Sorok és sorozatok kapcsolata a Riemann integrállal

Szakdolgozat

Írta: **Bakos Gergely**

Matematika BSc, Matematikai elemző szakirány

Témavezető:

Pfeil Tamás, adjunktus

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2010

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Szakdolgozatom témája a sorok és sorozatok. Először pár később használandó definíciót mutatok be. Utána nevezetes és kevésbé ismert sorösszegeket vizsgálok. Ezt követően példákat mutatok ezen sorok összegének felhasználására. Olyan eseteket vizsgálok, amikor a Riemann integrál értékét nem lehet meghatározni primitív függvény segítségével, de pontos vagy közelítő értéket lehet adni sorok, sorozatok segítségével. Az utolsó rész témája Gauss-féle számtani-mértani közép és annak egy lehetséges felhasználása.

1. fejezet

Alapfogalmak

A kötelező analízis előadások anyagát ismertnek tekintem, mégis az alábbiakat felsorolom.

Állítás. *Ha egy függvénysorozat egyenletesen konvergens H_1 és H_2 halmazon, akkor egyenletesen konvergens a $H_1 \cup H_2$ halmazon is.*

Tétel. *Legyen $\sum f_n$ olyan függvénysor, melynek tagjai majorálhatók egy konvergens numerikus sor tagjaival, azaz létezik olyan (a_n) sorozat, melyre $|f_n| \leq a_n$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $\sum a_n$ konvergens.*

Tétel. *Tegyük fel, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n = f$ függvénysor egyenletesen konvergens az $[a, b]$ intervallumon. Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén f_n Riemann integrálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor f is integrálható $[a, b]$-n, és*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx.$$

Definíció. *Legyen f akárhányszor differenciálható az x_0 pontban. A*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

függvénysort az f függvény x_0 ponthoz tartozó Taylor-sorának nevezzük.

2. fejezet

Sorösszegek meghatározása

2.1. Euler sor

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor , melyet Euler-sornak is neveznek, konvergens és összege $\frac{\pi^2}{6}$.

Tétel.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Bizonyítás. Legyen $0!! := 1$ és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$(2n)!! := 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)\ , \quad (2n-1)!! := 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1).$$

Az arcsin függvény 0 középpontú Taylor sora a $[-1, 1]$ intervallumon konvergens és

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}, \ \mid x \mid \leq 1.$$

Tudjuk, hogy

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3},\ \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \ldots, \frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1},\ n \in \mathbb{N}^+.$$

Az egyenlőtlenségeket összeszorozva

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

így

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} < \frac{1}{(2n+1)^{3/2}},\ n \in \mathbb{N}^+.$$

Legyen $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ esetén $x := \sin(y)$, akkor

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} \sin(y)^{2n+1}. \qquad (*)$$

Ez a függvénysor a Weierstrass-kritérium szerint egyenletesen konvergens a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon.

$$\left| \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} \sin(y)^{2n+1} \right| \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} < \frac{1}{(2n+1)^{3/2}},\ n \in \mathbb{N}^+.$$

A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ sor konvergens, ezért a $(*)$ függvénysor egyenletesen konvergens a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon. Integrálom a $(*)$ mindkét oldalát a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon az egyenletes konvergencia miatt a jobb oldal tagonként integrálható.

$$\int_0^{\pi/2} y\ dy = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} \sin(y)^{2n+1}\ dy.$$

Vezessük be a

$$I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\ dx,\ n \in \mathbb{N}^+$$

jelölést. Ekkor $I_0 = \frac{\pi}{2}$ és $I_1 = -\cos(\frac{\pi}{2}) + \cos(0) = 1$. Ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor

$$I_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \sin^{n-1}(x)\ dx = \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(x)) \sin^{n-1}(x)\ dx =$$

$$\int_0^{\pi/2} [\sin^{n-1}(x) - \cos^2(x) \sin^{n-1}(x)]\ dx = I_{n-1} - \int_0^{\pi/2} \cos(x)[\sin^{n-1}(x) \cos(x)]\ dx.$$

Parciálisan integrálva

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)[\sin^{n-1}(x)\cos(x)]\ dx = \int_0^{\pi/2} \cos(x) \left(\frac{1}{n} \sin^n(x) \right)' dx =$$

$$\left[\cos(x) \left(\frac{1}{n} \sin^n(x) \right) \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{n} \sin^n(x)(-\sin(x))\ dx = 0 + \frac{1}{n} I_{n+1}.$$

Ebből következik

$$I_{n+1} = I_{n-1} - \frac{1}{n} I_{n+1},$$

tehát

$$I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1} \; n \in \mathbb{N}^+.$$

A rekurzióból $I_1 = 1$ felhasználásával

$$I_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x)\, dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \;,\; n \in \mathbb{N}.$$

A kapott eredmény segítségével

$$\int_0^{\pi/2} y\, dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Egyszerűsítés után

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \int_0^{\pi/2} y\, dy = \frac{\pi^2}{8}.$$

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor páros indexű tagjaiból alkotott sor konvergens és

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

A páratlan indexű tagokból képzett sor is konvergens, összege $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.
Mivel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2},$$

ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Következmény:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{12}.$$

2.2. Az alternáló harmonikus sor

Tétel.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = \ln(2).$$

Három különböző bizonyítást is mutatok erre a tételre.

2.2.1. Bizonyítás Taylor-sorral

Az $f(x) := \ln(1+x)$, $D(f) := (-1, \infty)$ függvény 0 középpontú Taylor-sora konvergens a $(-1, 1]$ intervallumon, és összegfüggvénye

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}, x \in (-1, 1].$$

A hatványsor konvergencia sugara 1, és $x = 1$ esetén a sor Leibniz-típusú, ezért konvergens. Abel tétele szerint az egyenlőség $x = 1$ esetén is fennáll, ezért

$$\ln(2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}.$$

2.2.2. Elemi bizonyítás

Tekintsük a következő sorozatot:

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n), \ n \in \mathbb{N}^+.$$

A monotonitás eldöntéséhez megvizsgálom, mikor teljesül $a_{n+1} < a_n$. Ekvivalens lépésekkel

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n), \ n \in \mathbb{N}^+,$$

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(\frac{n+1}{n}\right),$$

$$1 < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Tudjuk, hogy az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^+$ sorozat szigorúan monoton csökken, így

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Tehát az (a_n) sorozat is szigorúan monoton csökken.

