = \frac{1}{n^{p-\varepsilon}},\ n \geq \max\{M, N\}.$$

Az $\varepsilon := \frac{p-1}{2}$ értékre $p-\varepsilon > 1$, emiatt $\sum\left(\frac{1}{n^p}\right)$ konvergens, így a majoránskritérium szerint $\sum(1-\frac{p\ln n}{n})^n$, majd $\sum(x_n)$ is konvergens.

(ii) Mivel egy indextől

$$(1-\sqrt[n]{x_n})\frac{n}{\ln n} \leq 1,$$

$$\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n \leq x_n,$$

ezért elég volna $\sum(1-\frac{\ln n}{n})^n$ divergenciáját belátni.

Az $f(x) := \ln(1-x)$, $D(f) := (-\infty, 1)$ függvény akárhányszor differenciálható. Alkalmazzuk a 0 középpontú első Taylor-formulát a maradéktag Lagrange-alakjával.

$$f'(x) = -\frac{1}{1-x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1-x)^2},\ x \in D(f)$$

alapján tetszőleges $x \in (0,1)$ számhoz létezik olyan $\xi(x) \in (0,x)$, melyre teljesül

$$\ln(1-x) = -x + \frac{-\frac{1}{(1-\xi(x))^2}}{2!}x^2. \tag{*}$$

Az $x_n := \frac{\ln n}{n}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ sorozat nullához tart, ebből adódik, hogy egy indextől kezdve $x_n \in [0, \frac{1}{2})$. Ilyen indexekre a $\xi_n := \xi(x_n)$ jelöléssel

$$0 < \xi_n < \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{(1-\xi_n)^2} < 4.$$

Ekkor az x_n értéket helyettesítve a (*) egyenletbe kapjuk a következőt:

$$\ln\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right) = -\frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-\xi_n)^2} \cdot \frac{\ln^2 n}{n^2},$$

$$n \ln\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right) = -\ln n - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-\xi_n)^2} \cdot \frac{\ln^2 n}{n}.$$

Így a hatványozás és a logaritmus azonosságaiból adódik

$$\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 - \frac{\ln n}{n})} = e^{-\ln n - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-\xi_n)^2} \cdot \frac{\ln^2 n}{n}} = \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-\xi_n)^2} \cdot \frac{\ln^2 n}{n}}}.$$

Mivel $\lim \frac{\ln^2 n}{n} = 0$, az exponenciális függvény $0-$beli folytonossága és az átviteli elv alapján

$$e^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-\xi_n)^2} \cdot \frac{\ln^2 n}{n}} \to 1,$$

ezért egy indextől $e^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-\xi_n)^2} \cdot \frac{\ln^2 n}{n}} < 2$ teljesül, így alkalmas indextől fennáll

$$\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n > \frac{1}{2n}.$$

Végül a minoránskritérium alapján $\sum (1 - \frac{\ln n}{n})^n$ divergens. $\square$

3.3.4 Példa. A $\sum (1 - \frac{\ln^p n}{n})^n$ sor $p > 1$ esetén konvergens, míg $p \leq 1$ esetén divergens.

Alkalmazva a Jame-kritériumot

$$(1 - \sqrt[n]{x_n})\frac{n}{\ln n} = \left(1 - \sqrt[n]{\left(1 - \frac{\ln^p n}{n}\right)^n}\right)\frac{n}{\ln n} = \ln^{p-1} n$$

adódik, amelyből $\lim\limits_{n\to\infty} \ln n = \infty$ miatt következik az állítás.

3.4. A hányadoskritérium és általánosításai

Az ebben az alfejezetben található kritériumok közös ismérve, hogy feltételeik mind a vizsgált sor két szomszédos tagjának hányadosát tartalmazzák, és a sor abszolút konvergenciáját, ill. divergenciáját határozzák meg. E kritériumok között igen erős a Kummer-kritérium abban az értelemben, hogy következménye másik három kritérium, és különböző divergens segédsorozatokkal újabb kritériumokat kaphatunk belőle. Az alfejezetben helyet kapott még két kritérium, nevezetesen a hányados-majoráns és a hányados-minoráns nevű, amelyek következményei a majoráns, ill. a minoránskritériumoknak.

3.4.1 Tétel (D'Alembert féle hányadoskritérium). *Legyen (x_n) olyan sorozat, melyre egy indextől $x_n \neq 0$.*

(i) Ha $\limsup \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1$, akkor a $\sum (x_n)$ sor abszolút konvergens.

(ii) Ha egy indextől $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq 1$, akkor a $\sum (x_n)$ sor divergens.

Megjegyzések.

1. A $\limsup \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1$ feltétel egyenértékű olyan $q \in [0, 1)$ létezésével, amelyre $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < q$ teljesül minden elég nagy n esetén.

2. A hányadoskritérium feltételei nem szükségesek ahhoz, hogy egy sor konvergens legyen. Például a $\sum \left(\frac{1}{n^2}\right)$ sor konvergens, miközben $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = 1$.

3. Az $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1,\ n \geq N$ feltétel önmagában még nem elegendő $\sum (x_n)$ konvergenciájához. Ez csupán annyit jelent, hogy az $(|x_n|)$ sorozat az N indextől szigorúan monoton fogy.

4. A divergenciafeltétel fennáll, ha $\liminf \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| > 1$.

5. A $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = 1$ feltételből sem a sor konvergenciája, sem a divergenciája nem következik, ugyanis a $\sum \left(\frac{1}{n}\right)$ sor divergens, $\sum \left(\frac{1}{n^2}\right)$ pedig konvergens, holott $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)}{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = 1$.

3.4.2 Példa. A $\sum \frac{n^5}{2^n+3^n}$ sor konvergens.

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{1}{3^{n+1}} \frac{(n+1)^5}{(\frac{2}{3})^{n+1}+1} \cdot 3^n \frac{(\frac{2}{3})^n+1}{n^5} = \frac{1}{3} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^5 \frac{(\frac{2}{3})^n+1}{(\frac{2}{3})^{n+1}+1} \to \frac{1}{3} < 1,$$

ezért a hányadoskritérium alapján a sor valóban konvergens.

3.4.3 Állítás. Ha az (x_n) sorozat tagjai nullától különbözőek, akkor $\limsup\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1$ esetén $\limsup\sqrt[n]{|x_n|} < 1$.

3.4.4 Következmény. Ha az (x_n) sorozat tagjai nullától különbözőek, és a $\sum(x_n)$ sor konvergenciája a hányadoskritériummal eldönthető, akkor a gyökkritériummal is.

Bizonyítás. A $\limsup\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1$ feltétel szerint létezik olyan $q \in (0,1)$ és $N \in \mathbb{Z}^+$, melyre

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq q < 1,\ n \geq N.$$

Elemi átalakítással

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \sqrt[n]{|x_N|\left|\frac{x_{N+1}}{x_N}\right|\cdots\left|\frac{x_n}{x_{n-1}}\right|},\ n > N.$$

Mivel a gyök alatti hányadosok értéke rendre legfeljebb q, ezért

$$\sqrt[n]{|x_n|} \leq \sqrt[n]{|x_N|}\cdot\sqrt[n]{q^{n-N}} = \sqrt[n]{\frac{x_N}{q^N}}\cdot q \to q < 1,$$

így az $(\sqrt[n]{|x_n|})$ sorozat egy indextől kezdve kisebb, mint $\frac{1+q}{2} < 1$. Tehát $\limsup\sqrt[n]{|x_n|} < 1$.

3.4.5 Példa. Legyen $\sum(x_n)$ az sor, ahol

$$x_n = \begin{cases} 3^{-n}, & \text{ha n páros,} \\ 5^{-n}, & \text{ha n páratlan.} \end{cases}$$

Alkalmazzuk a gyökkritériumot!

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{|x_{2n}|} = \frac{1}{3},$$

és

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{|x_{2n+1}|} = \frac{1}{5},$$

ezért $\limsup\sqrt[n]{|x_n|} = \frac{1}{3}$. Tehát a gyökkritérium szerint a sor konvergens.

Most alkalmazzuk a hányadoskritériumot!

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \begin{cases} \frac{1}{5}(\frac{3}{5})^n, & \text{ha n páros,} \\ \frac{1}{3}(\frac{5}{3})^n, & \text{ha n páratlan.} \end{cases}$$

Ezért
$$\limsup \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \infty.$$
Tehát a sor konvergenciája hányadoskritériummal nem dönthető el.

3.4.6 Következmény (hányados-majoráns kritérium). Ha $\sum (z_n)$ olyan pozitív tagú konvergens sor, amelyre az $N \in \mathbb{Z}^+$ küszöbindextől kezdve minden k egészre
$$\frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} \leq \frac{z_{k+1}}{z_k},$$
akkor a $\sum (x_n)$ sor abszolút konvergens.

Bizonyítás. A feltételben szereplő egyenlőtlenséget tetszőleges $n > N$ mellett az $N, N+1, \ldots, n-1$ indexekre felírva, majd a kapott egyenlőtlenségeket összeszorozva a következőt kapjuk:
$$\frac{|x_n|}{|x_N|} \leq \frac{z_n}{z_N}, \ n > N.$$
Így alkalmazhatjuk a majoránskritériumot az $y_n := \frac{x_N}{z_N} z_n, \ n \in \mathbb{Z}^+$ sorozattal. $\square$

3.4.7 Példa. A $\sum \frac{n^{n-2}}{e^n n!}$ sor konvergens.

Felülről becsülve a $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ hányadost
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-2}}{e} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}$$
adódik, innen a hánydos-majoráns kritérium következménye a sor konvergenciája.

3.4.8 Következmény (hányados-minoráns kritérium). Ha $\sum (z_n)$ pozitív tagú divergens sor, (y_n) pozitív tagú sorozat, továbbá $N \in \mathbb{Z}^+$ olyan küszöbindex, amelytől kezdve minden k egész esetén a pozitív tagú (y_n) sorozatra teljesül
$$\frac{y_{k+1}}{y_k} \geq \frac{z_{k+1}}{z_k},$$
akkor a $\sum (y_n)$ sor divergens.

