

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

---

KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK NUMERIKUS  
MEGOLDÁSA  
SZAKDOLGOZAT

Soós Ivett

Matematika B.Sc., Matematikai elemző szakirány

Témavezető: Mincsovics Miklós

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék



Budapest 2010

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezető</b>	<b>2</b>
<b>2. Differenciálegyenletek</b>	<b>3</b>
2.1. A differenciálegyenletek típusai . . . . .	3
2.2. <b>A közönséges differenciálegyenletek</b>	
<b>általános alakja</b> . . . . .	3
2.2.1. A KDE típusai . . . . .	4
2.3. A differenciálegyenletek stabilitása . . . . .	5
2.3.1. Stabilitási alapfogalmak . . . . .	5
2.3.2. Példa . . . . .	6
2.4. Differenciálegyenletek a gyakorlatban . . . . .	6
2.4.1. Példa 1 . . . . .	6
2.4.2. Példa 2 . . . . .	7
2.5. A differenciálegyenletek megoldhatósága . . . . .	8
2.6. <b>A megoldandó probléma:</b> . . . . .	9
<b>3. Numerikus módszerek</b>	<b>10</b>
3.1. A numerikus módszerek "jósága" . . . . .	11
3.1.1. A numerikus módszerek hibája . . . . .	11
3.1.2. Numerikus módszerek konvergenciája . . . . .	11
3.1.3. A konvergencia rendje . . . . .	12
3.1.4. Numerikus módszerek 0-stabilitása . . . . .	12
3.1.5. Numerikus módszerek konzisztenciája . . . . .	12
<b>4. A legegyszerűbb megoldások</b>	<b>13</b>
4.1. Az explicit Euler módszer . . . . .	13

4.1.1.	Példa . . . . .	15
4.1.2.	A hibaegyenlet . . . . .	16
4.1.3.	Az explicit Euler módszer konzisztenciája . . . . .	17
4.1.4.	Az Euler módszer lokális hibája . . . . .	17
4.1.5.	Az Euler módszer 0-stabilitása . . . . .	18
4.1.6.	A "jó" lépésköz megválasztása . . . . .	18
4.1.7.	A teszt egyenlet . . . . .	19
4.1.8.	Abszolút stabilitás . . . . .	19
4.1.9.	A-stabilitás . . . . .	19
4.1.10.	Az explicit Euler módszer abszolút stabilitási tartománya . . .	20
4.1.11.	A módszer hiányosságai . . . . .	21
4.2.	Az implicit Euler módszer . . . . .	21
4.2.1.	Az implicit Euler módszer konzisztenciája . . . . .	22
4.2.2.	Az implicit Euler módszer abszolút stabilitási tartománya . .	22
4.2.3.	Merev differenciálegyenletek . . . . .	23
4.2.4.	Példa . . . . .	24
4.2.5.	Az implicit Euler módszer előnyei és hátrányai . . . . .	25
4.3.	Szimmetrikus/ trapéz módszer . . . . .	26
4.3.1.	A szimmetrikus módszer konzisztenciája . . . . .	26
4.3.2.	A trapéz módszer abszolút stabilitási tartománya . . . . .	26
<b>5.</b>	<b>Runge-Kutta típusú módszerek</b>	<b>28</b>
5.1.	A kvadratúra formulák . . . . .	28
5.1.1.	A javított Euler módszer lokális hibája . . . . .	29
5.1.2.	Az RK módszerek 0-stabilitása . . . . .	31
5.2.	Az implicit Runge-Kutta módszerek . . . . .	32
5.2.1.	Az implicit formula előnyei és hátrányai . . . . .	32
5.3.	Az explicit Runge-Kutta formulák . . . . .	32
5.3.1.	Az első rendű Runge-Kutta formulák . . . . .	32
5.3.2.	A megoldhatóság feltételei . . . . .	33
5.3.3.	A másodrendű Runge-Kutta formulák . . . . .	33
5.3.4.	Példák másodrendű formulákra . . . . .	34
5.3.5.	Harmadrendű RK formulák . . . . .	34
5.3.6.	A klasszikus negyed rendű Runge-Kutta formula . . . . .	34

5.3.7. Az explicit Runge-Kutta módszer abszolút stabilitási tartománya	35
5.3.8. RK módszerek összehasonlítása . . . . .	36
<b>6. Összefoglalás</b>	<b>38</b>

# 1. fejezet

## Bevezető

"Bár napjaink matematika könyveiben szinte hemzsegnek az absztrakt szimbólumok, ez azonban éppúgy nem jelenti a matematika lényegét, mint ahogy a zene valódi mibenléte sem a hangjegyek jelölésrendszerében keresendő."

Keith Devlin

A témaválasztásban számomra fontos szerepe volt annak, hogy a matematika olyan területével foglalkozzak, mely közvetlen kapcsolatban áll a gyakorlati problémák megoldásával. A differenciálegyenletek a tudomány szinte minden területén jelen vannak, ezért a megoldhatóságuk nagyon fontos szerepet tölt be mindennapjainkban. Ám a legtöbb esetben ezeket nem olyan egyszerű kiszámítani. Ahogy az idézetben is szerepel, a matematika lényege az ehhez hasonló problémák megoldása, ennek ellenére a következő néhány oldal sem fog szűkölködni "absztrakt szimbólumokban".

## 2. fejezet

# Differenciálegyenletek

### 2.1. A differenciálegyenletek típusai

Egy differenciálegyenlet egy függvény és annak differenciáltja közötti kapcsolatot mutatja meg. Ezek az összefüggések sok esetben a tudomány egyéb területein felmerülő problémák matematikai modelljei. Ezek a modellek a gyakorlatban igen hasznosak, ám elég összetettek is ahhoz, hogy a megoldásuk egzakt legyen. Legyen szó fizikai, biológiai, vagy közgazdaságtani problémáról, biztosan függenek az időtől, vagy esteleg egy másik változó paramétertől, tehát a differenciálegyenletek olyan folyamatokat írnak le, melyek nem diszkrét lépésekben zajlanak.

A differenciálegyenleteknek két fő típusa van, nevezetesen

1. Közönséges differenciálegyenletek
2. Parciális differenciálegyenletek

A fő különbség e két típus között az, hogy a közönséges differenciálegyenletekben (KDE) az ismeretlen egyváltozós, a parciális differenciálegyenletknél pedig többváltozós ismeretlent keresünk. A továbbiakban a közönséges differenciálegyenletekkel fogunk foglalkozni.

### 2.2. A közönséges differenciálegyenletek általános alakja

Nézzük meg először az elsőrendű explicit KDE általános alakját.

**2.2.1. Megjegyzés.** *A differenciálegyenlet rendje a legmagasabb derivált rendje.*

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

ahol  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  adott függvény, és az ismeretlenünk pedig  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**2.2.2. Definíció.** *Legyen  $F : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény. Az  $n$ -ed rendű közönséges differenciálegyenlet általános alakja:*

$$F(t, x(t), x'(t) \dots x^{(n)}(t)) = 0$$

Legyen  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  adott. Az  $n$ -ed rendű explicit közönsége differenciálegyenlet általános alakja

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t) \dots x^{(n-1)}(t))$$

### 2.2.1. A KDE típusai

A közönséges differenciálegyenleteket két nagy csoportra oszthatjuk: lineáris és nemlineáris. Ez a megoldhatóság szempontjából igen fontos, hiszen a nemlineáris egyenletek pontos megoldására nincs bevett módszer, és a közelítő megoldások kiszámítása is komplikáltabb. A lineáris differenciálegyenletek újabb két nagy csoportra oszthatók. Legyen a lineáris elsőrendű KDE általános alakja:

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$$

Két esetet különböztetünk meg:

1. ha  $A(t)$  nem függ  $t$ -től, azaz konstans, így az egyenlet **állandó együtthatós**
2. ha  $A(t)$  függ  $t$ -től, azaz az egyenlet **változó együtthatós**

Az első esetben létezik egzakt megoldási módszer, de legtöbbször csak nagy nehézségek árán tudjuk meghatározni a pontos megoldást. A második esetre nincs olyan bevett módszer, mellyel kiszámíthatnánk a pontos értékeket.

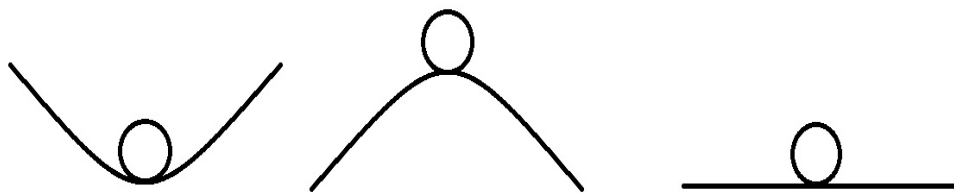
**2.2.3. Megjegyzés.** *A differenciálegyenlet típusa, és megoldhatóságának nehézsége, nyilván a közelítő megoldások pontosságát is befolyásolja.*

## 2.3. A differenciálegyenletek stabilitása

### 2.3.1. Stabilitási alapfogalmak

A stabilitáseméleti alapfogalmak szemléltetésére tekintsük meg először az alábbi egyszerű fizikai példát. Képzeljünk el egy golyót az alábbi 3 egyensúlyi helyzetben:

1. egy gödör alján
2. egy domb tetején
3. egy vízszintes sík felületen



Mindhárom helyzetben egyensúlyban van a golyó (ha nem mozdítjuk meg, helyben marad), azonban ha kicsit elmozdítjuk, majd elengedjük, akkor mindhárom esetben más történik. Az első esetben a golyó visszagurul a gödör aljára. Ezt az egyensúlyi helyzetet nevezzük **asszimptotikusan stabilisnak**. A második esetben a golyó legurul a domboldalon, egyre jobban eltávolodik az eredeti helyzetétől. Ezt az egyensúlyi helyzetet nevezzük **instabilisnak**. A harmadik esetben a golyó ott marad az elmozdítás helyén, azaz nem tér vissza az eredeti helyzetébe, de nem is távolodik el onnan. Ezt az egyensúlyi helyzetet nevezzük **stabilisnak**. Nézzük meg egy példa segítségével, hogy mit is jelentenek ezek a fogalmak a differenciálegyenletek megoldásainak körében.