Az (a_n) sorozat korlátosságát teljes indukcióval bizonyítom. Megmutatom, hogy

$$a_n \geq \frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N}^+.$$

$n = 1$ esetén $a_1 \geq \frac{1}{1}$. Ha pedig valamely pozitív egész n-re teljesül $a_n \geq \frac{1}{n}$, akkor az egyenlőtlenség $n+1$ esetén

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1},$$

ami ekvivalens átalakítással és az indukciós feltevés felhasználásával

$$\frac{1}{n} > \ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

$$1 > \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ n \in \mathbb{N}^+.$$

$e > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ minden pozitív egész n-re teljesül, így $a_n \geq \frac{1}{n} > 0, \ n \in \mathbb{N}^+$ alapján az (a_n) sorozat monoton és korlátos, ezért konvergens. Legyen $A := \lim(a_n) \in [0, \infty)$ a sorozat határértéke.

$$a_{2n} - a_n = \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2n)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2), \ n \in \mathbb{N}^+.$$

Mivel az (a_n) és az (a_{2n}) sorozat is A-hoz tart, ezért a különbségük 0-hoz fog tartani, így

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln(2), \ n \in \mathbb{N}^+.$$

Definiáljuk a következő sorozatot:

$$b_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}, \ n \in \mathbb{N}^+.$$

Ekkor

$$b_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2n} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln(2),$$

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(b_{2n} + \frac{1}{2n+1}\right) = \ln(2).$$

A páros és a páratlan indexű részsorozat határértéke megegyezik, ezért $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = \ln(2)$.

2.2.3. Zheng bizonyítása

Ez a legszebb és leghasznosabb bizonyítás, hiszen az alábbi két sor összegét is belátja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \ln(2), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

Legyen $I_n := \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\,dx,\ n \in \mathbb{N}^+$. Mivel $\tan(x) : (0, \frac{\pi}{4}) \to (0,1)$ bijekció, helyettesítéses integrált használva az $u = \tan(x)$ helyettesítésel $dx = \frac{1}{1+u^2}\,du$

$$I_n = \int\limits_0^1 \frac{u^n}{1+u^2}\,du,\ n \in \mathbb{N}^+.$$

Mivel $2u < 1 + u^2 < 2,\ u \in (0,1)$ így

$$\frac{1}{2(n+1)} = \int\limits_0^1 \frac{u^n}{2}\,du < I_n < \int\limits_0^1 \frac{u^{n-1}}{2}\,du = \frac{1}{2n}.$$

Két nullához tartó sorozattal közrefogható az I_n sorozat, ebből következik rendőrelv alapján, hogy

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0.$$

$$I_n + I_{n+2} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\left(1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\right)\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\frac{1}{\cos^2(x)}\,dx =$$

$$\left[\frac{\tan^{n+1}(x)}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}^+. \qquad (*)$$

Legyen

$$E_n := (-1)^{n-1} I_{2n},\ n \in \mathbb{N}^+,$$

ekkor $(*)$ felhasználásával

$$E_n - E_{n-1} = (-1)^{n-1}(I_{2n} + I_{2n-2}) = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1},$$

valamint

$$E_1 = I_2 = \int\limits_0^{\pi/4} \tan^2(x)\,dx = \int\limits_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^2(x)} - 1\right)\,dx = [\tan(x) - x]_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Ezekből következik

$$E_n = \sum_{k=2}^{n}(E_k - E_{k-1}) + E_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} - \frac{\pi}{4},\ n \in \mathbb{N}^+.$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = 0$, ami igazolja, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

Legyen

$$O_n := (-1)^{n-1} I_{2n-1}, \; n \in \mathbb{N}^+,$$

így a $(*)$ segítségével

$$O_n - O_{n-1} = (-1)^{n-1}(I_{2n-1} + I_{2n-3}) = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-2}.$$

$$O_1 = I_1 = \int\limits_0^{\pi/4} \tan(x)\; dx = [-\ln|\cos(x)|]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\ln(2),$$

$$O_n = \sum_{k=2}^{n}(O_k - O_{k-1}) + O_1 = \frac{1}{2}\left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right).$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$, így $\lim\limits_{n\to\infty} O_n = 0$, ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2).$$

2.3. Egy Leibniz-típusú sor

Állítás.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2).$$

Bizonyítás. Az $f(x) := \arctan(x)$, $D(f) := \mathbb{R}$ függvény 0 középpontú Taylor-sora a $[-1,1]$ intervallumon konvergens,

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)}x^{2n+1}, \; x \in [-1,1]. \tag{*}$$

A függvénysor egyenletesen konvergens a $[0,1]$ intervallumon, mert minden $x \in [0,1]$ esetén a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$ Leibniz-típusú sor, így az $s_n(x)$ részletösszegnek a sor összegétől való eltérésére

$$|s_n(x) - \arctan(x)| \leq \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} \leq \frac{1}{2n+1}.$$

A $(*)$ egyenlőség mindkét oldalát integráljuk a $[0,1]$ intervallumon.

$$\int\limits_0^1 \arctan(x)\; dx = \int\limits_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)}x^{2n+1}\; dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)}\int\limits_0^1 x^{2n+1}\; dx =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}\left[\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Helyettesítéses integrált használva, ha $x = \tan(y)$, akkor $dx = \frac{1}{\cos^2(y)}dy$, ezért

$$\int\limits_0^1 \arctan(x)\ dx = \int\limits_0^{\pi/4} y\frac{1}{\cos^2(y)}\ dy = [y\tan(y)]_0^{\pi/4} - \int\limits_0^{\pi/4} \tan(y)dy = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}.$$

Végül

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2).$$

2.4. Stirling-formula

A Stirling-formula $n!$ értékeit közelíti pozitív egész n esetén.

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n},\ \text{azaz}\ \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}} = 1.$$

Sorok segítségével pontosabb közelítést keresek.