Bizonyítás. A feltételben szereplő egyenlőtlenséget tetszőleges $n > N$ mellett az $N, N+1, \ldots, n-1$ indexekre felírva, majd a kapott egyenlőtlenségeket összeszorozva kapható

$$\frac{y_n}{y_N} \geq \frac{z_n}{z_N},\ n > N.$$

Ezért alkalmazhatjuk a minoránskritériumot az $x_n := \frac{y_N}{z_N} z_n$ sorozattal. □

3.4.9 Tétel (Raabe-kritérium). *Legyen (x_n) pozitív tagú sorozat és*

$$R_n := n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right),\ n \in \mathbb{Z}^+.$$

(i) Ha $\liminf R_n > 1$, akkor a $\sum (x_n)$ sor konvergens.

(ii) Ha egy indextől $R_n \leq 1$, akkor a $\sum (x_n)$ sor divergens.

Bizonyítás.

(i) A feltételből következik, hogy létezik olyan pozitív r szám, amelyre valamely N indextől teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) > 1 + r.$$

Ezt átrendezve kapjuk, hogy

$$nx_n - (n+1)x_{n+1} > rx_{n+1},\ n \geq N.$$

Ezt az $N, N+1, \ldots, n$ indexekre alkalmazzuk, majd az így kapott egyenlőtlenségeket összeadjuk. Jelesül

$$Nx_N - (N+1)x_{N+1} > rx_{N+1},$$

$$(N+1)x_{N+1} - (N+2)x_{N+2} > rx_{N+2},$$

$$\vdots$$

$$nx_n - (n+1)x_{n+1} > rx_{n+1}.$$

Az egyenlőtlenséget összeadva a bal oldal teleszkópos összegként viselkedik. Az így kapott összefüggés bal oldalát triviálisan felülről becsülve adódik

$$Nx_N > Nx_N - (n+1)x_{n+1} > r \sum_{k=N+1}^{n+1} x_k,$$

melyet átalakítva

$$\frac{Nx_N}{r} > \sum_{k=N+1}^{n+1} x_k,\ n > N.$$

Ekkor mindkét oldalhoz hozzáadjuk a $\sum\limits_{k=1}^{N} x_k$ összeget, így

$$\frac{Nx_N}{r} + \sum_{k=1}^{N} x_k > \sum_{k=1}^{n+1} x_k,\ n > N.$$

Mivel a bal oldalon álló szám a jobb oldali részletösszegek felső korlátja, következésképpen a pozitív tagú $\sum (x_k)$ sor konvergens.

(ii) A divergenciafeltételt a fentiekhez hasonlóan bizonyíthatjuk azzal a különbséggel, hogy itt az

$$n\Big(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\Big) \leq 1,\ n \geq N$$

összefüggést algebrailag átalakítva, majd az $N, N+1, \ldots, n$ indexekre felírva, utána a kapott egyenlőtlenségeket összegezve, végül $(n+1)-$gyel osztva az

$$Nx_N \cdot \frac{1}{n+1} \leq x_{n+1}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Így a minoránskritériumot felhasználva adódik $\sum (x_k)$ divergenciája. $\square$

3.4.10 Példa. A $\sum \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ sor divergens.

Az $x_n := \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},\ n \in \mathbb{Z}^+$ jelöléssel

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{2n+1} = 1,$$

ezért a hányadoskritériummal nem dönthető el a sor konvergenciája. Alkalmazzuk a Raabe-kritériumot! Ekkor

$$n\Big(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\Big) = n\Big(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\Big) = \frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2} < 1$$

alapján a sor divergens.

Második megoldás: Az előző feladatot elemi úton is meg lehet oldani. Ehhez vizsgáljuk a következő triviális egyenlőtlenségeket:

$$\frac{2}{3} < \frac{3}{4},\quad \frac{4}{5} < \frac{5}{6},\quad \frac{2n-2}{2n-1} < \frac{2n-1}{2n}.$$

Mind a bal, mind a jobb oldalakat szorozzuk össze, ekkor

$$\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{\frac{(2n)!!}{2}},$$

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 < 2 \cdot 2n,$$

majd

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

adódik. Innen a minoránskritériumot alkalmazva a sor divergens.

3.4.11 Tétel (Kummer-kritérium). *Legyen (x_n) pozitív tagú sorozat és (c_n) olyan pozitív tagú segédsorozat, amelyre $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n} = +\infty$.*

(i) Ha $\limsup \left(c_{n+1}\frac{x_{n+1}}{x_n} - c_n\right) < 0$, akkor $\sum (x_n)$ konvergens.

(ii) Ha egy indextől kezdve $c_{n+1}\frac{x_{n+1}}{x_n} - c_n \geq 0$, akkor $\sum (x_n)$ divergens.

Bizonyítás.

(i) A $\limsup \left(c_{n+1}\frac{x_{n+1}}{x_n} - c_n\right) < 0$ feltételből következik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$ létezése, amelyre egy N indextől kezdve

$$c_{n+1}\frac{x_{n+1}}{x_n} - c_n \leq -\delta, \ n \geq N.$$

Ebből következik

$$c_{n+1}x_{n+1} - c_n x_n \leq -\delta x_n < 0, \ n \geq N. \tag{*}$$

Tehát $(c_n x_n)$ egy indextől monoton csökkenő pozitív tagú sorozat, így konvergens. $\sum(c_{n+1}x_{n+1} - c_n x_n)$ konvergens sor, mert $n \to \infty$ esetén

$$S_n := \sum_{k=1}^{n}(c_{k+1}x_{k+1} - c_k x_k) = (c_{n+1}x_{n+1} - c_1 x_1) \to \lim_{n\to\infty}(c_n x_n) - c_1 x_1.$$

A (*) egyenlőtlenségből következik

$$-(c_{n+1}x_{n+1} - c_n x_n) \geq \delta x_n, \ n \geq N.$$

A majoránskritériumot alkalmazva kapjuk, hogy $\sum (\delta x_n)$ konvergens, így $\sum (x_n)$ is.

(ii) A feltétel szerint létezik olyan N index, amelyre $n \geq N$ esetén

$$c_{n+1}\frac{x_{n+1}}{x_n} - c_n \geq 0,$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}}.$$

Mivel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_{n+1}} = \infty$, a hányados-minoráns kritériumot alkalmazva megkapjuk, hogy $\sum (x_n)$ divergens. □

3.4.12 Tétel (Kummer-kritérium második alakja). *Legyen (x_n) pozitív tagú sorozat és (c_n) olyan pozitív tagú segédsorozat, amelyre $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n} = +\infty$.*

(i) Ha $\liminf \left(c_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - c_{n+1}\right) > 0$, akkor $\sum (x_n)$ konvergens.

(ii) Ha egy indextől kezdve $c_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0$, akkor $\sum (x_n)$ divergens.

Bizonyítás. A tétel az előző alakjához hasonlóan igazolható, sőt a két divergenciafeltétel ekvivalenciája elemi átalakításokkal megmutatható.

Megjegyzések.

1. A $c_n := 1, n \in \mathbb{Z}^+$ választással a hányadoskritériumot kapjuk, hiszen a konvergencia feltétele

$$\limsup \left(1 \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\right) < 0 \;\Leftrightarrow \limsup \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1,$$

a divergencia feltétele pedig

$$1 \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$$

egy indextől.

2. A $c_n := n, n \in \mathbb{Z}^+$ segédsorozattal megkapjuk a Raabe-kritériumot, hiszen a konvergencia feltétele

$$\liminf \left(n \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} - (n+1)\right) > 0 \;\Leftrightarrow\; \liminf \left(n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)\right) > 1.$$

A divergencia feltétele így ekvivalens azzal, hogy

$$n \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} - (n+1) \leq 0 \;\Leftrightarrow\; n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \leq 1,$$

egy indextől kezdve.

3.4.13 Tétel (Bertrand-kritérium). *Legyen* $\sum (x_n)$ *pozitív tagú sor és*

$$B_n := \left(n\Big(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\Big) - 1\right) \ln n,\ \ n \in \mathbb{Z}^+.$$

(i) Ha $\liminf B_n > 1$ *akkor a sor konvergens.*

(ii) Ha egy indextől $B_n \leq 1$, *akkor a sor divergens.*

Bizonyítás.

(i) A Kummer-kritérium második alakját a $c_n := n \ln n,\ n \in \mathbb{Z}^+,\ n \geq 2$ segédsorozattal alkalmazva a konvergencia feltétele

$$\liminf \left(n \ln n \frac{x_n}{x_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1)\right) > 0,$$

átalakítva

$$\liminf \left(\ln n\Big(n\Big(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\Big) - 1\Big) + (n+1)\ln\frac{n}{n+1}\right) > 0.$$

Innen

$$(n+1)\ln\frac{n}{n+1} = -(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = -\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \to -1$$

felhasználásával kapható

$$\liminf\ \ln n\left(n\Big(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\Big) - 1\right) > 1,$$

ami a Bertrand-kritérium konvergenciafeltétele.

(ii) A divergenciafeltétel is a Kummer-kritérium következménye, ugyanezzel a segédsorozattal bizonyítható. Tehát ha egy indextől

$$n \ln n \frac{x_n}{x_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1) \leq 0,$$

akkor ezt átrendezve kapjuk, hogy

$$\ln n\Big(n\Big(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\Big) - 1\Big) + (n+1)\ln\frac{n}{n+1} \leq 0.$$

Az

$$(n+1)\ln\frac{n}{n+1} = -\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+1}, \ n\in\mathbb{Z}^+$$

sorozat szigorúan monoton nő és a határértéke -1, ezért

$$(n+1)\ln\frac{n}{n+1} < -1, \ n\in\mathbb{Z}^+.$$

Ebből következik, hogy ha egy indextől teljesül

$$\ln n\left(n\Big(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\Big)-1\right)\le 1,$$

akkor $\sum x_n$ divergens.

3.4.14 Tétel (Gauss-kritérium). *Ha (x_n) pozitív tagú sorozat, valamint létezik olyan $\lambda,\ \varepsilon\in\mathbb{R}^+,\ \mu\in\mathbb{R}$ és (θ_n) korlátos sorozat, amelyre $\frac{x_n}{x_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}},\ n\in\mathbb{Z}^+$, akkor*

(i) $\lambda>1$ esetén a $\sum(x_n)$ sor konvergens, $\lambda<1$ esetén pedig divergens.