### 2.3.2. Példa

Legyen  $y'(t) = \lambda y$ , differenciálegyenlet,  $y(0) = y_0$  kezdetiérték feltétellel. Ha ezt az egyenletet integráljuk, akkor az

$$y(t) = e^{\lambda t} \cdot y_0$$

egyenletet kapjuk megoldásként. Nézzük meg milyen egyensúlyi állapotok állnak fenn  $\lambda < 0$ ,  $\lambda > 0$ , illetve  $\lambda = 0$  esetekben.

1.  $\lambda < 0$  esetben, ha  $t \rightarrow +\infty$ , akkor a megoldás határértéke 0, így minden megoldás a 0 egyensúlyi ponthoz közeledik. Ez egy asszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzet.
2.  $\lambda > 0$  esetben, ha  $t \rightarrow +\infty$ , akkor a megoldás határértéke  $\pm\infty$ , azaz minden 0-tól különböző kezdetiérték feltételnek eleget tevő megoldás távolodik 0 egyensúlyi ponttól. Ebben az esetben az 0 egyensúlyi pont instabilis.
3.  $\lambda = 0$  esetben a megoldások konstans függvények, azaz nem is közelednek és nem is távolodnak a 0 egyensúlyi ponttól, azaz a megoldás stabilis.

## 2.4. Differenciálegyenletek a gyakorlatban

A differenciálegyenletek általában akkor jutnak szerephez, amikor olyan folyamatot próbálunk modellezni, mely nem diszkrét lépésekben zajlik (mint mondjuk egy sakkjátszma), hanem az időben folyamatosan változnak az állapotjelzők értékei. Ilyen esetekben vagy megfigyelések utalnak egy mennyiség és megváltozásának kapcsolatára, vagy feltételeznek egy elméleti relációt a jellemzők között. Például a természetben populációk növekedésének üteme általában függ magától a populáció nagyságától. Nézzünk egy ilyen példát a gyakorlatban.

### 2.4.1. Példa 1

Legyen  $x(t)$  a populáció mérete  $t$  időpontban. Most azt fogjuk megvizsgálni, hogy egy adott időintervallumban, milyen mértékkel nő a populáció mérete:

$$x(t+h) - x(t) \approx h \cdot x(t) \cdot a$$

Ebben a modellben nem számolunk a halálózással, csupán a születő utódok számát vesszük figyelembe. Az eltelt időt  $h$ -val jelöljük,  $a$ -val pedig annak a változásnak a mértékét (arányát), mely a növekvő populáció következtében a születő utódok számának növekedését mutatja. A fenti egyenletet átrendezve az alábbi differenciál-egyenletet kapjuk

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = a \cdot x(t)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} x'(t) = a \cdot x(t)$$

Tehát, ha ezt az egyenletet kiintegráljuk, akkor az alábbi megoldáshoz jutunk:

$$x(t) = e^{at} \cdot x_0$$

Ez az egyenlet azonban csak akkor ad reális eredményt, ha kis időintervallumokat vizsgálunk. Ha hosszú távon szeretnénk populációs modelleket vizsgálni, akkor sajnos ennél egy jóval bonyolultabb egyenletre lesz szükségünk. Például, olyan  $a$ -t választunk arányossági tényezőnek, mely függ  $x(t)$ -től is. Például  $a = r \cdot (K - x(t))$ , ahol  $r$  ismét egy arányossági tényező,  $K$  pedig az eltartó képesség, azaz, hogy egy adott terület egy adott populációnak hány tagját képes "eltartani". Sajnos az ilyen típusú egyenletek már jóval nagyobb műveletigénnyel bírnak, mint azt az előző egyszerű példában láthattuk.

## 2.4.2. Példa 2

Ugyancsak a populáció növekedését leíró folyamat, az úgynevezett "róka-nyúl" modell, ahol már nem csak egy populáció nagyságának a változását vizsgáljuk, hanem azt, hogy ha egy területen két különböző faj él, akkor hogyan alakul a populációk mérete. Jelöljük a rókák számát a  $t$  időpontban  $y(t)$ -vel, a nyulakét  $x(t)$ -vel,  $a, b, c, d$  számok pedig pozitív konstansok.

$$x'(t) = a \cdot x(t) - b \cdot x(t)y(t)$$

$$y'(t) = c \cdot x(t)y(t) - d \cdot y(t)$$

Azaz minden egyes találkozási pontnál, a nyulak száma csökken, illetve a rókák száma "nő", azaz az egyed fejlődik a tápláléktól. Természetesen itt is figyelembe vehetünk még több paramétert, például, hogy a populációk növekedése milyen tényezőktől függ stb., amik tovább nehezítik az egyenlet megoldhatóságát.

## 2.5. A differenciálegyenletek megoldhatósága

**2.5.1. Definíció.** *Kezdetiérték feltétel fogalma: Legyen  $y'(t) = f(t, y(t))$  egy differenciálegyenlet. Legyen  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $p_0 \in \mathbb{R}^n$ . Egy  $y$  megoldás teljesíti az  $y(t_0) = p_0$  kezdeti feltételt, ha átmegy a  $(t_0, p_0)$  ponton.*

**2.5.2. Tétel.** *Egy kezdetiérték feladatnak létezik egyértelmű megoldása, ha az  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  folytonos függvény a  $2, 3, \dots, n + 1$  -edik változójában Lipschitz folytonos.*

Tehát a tételből biztosan tudjuk, hogy az adott egyenlet megoldható, ám a differenciálegyenleteket kielégítő megoldásfüggvények csak a legegyszerűbb esetekben fejezhetők ki zárt alakban. Sok esetben szükségtelen is kiszámolni a konkrét megoldásokat, sokkal többet tudhatunk meg a folyamatokról, ha a megoldások kapcsolatait vizsgáljuk. Más esetben szükséges kiszámítani a megoldás konkrét értékeit. Mindkét feladatra számítógépes módszereket használnak, az első inkább kvalitatív, míg a második kvantitatív eredményt szolgáltat.

A differenciálegyenletek megoldási módszereit három nagy csoportba sorolhatjuk, és ebből a három csoportból mindössze csak egy tartalmazza a pontos megoldások kiszámítását.

1. Analitikus megoldási módszerek

Ezek a megoldási módszerek a differenciálegyenlet pontos megoldásának kiszámítására alkalmasak. A probléma csak az, hogy a differenciálegyenleteknek csupán egy kis szeletét adják azok a típusok, melyeknek ismerjük a megoldási módszerét, sőt, ha ismerünk is ilyen módszert, a megoldás kiszámítása sok esetben igen költséges. Így más eszközöket kell keresnünk a megoldás kiszámításához, illetve **közelítéséhez**.

2. Kvázianalitikus módszerek

Ebbe a kategóriába a Banach fixponttételen alapuló iterációs megoldási módszerek tartoznak, ahol

$$\begin{aligned}y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0\end{aligned}$$

kezdetiérték problémát a következő integrálegyenletre írjuk át:

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t y'(s) ds = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

Ekkor a következő közelítő módszerrel készítünk egy iterációs eljárást, azaz egy  $y_1, y_2 \dots$  sorozatot, ahol az  $n + 1$ -edik tag a következőképpen néz ki:

$$y_{n+1}(t) = y_0(t) + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds$$

Csakhogy a fixpont közelítő eljárást minden lépésben közelítő integrálással kell kombinálni, ezért a megoldásunk végül nem egy intervallumon értelmezett függvény lesz, hanem ennek egy diszkrétizált alakja.

### 3. Numerikus módszerek

A numerikus módszerek már elég nagy csoportot ölelnek fel. Ezekről részletesen olvashatunk a következő fejezetekben.

## 2.6. A megoldandó probléma:

Legyen  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , olyan folytonos függvény, mely a  $2, 3, \dots, n + 1$ -edik változójában Lipschitz folytonos. Továbbá legyen  $u_0 \in \mathbb{R}^n$  vektor adott. Keressük meg azt az  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenciálható függvényt, amelyre igaz, hogy

$$u'(t) = f(t, u(t)) \tag{2.1}$$

$$u(0) = u_0 \tag{2.2}$$

kezdeiérték feltétel mellett.

## 3. fejezet

# Numerikus módszerek

A numerikus megoldási módszereknek két főbb osztálya van: az egy- és a több-lépéses módszerek. Az alapvető különbség az, hogy az egylépéses módszerek csupán egy "lépcsőt" használnak fel a már meglévő  $n - 1$  darabból, azaz  $y_n$  kiszámításához mindössze az  $y_{n-1}$  közelítést veszi segítségül. Ezzel szemben a többlépéses módszerek az  $n$ -edik közelítéshez legalább 2, és legfeljebb  $n - 1$  lépcsőt használnak. Az alábbi fejezetekben az egylépéses numerikus módszerek struktúráját, előnyeit és hátrányait fogom bemutatni.

Egy adott módszer attól lesz diszkrét, hogy a közelítő megoldásokat véges sok pontban keressük. A numerikus módszerek esetében, egy adott  $[0, b]$  intervallum  $t_0 < \dots < t_N$  ekvidisztáns felosztását tekintjük. Nézzük meg részletesen, hogyan is épül fel egy numerikus módszer. Legyen

$$\begin{aligned}u'(t) &= f(t, u(t)) \\ u(0) &= u_0\end{aligned}$$

kezdeiérték feltétellel. Koordinátáinként felírva

$$\begin{aligned}u'_i(t) &= f_i(t, u_1(t), \dots, u_n(t)) \\ u_i(0) &= u_{i_0}\end{aligned}$$

Keressük az  $u(t) = [u_1(t), u_2(t) \dots u_n(t)]$  vektort. Tegyük most fel, hogy  $n = 1$ , azaz

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , és keressük az  $u(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt. Definiáljunk egy *rácsháló-függvényt!* Legyen egy tetszőleges  $h > 0$  esetén  $\omega_h := \{t_n = nh \mid n = 0, 1 \dots N\}$ .