Állítás.

$$0 \le 1 + \frac{1}{12}\frac{x^2}{1+x} - (\frac{1}{x}+\frac{1}{2})\ln(1+x) \le \frac{x^4}{120},\quad x\in\mathbb{R}^+. \qquad (*)$$

Bizonyítás. Legyen

$$g(x) := 2x + \frac{1}{6}\frac{x^3}{1+x} - (2+x)\ln(1+x),\ D(g) := [0,\infty).$$

Ekkor

$$g'(x) = 2 + \frac{3x^2(1+x)-x^3}{6(x+1)^2} - \frac{x+2}{x+1} - \ln(x+1),\ x\in\mathbb{R}^+.$$

Így $g(0) = g'(0) = 0$ és

$$g''(x) = \frac{1}{6}\frac{(6x^2+6x)(1+x)^2-(2x^3+3x^2)\cdot 2(1+x)}{(1+x)^4} + \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} =$$

$$\frac{(3x^2+3x)(x+1)-2x^3-3x^2+3(x+1)-3(x+1)^2}{3(x+1)^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 > 0,\quad x\in\mathbb{R}^+.$$

Mivel $g'' > 0$ $\mathbb{R}^+$-n és $g'(0) = 0$, ebből következik, hogy $g' > 0$ $\mathbb{R}^+$-n. Mivel $g' > 0$ $\mathbb{R}^+$-n és $g(0) = 0$, $x\in\mathbb{R}^+$ esetén $g(x) > 0$. $\frac{g(x)}{2x} > 0,\ x\in\mathbb{R}^+$-n, ami a $(*)$ egyenlőtlenség bal oldala.

Legyen

$$h(x) := \frac{x^5}{60} - g(x),\ D(h) = [0,\infty),$$

ekkor

$$h'(x) = \frac{x^4}{12} - g'(x),\ x\in\mathbb{R}^+.$$

$$h''(x) = \frac{x^3}{3} - g''(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 > 0, \; x > 0.$$

Ebből az előbbihez hasonlóan $h'(0) = h(0) = 0$ alapján $h(x) > 0, \; x \in \mathbb{R}^+$. Így $\frac{h(x)}{2x} > 0, \; x \in \mathbb{R}^+$, innen kapom a $(*)$ az egyenlőtlenség jobb oldalát.

Legyen

$$a_n := \frac{n!}{(\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}}, \; n \in \mathbb{N}^+.$$

akkor

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{n+1} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \frac{1}{e} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{e},$$

ekkor

$$\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1, \; n \in \mathbb{N}^+.$$

Az $(*)$ egyenlőtlenség bal oldalát $x := \frac{1}{n}$ esetén alkalmazva adódik, hogy

$$\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{1}{12n(n+1)}, \; n \in \mathbb{N}^+.$$

$$\ln \frac{a_n}{a_{n+k}} = \sum_{i=n}^{n+k-1} \ln \frac{a_i}{a_{i+1}} \leq \frac{1}{12} \sum_{i=n}^{n+k-1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right), \; n, k \in \mathbb{N}^+.$$

Ha n rögzített, akkor $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n+k} = 1$ a Stirling formula alapján, ezért

$$\ln(a_n) = \lim_{k\to\infty} (\ln(a_n) - \ln(a_{n+k})) \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right) = \frac{1}{12n}, \; n \in \mathbb{N}^+.$$

Ebből

$$a_n \leq e^{\frac{1}{12n}}, \; n \in \mathbb{N}^+.$$

A (*) egyenlőtlenség jobb oldalát $x := \frac{1}{n}$ esetén alkalmazva kapom a következőt:

$$1 + \frac{1}{12} \frac{\frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^4}{120}, \; n \in \mathbb{N}^+,$$

$$1 + \frac{1}{12} \frac{\frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} - \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{120} \frac{1}{n^4},$$

$$\frac{1}{12} \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{120} \frac{1}{n^4} \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} - 1 = \ln \frac{a_n}{a_{n+1}}, \; n \in \mathbb{N}^+.$$

A hányados logaritmusát most alulról becsülve

$$\ln \frac{a_n}{a_{n+k}} = \sum_{i=n}^{n+k-1} \ln \frac{a_i}{a_{i+1}} \geq \frac{1}{12} \sum_{i=n}^{n+k-1} \frac{1}{i(i+1)} - \frac{1}{120} \sum_{i=n}^{n+k-1} \frac{1}{i^4}, \; n, k \in \mathbb{N}^+. \qquad (**)$$

Mivel az $f(x) := \frac{1}{x^4}$, $n \in \mathbb{R}^+$ függvény szigorúan monoton fogy, így

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^4} \leq \int\limits_n^{\infty} \frac{1}{x^4}\,dx\ ,\ n \in \mathbb{N}^+.$$

Ebből

$$\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^4} \leq \int\limits_n^{\infty} \frac{1}{x^4}\,dx + \frac{1}{n^4} =$$

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_n^{k} \frac{1}{x^4}\,dx + \frac{1}{n^4} = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{x^{-3}}{-3}\right]_n^k \frac{1}{n^4} = \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{n^4},\ n \in \mathbb{N}^+.$$

Ha n rögzített, akkor $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n+k} = 1$, ezért $(**)$ következtében

$$\ln(a_n) = \lim_{k\to\infty}(\ln(a_n) - \ln(a_{n+k})) \geq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{12}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}) - \frac{1}{360n^3} - \frac{1}{120n^4}.$$

$$\ln(a_n) \geq \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} - \frac{1}{120n^4},\ n \in \mathbb{N}^+.$$

Legyen

$$r_n := \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} - \frac{1}{120n^4},\ n \in \mathbb{N}^+,$$

így $a_n > e^{r_n}$.