(ii) Ha $\lambda=1$ és $\mu>1$, akkor a $\sum(x_n)$ sor konvergens, $\lambda=1$ és $\mu\le 1$ esetén pedig divergens.

Bizonyítás.

(i) Alkalmazzuk a hányadoskritériumot a $\lambda>1$ esetre. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}}=\frac{1}{\lambda}<1$$

adódik, amiből következik a $\sum(x_n)$ sor konvergenciája. Ha $\lambda<1$, akkor $\frac{1}{\lambda}>1$, következésképpen a sor divergens.

(ii) $\lambda=1$ esetén a Raabe-kritériumot alkalmazzuk.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\mu+\frac{\theta_n}{n^{\varepsilon}}\right)=\mu.$$

Ekkor $\mu>1$ esetén a $\sum(x_n)$ sor konvergens, ha pedig $\mu<1$, akkor a sor divergens. Ha $\mu=1$, alkalmazzuk a Bertrand-kritériumot. Tehát

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\Big(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\Big)-1\right)\ln n=\lim_{n\to\infty}\frac{\theta_n\ln n}{n^{\varepsilon}}=0<1,$$

így $\sum(x_n)$ divergens. □

3.4.15 Példa. Legyen $\sum(x_n)$ az a sor, ahol

$$x_n := \Big(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\Big)^k, \ n \in \mathbb{Z}^+.$$

A sor $k > 2$ esetén konvergens, $k \leq 2$ esetén divergens.

Mivel

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \Big(\frac{2n+2}{2n+1}\Big)^k = \Big(1+\frac{1}{2n+1}\Big)^k, \ n \in \mathbb{Z}^+,$$

ezért

$$n\Big(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\Big) = n\Bigg(\Big(1+\frac{1}{2n+1}\Big)^k - 1\Bigg) =$$

$$= n\Bigg(\binom{k}{1}\frac{1}{2n+1} + \binom{k}{2}\Big(\frac{1}{2n+1}\Big)^2 + \ldots + \binom{k}{k}\Big(\frac{1}{2n+1}\Big)^k\Bigg), \ n \in \mathbb{Z}^+,$$

ahol felhasználtuk a binomiális tételt. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} n(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1) = \frac{k}{2}.$$

A Raabe-kritériumot alkalmazva kapjuk, hogy ha $k > 2$, akkor a sor konvergens, ha pedig $k < 2$, a sor divergens.

Ha $k = 2$, akkor teljesül

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \Big(\frac{2n+2}{2n+1}\Big)^2 = \Big(1+\frac{1}{2n+1}\Big)^2 = 1 + \frac{2}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)^2} =$$

$$= 1 + \frac{1}{n}\Big(1 - \frac{1}{2n+1}\Big) + \frac{1}{(2n+1)^2} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1)^2} =$$

$$= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\Big(-\frac{n}{2n+1} + \frac{n^2}{(2n+1)^2}\Big).$$

Ekkor alkalmazható Gauss kritériuma a

$$\theta_n := -\frac{n}{2n+1} + \frac{n^2}{(2n+1)^2}, \ n \in \mathbb{Z}^+$$

korlátos segédsorozattal. Így a kritériumbeli egyenlőség a $\lambda = 1$, $\mu = 1$ és $\varepsilon = 1$ értékek mellett teljesül, tehát a sor divergens.

3.5. Dedekind-, Dirichlet- és Abel-kritérium

A következő három kritérium sorok konvergenciáját határozza meg, viszont az abszolút konvergencia eldöntésére nem alkalmas. Ezeknek a soroknak a tagjai két sorozat szorzatából állnak.

3.5.1 Tétel (Dedekind-kritérium). *Ha az (y_n) sorozat (s_n) részletösszeg-sorozata korlátos, és (x_n) korlátos változású nullsorozat, akkor mind a $\sum s_n(x_n - x_{n+1})$, mind a $\sum (x_n y_n)$ sor konvergens, és összegeik egyenlők.*

Bizonyítás. A $\sum s_n(x_n - x_{n+1})$ sor abszolút konvergens, mert a tagok abszolút értékéből alkotott sor részletösszegei

$$\sum_{k=1}^{n} |s_k(x_k - x_{k+1})| = \sum_{k=1}^{n} |s_k||x_k - x_{k+1}| \leq$$

$$\leq \sup\{|s_k| : k \in \mathbb{Z}^+\} \cdot \sum_{k=1}^{n} |x_k - x_{k+1}|, \ n \in \mathbb{Z}^+$$

alapján korlátosak. A $\sum s_n(x_n - x_{n+1})$ sor abszolút konvergens, következésképpen konvergens is. Az $s_0 := 0$ jelöléssel minden $k \in \mathbb{Z}^+$ indexre $y_k = s_k - s_{k-1}$, ezért

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} x_k(s_k - s_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} x_k s_k - \sum_{k=2}^{n} x_k s_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} x_k s_k - \sum_{k=1}^{n-1} x_{k+1} s_k =$$

$$= x_n s_n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k(x_k - x_{k+1}), \ n \in \mathbb{Z}^+.$$

Az $(x_n s_n)$ nullsorozat, mert (x_n) nullsorozat, és (s_n) korlátos. Végül mindkét oldal határértékét véve

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k = \lim_{n\to\infty} x_n s_n + \sum_{k=1}^{\infty} s_k(x_k - x_{k+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(x_k - x_{k+1}). \ \square$$

3.5.2 Következmény (Dirichlet-kritérium). Ha az (y_n) sorozat részletösszeg-sorozata korlátos, valamint (x_n) monoton nullsorozat, akkor $\sum (x_n y_n)$ konvergens.

Bizonyítás. Ha (x_n) monoton nullsorozat, akkor korlátos változású, mert $\sum (x_n - x_{n+1})$ állandó előjelű sor, és pl. nemnegatív tagú sorra

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k - x_{k+1}| = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k+1}) = x_1 - x_{n+1} \to x_1,$$

ha $n \to +\infty$. Ezért a Dedekind-kritérium alapján $\sum (x_n y_n)$ konvergens. $\square$

Megjegyzés.

(1) A Dirichlet-kritérium speciális esetként tartalmazza a Leibniz-kritériumot, hiszen $y_n := (-1)^{n-1}$, ill. $y_n := (-1)^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén megkapjuk az utóbbit.

3.5.3 Példa. A $\sum \frac{\cos n}{n}$ sor konvergens.

Alkalmazhatjuk a Dirichlet-kritériumot, hiszen $\sum \cos k$ részletösszegei korlátosak, és $(\frac{1}{n})$ monoton nullsorozat. Azt kell belátnunk, hogy $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos k$ valóban korlátos. Ezt a következőképpen tehetjük meg. Legyen

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \cos k, \ n \in \mathbb{Z}^+.$$

Szorozzuk be $\sin \frac{1}{2}$−del mindkét oldalt. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$s_n \sin \frac{1}{2} = \cos 1 \sin \frac{1}{2} + \cos 2 \sin \frac{1}{2} + \ldots + \cos n \sin \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\Bigg(-\sin\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \sin\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \sin\left(2 - \frac{1}{2}\right) + \sin\left(2 + \frac{1}{2}\right) - \ldots$$

$$- \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) + \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\Bigg) = \frac{1}{2}\left(\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) - \sin \frac{1}{2}\right).$$

Ebből adódik, hogy

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \cos k = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) - \sin \frac{1}{2}}{2 \sin \frac{1}{2}}, \ n \in \mathbb{Z}^+,$$

amiből valóban következik (s_n) korlátossága.

3.5.4 Példa. A $\sum \frac{\sin n}{n}(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n})$ sor konvergens.

A Dirichlet-kritérium feltételeinek ellenőrzéséhez bizonyítanunk kell egyrészt, hogy $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$ részletösszeg-sorozata korlátos. Ehhez használjuk fel a következő összefüggést:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos \frac{1}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})}{2 \sin \frac{1}{2}}.$$

Az $x_n := \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}$ sorozat a 0−hoz tartó monoton $\left(\frac{1}{n}\right)$ sorozat számtaniközép-sorozat, ezért (x_n) monoton és $x_n \to 0$. Ekkor valóban használható a Dirichlet-kritérium.

3.5.5 Tétel (Abel-kritérium). *Ha a $\sum (y_n)$ sor konvergens és (x_n) korlátos változású sorozat, akkor a $\sum (x_n y_n)$ sor konvergens.*

Bizonyítás. A Dedekind-kritérium bizonyításának a végét módosítva megkaphatjatjuk az állítást. Mivel (x_n) korlátos változású, ezért konvergens, így

$$\lim_{n\to\infty} x_n s_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \sum_{k=1}^{\infty} y_k \in \mathbb{R}.$$

Ez alapján $\sum(x_n y_n)$ konvergens, és

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \sum_{k=1}^{\infty} y_k + \sum_{k=1}^{\infty} s_k(x_k - x_{k+1}). \ \square$$

3.5.6 Példa. A $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{\cos n}{n}$ sor konvergens.

A $\sum \left(\frac{\cos n}{n}\right)$ konvergenciáját beláttuk az 3.5.3. példában, az $(1+\frac{1}{n})^n$ sorozat monoton és korlátos, tehát korlátos változású. Így az Abel-kritérium szerint a szorzatsor valóban konvergens.

3.6. Nemnegatív, monoton csökkenő tagú sorokra vonatkozó kritériumok

Az első kivételével a tételek csak olyan sorokra alkalmazhatóak, melyek tagjai nemnegatívak, és monoton csökkenő sorozatot alkotnak. Ezek a kritériumok viszont nemcsak elégségesek, de szükségesek is a sorok konvergenciájához.