Ez lesz az úgy nevezett  $h$  lépésközű rácsháló. Definiáljunk az  $\omega_h$  rácshálón egy  $y_h$  rácshálófüggvényt, és vezessük be a következő jelölést:

$$y_h(t_n) = y_n,$$

azaz,  $y_n$  jelöli azt az értéket, ha a rácshálófüggvényünkbe behelyettesítjük a  $t_n$  értéket. A cél az, hogy ezt az  $y_n$  függvényt úgy válasszuk meg, hogy minél közelebb legyen  $u(t_n)$ -hez,  $\forall t_n \in \omega_h$ -ra. Ez lesz a numerikus módszerek alapja.

### 3.1. A numerikus módszerek "jósága"

A numerikus módszerek pontossága sok paramétertől függ. Az alábbiakban ezeket a tényezőket fogjuk vizsgálni.

#### 3.1.1. A numerikus módszerek hibája

Legyen  $u(t)$  az (2.1)(2.2) feladat pontos megoldása,  $t_i$  pontban  $u(t_i)$ , a továbbiakban jelöljük  $u_i$ -vel. Hasonlóképpen, legyen  $y_i$  a  $t_i$  pontbeli közelítő megoldása az (2.1)(2.2) feladatnak. A két érték közti eltérést, tehát a közelítés hibáját pedig nevezzük  $d_i$ -nek.

$$d_i := |y_i - u_i|,$$

feltéve, hogy  $y_{i-1} = u_{i-1}$ . Ezt nevezzük lokális vagy más néven diszkretizációs hibának. A lokális hiba, ahogy azt a neve is jelzi, azt mutatja meg, hogy egy lépés alatt mekkora hiba keletkezik. A globális hibát pedig definiáljuk úgy, hogy  $e_i = |y_i - u_i|$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , tehát itt már nem csak egy lépés alatt keletkező hibát, hanem  $n$  lépés alatt keletkezőt vizsgálunk.

#### 3.1.2. Numerikus módszerek konvergenciája

Azt mondjuk, hogy egy numerikus módszer által előállított  $y_h(t)$  rácsháló függvény sorozat, finomodó  $h$  lépésközök esetén konvergál az  $y(t)$  (2.1)(2.2) feladat megoldásához, a  $t^* \in I$  pontban, ha:

- $t^* \in \omega_h, \forall h$ -ra
- $\lim_{h \rightarrow 0} |y_h(t_n) - y(t^*)| = 0, (t_n = n \cdot h)$

Általában a numerikus módszert konvergensenek nevezzük, ha konvergens minden  $t^* \in I$  pontban.

### 3.1.3. A konvergencia rendje

$$|y_h(t_n) - y(t^*)| = O(h^p),$$

a konvergencia rendjének nevezzük, ezek szerint a numerikus módszer  $p$ -ed rendben konvergens.

**3.1.1. Megjegyzés.** *A módszer akkor konvergens, ha  $\lim_{h \rightarrow 0} |e_i| = 0$*

**3.1.2. Megjegyzés.** *Egy numerikus módszer csak akkor "jó", ha a módszer konvergens. A konvergenciát két egyszerűbben ellenőrizhető tulajdonsággal lehet garantálni, ezek a 0-stabilitás és a konzisztencia.*

### 3.1.4. Numerikus módszerek 0-stabilitása

Egy numerikus módszer **0-stabil**, ha  $\exists K > 0$ , melyre  $|e_i| \leq K(|e_0| + \sum_{j=1}^n |d_j|)$ ,  $\forall i : 1 \leq i \leq N$ .

### 3.1.5. Numerikus módszerek konzisztenciája

Azt mondjuk, hogy egy numerikus módszer  $p$ -ed rendben konzisztens, ha  $\exists c > 0$  konstans, melyre  $|d_i| \leq c \cdot h^{p+1}$ .

**3.1.3. Tétel.** *Ha egy numerikus módszer  $p$ -ed rendben konzisztens és 0-stabil, akkor  $p$ -ed rendben konvergens.*

A konvergencia általában nehezen megállapítható, hiszen kiszámításához szükséges tudni a globális hibát, és a globális hiba kiszámításához tudni kell a pontos megoldást. A megoldások nyilván nem állnak a rendelkezésünkre, hiszen akkor nem lenne szükség közelítő megoldások kiszámítására. Mivel a konvergenciának kulcsfontosságú szerepe van, hiszen csak akkor "jó" egy adott numerikus módszer, ha az konvergens is, ezért valamilyen módon muszáj információt kapnunk a konvergenciáról. Egy adott módszer 0-stabilitásáról és konzisztenciájáról mindig van információnk, és e két adatból már dönthetünk a konvergenciáról is.

## 4. fejezet

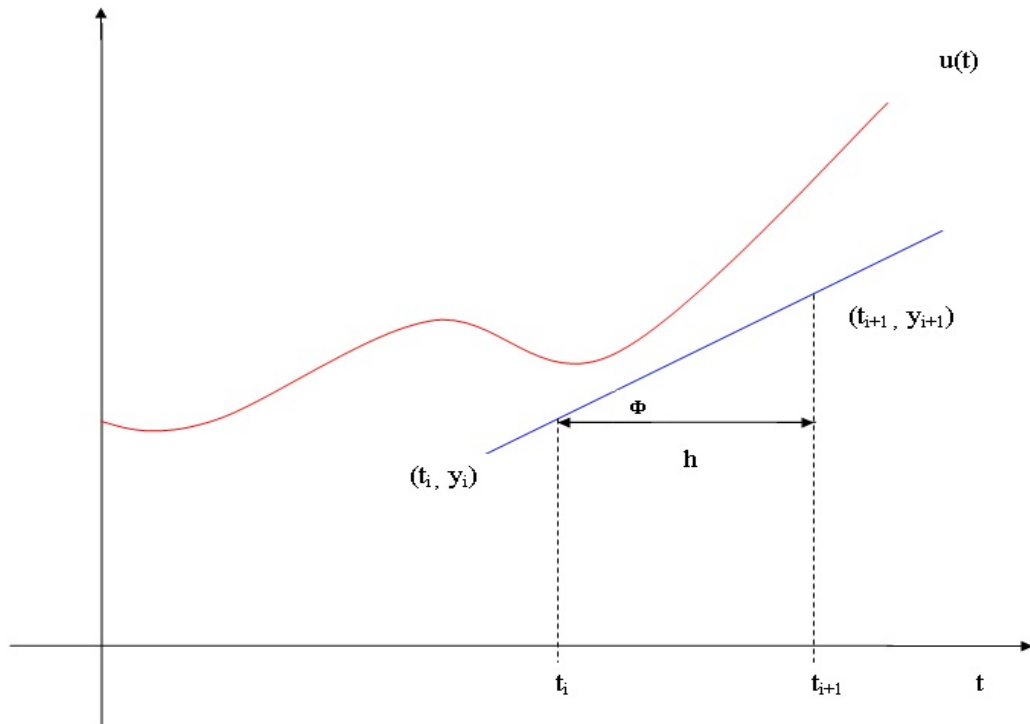
# A legegyszerűbb megoldások

### 4.1. Az explicit Euler módszer

Ennek a módszernek az alapötlete igen egyszerű. Nevezetesen: egy érintő segítségével közelítjük a megoldást a következőképpen:

Húzzuk be az  $y(0) = y_0$  kezdetiérték érintőjét, majd kössük össze egy tetszőleges  $t_1$  ponttal, így megkapjuk az  $(x_1, y_1)$  pontot. Ezek után, ugyanezzel az eljárással, kapjuk meg  $(t_2, y_2), \dots, (t_n, y_n)$  közelítő pontokat. Azaz ha ezt felírjuk általánosan, akkor az ábrán látható  $\Phi$  szög tangensét a következő képpen kaphatjuk meg:





4.1. ábra. Az explicit Euler módszer

$$\operatorname{tg}(\Phi) = \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i}$$

azaz

$$f(t_i, y_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i}$$

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)(t_{i+1} - t_i)$$

ahol  $(t_{i+1} - t_i) = h$  lépésközzel. Egy másik megközelítésből: Legyen a  $[0, b]$  interval-

lum felosztása a következő:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

Legyen  $h_i = t_i - t_{i-1}$  az  $i$ -edik lépésköz. Az egyenlet  $t_n$  időpontbeli pontos megoldását jelöljük  $u(t_n)$ -nel, és a  $t_n$  időpontbeli közelítő megoldását pedig  $y_n$ -nel. A kezdeti érték problémánál, mindig tudjuk, hogy milyen értéket vesz fel a megoldás a  $t_0$  időpontban. Ebben az esetben tegyük fel, hogy ismerjük a  $t_{n-1}$  időpontbeli  $y_{n-1}$  közelítést, és ebből határozzuk meg a  $t_n$ -beli  $y_n$  közelítést.

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(t_n, y_n)$$
$$y(0) = y_0$$

átrendezve, tehát:  $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n)$ . Ezt nevezzük explicit euler módszernek.