Az exponenciális függvény konvex, ezért $e^{r_n} \geq 1 + r_n,\ n \in \mathbb{N}^+$. Továbbá a Lagrange-maradéktagos Taylor-formula alapján bármely pozitív x-hez létezik olyan $c \in (0, x)$, melyre

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{e'''(c)}{3!}x^3.$$

Mivel $0 < c < x$, ezért

$$e^x < 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{e^x}{6}x^3, x \in \mathbb{R}^+.$$

Tehát

$$e^{r_n} < a_n < e^{\frac{1}{12n}},\ n \in \mathbb{N}^+.$$

A fent kapott két becslésből következik

$$1 + r_n \leq e^{r_n} < a_n < e^{\frac{1}{12n}} \leq 1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \frac{1}{6}\frac{e^{1/12}}{(12n)^3}.$$

Végül r_n értékét beírva, továbbá az $e^{\frac{1}{12}} < 1,2$ becslést felhasználva

$$-\frac{1}{360n^3} - \frac{1}{120n^4} < \frac{n!}{(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}} - 1 - \frac{1}{12n} < \frac{1}{288n^2} + \frac{1}{8640n^3},\ n \in \mathbb{N}^+.$$

2.5. Euler állandó közelítése

Legyen

$$D_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n), \ n \in \mathbb{N}^+.$$

A 2.2.2 fejezetben már beláttam, hogy ez a sorozat konvergens. Jelölje γ a sorozat határértékét:

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} D_n.$$

Ezt a számot Euler konstansnak is nevezik. Nem ismert, hogy ez a szám racionális vagy irracionális. A következőkben kétféle közelítést is mutatok az Euler állandóra.

2.5.1. Geometriai közelítés

Állítás.

$$\frac{1}{2(n+1)} < D_n - \gamma < \frac{1}{2n}, \ n \in \mathbb{N}^+.$$

Bizonyítás.

$$D_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x}\, dx.$$

A logaritmus átalakításával

$$\ln(n) = \ln\left[\left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{n-1}{n-2}\right)\cdots\left(\frac{2}{1}\right)\right] =$$

$$\ln\left(\frac{n}{n-1}\right) + \ln\left(\frac{n-1}{n-2}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{2}{1}\right), \ n \in \mathbb{N}^+.$$

Ekkor

$$D_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) =$$

$$1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)\right).$$

Ez egy pozitív tagú sor részletöszeg-sorozata, ezért

$$\gamma = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)\right).$$

Legyen

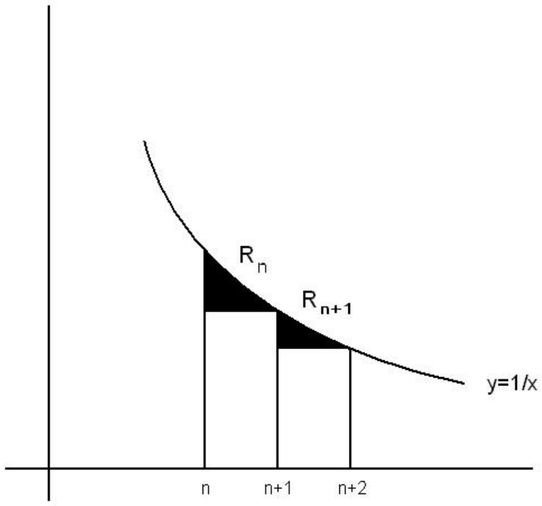
$$R_n := \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}, \ n \in \mathbb{N}^+.$$

Az imént bevezetett jelöléssel

$$D_n = 1 - \sum_{k=2}^{n} R_{k-1}, \ n \in \mathbb{N}^+,$$

és az Euler konstans definíciója alapján a $\sum_{n=0}^{\infty} R_n$ pozitív tagú sor konvergens. Így

$$D_n - \gamma = \sum_{k=n}^{\infty} R_k, \ n \in \mathbb{N}^+.$$



Az ábrán sötéttel jelölt n. síkidom területe R_n. Minden R_n felülről becsülhető $\frac{1}{2}$-del, mert a reciprok függvény konkáv $\mathbb{R}^+$-n. Az összes sötéttel jelölt síkidom egymás alá csúsztatható, így belefér az $\frac{1}{n}$ magas egység alapú téglalapba. Ezért

$$D_n - \gamma = \sum_{k=n}^{\infty} R_k < \frac{1}{2n}.$$

A második ábrán sötéttel jelölt háromszöget úgy kapom, hogy a grafikon $(\frac{1}{m+1}, m+1)$ és $(\frac{1}{m+2}, m+2)$ pontjain átmenő szelő levág egy háromszöget az előbb vizsgált R_n területű síkidomból. A levágott háromszög területe $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right)$, ebből

$$R_m > \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right],\ m \in \mathbb{N}^+.$$

Ezt felhasználva

$$D_n - \gamma = \sum_{k=n}^{\infty} R_k > \frac{1}{2}\sum_{m=n}^{\infty}\left[\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right] = \frac{1}{2(n+1)}.$$

Így a közelítés

$$\frac{1}{2(n+1)} < D_n - \gamma < \frac{1}{2n},\ n \in \mathbb{N}^+.$$

2.5.2. Lingying közelítése

Tétel. *Legyen* $r_n := \gamma - D_n,\ n \in \mathbb{N}^+$, *akkor*

$$\frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{12(n+1)(n+2)} < r_n < \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{12(n+1)}.$$

Bizonyítás. D_n felírható a következő alakban:

$$D_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^1 \frac{1}{k}\,dt - \int_0^1 \frac{1}{k+t}\,dt\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{0}^{1}\frac{k+t-k}{k(k+t)}\,dt=\sum_{k=1}^{n}\int_{0}^{1}\frac{t}{k(k+t)}\,dt,\ n\in\mathbb{N}^{+}.$$

A $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{0}^{1}\frac{t}{k(k+t)}\,dt$ és a $\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{k(k+1)}\,dt$ sorok abszolút konvergensek, mert pozitív tagúak, továbbá

$$\frac{t}{k(k+t)}<\frac{1}{k^2}\ ,\ \frac{1}{k(k+1)}<\frac{1}{k^2},\ k\in\mathbb{N}^{+},\ t\in[0,1],$$

és a $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ sor konvergens. Ezekből

$$r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{0}^{1}\frac{t}{k(k+t)}\,dt=$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{0}^{1}t\left[\frac{1}{k(k+t)}+\left(-\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{k(k+1)}\right)\right]\,dt=$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{0}^{1}t\left(\frac{1}{k(k+t)}-\frac{1}{k(k+1)}\right)\,dt+\int_{0}^{1}t\,dt\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{0}^{1}\frac{t(1-t)}{k(k+1)(k+t)}\,dt+\frac{1}{2(n+1)}.$$