3.6.1 Tétel. *Ha (x_n) pozitív tagú, monoton fogyó sorozat és $\sum(x_n)$ konvergens sor, akkor $\lim_{n\to\infty} n x_n = 0$.*

Bizonyítás. A tételt a sorokra vonatkozó Cauchy-kritérium segítségével látjuk be. Minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ hibakorláthoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}^+$ úgy, hogy minden $N \leq n$ indexre

$$\sum_{k=n+1}^{2n} x_k < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mivel ennek az összegnek minden tagja alulról becsülhető az x_{2n} értékkel, és n darab összeadandónk van, ezért

$$n x_{2n} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} x_k < \frac{\varepsilon}{2},\ n \geq N,$$

tehát $(2n)x_{2n} < \varepsilon,\ n \geq N$. Következésképpen az (nx_n) sorozat páros indexű részsorozata nullához tart. Páratlan indexekre hasonló módon látható be az állítás azzal a különbséggel, hogy itt az x_{2n+1} értékkel becsülhetjük alulról a következő összeg minden tagját:

$$(n+1)x_{2n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{2n+1} x_k < \frac{\varepsilon}{2},\ n \geq N.$$

Így (nx_n) páratlan indexű részsorozata szintén nullához tart. $\square$

3.6.2 Példa. A $\sum \left(\frac{n^n}{n!e^n}\right)$ sor divergens. A sor pozitív tagú, és a tagok sorozata monoton fogy, mert

$$\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!e^{n+1}}}{\frac{n^n}{n!e^n}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e} < 1,\ n \in \mathbb{Z}^+.$$

A $b_n := n \cdot \frac{n^n}{e^n n!},\ n \in \mathbb{Z}^+$ sorozatra

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{e} > 1,\ n \in \mathbb{Z}^+$$

adódik. Tehát a (b_n) sorozat monoton növő, így nem tart nullához. Ezért az előző tétel szerint a vizsgált sor divergens.

3.6.3 Tétel (integrálkritérium). *Legyen $a \in \mathbb{Z}$, valamint legyen $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ monoton csökkenő, nemnegatív függvény. A $\sum f(n)$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha az $\int_a^\infty f(x)dx$ improprius integrál konvergens.*

3.6.4 Példa. A $\sum \frac{1}{n^p},\ p > 1$ hiperhamonikus sor konvergens.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \lim_{y\to\infty} \int_1^y x^{-p}dx = \lim_{y\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^y = \lim_{y\to\infty} \left(\frac{y^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right) = \frac{1}{p-1}$$

alapján konvergens az improprius integrál, így a sor konvergens.

3.6.5 Példa. A $\sum \frac{1}{n(\ln n)^p}$ sor $p > 1$ esetén konvergens, míg $p \leq 1$ esetén divergens. Ha $p \leq 0$, akkor a minoránskritérium következménye a sor divergenciája. Ha p pozitív, használjuk az integrálkritériumot! A $p = 1$ esetben

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x}dx = \lim_{y\to\infty} \int_2^y \frac{1}{x \ln x}dx = \lim_{y\to\infty} [\ln \ln x]_2^y = \lim_{y\to\infty} (\ln \ln y - \ln \ln 2) = \infty$$

szerint az improprius integrál divergens, következésképpen a $\sum\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$ sor is divergens. A $p \in \mathbb{R}^+,\ p \neq 1$ esetben

$$\int\limits_2^y \frac{1}{x(\ln x)^p}dx = \left[\frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}\right]_2^y.$$

Ha $p > 1$, akkor

$$\lim_{y\to+\infty}\int\limits_2^y \frac{1}{x(\ln x)^p}dx = \frac{1}{p-1}\frac{1}{(\ln 2)^{p-1}}$$

alapján a sor konvergens. Ha $p < 1$, akkor

$$\lim_{y\to+\infty}\int\limits_2^y \frac{1}{x(\ln x)^p}dx = \infty,$$

tehát a sor divergens.

3.6.6 Tétel (kondenzációs kritérium). *Ha az (x_n) sorozat nemnegatív tagú és monoton csökkenő, akkor a $\sum(x_n)$ és a $\sum(2^n x_{2^n})$ sorok egyszerre konvergensek, egyszerre divergensek.*

Bizonyítás. A tételben szereplő mindkét sor nemnegatív tagú, ezért pontosan akkor konvergens, amikor a részletösszeg-sorozat felülről korlátos. Tehát elegendő azt igazolni, hogy a két részletösszeg-sorozata ugyanakkor felülről korlátos. Jelölje

$$s_n := \sum_{k=1}^n x_k, \qquad S_n := \sum_{k=1}^n 2^k x_{2^k},\ n \in \mathbb{Z}^+$$

a sorok részletösszegeit. Legyen továbbá $s_0 := 0,\ S_0 := 0$. Mivel $x_{2^n} \geq x_i$ minden $i > 2^n$ indexre, így

$$S_n - S_{n-1} = 2^n \cdot x_{2^n} \geq \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} x_i = s_{2^{n+1}} - s_{2^n},\ n \in \mathbb{Z}^+,$$

ezenkívül

$$S_n = \sum_{k=1}^n (S_k - S_{k-1}) \geq \sum_{k=1}^n (s_{2^{k+1}} - s_{2^k}) = s_{2^{n+1}} - s_2.$$

Ha az (S_n) sorozat felülről korlátos, akkor az $(s_{2^{n+1}})$ sorozat is felülről korlátos. A monoton növő (s_n) részletösszeg-sorozat felülről korlátos, mert felülről korlátos részsorozata van.

Mivel $x_{2^n} \leq x_i$ minden $i \leq 2^n$ indexre, így

$$S_n - S_{n-1} = 2^n \cdot x_{2^n} \leq 2 \cdot \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} x_i = 2(s_{2^n} - s_{2^{n-1}}),\ n \in \mathbb{Z}^+,$$

ezért

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (S_k - S_{k-1}) \leq 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} (s_{2^k} - s_{2^{k-1}}) = 2(s_{2^n} - s_1).$$

Ha az (s_n) részletösszeg-sorozat felülről korlátos, akkor az (S_n) részletösszeg-sorozat is az. $\square$

3.6.7 Példa. A $\sum \frac{1}{n(\ln n)^p}$ sor $p > 1$ esetén konvergens, míg $p \leq 1$ esetén divergens.

Most alkalmazzuk a sorra a kondenzációs kritériumot!

$$\sum (2^n x_{2^n}) = \sum 2^n \frac{1}{2^n (\ln 2^n)^p} = \sum \frac{1}{(\ln 2)^p} \cdot \frac{1}{n^p}.$$

A $\sum \left(\frac{1}{n^p}\right)$ hiperharmonikus sor $p > 1$ esetén konvergens, $p \leq 1$ esetén pedig divergens, ebből következik a példa állítása.

3.6.8 Tétel (Jermakov-kritérium). *Tegyük fel, hogy $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^+$ pozitív értékű monoton csökkenő függvény, és létezik*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} =: \lambda.$$

Ha $\lambda < 1$, akkor a $\sum f(n)$ sor konvergens, ha pedig $\lambda > 1$, akkor a sor divergens.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f pozitív, monoton fogyó, és

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \lambda. \tag{*}$$

$\sum f(n)$ konvergenciája az integrálkritérium miatt azzal ekvivalens, hogy $\int\limits_0^\infty f(x)dx$ konvergens.

Így $\lambda < 1$ esetén elég azt bebizonyítanunk, hogy az improprius integrál konvergens. Ekkor $a, b \in \mathbb{R},\ 0 \leq a < b$ esetén az $y = e^x$ helyettesítéssel

$$\int_{e^a}^{e^b} f(y)dy = \int_a^b e^x f(e^x)dx$$

teljesül, mert a monoton f függvény Riemann-integrálható a korlátos és zárt $[e^a, e^b]$ intervallumon. A (*) egyenlőségből következik, hogy létezik olyan $x_0 > 0$, amelyre minden $x > x_0$ esetén

$$\frac{e^x f(e^x)}{f(x)} < \frac{1+\lambda}{2} < 1.$$

Legyen $b_0 := x_0$ és $b_{n+1} := e^{b_n},\ n \in \mathbb{Z}^+$. Ekkor

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} f(y)dy = \int\limits_{b_0}^{b_1} \underbrace{e^x f(e^x)}_{<\frac{1+\lambda}{2} f(x)} dx < \frac{1+\lambda}{2} \int\limits_{b_0}^{b_1} f(y)dy,$$

hasonlóan

$$\int\limits_{b_2}^{b_3} f(y)dy < \frac{1+\lambda}{2} \int\limits_{b_1}^{b_2} f(y)dy < \Big(\frac{1+\lambda}{2}\Big)^2 \int\limits_{b_0}^{b_1} f(y)dy,$$

sőt teljes indukcióval igazolható

$$\int\limits_{b_k}^{b_{k+1}} f(y)dy < \Big(\frac{1+\lambda}{2}\Big)^k \int\limits_{b_0}^{b_1} f(y)dy,\ k \in \mathbb{Z}^+.$$

Ezt felhasználva

$$\int\limits_{x_0}^{b_{n+1}} f(y)dy = \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{b_k}^{b_{k+1}} f(y)dy <$$

$$\sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{1+\lambda}{2}\Big)^k \int\limits_{x_0}^{e^{x_0}} f(y)dy < \frac{2}{1-\lambda} \int\limits_{x_0}^{e^{x_0}} f(y)dy,$$

ahol az első tényezőt az $\frac{1+\lambda}{2}$ kvóciensű mértani sor összegével becsültük. Ha $b_n \leq b < b_{n+1}$, akkor

$$\int\limits_{x_0}^{b} f(y)dy < \int\limits_{x_0}^{b_{n+1}} f(y)dy < \frac{2}{1-\lambda} \int\limits_{x_0}^{e^{x_0}} f(y)dy$$

alapján a bal oldali Riemann-integrál a felső határ korlátos függvénye, ezért

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} f(y)dy = \lim_{x\to\infty} \int\limits_{x_0}^{b} f(y)dy < \frac{2}{1-\lambda} \int\limits_{x_0}^{e^{x_0}} f(y)dy$$

teljesül. Tehát f improprius integrálja az $[x_0, \infty)$ intervallumon konvergens, ezért $[0, \infty]$ intervallumon is, amivel ekvivalens a $\sum f(n)$ sor konvergenciája.