#### 4.1.1. Példa

Legyen

$$y'(t) = 3e^{-t} - 0,4y(t)$$
$$y(0) = 5$$
$$y(3) = ?$$
$$h = 3$$

Helyettesítsünk be az Explicit Euler módszer egyenletébe:

$$y_1 = 5 + f(0, 5) \cdot 3$$
$$y_1 = 5 + (3e^{-0} - 0,4 \cdot 5) \cdot 3$$
$$y_1 = 5 + (3 - 2) \cdot 3 = 8$$

Azonban az egyenlet pontos megoldása ebben az esetben 2,763, azaz a numerikus módszer lokális hibája 5,237, ami igen nagy mértékű hibát jelent. Próbáljuk meg a lépésköz csökkentésével, és a lépésszámok növelésével pontosítani a közelítő megoldást. Legyen  $h = 1,5$  és közelítsük a megoldást két lépésben, először  $y(0) \rightarrow y(1,5)$ , majd  $y(1,5) \rightarrow y(3)$ !

**1.lépés**

$$x_0 = 0; y_0 = 5; h = 1,5$$

$$y_1 = 5 + f(0, 5) \cdot 1, 5$$

$$y_1 = 5 + (3e^{-0} - 0, 4 \cdot 5) \cdot 1, 5$$

$$y_1 = 5 + 1 \cdot 1, 5 = 6, 5 = y(1, 5)$$

## 2. lépés

$$x_1 = 1, 5; y_1 = 6, 5; h = 1, 5$$

$$y_2 = 6, 5 + f(1, 5; 6, 5) \cdot 1, 5$$

$$y_2 = 6, 5 + (3e^{-1,5} - 0, 4 \cdot 6, 5) \cdot 1, 5$$

$$y_2 = 6, 5 + (-1, 93061) \cdot 1, 5 = 3, 604 = y(3)$$

Itt a pontos megoldástól való eltérés már mindössze 0,841, és ez az eredmény még tovább csökkenthető, a lépésköz csökkentésével, illetve a lépésszámok növelésével.

### 4.1.2. A hibaegyenlet

Mivel  $y_n$  a pontos megoldás közelítése, ezért felírhatjuk  $y_n = u_n + z_n$  alakban, azaz pontos megoldás + hiba alakban. Helyettesítsük be ezt a formulát az explicit Euler módszer egyenletébe:

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} + \frac{z_{n+1} - z_n}{h} - f(t_n, u_n + z_n) = 0$$

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} - f(t_n, u_n) + f(t_n, u_n) - f(t_n, u_n + z_n) + \frac{z_{n+1} - z_n}{h} = 0$$

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{h} = \frac{-u_{n+1} - u_n}{h} + f(t_n, u_n) - f(t_n, u_n + z_n)$$

Ez az úgynevezett hiba egyenlet, ami felírható  $\Psi_{n,1} + \Psi_{n,2} = 0$  alakban, ahol  $\Psi_{n,1} = \frac{u_{n+1} - u_n}{h} + f(t_n, u_n)$ , a lokális approximációs, vagy más néven reziduális hiba.

Tehát, ha  $\Psi_{n,1}$ -be a pontos megoldást helyettesítjük be, akkor nyilvánvalóan 0-t kapunk. Így a lokális approximációs hiba azt fejezi ki, hogy az adott numerikus módszer milyen pontosan közelíti a folytonos (2.1)(2.2) feladatot. Ezek alapján pontosítsuk a konzisztencia definícióját:

**4.1.1. Definíció.** *Egy numerikus módszer konzisztens, azaz approximálja a folytonos feladatot, ha  $\lim_{h \rightarrow 0} \Psi_{n,1} = 0$ . Nézzük meg, mit kapunk, ha Taylor sorba fejtjük az  $u(t_n)$ -et.*

### 4.1.3. Az explicit Euler módszer konzisztenciája

$$\Psi_{n,1} = \frac{u_{n+1} - u_n}{h} + f(t_n, u_n) =$$

Tudjuk, hogy a lépésköz hossza  $h$ , ezért  $t_{n+1}$  felírható  $t_n + h$  alakban.

$$\frac{u(t_n) - u(t_n) + hu'(t_n) + \frac{1}{2}h^2u''(t_n) + O(h^3)}{h} + u'(t_n) =$$
$$-\frac{1}{2}hu''(t_n) + O(h^2)$$

A konzisztencia rendjére vonatkozó tétel alapján az explicit Euler módszer konzisztens és rendje 1.

### 4.1.4. Az Euler módszer lokális hibája

Az  $i$ -edik lépésben elkövetett lokális hibát jelöljük  $d_i$ -vel, amit nyilván a pontos és a közelítő megoldás különbségeként fogunk meghatározni.

$$d_i = y_i - u_i$$

$$y_{i-1} = h \cdot f(t_{i-1}, y_{i-1}) - u(t_i)$$

$$u(t_{i-1}) = h \cdot f(t_{i-1}, u(t_{i-1})) - u(t_i)$$

$$u(t_{i-1}) = h \cdot f(t_{i-1}, u(t_{i-1})) - u(t_{i-1} + h)$$

Fejtsük Taylor sorba  $u(t_{i-1} + h)$ -t!

$$u(t_{i-1} + h) = u(t_{i-1}) + h \cdot u'(t_{i-1}) + \frac{h^2}{2} \cdot u''(t_{i-1}) + \dots + O(h^3)$$

Ezt behelyettesítve megkapjuk a módszer lokális hibáját:

$$\frac{h^2}{2} \cdot u''(t_{i-1}) + o(h^3) = -\frac{h^2}{2} \cdot u''(t_{i-1}) + O(h^3)$$

Azaz a lokális hiba másodrendű, ami a gyakorlatban azt jelenti, hogy a választott lépésköz zsugorításakor annak második hatványával zsugorodik a hibára adott felső becslés.

#### 4.1.5. Az Euler módszer 0-stabilitása

Ha  $e_i$  (globális hiba) abszolút értékéhez létezik olyan  $K$  konstans, hogy a globális hiba abszolút értéke kisebb legyen, mint  $K(|e_0| + \sum_{j=1}^n |d_j|)$ , akkor a módszer 0-stabil.

$$\begin{aligned} e_{i+1} &= e_i + h(f(t_i, y(t_i)) - f(t_i, y_i)) + d_{j+1} \\ |e_{i+1}| &= |e_i| + h\alpha|e_i| + |d_{j+1}| = \\ &= (1 + h\alpha)|e_i| + |d_{j+1}| \leq (1 + h\alpha)(|e_{i-1}| + h\alpha|e_{i-1}| + |d_j|) + |d_{j+1}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{i+1} &\leq (1 + h\alpha)|e_i| + |d_{i+1}| \leq (1 + h\alpha)^2|e_{i-1}| + (1 + h\alpha)|d_j| + |d_{j+1}| \leq \dots \leq \\ &\leq (1 + h\alpha)^{i+1}|e_0| + \sum_{j=1}^i (1 + h\alpha)^{i-j}|d_{j+1}| \\ (1 + h\alpha)^k &\leq e^{h\alpha K} \leq e^{t_k\alpha} \leq e^{\alpha b} \\ &\leq e^{\alpha b}|e_0| + \sum_{j=0}^i e^{\alpha b}|d_{j+1}| = e^{\alpha b}(|e_0| + \sum_{j=1}^{i+1} |d_j|) \end{aligned}$$

Azaz  $K := e^{\alpha b}$  választással a módszer 0-stabil.

**4.1.2. Megjegyzés.**  $t_k$ -val a  $k$ -adik osztópontot jelöltem.

#### 4.1.6. A "jó" lépésköz megválasztása

A lépésköz kiválasztása nagy szerepet tölt be a numerikus módszer pontosságában. Az adott egyenlet és a választott numerikus módszer azonban korlátozza a lépéshosszt illető választási lehetőségek számát. Így nemcsak megfelelő lépésközzel, hanem megfelelő numerikus módszerről is beszélnünk kell, hiszen a módszert úgy kell megválasztanunk, hogy  $h$  lépésközre vonatkozó korlátozások száma és mértéke minimális legyen. Ezek a korlátok általában szoros összefüggésben állnak a numerikus módszer stabilitásával.

#### 4.1.7. A teszt egyenlet

Tekintsük azt az esetet, mikor az egyenlet  $y' = Ay$  alakú, ahol  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix. Ha  $A$  diagonalizálható, akkor ezt az egyenletet felírhatjuk az alábbi módon:

$$w' = Dw$$

ahol  $D$  egy diagonális mátrix. Ha mindezt koordinátákra bontjuk, akkor a következő  $n$  ismeretlenes egyenletrendszerrel kapjuk:

$$\begin{aligned}w'_1 &= d_1 w_1 \\w'_2 &= d_2 w_2 \\&\vdots \\w'_n &= d_n w_n\end{aligned}$$

Itt természetesen  $d_i \forall i$ -re a  $D$  diagonális mátrix sajátértékei. Ezt az egyenletrendszerrel reprezentáljuk a  $y' = \lambda y$  teszt egyenlettel, ugyanis csak akkor lesz az eredeti egyenlet stabil, ha az egyenletrendszer  $\forall d_i$  sajátértékére stabil a teszt egyenlet.

#### 4.1.8. Abszolút stabilitás

Ha tudjuk, hogy  $y(0) = c$ , ahol  $c > 0$  konstans, akkor a teszt egyenlet pontos megoldása

$$y(t_n) = ce^{\lambda t_n}$$

lenne. Ezek alapján három esetet különböztethetünk meg:

- ha  $Re(\lambda) > 0$ , akkor  $|y(t)| = ce^{Re(\lambda)t}$  exponenciálisan növekszik  $t$  szerint. Ez egy instabilis helyzet.
- ha  $Re(\lambda) = 0$ , akkor a megoldás oszcillál.
- ha  $Re(\lambda) < 0$ , akkor  $|y(t)|$  exponenciálisan csökken, így a megoldások egyre közelednek egymáshoz. Ez egy asszimptotikusan stabil helyzet.

#### 4.1.9. A-stabilitás

Vizsgáljuk tovább a tesztegyenletet a harmadik esetben:  $y(t) = \lambda y(t)$ , ahol  $\lambda \in \mathbb{C}$  megoldása 0-hoz tart  $t \rightarrow \infty$  határesetben, ( $Re(\lambda) < 0$ ).