Legyen

$$s_n:=\sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{0}^{1}\frac{t(1-t)}{k(k+1)(k+t)}\,dt,\ n\in\mathbb{N}^{+},$$

ekkor

$$r_n=s_n+\frac{1}{2(n+1)},\ n\in\mathbb{N}^{+}.$$

Mivel

$$\int_{0}^{1}t(t-1)\,dt=\int_{0}^{1}t^2\,dt-\int_{0}^{1}t\,dt=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6},$$

ezért az s_n-beli nevezőben a változót alulról becsülve s_n-re felső becslést, felülről becsülve pedig s_n-re alsó becslést kapok:

$$\frac{1}{6}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)^2}<s_n<\frac{1}{6}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)},\ n\in\mathbb{N}^{+}.$$

A bal oldalt tovább csökkentem, ha $k+1$ helyett $k+2$ írok, így

$$\frac{1}{6}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)^2}>\frac{1}{6}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

Használva a kövekező azonosságot

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k(k+1)} - \frac{1}{2(k+1)(k+2)},$$

Ebből

$$\frac{1}{6}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{12}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) = \frac{1}{12}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

A jobb oldalt hasonló módszerrel becsülöm felülről az egyik tényező helyett helyett $(k-1)$-t írva

$$\frac{1}{6}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)^2} < \frac{1}{6}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)k(k+2)}$$

Így

$$\frac{1}{6}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{1}{12}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{12}\frac{1}{n(n+1)}$$

Ezekből

$$\frac{1}{12(n+1)(n+2)} < s_n < \frac{1}{12n(n+1)},\ n \in \mathbb{N}^+.$$

Végül

$$\frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{12(n+1)(n+2)} < r_n < \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{12(n+1)}\ n \in \mathbb{N}^+.$$

Ez pontosabb közelítés, mint az előző pontbeli közelítés.

2.6. π két előállítása végtelen sor összegeként

2.6.1. Dalzell eredménye

Tétel.

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty}(-\tfrac{1}{4})^k\left[\tfrac{(4k)!(4k+6)!}{(8k+7)!} - \tfrac{4(4k)!(4k+5)!}{(8k+6)!} + \tfrac{5(4k)!(4k+4)!}{(8k+5)!} - \tfrac{4(4k)!(4k+2)!}{(8k+3)!} + \tfrac{4(4k)!^2}{(8k+1)!}\right].$$

Bizonyítás.

$$4 + x^4(1-x)^4 = x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4 + 4,\ x \in \mathbb{R}.$$

A jobb oldalt szorzattá alakítva

$$4 + x^4(1-x)^4 = (x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4)(1 + x^2),$$

ebből
$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4}{4+x^4(1-x)^4},\ x\in\mathbb{R}.$$
Megszorozva mindkét oldalt 4-gyel, majd a jobb oldalon azzal egyszerűsítve
$$\frac{4}{1+x^2}=\frac{x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4}{1+x^4(1-x)^4/4},\ x\in\mathbb{R}.$$

Integrálva a $[0,1]$ intervallumon
$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx=[4\arctan(x)]_0^1=4\cdot\frac{\pi}{4}=\pi,$$
valamint
$$\int_0^1 \frac{x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4}{1+x^4(1-x)^4/4}\,dx=\int_0^1\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^k(x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4)x^{4k}(1-x)^{4k}\,dx.$$

Ha $x\in[0,1]$, akkor a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján
$$\sqrt{x(1-x)}\le\frac{x+(1-x)}{2}=\frac{1}{2}.$$
Ebből
$$\frac{(x(1-x))^4}{4}\le\frac{1}{4^5}<1.$$

Legyen $x\in[0,1]$ alapján $q:=-\frac{x^4(1-x)^4}{4}$, akkor
$$\frac{1}{1-q}=\sum_{n=0}^{\infty}q^n,\ q\in(-1,1),$$
$$\frac{1}{1-(-\frac{x^4(1-x)^4}{4})}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n x^{4n}(1-x)^{4n}.$$

Legyen $p(x):=x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4,\ D(p):=\mathbb{R}$. Ez a polinom folytonos a $[0,1]$ intervallumon, amiből Weierstrass tétele alapján következik, hogy létezik legnagyobb értéke. Jelölje ezt M:=$\max\limits_{[0,1]}(p)$. A fenti függvénysort $p(x)$-szel szorozva
$$\frac{p(x)}{1-(-\frac{x^4(1-x)^4}{4})}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n x^{4n}(1-x)^{4n}p(x)$$
Ez a függvénysor egyenletesen konvergens a $[0,1]$ intervallumon, mert alkalmazható a Weierstrass-kritérium:
$$\left|\left(-\frac{1}{4}\right)^n x^{4n}(1-x)^{4n}p(x)\right|\le\left(\frac{1}{4}\right)^n\cdot 1\cdot 1\cdot M,\ x\in[0,1].$$

Így kapom a következőt:

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4}{1+x^4(1-x)^4/4}\,dx =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^k \int_0^1 (x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4)x^{4k}(1-x)^{4k}\,dx. \qquad (*)$$

Parciális integálással

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1}(1-x)^n\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{m+1}\cdot n(1-x)^{n-1}\cdot(-1)\,dx =$$

$$\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}\,dx,\ m\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N}^+.$$

További $n-1$ darab parciális integrálás után

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \frac{n!m!}{(m+n+1)!}\int_0^1 x^{m+n}\,dx = \frac{n!m!}{(m+n+1)!}\ m\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N}^+.$$

Az eredmény $n=0$ esetén is fennéll. A $(*)$ integrandust öttagú összeggé írva, majd tagonként integrálva, és minden tagban a kapott összefüggést felhasználva

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty}(-\tfrac{1}{4})^k\left[\tfrac{(4k)!(4k+6)!}{(8k+7)!} - \tfrac{4(4k)!(4k+5)!}{(8k+6)!} + \tfrac{5(4k)!(4k+4)!}{(8k+5)!} - \tfrac{4(4k)!(4k+2)!}{(8k+3)!} + \tfrac{4(4k)!^2}{(8k+1)!}\right].$$

2.6.2. Chan eredménye

Tétel.