A divergenciafeltételt hasonló módszerrel látjuk be. Ha $\lambda > 1$ teljesül, akkor megismételhetjük a fenti bizonyítást a mértani sor összegével való becslésig fordított relációkkal. Ekkor

$$\int_{x_0}^{b_n} f(y)dy > \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\frac{1+\lambda}{2}\Big)^k \int_{x_0}^{e^{x_0}} f(y)dy, \ n \in \mathbb{Z}^+.$$

A jobb oldalon álló Riemann-integrál pozitív, valamint

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{1+\lambda}{2}\Big)^k = \infty,$$

amiből következik $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{x_0}^{b_n} f(y)dy = \infty$. A pozitív f függvény $\int\limits_{x_0}^{\infty} f(y)dy$ improprius integrálja létezik, és valós szám vagy végtelen. Mivel van olyan szigorúan monoton növő és végtelenhez tartó (b_n) sorozat, melyre $\int\limits_{x_0}^{b_n} f(y)dy \to \infty$, azért az átviteli elv alapján

$$\int_{x_0}^{\infty} f(y)dy = \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{b} f(y)dy = \infty,$$

tehát az integrálkritérium szerint $\sum f(n)$ divergens. $\square$

3.6.9 Példa. A $\sum \frac{1}{n \ln n}$ sor divergens. Az $f(x) := \frac{1}{x \ln x}$, $x \in [2, \infty)$ függvényre

$$\frac{f(e^x)\cdot e^x}{f(x)} = \frac{\frac{1}{e^x x}\cdot e^x}{\frac{1}{x \ln x}} = \ln x \to \infty,$$

ezért a Jermakov-kritérium szerint a sor divergens.

3.6.10 Példa. A $\sum \frac{1}{n\cdot \ln n \cdot \ln\ln n}$ sor divergens. Az $f(x) := \frac{1}{x\cdot \ln x\cdot \ln\ln x}$, $x \in [3, \infty)$ függvényre

$$\frac{f(e^x)\cdot e^x}{f(x)} = \frac{\frac{1}{e^x x \ln x}\cdot e^x}{\frac{1}{x \ln x \ln\ln x}} = \ln\ln x \to \infty,$$

így a sor a Jermakov-kritérium alapján divergens.

3.7. További kritériumok

3.7.1 Tétel (logaritmikus kritérium). *Legyen $\sum (x_n)$ pozitív tagú sor és*

$$L_n := \frac{\ln \frac{1}{x_n}}{\ln n}, \ n \in \mathbb{Z}^+, \ n \geq 2.$$

(i) Ha $\liminf L_n > 1$, akkor $\sum (x_n)$ konvergens.

(ii) Ha egy indextől $L_n \leq 1$, akkor $\sum (x_n)$ divergens.

Bizonyítás.

(i) Ha $\liminf L_n > 1$, akkor létezik olyan $\alpha \in \mathbb{R}^+$ és $N \in \mathbb{Z}^+$, melyekre

$$\frac{\ln \frac{1}{x_n}}{\ln n} \geq 1 + \alpha, \; n \geq N,$$

$$-\ln x_n \geq (1+\alpha) \ln n \qquad / \cdot (-1)$$

$$\ln x_n \leq -(1+\alpha) \ln n = \ln \frac{1}{n^{1+\alpha}}, \; n \geq N.$$

Az exponenciális függvény szigorú monoton növekedése alapján adódik

$$x_n \leq \frac{1}{n^{1+\alpha}}, \; n \geq N.$$

Mivel a $\sum \left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right)$ hiperharmonikus sor $\alpha \in \mathbb{R}^+$ esetén konvergens, így a majoránskritérium következményeként a $\sum (x_n)$ sor is konvergens.

(ii) A divergenciafeltétel is hasonló módon bizonyítható. Ha egy N indextől

$$\frac{\ln \frac{1}{x_n}}{\ln n} \leq 1,$$

akkor

$$-\ln x_n \leq \ln n, \; n \geq N,$$

$$x_n \geq \frac{1}{n}, \; n \geq N.$$

A $\sum \left(\frac{1}{n}\right)$ harmonikus sor divergens, így a minoránskritérium következményeként $\sum (x_n)$ is divergens. $\square$

3.7.2 Példa. A $\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$ sor divergens.

$$L_n := \frac{\ln (\ln n)^{\ln \ln n}}{\ln n} = \frac{(\ln \ln n)^2}{\ln n}, \; n \geq 2.$$

A l'Hospital-szabályt alkalmazva (a számláló és a nevező határértéke is végtelen)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln \ln n)^2}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \ln \ln n \cdot \frac{1}{\ln n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \ln \ln n}{\ln n}.$$

A kapott hányadosban a számláló és a nevező határértéke ismét végtelen, ezért újra a l'Hospital-szabály alapján

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 \ln \ln n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{\ln n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\ln n} = 0.$$

Második megoldás: A logaritmusfüggvény injektivitása alapján

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln\ln n)^2}{\ln n} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^2 = 0.$$

A sor a logaritmikus kritérium szerint divergens.

3.7.3 Példa. A $\sum \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$ sor konvergens.

Az $n \geq 3$ esetben

$$L_n := \frac{\ln(\ln\ln n)^{\ln n}}{\ln n} = \frac{\ln n \ \ln\ln\ln n}{\ln n} = \ln\ln\ln n \to \infty,$$

így a logaritmikus kritérium következtében a sor konvergens.

3.7.4 Tétel. *Legyen* $\sum(x_n)$ *pozitív tagú sor.*

(i) Ha $\limsup (x_n)^{\frac{1}{\ln n}} < \frac{1}{e}$, *akkor a* $\sum (x_n)$ *sor konvergens.*

(ii) Ha egy indextől $(x_n)^{\frac{1}{\ln n}} \geq \frac{1}{e}$, *akkor a sor divergens.*

Bizonyítás.

(i) A feltétel következménye, hogy létezik olyan $\varepsilon > 0$, amelyre

$$x_n^{\frac{1}{\ln n}} \leq e^{-1-\varepsilon}, \ n \geq N.$$

A természetes alapú logaritmusfüggvény szigorú monoton növekedése miatt

$$\frac{1}{\ln n} \ln x_n < -1 - \varepsilon,$$

így $x_n < \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$, $n \geq N$. Végül a majoránskritérium következménye a $\sum (x_n)$ sor konvergenciája.

(ii) Egy indextől kezdve

$$x_n^{\frac{1}{\ln n}} \geq \frac{1}{e},$$

$$x_n \geq \left(\frac{1}{e}\right)^{\ln n},$$

$$x_n \geq \frac{1}{n}$$

teljesül, így a minoránskritérium következményeként $\sum (x_n)$ divergens.

3.7.5 Példa. A $\sum \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n\ln n}}$ sor konvergens.

Alkalmazzuk az előbbi kritériumot!

$$\left(\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{2n\ln n}}\right)^{\frac{1}{\ln n}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 n}$$

Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 n} = \frac{1}{e^2} < \frac{1}{e}$ vagyis a sor tényleg konvergens.

4. Hatványsorok

4.1. Bevezető

4.1.1 Definíció. *Ha a_n, $n \in \mathbb{Z}_0$ adott sorozat és $x_0 \in \mathbb{R}$, akkor a $\sum a_n(x-x_0)^n$, $x \in \mathbb{R}$ függvénysort x_0 középpontú hatványsornak nevezzük.*

Az alábbi tételben és az utána következő definícióban legyen $\frac{1}{0} := \infty$ és $\frac{1}{\infty} := 0$.

4.1.2 Tétel (Cauchy-Hadamard). *Legyen $R := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$.*

(i) Ha $|x-x_0| < R$, akkor $\sum a_n(x-x_0)^n$ abszolút konvergens.

(ii) Ha $|x-x_0| > R$, akkor $\sum a_n(x-x_0)^n$ divergens.

4.1.3 Definíció. *A $\sum a_n(x-x_0)^n$ hatványsor konvergenciahalmaza*

$$K := \left\{x \in \mathbb{R} : \sum a_n(x-x_0)^n \text{ konvergens}\right\},$$

összegfüggvénye a

$$D(f) =: K, \quad f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \; x \in D(f)$$

függvény. A hatványsor konvergenciasugara

$$R := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

4.1.4 Tétel. *A hatványsor konvergenciahalmaza (K) intervallum, és*

$$(x_0 - R, x_0 + R) \subset K \subset [x_0 - R, x_0 + R].$$

4.1.5 Tétel. *A* $\sum a_n(x-x_0)^n$ *pozitív konvergenciasugarú hatványsor* f *összegfüggvénye tetszőlegesen sokszor differenciálható a konvergenciahalmaz belső pontjaiban, és ott*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+k)(n+k-1)\cdot\ldots\cdot(n+1)a_{n+k}(x-x_0)^n.$$

4.1.6 Definíció. *Ha* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *függvény* n*-szer differenciálható az* x_0 *pontban, akkor a*

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

polinomot az f *függvény* x_0 *középpontú* n*-edik Taylor-polinomjának nevezzük.*

4.1.7 Definíció. *Legyen az* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *függvény akárhányszor differenciálható az* $x_0\in\mathbb{R}$ *pontban. A*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

hatványnysort az f *függvény* x_0 *középpontú Taylor-sorának nevezzük.*

4.1.8 Tétel (Taylor-formula a maradéktag Lagrange-féle alakjával). *Legyen az* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *függvény* $(n+1)-$*szer differenciálható az* $[x_0,x]$ *intervallumon. Ekkor van olyan* $\xi\in(x_0,x)$ *szám, amelyre*

$$R_n(x) := f(x)-T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

4.1.9 Következmény. Minden hatványsor az összegfüggvényének a Taylor-sora.

4.2. A Taylor-sorba fejthetőség szükséges és elégséges feltétele

4.2.1 Tétel. *Legyen* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in D(f)$. *Az* f *függvény az* x_0 *pont egy környezetében akkor és csak akkor fejthető Taylor-sorba, ha*

(i) x_0 *egy* U *környezetében* f *akárhányszor differenciálható,*

(ii) létezik olyan $A,B\in\mathbb{R}^+$ *és* $N\in\mathbb{Z}^+$, *hogy minden* $n\geq N$ *indexre az* U *környezetben* $|f^{(n)}|\leq AB^n n!$.