**4.1.3. Definíció.** *Egy numerikus módszer A-stabil, ha a teszt egyenletre alkalmazva rendelkezik a fenti tulajdonsággal, lépéshossztól függetlenül.*

Másképpen megfogalmazva: Legyen  $y(1) = 1$  a kezdeti feltétel. Ha a teszt egyenletből kapott  $y_1, y_2, \dots$  sorozatra  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0, \forall h$ -ra, akkor a módszer A-stabil. Ez egy nagyon erős feltétel. Az ilyen módszerek a gyakorlatban nem mutatnak stabilitási problémákat.

#### 4.1.10. Az explicit Euler módszer abszolút stabilitási tartománya

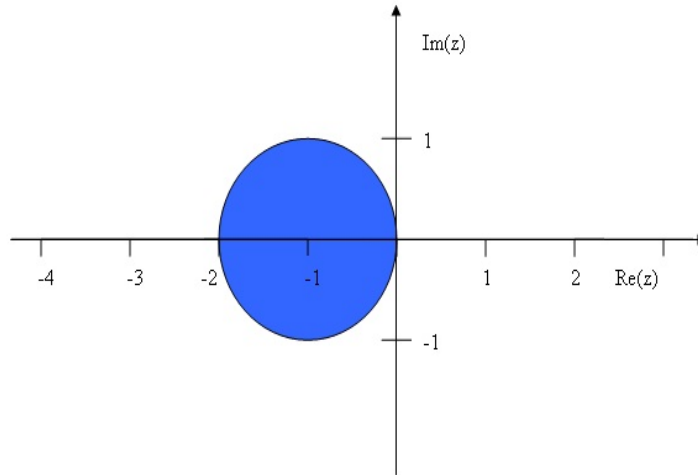
A leírtak alapján már tudjuk, hogy egy módszernél fontos tulajdonság az A-stabilitás. Vizsgáljuk meg az explicit Euler módszert ebből a szempontból.

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + h \cdot f(t_n, y_n), \quad (f(t, y) = \lambda y) \\y_{n+1} &= y_n + h \cdot \lambda y_n = \\y_{n+1} &= (1 + h\lambda)y_n = (1 + h\lambda)^2 y_{n-1} = \dots = (1 + h\lambda)^n y_0\end{aligned}$$

Tehát, most azt kell megvizsgáljuk, hogy  $y_n$  sorozat 0-hoz tart-e?

$$y_{n+1} = (1 + h\lambda)^n y_0 \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

Az alábbi állítás akkor igaz, ha  $|1 + h\lambda| < 1$ , ez például valós  $\lambda$ -ra is megkötés:  $h < -\frac{2}{\lambda}$ . Tehát **az explicit Euler módszer nem A-stabil.**



4.2. ábra. Az explicit Euler módszer abszolút stabilitási tartománya

#### 4.1.11. A módszer hiányosságai

A módszer nagy előnye, hogy nagyon egyszerű, illetve a műveletigénye alacsony. Ám sajnos az explicit Euler módszer nyilván nem a "legjobb" közelítő megoldást adja hiszen

- csak elsőrendű
- vannak stabilitási problémái, azaz, **nem A-stabil**

## 4.2. Az implicit Euler módszer

Nézzünk most az (2.1)(2.2) feladtra egy másik közelítési módszert. Írjuk fel  $u(t_n)$ -et a következő alakban:  $u(t_n) = u(t_{n+1} - h)$  alakban, és fejtsük Taylor sorba:

$$u(t_{n+1} - h) = u(t_{n+1}) - hu'(t_{n+1}) + O(h^2)$$

azaz,

$$\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{h} = u'(t_{n+1}) + O(h^2) = f(t_{n+1}, u(t_{n+1}))$$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

$$y(0) = y_0$$



Az egyenletet rendezzük  $y_{n+1}$ -re, így megkapjuk az implicit Euler módszer általános alakját:

$$y_{n+1} = y_n - hf(t_{n+1}, y_{n+1})$$

Nézzük meg, mit kapunk  $n = 0$  behelyettesítésével:

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = f(h, y_1)$$

Így láthatjuk, hogy  $y_n$  kiszámításához, egy általános nemlineáris algebrai egyenlet megoldása szükséges, melyre több módszert is ismerünk (például Newton iteráció). Ez a módszer ugyan költségesebb, mint a fent említett explicit Euler módszer, azonban sok szempontból praktikusabb annál.

#### 4.2.1. Az implicit Euler módszer konzisztenciája

Helyettesítsünk be a lokális approximációs hiba képletébe, majd fejtsük Taylor sorba  $u(t_{n+1} - h)$ -t!

$$\begin{aligned} \Psi_{n,1} &= -\frac{u(t_{n+1}) - u(t_{n+1} - h)}{h} + u'(t_{n+1}) \\ &= -\frac{u(t_{n+1}) - (u(t_{n+1}) - hu'(t_{n+1})) + O(h^2)}{h} + u'(t_{n+1}) \\ &= O(h) \end{aligned}$$

Az implicit Euler módszer is 1. rendben konzisztens, tehát nem sikerült az explicit formulánál pontosabb közelítést létrehozni, legalábbis a konzisztencia szempontjából. Nézzük meg mi a helyzet a stabilitási tartományával.

#### 4.2.2. Az implicit Euler módszer abszolút stabilitási tartománya

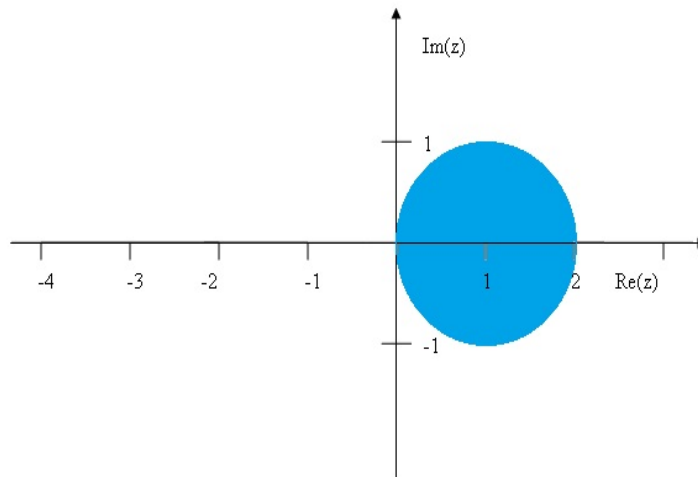
A teszt egyenletből megkapjuk, hogy

$$y'(t) = f(t, y(t)) = \lambda y(t)$$

Helyettesítsük be ezt az implicit Euler módszer  $n + 1$ -edik egyenletébe:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\lambda y_{n+1} \\ y_{n+1}(1 + h\lambda) &= y_n \\ y_{n+1} &= \frac{1}{1 - h\lambda} \cdot y_n \end{aligned}$$

Legyen  $z := h\lambda$ , így feltételként az  $|\frac{1}{1-z}| < 1$  egyenletet kapjuk. Ebből már látható az implicit Euler módszer stabilitási tartománya: ha  $1 < |1 - z|$ , azaz ha  $h > 0$ . Tehát az implicit Euler módszer A-stabil. Nézzük meg egy gyakorlati példán keresztül, hogy miért fontos szempont az A-stabilitás.



4.3. ábra. Az implicit Euler módszer stabilitási tartományát a sáírozott területen kívüli rész jelöli

### 4.2.3. Merev differenciálegyenletek

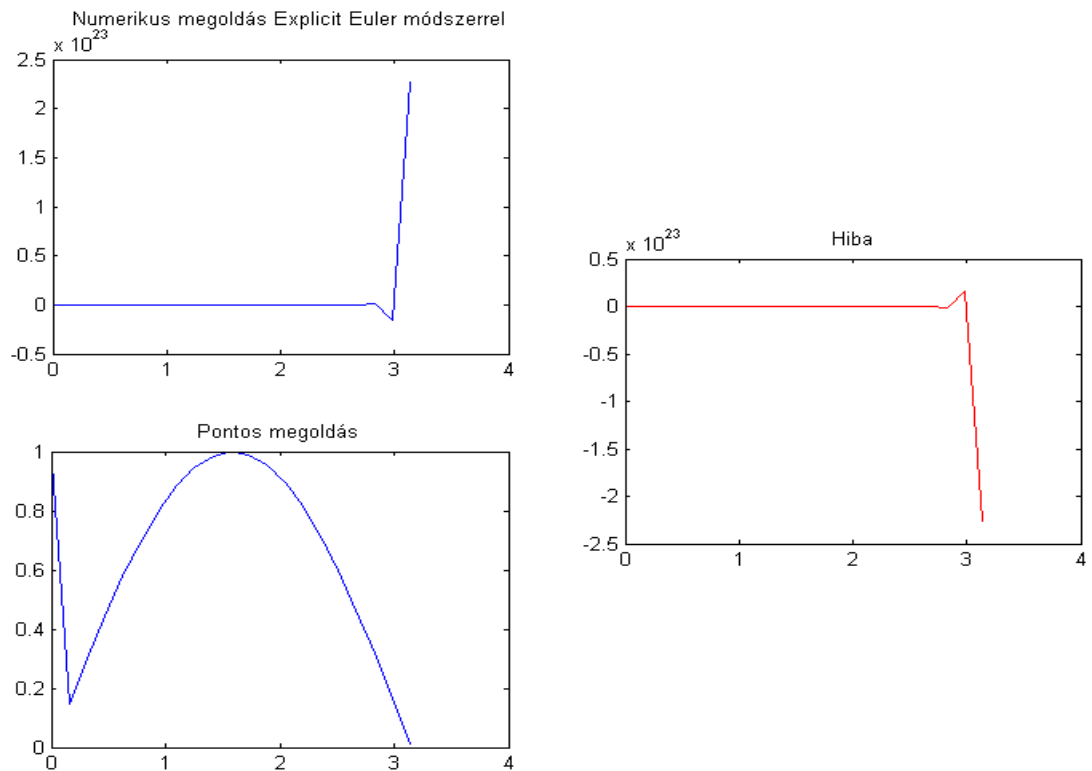
A merev differenciálegyenletek és ezek megoldási módszerei egy elég nagy témát ölelnek fel ráadásul nincs általánosan elfogadott egzakt definíció, ezért csak néhány példával érzékeltetném, hogy mely esetekben beszélünk merev differenciálegyenletről:  $y' = Ky + f(t)$ , ahol  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $K \in \mathbb{R}^{m \times m}$  és  $\exists$  "nagy" abszolútértékű negatív sajátértéke, vagy  $y' = f(t, y)$  és  $f$  Jacobi mátrixának létezik "nagy" abszolútértékű negatív sajátértéke.