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{64^n}\left(\frac{1}{6n+1} + \frac{3}{2(6n+2)} + \frac{1}{2^2(6n+3)} - \frac{1}{2^3(6n+5)}\right).$$

Bizonyítás. A következő három Riemann integrált vizsgálom:

$$I_1 := \int_0^{1/2}\frac{1}{1-x+x^2}\,dx = \int_0^{1/2}\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx =$$

$$\frac{4}{3}\int_0^{1/2}\frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})\right]^2+1}\,dx = \frac{4}{3}\left[\frac{\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})\right)}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

$$I_2 := \int_0^{1/2} \frac{x}{1-x+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{2x-1+1}{1-x+x^2}\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{2x-1}{1-x+x^2}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{1}{1-x+x^2}\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\left[\ln(1-x+x^2)\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

$$I_3 := \int_0^{1/2} \frac{x}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln(|x^2-1|)\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{4}\right).$$

Ezeket felhasználva

$$\pi = 2\sqrt{3}(I_1+I_2-I_3) = 2\sqrt{3}\left(\int_0^{1/2} \frac{1}{1-x+x^2}\,dx + \int_0^{1/2} \frac{x}{1-x+x^2}\,dx - \int_0^{1/2} \frac{x}{x^2-1}\,dx\right) =$$

$$2\sqrt{3}\int_0^{1/2} \frac{2x^2-2x-1}{(1-x+x^2)(x^2-1)}\,dx. \tag{*}$$

Az x^6-1 polinom felírható a következő alakban:

$$x^6-1 = (1-x+x^2)(x^2-1)(1+x+x^2).$$

A $(*)$ egyenletbe beírva

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1+2x-2x^2)(1+x+x^2)}{1-x^6}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+3x+x^2-2x^4}{1-x^6}\,dx. \tag{**}$$

A mértani sor összege alapján

$$\frac{1}{1-x^6} = \sum_{n=0}^{\infty}(x^6)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{6n},\ x\in(-1,1),$$

ezért rögzített $k\in\mathbb{N}^+$ esetén

$$\frac{x^{k-1}}{1-x^6} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{6n+k-1},\ x\in(-1,1). \tag{***}$$

Ez a hatványsor adott $k\in\mathbb{N}^+$ esetén egyenletesen konvergens a $[0,\frac{1}{2}]$ intervallumon, mert

$$\left|x^{6n+k-1}\right| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{6n+k-1},\ n\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{N}^+,$$

így a Weierstass-kritérium alkalmazható.

Rögzített $k \in \mathbb{N}^+$ esetén integrálom a $[0, \frac{1}{2}]$ intervallumon a $(***)$ egyenlőtlenség mindkét oldalát, a jobb oldalt tagonként integrálva

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{k-1}}{1-x^6}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} x^{6n+k-1}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{6n+k-1}\,dx = \frac{1}{2^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{64^n} \frac{1}{6n+k},\ \ k \in \mathbb{N}^+.$$

A (**) egyenletben ezt felhasználva

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{64^n} \left(\frac{1}{2(6n+1)} + \frac{3}{2^2(6n+2)} + \frac{1}{2^3(6n+3)} - \frac{2}{2^5(6n+5)} \right).$$

3. fejezet

Integrálok meghatározása sorok segítségével

3.1. Példák

Ebben a fejezetben olyan Riemann integráltakat határozok meg, ahol az integrandus primitív függvényei nem elemi függvények.

1. példa. Határozzuk meg $\int\limits_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x}\, dx$ értékét.
Legyen $f(x) := \ln(x+1)$, $D(f) := (-1, +\infty)$. Az f függvény 0 középpontú Taylor-sorfejtése

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \ x \in (-1, 1].$$

$x \neq 0$ esetén x-szel osztva

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n-1}}{n}, \ x \in (-1, 0) \cup (0, 1]. \tag{*}$$

Mivel $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$, ezért $g(x) := \frac{\ln(x+1)}{x}$, $D(g) := (0, 1]$ folytonosan kiterjeszthető a $[0, 1]$ intervallumra, $g(0) = 1$ választásával.

Megmutatom, hogy a $(*)$ hatványsor egyenletesen konvergens a $[0, 1]$ intervallumon. Minden $x \in [0, 1]$ és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $x^{n-1} \geq 0$, ezért $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n-1}}{n}$ Leibniz-típusú sor. Az

n-edik részletösszegre az s_n jelölést használva a Leibniz-típusú sor hibabecslése alapján

$$\left|s_n(x) - \frac{\ln(x+1)}{x}\right| \leq \frac{1}{n+1}x^n \leq \frac{1}{n+1}, \quad x \in (0,1], \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

amiből következik, hogy a vizsgált hatványsor egyenletesen konvergens.

A g függvény $[0,1]$ intervallumon vett Riemann integrálja az összegfüggvény integráltjára vonatkozó tétel szerint:

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (-1)^{n+1} \frac{x^{n-1}}{n}\, dx =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} \frac{x^n}{n^2}\right]_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

2.példa. Keressük meg $\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x}\, dx$ értékét.
Legyen $f(x) := \arctan(x)$, $D(f) := \mathbb{R}$. Az f függvény 0 középpontú Taylor-sorfejtése

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1,1].$$

Ha $x \neq 0$, akkor x-szel osztva

$$\frac{\arctan(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}, \quad x \in [-1,1], \quad x \neq 0.$$

Mivel $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$, ezért $g(x) := \frac{\arctan(x)}{x}$, $D(g) := (0,1]$ folytonosan kiterjeszthető a $[0,1]$ intervallumra $g(0) := 1$ választásával.

Igazoljuk, hogy a hatványsor egyenletesen konvergens a $[0,1]$ intervallumon. Minden $x \in [0,1]$ és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $x^{2n} \geq 0$, ezért $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}$ Leibniz-típusú sor.
Az n-edik részletösszegét s_n-nel jelölve a közelítés hibája

$$\left|s_n(x) - \frac{\arctan(x)}{x}\right| \leq \frac{1}{2n+3}x^{2n+2} \leq \frac{1}{2n+3}, \quad x \in [0,1], \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

A definícióból következik, hogy a hatványsor egyenletesen konvergens $(0,1]$-n, ezért $[0,1]$ intervallumon is.
A g függvény $[0,1]$ intervallumon vett Riemann integrálja az összegfüggvény integráltjára

vonatkozó tétel szerint:

$$\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}\,dx =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

A 17. részletösszeg már kevesebb, mint 10^{-3}-nal tér el a sorösszegtől, így három tizedesjegyes pontossággal

$$\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x}\,dx \approx \sum_{n=0}^{16}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2} \approx 0,916.$$

3.példa. Számoljuk ki $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ értékét.