Bizonyítás. Az első lépésben azt bizonyítjuk, hogy az adott feltételek elégségesek. Az f függvény x_0 középpontú Taylor-sora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

aminek a konvergenciasugara

$$R := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right|}}.$$

Az (ii) feltételből következik

$$\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right| \leq A \cdot B^n, \ n \geq N,$$

ezért

$$\limsup \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x_0)|}{n!}} \leq \limsup(\sqrt[n]{A} \cdot B) = B.$$

Tehát a Taylor-sor konvergens az $U := (x_0 - \frac{1}{B}, x_0 + \frac{1}{B})$ környezetben. Az $n-$edik Taylor-formula maradéktagjának Lagrange-féle alakja $x \in U$ esetén

$$R_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

ahol ξ alkalmas x_0 és x közötti érték.

$$|R_n(x)| \leq \frac{AB^{n+1}(n+1)!}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} = A(B|x-x_0|)^{n+1}, \ x \in U,$$

ezért $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Ebből következik $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x) = f(x)$, vagyis az U környezetben az f függvényt előállítja az x_0 középpontú Taylor-sora.

A második lépésben a feltételek szükségességét kell belátnunk. Tegyük fel, hogy f az x_0 pont U_0 környezetében Taylor-sorba fejthető, azaz

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \ x \in U_0.$$

Létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre $U := (x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta) \subset U_0$. A 4.1.5. tétel miatt az összegfüggvény tetszőlegesen sokszor differenciálható U_0-ban (teljesül az (i) feltétel), továbbá

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-k)!}(x-x_0)^{n-k}, \ x \in U.$$

Ekkor a következő egyenlőtlenség írható fel:

$$|f^{(k)}(x)| \le \sum_{n=k}^{\infty} \frac{|f^{(n)}(x_0)|}{(n-k)!}|x-x_0|^{n-k}, \ x \in U.$$

Tudjuk, hogy $x_0 + \delta \in U$ szerint $\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\delta^n$ konvergens, ezért a tagok sorozata nullához tart, így az abszolút értékeik sorozata korlátos. Ha egy felső korlátot $C \in \mathbb{R}^+$ jelöl, akkor

$$|f^{(n)}(x_0)| \le \frac{Cn!}{\delta^n}, \ n \in \mathbb{Z}_0.$$

Ha $|x-x_0| < \frac{\delta}{2}$, akkor az alábbi egyenlőtlenség teljesül:

$$|f^{(k)}(x)| \le \sum_{n=k}^{\infty} \frac{|f^{(n)}(x_0)|}{(n-k)!}|x-x_0|^{n-k} \le \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\frac{Cn!}{\delta^n}}{(n-k)!} \cdot \left(\frac{\delta}{2}\right)^{n-k}$$

$$\le \frac{Ck!}{\delta^k}\left(1 + \frac{k+1}{2 \cdot 1!} + \frac{(k+1)(k+2)}{2^2 \cdot 2!} + \ldots + \frac{(k+1) \cdot \ldots \cdot n}{2^{n-k} \cdot (n-k)!} + \ldots\right). \qquad (*)$$

A binomiális együtthatókra érvényes az alábbi összefüggés $k \in \mathbb{Z}_0, \ i \in \mathbb{Z}^+$ esetén:

$$\binom{-(k+1)}{i} := \frac{\big(-(k+1)\big)\big(-(k+2)\big)\ldots\big(-(k+i)\big)}{i!} =$$

$$= (-1)^i \frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+i)}{i!}.$$

Ezt az összefüggést $k, \in \mathbb{Z}_0, \ n \in \mathbb{Z}^+, \ n \ge k+1$ esetén az $i := n-k$ értékre alkalmazva kapható

$$\binom{-(k+1)}{n-k} = (-1)^{n-k}\frac{(k+1)(k+2)\ldots n}{(n-k)!}.$$

A $(*)$ felső becslésben binomiális sort felismerve $x \in \mathbb{R}, \ |x-x_0| < \frac{\delta}{2}$ esetén

$$|f^{(k)}(x)| \le \frac{Ck!}{\delta^k}\Bigg(1 + \underbrace{\frac{-(k+1)}{1!}}_{\binom{-(k+1)}{1}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \underbrace{\frac{(k+1)(k+2)}{2!}}_{\binom{-(k+1)}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots$$

$$+ \underbrace{(-1)^{n-k}\frac{(k+1)(k+2) \cdot \ldots \cdot n}{(n-k)!}}_{\binom{-(k+1)}{n-k}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k} + \ldots\Bigg) = \frac{Ck!}{\delta^k} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-(k+1)} = 2C \cdot \left(\frac{2}{\delta}\right)^k \cdot k!.$$

Tehát $A := 2C, \ B := \frac{2}{\delta}$ és $U := (x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2})$ esetén az (ii) feltétel teljesül. $\square$

4.3. Példák

4.3.1 Példa. A $\sum \frac{n!}{n^n} x^n$ hatványsor $|x| < e$ esetén konvergens, $|x| \geq e$ esetén divergens.

Alkalmazzuk a hányadoskritériumot! Legyen rögzített $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$x_n := \frac{n!}{n^n} x^n, \ n \in \mathbb{Z}^+.$$

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} x^{n+1}}{\frac{n!}{n^n} x^n}\right| = \frac{|x|}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}, \ n \in \mathbb{Z}^+$$

alapján $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{x_{n+1}}{x_n}| = \frac{|x|}{e}$. Ebből következik, hogy $|x| < e$ esetén konvergens, míg $|x| > e$ esetén divergens a sor. Ha $|x| = e$, akkor

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > 1, \ n \in \mathbb{Z}^+.$$

Így $|x_n|$ monoton növő pozitív tagú sorozat, ami nem tart 0-hoz, ezért (x_n) nem nullsorozat. Tehát $\sum (x_n)$ divergens.

4.3.2 Példa. A $\sum \frac{n^n}{n!} x^n$ hatványsor konvergenciahalmaza $[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$.

Legyen rögzített $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$x_n := \frac{n^n}{n!} x^n, \ n \in \mathbb{Z}^+.$$

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{(n+1)^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n x^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n |x|, \ n \in \mathbb{Z}^+$$

alapján $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{x_{n+1}}{x_n}| = e|x|$. A hányadoskritériumot alkalmazva a sor konvergens, ha $|x| < \frac{1}{e}$, és divergens, ha $|x| > \frac{1}{e}$. Az $x = \frac{1}{e}$ esetben

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} < 1, \ n \in \mathbb{Z}^+$$

adódik, tehát az (x_n) sorozat monoton fogyó és pozitív tagú. Alulról becsülve a hányadost az

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} > \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\frac{n+1}{n}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$$

egyenlőtlenség írható fel. Így a hányados-minoráns kritérium következményeként a $\sum (x_n)$ sor divergens.

Az $x = -\frac{1}{e}$ esetben $\sum(-1)^n \frac{n^n}{e^n n!}$ váltakozó előjelű tagokból álló sor és $a_n := \frac{n^n}{e^n n!}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ monoton fogyó sorozat. Ha megmutatjuk, hogy az (a_n) sorozat nullához tart, akkor a Leibniz-kritérium szerint konvergens a sor. Ezt indirekt módon bizonyítjuk, vagyis feltesszük, hogy a pozitív tagú monoton fogyó (a_n) sorozat határértéke pozitív:

$$a := \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{e^n n!} \in \mathbb{R}^+.$$

A páros indexű részsorozat határértéke is a, ezért

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{(a_n)^2} = \frac{1}{a} \in \mathbb{R}^+.$$

Az előbbi hányadost átalakítva

$$\frac{a_{2n}}{(a_n)^2} = \frac{\frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}(2n)!}}{\left(\frac{n^n}{e^n n!}\right)^2} = \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}},\ n \in \mathbb{Z}^+.$$

Bizonyítom a következő alsó becslést:

$$\frac{4^n}{\binom{2n}{n}} > \sqrt{\frac{n+1}{2}},\ n \in \mathbb{Z}^+. \tag{*}$$

Ezzel ekvivalens

$$\frac{16^n}{\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^2} > \frac{n+1}{2},\ n \in \mathbb{Z}^+$$

és

$$\frac{2 \cdot 16^n (n!)^4}{((2n)!)^2} > n+1,\ n \in \mathbb{Z}^+.$$

Az utóbbi egyenlőtlenséget teljes indukcióval látom be. Az $n = 1$ értékre igaz, az indukciós lépés pedig

$$\frac{2 \cdot 16^{n+1}\big((n+1)!\big)^4}{\big((2n+2)!\big)^2} = \frac{2 \cdot 16^n \cdot (n!)^4}{\big((2n)\big)^2!} \cdot \frac{16(n+1)^4}{(2n+1)^2(2n+2)^2} >$$

$$> (n+1) \cdot \frac{16(n+1)^4}{(2n+1)^2(2n+2)^2} = \frac{4(n+1)^3}{(2n+1)^2} > n+2,\ n \in \mathbb{Z}^+.$$

Az utolsó egyenlőtlenség azért teljesül, mert ekvivalens vele

$$4(n+1)^3 > (n+2)(2n+1)^2,\ n \in \mathbb{Z}^+,$$

$$4(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) > 4n^3 + 12n^2 + 9n + 2,\ n \in \mathbb{Z}^+,$$

$$3n + 4 > 2,\ n \in \mathbb{Z}^+.$$

A (*) egyenlőtlenségből következik $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{(a_n)^2} = \infty$, ami ellentmond az indirekt feltevésnek. $\square$

4.3.3 Példa. A $\sum \frac{1}{2n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+1}$ hatványsor $|x| \leq 1$ esetén konvergens, $|x| > 1$ esetén divergens.

Legyen $a_n := \frac{1}{2n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{2n+3}\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}|x|^{2n+3}}{\frac{1}{2n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}|x|^{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n+3}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\,x^2 \to x^2.$$

Ebből a hányadoskritériumot alkalmazva az következik, hogy a sor konvergenciasugara 1. A végpontok vizsgálata céljából igazoljuk a következő felső becslést:

$$\frac{1}{2n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \leq \frac{1}{(2n+1)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},\ n \in \mathbb{Z}^+. \tag{*}$$

A

$$\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1},\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

egyenlőtlenséget összeszorozva az eredmény

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},\ n \in \mathbb{Z}^+,$$

amit átalakítva

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}},\ n \in \mathbb{Z}^+.$$

ebből következik a $(*)$ becslés, abból pedig a majoránskritérium alapján kapjuk a sor konvergenciáját $|x| = 1$ esetén.