Az ilyen típusú egyenleteknél nagy szerepet játszik, hogy a használni kívánt numerikus módszer *A-stabil* vagy nem. A továbbiakban nézzünk olyan módszereket, melyek alkalmasak a merev differenciálegyenletek megoldására.

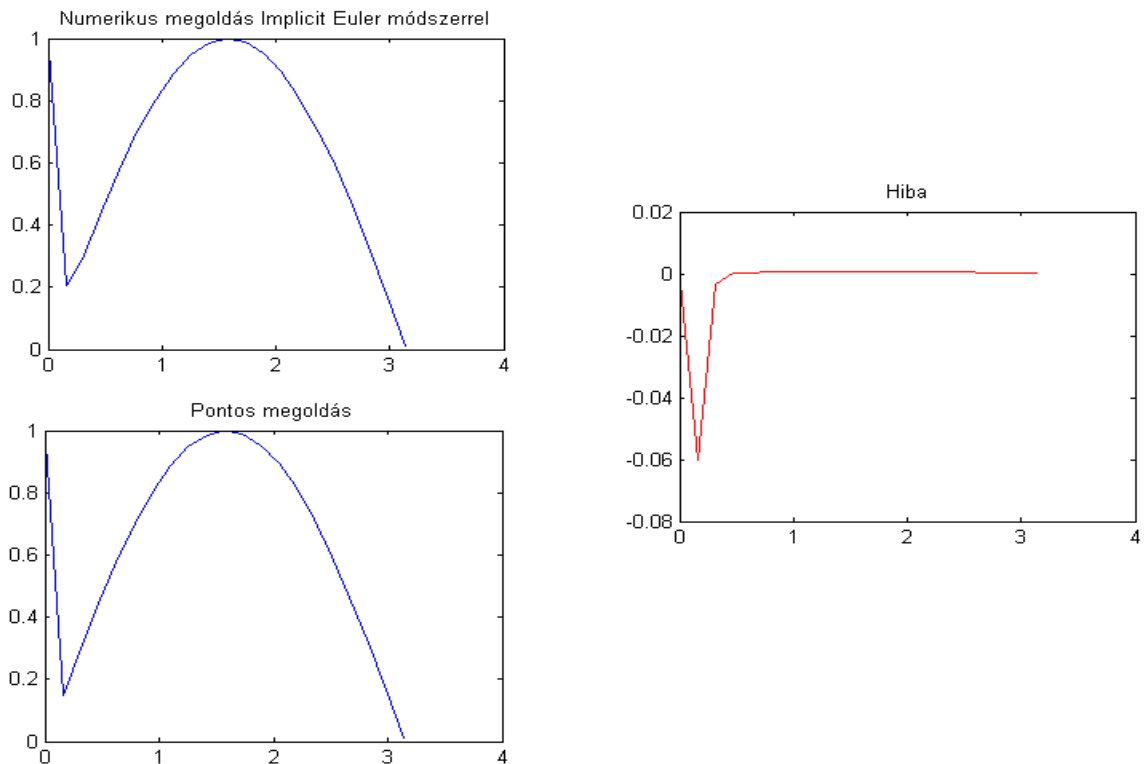
#### 4.2.4. Példa

Az alábbi egyenletet programozzuk le mindkét módszer szerint Matlab-ban!

$$y'(t) = -100(y(t) - \sin(t))$$



4.4. ábra. Explicit Euler



4.5. ábra. Implicit Euler

Láthatjuk, hogy a megadott merev differenciálegyenletet, hogyan közelíti meg egy olyan módszer, mely A-stabil, és egy olyan, amelyik nem. A különbség szem-  
betűnő.

#### 4.2.5. Az implicit Euler módszer előnyei és hátrányai

Az implicit módszer tehát stabilitását tekintve jobb az explicitnél, viszont ez még mindig csak egy elsőrendű közelítés, így a következő lépésben próbáljunk meg olyan módszert keresni, amely legalább egy másodrendű approximáció.

### 4.3. Szimmetrikus/ trapéz módszer

Próbáljuk meg a következőt: vegyük az explicit és az implicit Euler módszer számtani közepét!

$$\begin{aligned}\frac{y_{n+1} - y_n}{h} &= \frac{1}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})] \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})]\end{aligned}$$

#### 4.3.1. A szimmetrikus módszer konzisztenciája

$$\begin{aligned}\Psi_{n,1} &= -\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{h} + \frac{1}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})] = \\ &= -\frac{u(t_n) + hu'(t_n) + \frac{h^2}{2}u''(t_n) + O(h^3) - u(t_n)}{h} + \frac{1}{2}[u'(t_n) + u(t_{n+1})] = \\ &= -u'(t_n) - \frac{h}{2}u''(t_n) + o(h^2) + \frac{1}{2}[u'(t_n) + u'(t_n) + hu''(t_n) + O(h^2)] = O(h^2)\end{aligned}$$

Tehát sikerült pontosabb módszerhez jutnunk, hiszen a trapéz módszer már 2. rendben konzisztens. Vizsgáljuk meg, hogy a stabilitási tartomány hogyan alakul ebben az esetben!

#### 4.3.2. A trapéz módszer abszolút stabilitási tartománya

A szokásos módon helyettesítsünk be a teszt egyenlet alapján a szimmetrikus trapéz formulába.

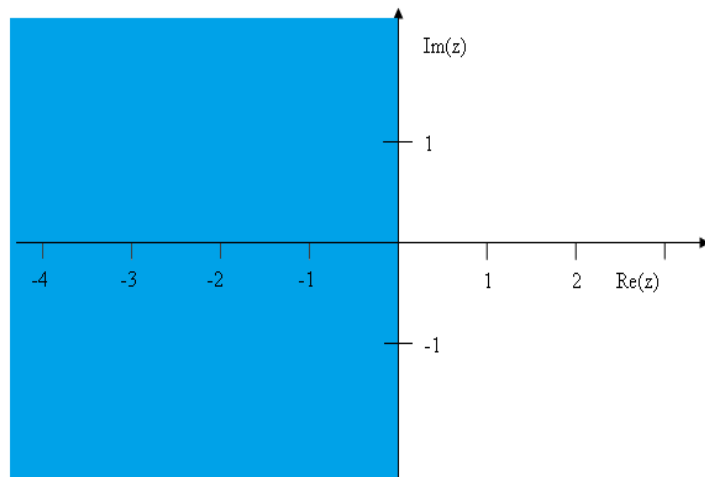
$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(\lambda y_n + \lambda y_{n+1}) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}h\lambda(y_n + y_{n+1}) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}h\lambda y_n + \frac{1}{2}h\lambda y_{n+1} \\ (1 + \frac{1}{2}h\lambda)y_n &= y_{n+1} - (1 - \frac{1}{2}h\lambda)y_{n+1} \\ y_{n+1} &= \frac{1 + \frac{1}{2}h\lambda}{1 - \frac{1}{2}h\lambda}y_n\end{aligned}$$

Azaz a stabilitási tartomány a következő lesz:  $|\frac{2+z}{2-z}| < 1 \rightarrow |2+z| < |2-z|$ . Ezt az egyenlőtlenséget próbáljuk tovább alakítani, hogy  $z$ -re megoldást kapjunk. Írjuk fel

$z := a + bi$  alakban, és oldjuk meg az egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} (|2 + a + bi|)^2 &< (|2 - (a + bi)|)^2 \\ (2 + a)^2 + b^2 &< (2 - a)^2 + b^2 \end{aligned}$$

Tehát,  $a < 0$ , így  $Re(z) < 0$ , azaz a trapéz módszer is A-stabil.



4.6. ábra. A szimmetrikus módszer stabilitási tartománya

## 5. fejezet

# Runge-Kutta típusú módszerek

Vizsgáljuk meg újra a fent említett módszereket egy másik megközelítésből, ahol a közelítő eljárások alapját az úgynevezett kvadratúra formulák adják, vagyis dolgozzunk numerikus integrálokkal!

### 5.1. A kvadratúra formulák

A Runge-Kutta módszerek ötletének alapját a kvadratúra formulák, azaz a numerikus integrálás szabályai adják. Nézzük meg, mit is jelent ez pontosan!