Legyen $f(x) := \sin(x)$, $D(f) := \mathbb{R}$. Az f függvény 0 középpontú Taylor-sorfejtése

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Legyen $x \neq 0$, akkor x-szel osztva

$$\frac{\sin(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Mivel $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, ezért $g(x) := \frac{\sin(x)}{x}$, $D(g) := (0,1]$ folytonosan kiterjeszthető a $[0,1]$ intervallumra $g(0) := 1$ választásával.

Megmutatom, hogy a hatványsor egyenletesen konvergens a $[0,1]$ intervallumon. Minden $x \in [0,1]$ és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $x^{2n} \geq 0$, ezért $\sum(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ Leibniz-típusú sor. Az s_n-edik részletösszegre

$$\left|s_n(x) - \frac{\sin(x)}{x}\right| \leq \frac{1}{(2n+3)!}x^{2n+2} \leq \frac{1}{(2n+3)!}, \quad x \in (0,1], \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Ebből következik, hogy a hatványsor egyenletesen konvergens $(0,1]$-n, így $[0,1]$-n is.

A g függvény $[0,1]$ intervallumon vett Riemann integrálja az összegfüggvény integráltjára vonatkozó tétel szerint:

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\,dx =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)(2n+1)!}.$$

Már az s_3 részletösszeg 10^{-3}-nál kevesebbel tér el a sorösszegtől, így 3 tizedesjegy pontossággal

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \sum_{n=0}^{2}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)(2n+1)!} \approx 0,908.$$

4.példa. Keressük meg $\int\limits_1^2 \frac{\cos(x)}{x}\,dx$ értékét.
Legyen $f(x) := \cos(x)$, $D(f) := \mathbb{R}$. Az f függvény 0 középpontú Taylor-sorfejtése

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$x \neq 0$ esetén x-szel osztva

$$\frac{\cos(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}, \; x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Megmutatom, hogy a hatványsor egyenletesen konvergens az $[1,2]$ intervallumon.
Minden $x \in [1,2]$ esetén a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}$ sor Leibniz-típusú.
Az n-edik részletösszegre az s_n jelölést használva

$$\left| s_n(x) - \frac{\cos(x)}{x} \right| \leq \frac{1}{(2n)!}x^{2n-1} \leq \frac{1}{(2n)!}, \quad x \in [1,2], \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

amiből a következik, hogy a hatványsor egyenletesen konvergens [1,2]-n.

A $g(x) := \frac{\cos(x)}{x}$, $D(g) := [1,2]$ függvény $[1,2]$ intervallumon vett Riemann integrálja az összegfüggvény integráltjára vonatkozó tétel szerint:

$$\int_1^2 \frac{\cos(x)}{x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_1^2 (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}\,dx =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln(x)+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)\cdot(2n)!}\right]_1^2=\ln(2)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n-1}{(2n)\cdot(2n)!}$$

Már az első 4 tag után a sor kisebb, mint 10^{-3} hibával közelít.

Az első négy tag összegével közelítve az integrált

$$\int\limits_1^2\frac{\cos(x)}{x}\,dx\approx\ln(2)+\sum_{n=1}^{3}(-1)^n\frac{4^n-1}{(2n)(2n)!}\approx 0,472.$$

5.példa. Számoljuk ki $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$ értékét.

Legyen $f(y):=e^y$, $D(f):=\mathbb{R}$. Az f függvény 0 középpontú Taylor-sorfejtése

$$f(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!},\quad y\in\mathbb{R}.$$

Az $y=-x^2$ helyettesítéssel

$$e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!},\quad x\in\mathbb{R}.$$

Minden $x\in[0,1]$ esetén $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}$ Leibniz-típusú sor. Az n-edik részletösszegre az s_n jelölést használva

$$\left|s_n(x)-e^{-x^2}\right|\le\frac{1}{(n+1)!}x^{2n+2}\le\frac{1}{(n+1)!},\quad x\in[0,1],\quad n\in\mathbb{N}^+.$$

A definíció szerint a hatványsor egyenletesen konvergens, ezért

$$\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^1(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}\,dx=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}\right]_0^1=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)n!}.$$

Az első 6 tag után már kevesebb, mint 10^{-3} az eltérés a sorösszegtől, így

$$\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx\approx\sum_{n=0}^{6}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)n!}\approx 0,748.$$

6.példa. Határozzuk meg $\int\limits_0^1 x^{-x}\,dx$ értékét.

Legyen $f(x) := x^{-x}$, $D(f) := (0,+\infty)$. Ekkor $x^{-x} = e^{-x\ln(x)}$, $x \in \mathbb{R}^+$ szerint

$$\lim_{x\to 0} x^{-x} = \lim_{x\to 0} e^{-x\ln(x)} = 1,$$

mert a l'Hôspital-szabályt felhasználva

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Így az f függvény az $f(0) := 0$ értékkel kiterjeszthető a $[0,\infty)$ intervallumra folytonos függvénnyé. Az exponenciális függvény 0 középpontú Taylor-sora mindenütt konvergens, és a Taylor sor előállítja az exponenciális függvényt $\mathbb{R}$-n, ezért

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n \ln^n(x)}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{*}$$

Legyen $g(x) := x\ln(x)$, $D(g) = (0,1]$.

$$g'(x) = \ln(x) + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{e}.$$

$g' > 0$ az $(\frac{1}{e},\infty)$ intervallumon, és $g' < 0$ a $(0,\frac{1}{e})$ intervallumon, ezért a g függvénynek minimuma van az $\frac{1}{e}$ helyen. Ezért

$$|x\ln(x)| \le \frac{1}{e},\; x \in [0,1]$$

A függvénysor a Weierstass-kritérium alapján egyenletesen konvergens a [0,1] intervallumon, hiszen

$$\left|(-1)^n \frac{x^n \ln^n(x)}{n!}\right| \le \frac{1}{e^n n!}, x \in [0,1], n \in \mathbb{N}.$$

Ebből következik, hogy a függvénysor egyenletesen konvergens a $[0,1]$-n is.