Második megoldás a végpontokra: Alkalmazzuk a Raabe-kritériumot az $|x| = 1$ esetben!

$$R_n := n\Big(\frac{2n+3}{2n+1}\cdot\frac{2n+2}{2n+1} - 1\Big) = \frac{n(6n+5)}{(2n+1)^2} \to \frac{3}{2} > 1,$$

ezért a sor abszolút konvergens a konvergenciaintervallum mindkét végpontjában.

4.3.4 Példa (Binomiális sor). Legyen $\beta \in \mathbb{R}$ és vizsgáljuk a $\sum \binom{\beta}{n}x^n$ hatványsor konvergenciáját!

(i) Ha $\beta \in \mathbb{Z}_0$, akkor a sor abszolút konvergens $\mathbb{R}$ minden pontjában.

(ii) Ha $\beta \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Z}^+$ akkor a sor abszolút konvergens a $[-1, 1]$ intervallum pontjaiban, másutt divergens.

(iii) Ha $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \leq -1$, akkor a sor abszolút konvergens a $(-1, 1)$ intervallumon, másutt divergens.

(iv) Ha $\beta \in (-1,0)$, akkor a sor abszolút konvergens a $(-1,1)$*intervallumon*, feltételesen konvergens $x=1$ esetén, másutt divergens.

Legyen $a_n := \binom{\beta}{n}$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Ha $\beta \notin \mathbb{Z}_0$, akkor

$$\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} = \frac{\frac{\beta(\beta-1)\cdot\ldots\cdot(\beta-n)}{(n+1)!}x^{n+1}}{\frac{\beta(\beta-1)\cdot\ldots\cdot(\beta-n+1)}{n!}x^n} = \frac{\beta-n}{n+1}x,\ n \in \mathbb{Z}^+.$$

Ezért ha $\beta \notin \mathbb{Z}_0$, akkor

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|,$$

amiből a hányadoskritérium alapján következik, hogy $|x| < 1$ esetén a sor abszolút konvergens, $|x| > 1$ esetén pedig divergens. A hatványsor konvergenciasugara tehát 1.

(i) $\beta \in \mathbb{Z}_0$ és $n \geq \beta$ esetén $\binom{\beta}{n} = 0$, ezért a $\sum \binom{\beta}{n}x^n$ sor abszolút konvergens minden $x \in \mathbb{R}$ számra.

(ii) $\beta \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Z}^+$ és $n > \beta$ esetén

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n+1}{n-\beta} = 1 + \frac{1+\beta}{n-\beta} = 1 + \frac{1+\beta}{n}\Big(1 + \frac{\beta}{n-\beta}\Big) =$$

$$= 1 + \frac{1+\beta}{n} + \frac{\beta(1+\beta)}{n(n-\beta)} = 1 + \frac{1+\beta}{n} + \frac{1}{n^2}\frac{n\beta(1+\beta)}{n-\beta}. \qquad (*)$$

A $\lambda := 1$, $\mu := 1+\beta > 1$ értékkel, és a $\theta_n := \left(\frac{n\beta(1+\beta)}{n-\beta}\right)$ korlátos sorozattal a Gauss-kritérium szerint a binomiális sor abszolút konvergens $|x| = 1$ esetén.

Második megoldás: A Raabe-kritériumot alkalmazva

$$R_n := n\Big(\left|\frac{n+1}{\beta-n}\right| - 1\Big) = (\beta+1)\frac{n}{n-\beta} \to \beta + 1 > 1$$

alapján $|x| = 1$ esetén abszolút konvergens a binomiális sor.

(iii) $\beta \leq -1$ esetén

$$|a_n| = \left|\frac{\beta(\beta-1)\cdot\ldots\cdot(\beta-n+1)}{n!}\right| = \frac{|\beta|}{1}\cdot\frac{|\beta|+1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{|\beta|+(n-1)}{n} \geq 1,$$

így (a_n) nem tart nullához, következésképp a $\sum a_n x^n$ hatványsor $|x| = 1$ esetén divergens.

(iv) $\beta \in (-1,0)$, esetén $1 > -\beta > 0$, és így minden $k > 0$ egészre

$$1 + k > -\beta + k > k. \tag{**}$$

teljesül. Most

$$a_n = \frac{\beta(\beta-1)\cdot\ldots\cdot(\beta-(n-1))}{n!} = (-1)^n \frac{-\beta(-\beta+1)\cdot\ldots\cdot(-\beta+(n-1))}{n!}.$$

Legyen

$$b_n := \frac{-\beta(-\beta+1)\cdot\ldots\cdot(-\beta+(n-1))}{n!},$$

ahol $n \geq 1$ és $b_0 = 1$. Ezek után a (**) egyenlőtlenségből következik, hogy $0 < b_n < 1$, ezenfelül

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n-\beta}{n+1} < 1.$$

Innen láthatjuk, hogy (b_n) pozitív, monoton csökkenő sorozat. Írjuk fel a (b_n) sorozatot a következő alakban:

$$b_n := \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{b_2}{b_1} \cdot b_1, \ n > 1.$$

Alkalmazva a logaritmus függvény tulajdonságait, kapjuk az

$$\ln b_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\Big(\frac{b_k}{b_{k-1}}\Big) \leq \sum_{k=2}^{n} \Big(\frac{b_k}{b_{k-1}} - 1\Big) =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \Big(\frac{-\beta+k-1}{k} - 1\Big) = (-\beta-1)\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

egyenlőtlenséget, ahol felhasználtuk, hogy $0 < x < 1$ esetén $\ln x < x - 1$. Mivel $-\beta - 1 < 0$, és $\sum\big(\frac{1}{k}\big)$ divergens, ezenfelül $\lim\limits_{n\to\infty} \ln b_n = -\infty$, ezért $b_n \to 0$. Végül használjuk fel a Leibniz-kritériumot az $x = 1$ pontbeli konvergencia eldöntésére:

$$\sum a_n = \sum (-1)^n b_n,$$

tehát a sor konvergens. Ha $\sum |a_n|$ sor viszont divergens, mert $\beta < 0$ esetén a $(*)$ egyenlőségben a Gauss-kritérium divergenciafeltétele teljesül ($\lambda := 1,\ \mu := 1+\beta < 1$, és $\theta_n := \big(\frac{n\beta(1+\beta)}{n-\beta}\big),\ n \in \mathbb{Z}^+$ korlátos). Tehát a konvergencia feltételes. Az $x = -1$ pontban a sor

$$\sum a_n(-1)^n = \sum |a_n|,$$

ami az előzőek szerint divergens.

5. Összefoglalás

A célom e szakdolgozattal az volt, hogy feldolgozzam az analízisbeli sorelmélet egy fontos problémáját, mégpedig azt, milyen kritériumokkal dönthető el egy sorról, hogy konvergens vagy divergens. Ezen kritériumok gyakorlati alkalmazhatóságát példákon keresztül mutattam be, adtam példát olyan sorokra is, amelyek konvergenciája bizonyos kritériumokkal levezethetőek, míg másokkal nem, ezzel mutatva meg azt, hogy egyes kritériumok erősebbek, ellenben mások gyengébbek, vagy speciális eseteik más kritériumoknak. Szakdolgozatomban találhatóak egyszerűbb és bonyolultabb példák egyaránt. Ezek megoldása során arra törekedtem, hogy a lehetőségekhez mérten a legelemibb matematikai apparátust használjam. Ez természetesen a bizonyításokra is igaz, hiszen egy bizonyítás akkor a legszebb, ha csak azt a fogalomkört használja, melyben a tétel meg lett fogalmazva. Az itt fellelhető kritériumokon kívül számos létezik. Szakdolgozatom másik fő részében, a hatványsorok konvergenciájával foglalkoztam. Bizonyítottam egy meglehetősen fontos tételt a hatványsorok Taylor-sorba fejthetőségének szükséges és elégséges feltételéről. Mutattam példákat a hatványsorok konvergenciájának, ill. divergenciájának eldöntésére. Végezetül, fellelhető a függelékben hat matematikus életrajza, akik nélkül e tudományág fejlődése váratott volna még magára.

6. Függelék

6.1. Életrajzok

Jean Le Rond d'Alembert (1717. November 16. – 1783. Október 29.) francia matematikus, mérnök, fizikus és filozófus. Egyike volt a korai francia enciklopédia, az *Encyclopédie* szerkesztőinek.

Claudine Guérin de Tencin írónő, és Louis-Camus Destouches lovag törvénytelen gyermekeként született Párizsban. Anyja pár nappal születése után a Saint-Jean-le-Rond de Paris templom lépcsőjén hagyta. Árvaházba került, de nem sokkal utána örökbefogadta egy üveges mester felesége. Taníttatását édesapja titokban fizette egészen haláláig 1726-ig. Jean le Rond-t először Daremberg néven anyakönyvezték, ezt később változtatta meg a d'Alembert névre.

1. ábra. Jean le Rond d'Alembert

D'Alembert először magániskolába járt. Tizenkét évesen a Quatre-Nations (Mazarin) jansenista iskolába iratták, ahol 1735-ig filozófiát, jogot és művészeteket tanult. Később beiratkozott a jogi iskolába, amit 1738-ban el is végzett. 1739 júliusában jelentette meg első cikkeit matematika tárgykörben, rámutatva a tévedésekre, amiket *Charles René Reynaud L'analyse démontrée* címmel a Francia Akadémia számára írt munkájában fedezett fel. Második tudományos munkáját, a folyadékok mechanikája tárgykörében jelentette meg, 1740-ben *Memoire sur le refraction des corps solides* címmel. Az Ő nevéhez fűződik a hányadoskritérium.

D'Alembert éveken át betegeskedett, halálát hólyagos betegség okozta. Miután nem volt hívő, d'Alembert-t jelöletlen tömegsírba temették.