Vegyünk egy  $[a, b]$  intervallumot, és készítsünk egy  $t_1, t_2, \dots, t_n$  ekvidisztáns felosztást. Az  $f$  függvény az  $[a, b]$  intervallumon felírhatjuk az  $n - 1$  darab részintervallum integráljának összegeként is, azaz:

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t) dt$$

Ez akkor hajtható végre, ha ismerjük a függvény  $[(t_1, f(t_1)), \dots, (t_n, f(t_n))]$  alap pontjait. Ezeket a pontokat felhasználva előállítunk egy Lagrange interpolációs polinomot, mellyel közelítjük az eredeti függvényünket, majd ezt a polinomot integráljuk:

$$L_j(t) = \prod_{i \neq j} \frac{t - t_i}{t_j - t_i}$$
$$\omega_j = \int_a^b L_j(t) dt$$

Végül a kapott értékeket szorozzuk  $f(t_1), \dots, f(t_n)$  értékekkel, így megkapjuk  $f(t)$  közelítő integrálját.

$$\int_a^b f(t)dt \approx \sum_{j=1}^n \omega_j f(t_j)$$

Vegyük az  $y(t_n) - y(t_{n-1}) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} y'(t)dt$  egyenletet. A görbe alatti területet approximálhatjuk bal (Explicit -Euler) és jobb (Implicit Euler) közelítő integrálokkal. Ezek az elsőrendű módszerek.

Próbáljuk meg az explicit Euler módszert "finomítani"! Eddig  $y_n$  kiszámításához csak az  $y_{n-1}$  értéket használtuk fel. Azonban ha felvennénk egy köztes pontot, például  $y_{(n-1)/2}$ -t, akkor elméletileg pontosabb megoldást kapnánk. Vizsgáljuk meg ezt az esetet.

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{(n-1)/2} &= y_{n-1} + \frac{h}{2} f(t_{n-1}, y_{n-1}) \\ y_n &= y_{n-1} + h f(t_{(n-1)/2}, \tilde{y}_{(n-1)/2}) \end{aligned}$$

Ezt a módszert javított Euler módszernek nevezzük. Nézzük meg, hogy mennyivel közelíti jobban a pontos megoldást!

### 5.1.1. A javított Euler módszer lokális hibája

$$\begin{aligned} \Psi_{n,1} &= \frac{y(t_n) - y(t_{n-1})}{h} - f(t_{n-1}, y(t_{n-1} + \frac{h}{2} f(t_{n-1}, y(t_{n-1})))) \\ &= y' + \frac{h}{2} y'' + \frac{h^2}{6} y''' - (f + \frac{h}{2} (f_t + f_y f) + \frac{h^2}{8} (f_{tt} + 2f_{ty} f + f_{yy} f^2)) + O(h^3) \end{aligned}$$

Tehát a módszer 2. rendben konzisztens, így valóban sikerült növelni a pontosságot. Ennek alapján próbáljunk meg minél magasabb rendű módszereket létrehozni. Ehhez vezessük be az alábbi jelöléseket.

$$\begin{aligned} k_1 &:= f(t_n, y_n) \\ k_2 &:= f(t_n + 0,5h, y_n + 0,5h \cdot k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + hk_2 \end{aligned}$$



A javított Euler módszer példájára, általánosítsuk ezt jelölést  $m$  lépésre.

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(t_n, y_n) \\
 k_2 &= f(t_n + a_2 h, y_n + h b_{21} k_1) \\
 k_3 &= f(t_n + a_3 h, y_n + h(b_{31} k_1 + b_{32} k_2)) \\
 &\vdots \\
 k_m &= f(t_n + a_m h, y_n + h(b_{m1} k_1 + \dots + b_{m,m-1} k_{m-1})) \\
 y_{n+1} &= y_n + h(c_1 k_1 + c_2 k_2 + \dots + c_m k_m)
 \end{aligned}$$

Ez az úgynevezett általános  $m$  lépéses (explicit) Runge-Kutta módszer, melyet 1900 körül dolgoztak ki Karl Runge és Martin Kutta német matematikusok.

A javított Euler módszernél láthattuk, hogy a "javítással" sikerült növelni a módszer rendjét. Itt az  $a_2, \dots, a_m$ ;  $b_{ik}$ ; és  $c_1, \dots, c_m$  tetszőleges paraméterek, illetve  $(b_{ik})$ -k által előállított  $B$  mátrixot a Runge-Kutta módszer mátrixának,  $a_k$ -kat a módusainak,  $c_i$ -ket pedig a mátrix súlyainak nevezzük. (Éppen ezért  $\sum_{i=1}^m c_i = 1$ .) A Runge-Kutta formula lényege, hogy minél magasabb rendű módszereket tudjunk létrehozni. Az adott módszerhez kapott konstansokat egy úgynevezett Butcher-tábla foglalja össze. (Butcher tableau, John C. Butcher neve után)

$a_2$	$b_{21}$	$0$	$0$	$\dots$	$0$
$a_3$	$b_{31}$	$b_{32}$	$0$	$\dots$	$0$
$a_4$	$b_{41}$	$b_{42}$	$b_{43}$	$\dots$	$0$
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_m$	$b_{m1}$	$b_{m2}$	$b_{m3}$	$\dots$	$b_{m,m-1}$
	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\dots$	$c_m$

Az egyszerűség kedvéért vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \phi(x_n, y_n, h) \tag{5.1}$$

$$\phi(x, y, h) = \sum_{i=1}^m c_i k_i \tag{5.2}$$

$$k_i = f(t_n + a_i h, y_n + \sum_{j=1}^m b_{ij} k_j) \tag{5.3}$$

**5.1.1. Megjegyzés.** Ahhoz, hogy  $p$ -ed rendű RK módszert kapjunk a  $a_2, \dots, a_m$ ;  $b_{ik}$ ; és  $c_1, \dots, c_m$  együtthatókat úgy kell megválasztani, hogy a módszer lokális hibája

$p + 1$  rendű legyen.

Azaz, egy  $p$ -ed rendű a következő egyenlőségnek kell teljesülnie:

$$d(t, y, h) = u(t + h) - u(t) - h\phi(t, y, h) = O(h^{p+1})$$

Ahol  $d(t, y, h)$  a lokális hibát,  $u(t)$  pedig az egyenlet pontos megoldását jelöli. Első lépésként fejtsük Taylor sorba  $d(t, y, h)$ -t,  $u(t + h) - u(t)$ -t, és  $\phi(t, y, h)$ -t  $h$  szerint  $h = 0$  pontban. (Ahhoz, hogy az egyenlőség teljesüljön, az kell, hogy a  $d$  lokális hiba Taylor-sorának első  $p$  tagja tűnjön el.)

$$d(t, y, h) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial^i d}{\partial h^i} \cdot h^i \quad (5.4)$$

$$u(t + h) = u(t) + hu'(t) + h^2 \frac{u''(t)}{2!} + \dots + h^p \frac{z^{(p)}(t)}{p!} + O(h^{p+1}) \quad (5.5)$$

$$\phi(t, y, h) = \phi(t, y, 0) + h\phi'(t, y, h) + \frac{h^2}{2!}\phi''(t, y, h) + \dots \quad (5.6)$$

$$+ \frac{h^{p-1}}{(p-1)!}\phi^{(p-1)}(t, y, h) + O(h^p) \quad (5.7)$$

Ahhoz, hogy a módszer  $p$ -ed rendű legyen az szükséges, hogy  $\sum_{i=1}^p \frac{\partial^i d}{\partial h^i} = 0$  feltétel teljesüljön. Második lépésként szorozzuk be mindkét oldalt  $h$ -val.

$$\begin{aligned} d(t, y, h) &= hu'(t) + h^2 \frac{u''(t)}{2!} + \dots + h^p \frac{z^{(p)}(t)}{p!} + O(h^{p+1}) - \\ &\quad - \phi h(t, y, 0) - h^2 \phi'(t, y, h) - \dots - \frac{h^p}{(p-1)!} \phi^{(p-1)}(t, y, h) - O(h^p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(x, y, 0) &= h(u'(t) - \phi(t, y, 0)) + h^2 \left( \frac{1}{2} u''(t) - \right. \\ &\quad \left. - \phi'(t, y, 0) \right) + \dots + h^p \left( \frac{1}{p!} z^{(p)} - \phi^{(p-1)}(t, y, 0) \right) + O(h^{p+1}) \end{aligned}$$

Így egy  $p$  egyenletből álló egyenletrendszert kapunk, mely megoldható, ha  $a_i = \sum_{j=1}^p b_{ij}$ .

### 5.1.2. Az RK módszerek 0-stabilitása

A Runge-Kutta formulát az 5.1 egyenletben, olyan alakra hoztuk, mely nagyon hasonlít az explicit Euler módszerhez. Ennek alapján, hasonló levezetéssel megkaphatjuk, hogy a Runge-Kutta módszer 0-stabil.

Természetesen most is beszélhetünk explicit és implicit módszerekről. Nézzünk most mindkét esetre néhány példát!

## 5.2. Az implicit Runge-Kutta módszerek

Az implicit és explicit módszerek közti legszembevetőbb különbség, a Butcher tábla, hiszen implicit esetben a  $B$  mátrix nem feltétlenül alsó háromszög mátrix. Éppen ezért az implicit formulákat sokszor nevezik általános RK módszereknek.

### 5.2.1. Az implicit formula előnyei és hátrányai

Az implicit módszer nagy hátránya, hogy a (4.3) egyenletrendszer egy nemlineáris rendszer lesz  $k_i$ -kre, amit minden egyes lépésben iterációval kell megoldani, így a műveletigénye igen nagy. Előnyei közül a két legjelentősebbet említeném meg:

- stabilitás tulajdonságuk
- **5.2.1. Tétel.** Minden  $p \geq 1$  számhoz létezik pontosan egy  $2p$ -ed rendű implicit Runge-Kutta módszer.

## 5.3. Az explicit Runge-Kutta formulák

**5.3.1. Definíció.** Egy Runge-Kutta módszer explicit, ha  $b_{ik} = 0; i < k$ . Ekkor a  $k_i$ -k explicit módon számolhatóak.