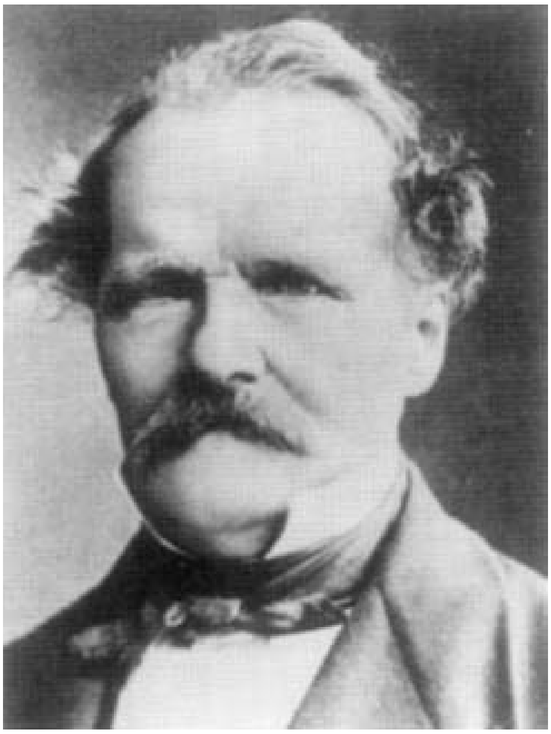
Niels Henrik Abel (1802. Augusztus 5. Findo-szigetén, Stavanger közelében, Norvégia - 1829. Április 6. Froland, Norvégia) norvég matematikus. Abel a teológus és filológus Soren Georg Abelnek, és Ane Marie Simonsonnak a fia.

Abel 1821-ben ösztöndíjjal beiratkozott Christiania (ma Osló) egyetemére, amit 1822-ben el is végzett. 1824-ben publikálta a ma Ruffini-Abel-tétel néven ismert eredményt. Ez a cikk egy ösztöndíjat hozott számára, amelynek révén eljutott Németországba, Itáliába és Franciaországba. Foglalkozott a magasabb fokú egyenletek megoldóképletének problémájával és a csoportokkal (Abel-csoport), megtalálta az ötödfokú egyenletek gyökképletét, vizsgálta a sorok konvergenciáját (Abel-kritérium), az ún. Abel-féle integrálokat és az elliptikus függvényeket is.

2. ábra. Niels Henrik Abel

1829-ben tuberkulózisban halt meg.

Ernst Eduard Kummer (1810. Január 29. – 1893. Május 14.) német matematikus. Jártas az alkalmazott matematikában. Kummer a német hadsereg képzett ballisztikai tisztje volt. Tíz évig tanított gimnáziumban, ahol Leopold Kronecker matematikai karrierje inspirálta.



3. ábra. Ernst Eduard Kummer

Kummer Sorauban, Brandenburg (Poroszország része) született. Első házasságát Ottilie Mendelssohnnal, Nathan Mendelssohn és Henriette Itzig lányával kötötte. Ottilie unokatestvére volt Rebecca Mendelssohn Bartholdynak, aki a matematikus Peter Gustav Lejeune Dirichlet felesége volt. A második felesége, Bertha Ottilia, anyai unokatestvére. Lányát Mariet Hermann Schwarz, német matematikus vette feleségül. Kummer, a matematika számos területének fejlődéséhez járult hozzá. Maradandót alkotott a számelméletben, algebrában, analízisben egyaránt. Szintén Ő alkotta meg a róla elnevezett Kummer-kritériumot. Életcéljául a nagy Fermat-tétel bebizonyítását tűzte ki. 1843-ban már bemutatott egy bizonyítást Dirichlet-nek, de az hibát talált benne. A hibát korrigálandó Kummer megalkotta az ideálok elméletét, és így sikerült igazolnia a sejtést az úgynevezett reguláris prímekre. Végül 1857-ben sikerült a Fermat-sejtést minden 100-nál kisebb kitevőre igazolnia.

Kummer 1890-ben vonult vissza az oktatástól és matematikától, három évvel később hunyt el Berlinben.

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805. Február 13. Francia Császárság, ma: Németország, Düren- 1859. Május 5.Hannover, Göttingen) német matematikus. A Breslaui (1827) és a Berlini Egyetemen (1828-1855) tanított, majd 1855-ben Karl Friedrich Gauss örökébe lépett a Göttingeni Egyetemen. 1937-ben felvetette a függvény modern fogalmát vagyis, hogy $y = f(x)$ függvényben minden x-hez egyetlen y tartozik. A mechanikában a potenciálelmélettel foglalkozott. Megalkotta a Dirichlet-kritériumot. Összegyűjtött műveit két kötetben adták közre: *Gesammelte Werke* (1889, 1897). Ferdinand Eisenstein, Leopold Kronecker, és Rudolf Lipschitz is Dirichlet tanítványai voltak.

4. ábra. Peter Gustav Lejeune Dirichlet

1859-ben Göttingenben (Hannover) halt meg.

Carl Friedrich Gauss (1777. Április 30. - 1855. Február 23.) német matematikus és természettudós. A matematika számos területének fejlődéséhez járult hozzá, így az algebrához, számelmélethez, analízishez, differenciálgeometriához, a geodéziához, a mágnesességhez, az asztronómiához és az optikához. A halála után agyát kioperálták, és Robert Wagner tanulmányozta. Megállapította, hogy 1492 gramm tömegű, és 219588 négyzetcentiméter felszínű. Továbbá magas fejlettségi szintű agytekervényeket is talált benne.

5. ábra. Carl Friedrich Gauss

Gauss a németországi Braunschweig-Lüneburgi hercegségben Braunschweigben született, alacsonyabb osztálybeli szülők egyetlen gyermekeként. Tanulmányait Collegium Carolinumban kezdte, innen a göttingeni egyetemre ment. 1796-ban bebizonyította a szabályos sokszögek szerkeszthetőségére vonatkozó tételét. Még ebben az évben megteremtette a moduláris számelméletet, bizonyította híres kvadratikus reciprocitásról szóló állítását. Élete során négy bizonyítást adott az algebra alaptételére. Az Ő nevéhez fűződnek többek közt: húsvétképlet, Gauss-féle gravitávios állandó, legkisebb négyzetek módszere, normális eloszlás, Gauss-Markov tétel, Gauss-Seidel módszer, Gauss elimináció. Gauss is foglalkozott a sorok konvergenciáival, ennek eredményeképp született meg a Gauss-kritérium.

Göttingenben hunyt el, Hannover államban.

Baron Augustin-Louis Cauchy (1789. Augusztus 21. - 1857.Május 23.) francia matematikus. Cauchy teremtette meg a matematikai bizonyítások precíz, szabatos formáját. Számos fontos tétel fűződik a nevéhez a komplex függvénytanben, absztrakt algebrában, differenciálegyenletek elméletében. Elkezdte a permutációs csoportok vizsgálatát.

6. ábra. Augustin-Louis Cauchy

Dijonban született jómódú polgári család első gyermekeként. Később két testvére született. Apja a király szolgálatában álló ügyvéd volt Párizsban. 1818-ban feleségül vette Aloise de Buret, akit apja talált Cauchynak, mint lehetséges feleséget. Házasságukból két lány született. Szilárd alapokra fektette a konvergencia, sorozat, határérték fogalmát. Definiálta egy sor konvergenciájának pontos feltételét. A hullámok terjedéséről írt művéért megkapta a Francia Tudományos Akadémia első helyezettjének járó díját. Zsenialitását jelzi, hogy élete során 789 cikket írt, és életműve a *Euvres complétes d'Augustin Cauchy*, 27 kötetes. A kortársak véleményét Cauchyról talán Abel norvég matematikus fogalmazta meg a legtömörebben: *„...Cauchy őrült, és ez ellen semmit nem lehet tenni. De ma Ő az egyetlen ember a világon, aki igazán ért a matematikához..."*

1857. Május 23-án hajnali négy órakor hunyt el szűk családi körben, a Párizs melletti Sceauxban.

Hivatkozások

[1] FREY TAMÁS: Műszaki matematikai gyakorlatok B. VI.:Végtelen sorozatok, sorok és szorzatok:, *Tankönyvkiadó*, Budapest, 1956

[2] NÉMETH JÓZSEF: Előadások a végtelen sorokról, *Polygon*, Szeged, 2002

[3] W. J. KACZOR, M. T. NOWAK: Problems in Mathematical Analysis 1: Real Numbers, Sequences and Series, *American Mathematical Society*, Providence, R.I, 2000

[4] N.M.GJUNTER, R.O.KUZMIN: Felsőbb matematikai példatár 3.rész, *Tankönyvkiadó*, Budapest, 1952

[5] SZILÁGYI TIVADAR: Végtelen sorok, hatványsorok, http://bme.ysolt.net/2_felev/Matek_A2/vegtelen_sorok.pdf

[6] LACZKOVICH MIKLÓS, T.SÓS VERA, SIMONOVITS MIKLÓS : Analízis I., *Nemzeti Tankönyvkiadó*, Budapest , 2005

[7] LACZKOVICH MIKLÓS, T.SÓS VERA, SIMONOVITS MIKLÓS : Analízis II., *Nemzeti Tankönyvkiadó*, Budapest , 2007

[8] B.P. GYEMIDOVICS: Matematikai analízis, *Tankönyvkiadó*, Budapest, 1974

[9] LASKO I.I., BOJARCHUK A. K., GAJ JA. G., KALAJDA A. F.: Matematicheskij analiz II., *Vishha Shkola*, Kiev, 1985

[10] MARKUSEVIC, ALEKSEJ IVANOVIC : Teoria analiticeskih funkcij , *Nauka* , Moskva, 1968

[11] http://hu.wikipedia.org/wiki/Jean_le_Rond_d'Alembert

[12] http://members.iif.hu/visontay/ponticulus/jegyzetek/eletrajzok/k.html

[13] http://de.wikipedia.org/wiki/Ernst_Eduard_Kummer

[14] http://hu.wikipedia.org/wiki/Niels_Henrik_Abel

[15] http://hu.wikipedia.org/wiki/Peter_Gustav_Lejeune_Dirichlet

[16] http://hu.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss

[17] http://hu.wikipedia.org/wiki/Augustin_Cauchy

[18] http://en.wikipedia.org/wiki/Augustin-Louis_Cauchy

[19] http://www.epito.bme.hu/me/oktatas/feltoltesek/BMEEOTMAT04/cauchy.pdf

7. Köszönetnyilvánítás

Végül szeretném köszönni konzulensemnek, Pfeil Tamásnak, hogy áldozatos munkájával, tanácsaival segítette szakdolgozatom létrejöttét.