### 5.3.1. Az első rendű Runge-Kutta formulák

Az elsőrendű RK módszert fel tudom írni a következő alakban:  $\phi(x, y, h) = c_1 k_1 = f(t, y)$ , illetve az előzőek alapján  $u(t + h) - u(t) = hu'(t) + O(h^2)$ . Ezek alapján írjuk fel az elsőrendű módszerek lokális hibáját.

$$\begin{aligned}d(t, y, h) &= u(t + h) - u(t) - h\phi(t, y, h) \\ &= hf(t, y) - hc_1 + f(t, y) + O(h^2) \\ &= h(1 - c_1)f(t, y) + O(h^2)\end{aligned}$$

Az egyenletet megoldva azt kapjuk, hogy  $c_1 = 1$  választással kapunk első rendű módszert, és ezt visszahelyettesítve a  $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$  formulát, azaz az explicit Euler módszert kapjuk. Ez az egyetlen első rendű (explicit) RK módszer.

### 5.3.2. A megoldhatóság feltételei

A  $a_i = \sum_{j=1}^p b_{ij}$  feltétel mellett, minden  $p$ -ed rendű formulának vannak csak rá vonatkozó feltételei is. Az elsőrendű módszer pontosan akkor oldható meg, ha teljesül a

$$ce = 1 \tag{5.8}$$

feltétel, ahol  $e$  az  $(1 \dots 1)^T$  vektort jelenti,  $c$  pedig a Butcher tábla  $c_i$  elemiből álló vektor.

### 5.3.3. A másodrendű Runge-Kutta formulák

A másodrendű Runge-Kutta formulák pontosan akkor oldhatók meg, ha teljesül az 5.7 feltétel, és

$$c \cdot a = \frac{1}{2} \tag{5.9}$$

egyenlőség is. (Az  $a_j$  elemekből álló vektort jelöltük  $a$ -val.)

Hasonlóképpen mint az elsőrendűnél

$$\phi(t, y, h) = c_1 k_1 + c_2 k_2 = c_1 f(t, y) + c_2 f(t + a_2 h, y_n + h b_{21} f(t, y))$$

Ha Taylor sorba fejtjük  $k_2$ -t, és  $d(t, y, h)$ -t, akkor megkapjuk  $h^0, h^1, h^2$  együtthatóit. (A Taylor sorfejtés ebben az esetben igen hosszadalmas, ezért csak a megoldásokat írom le).

$$b_1 = 0$$

$$1 - c_1 - c_2 a_2 = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} - c_2 a_2\right) \partial_t f + \left(\frac{1}{2} - c_2 b_{21}\right) \partial_y f = 0$$

Így a másodrendű RK módszerre a következő együtthatókat kapjuk.

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = b_{21}$$

$$a_2 = \frac{1}{2c_2}$$

$$c_1 + c_2 = 1$$

Látható, hogy az egyenletünk határozatlan,  $c_1, c_2$  szabad paraméterek, így igen sok másodrendű formula létrehozható.

### 5.3.4. Példák másodrendű formulákra

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \quad
 \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array} \quad
 \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

### 5.3.5. Harmadrendű RK formulák

A harmadrendű RK formulák megoldhatóságának feltételei, az 5.7 és az 5.8 feltételek, tehát minden, ami az alacsonyabb rendű formuláknál kellett és teljesülnie kell az

$$ca^2 = \frac{1}{3} \quad (5.10)$$

$$cBa = \frac{1}{6} \quad (5.11)$$

egyenleteknek is, ahol  $B$  a Butcher tábla  $b_{ij}$  elemeiből álló mátrixa.

Példák harmadrendű formulákra:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array} \quad
 \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{array}$$

### 5.3.6. A klasszikus negyed rendű Runge-Kutta formula

A megoldhatóság feltételei természetesen az összes eddigi feltétel és az alábbiak együttes teljesülése:

$$ca^3 = \frac{1}{4} \quad (5.12)$$

$$cBa^2 = \frac{1}{24} \quad (5.13)$$

$$cABc = \frac{1}{8} \quad (5.14)$$

A-val az  $a_i$  értékekből álló  $m \times m$ -es diagonális mátrixot jelöltem.

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(t_n, y_n) \\
 k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\
 k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right) \\
 k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3) \\
 y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 \hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
 \end{array}$$

Ha jobban megnézzük ezt a módszert, akkor láthatjuk, hogy az  $y(t_n) - y(t_{n-1})$  közelítő integrál a Simpson formulával felírva közel hasonló eredményt ad:

$$y(t_n) - y(t_{n-1}) \approx \frac{h}{6}(y'(t_{n-1}) + 4y'(t_{(n-1)/2}) + y'(t_n))$$

Ha összevetjük az első-, a másod-, a harmad-, és a negyed rendű formulákat, akkor azt a hasonlóságot fedezhetjük fel, hogy  $p = 1, 2, 3, 4$  rendű formuláknál a módszerek lépésszáma is rendre  $m = 1, 2, 3, 4$ . Valójában a lépések számából nem következik a módszer rendje, amit már  $m = 5$  lépés esetén is láthatunk.

lépések száma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
módszer rendje	1	2	3	4	4	5	6	6	7	7

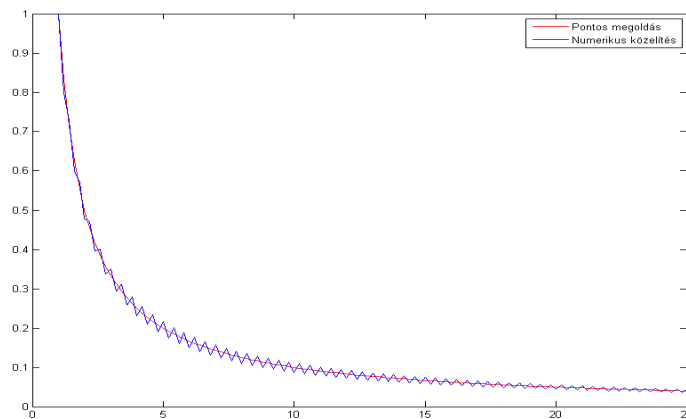
### 5.3.7. Az explicit Runge-Kutta módszer abszolút stabilitási tartománya

A Runge-Kutta módszerek családjá széleskörben elterjedt közelítési eljárás, annak ellenére, hogy ezeknek a módszereknek is vannak stabilitási problémáik. Abszolút stabilitási tartományuk korlátos, így sajnos nem A-stabilak.

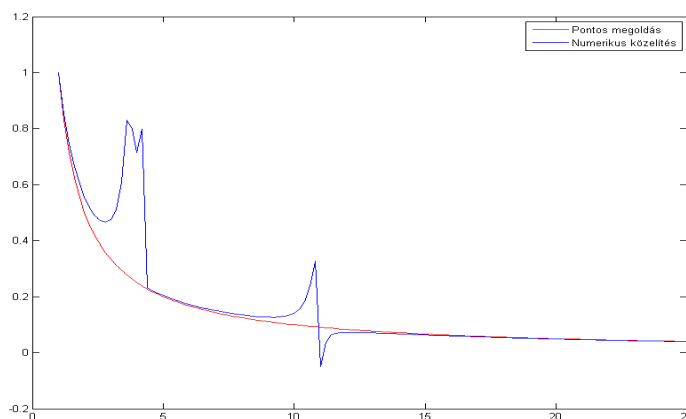
### 5.3.8. RK módszerek összehasonlítása

Nézzük meg az alábbi példán keresztül, hogy milyen pontossággal közelít egy első-, egy másod-, illetve egy negyed rendű Runge-Kutta formula:

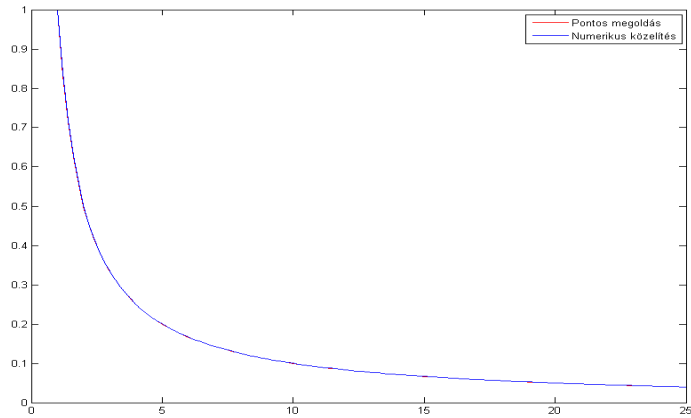
$$y'(t) = -5t(y(t))^2 + 5/t - 1/(t^2), y(1) = 1$$



5.1. ábra. Elsőrendű RK formula



5.2. ábra. Másodrendű RK formula



5.3. ábra. Negyedrendű RK formula

	Elsőrendű RK	Másodrendű RK	Negyedrendű RK
maximális hiba	0,03333	0,56108	0,00533



## 6. fejezet

# Összefoglalás

Az említett módszerek egytől egyig alkalmasak közönséges differenciálegyenletek közelítő megoldásainak kiszámításához. Természetesen ezek a módszerek nem minden esetben "egyformán jók", de a példák alapján tehetünk néhány általános megállapítást:

- Egy módszer minél magasabb rendű, annál pontosabban közelíti a megoldást kivéve,
- ha nem megfelelő módszert használunk, azaz implicit helyett explicitet, vagy fordítva.
- Merev differenciálegyenletek közelítésénél sokkal fontosabb a numerikus módszer abszolút stabilitási tartománya, a módszer rendjénél.
- Az implicit módszereknél figyelembe kell venni a nagy műveletigényüket.

A téma kimeríthetetlen, hiszen az említett módszereket csupán az egylépéses közelítések családjából válogattam, és csupán az elsőrendű egyváltozós kezdetiérték problémát vizsgáltuk meg. A többlépéses módszerekről, a merev differenciálegyenletekről, vagy akár a peremérték feladatok megoldásáról még sok-sok oldalt lehetne megtölteni.

*Irodalomjegyzék:*

Simon L. Péter, Tóth János: Differenciálegyenletek

Uri M Ascher, Linda R. Petzold: Computer Methods of Ordinary Differential Equations and Differential Algebraic Equations