Parciális integrálással

$$\int\limits_0^1 x^m \ln^n(x)\,dx = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n(x)\right]_0^1 - \frac{n}{m+1}\int\limits_0^1 x^m \ln^{n-1}(x)\,dx,\; m,\; n \in \mathbb{N}^+.$$

A l'Hôspital-szabályt n-szer egymás után alkalmazva

$$\lim_{x\to 0} x^{m+1}\ln^n(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln^n(x)}{\frac{1}{x^{m+1}}} = \lim_{x\to 0} \frac{n\ln^{n-1}(x)\frac{1}{x}}{-(m+1)x^{-(m+2)}} =$$

$$-\frac{n}{m+1}\lim_{x\to 0}\frac{\ln^{n-1}(x)}{x^{-(m+1)}} = \ldots = \lim_{x\to 0}(-1)^n\frac{n!}{(m+1)^n}\frac{1}{\frac{1}{x^{m+1}}} = 0,\ m,n\in\mathbb{N}^+.$$

Emiatt az első tag 0. Újabb $n-1$ parciális integrálás után kapható

$$\int_0^1 x^m \ln^n(x)\ dx = (-1)^n\frac{n!}{(m+1)^n}\int_0^1 x^m\ dx,\ m,\ n\in\mathbb{N}^+.$$

Legyen $m{:=}n$, akkor

$$\int_0^1 x^n \ln^n(x)\ dx = (-1)^n\frac{n!}{(n+1)^n}\int_0^1 x^n\ dx,\ n\in\mathbb{N}^+.$$

Elvégezve az integrálást, kapom a következőt:

$$\int_0^1 x^n \ln^n(x)\ dx = (-1)^n\frac{n!}{(n+1)^n}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = (-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Ez a formula $n=0$ esetén is teljesül. Az eredményt visszahelyettesítve $(*)$ egyenlőségbe

$$\int_0^1 x^{-x}\ dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{n!}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

Így 10^{-3} pontossággal a kapott eredmény

$$\int_0^1 x^{-x}\ dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}\approx 1,291.$$

3.2. A Gauss-féle számtani-mértani közép és egy alkalmazása

3.2.1. Gauss-féle számtani-mértani közép

Adott $a, b \in \mathbb{R}^+$ esetén legyen $a_0 := a$ és $b_0 := b$. Rekurzióval megadunk két sorozatot a következő módon:

$$a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} := \sqrt{a_n b_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tehát a_{n+1} az a_n és a b_n számtani közepe, b_{n+1} pedig ezek mértani közepe. Megmutatom, hogy e két sorozat konvergens, és a határértékük megegyezik.

Legyen például $a \geq b$. Ez feltehető, mivel a nulladik tagot felcserélve a két sorozat többi tagja változatlan marad.
A számtani és a mértani közép között fennálló egyenlőtlenség alapján $b_n \leq a_n, \quad n \in \mathbb{N}^+$.
Továbbá a számtani és a mértani közép tulajdonságai miatt

$$b_n \leq b_{n+1} \leq a_n, \quad b_n \leq a_{n+1} \leq a_n, \quad b_{n+1} \leq a_{n+1}$$

Így

$$b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n.$$

Ebből látszik, hogy (a_n) monoton csökkenő, (b_n) monoton növekvő sorozat, és mindkettő korlátos.

Mindkét sorozat konvergens, mert monoton és korlátos. (b_n) monoton nő , így

$$0 \leq a_{n+1} - b_{n+1} \leq a_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2}.$$

Ebből teljes indukcióval kapjuk, hogy

$$0 \leq a_n - b_n \leq \frac{1}{2^n}(a - b), \quad n \in \mathbb{N}.$$

A rendőrelv miatt az $(a_n - b_n)$ sorozat 0-hoz tart. Mivel mindkét sorozat konvergens, ezért határértékeik azonosak. A közös határértéket az a és b számok Gauss-féle számtani-mértani közepének nevezzük, és $G(a, b)$-vel jelöljük.

3.2.2. Másodfajú elliptikus integrál

Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}^+$, akkor*

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2(x) + b^2\sin^2(x)}}\,dx = \frac{\pi}{2G(a,b)}.$$

Bizonyítás. Legyen $H := \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2(x)+b^2\sin^2(x)}}dx$, ahol $a, b > 0$.
Az integrált helyettesítéssel számolom ki.

Legyen

$$g(y) := \arcsin\frac{2a\sin(y)}{a+b+(a-b)\sin^2(y)},\ D(g) := \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$g(0) = 0$, $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$, továbbá $g : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0, \frac{\pi}{2}]$ bijekció, mert folytonos $[0, \frac{\pi}{2}]$-n, differenciálható a $(0, \frac{\pi}{2})$ intervallumon, és

$$g'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{2a\sin(y)}{a+b+(a-b)\sin^2(y)})^2}}\cdot$$

$$\cdot\frac{2a\cos(y)(a+b+(a-b)\sin^2(y)) - 2a\sin(y)\cdot 2(a-b)\sin(y)\cos(y)}{(a+b+(a-b)\sin^2(y))^2} =$$

$$\frac{2a(a+b)\cos(y) - 2a(a-b)\cos(y)\sin^2(y)}{\sqrt{(a+b+(a-b)\sin^2(y))^2 - (2a\sin(y))^2}\cdot(a+b+(a-b)\sin^2(y))} =$$

$$\frac{2a\cos(y)[a+b-(a-b)\sin^2(y)]}{\sqrt{(a+b)^2 + 2(a+b)(a-b)\sin^2(y) + (a-b)^2\sin^4(y) - 4a^2\sin^2(y)}}\cdot$$

$$\frac{1}{a+b+(a-b)\sin^2(y)} > 0,\ y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

alapján g szigorúan monoton nő. Ezért a g helyettesítéssel

$$\sin(x) = \frac{2a\sin(y)}{a+b+(a-b)\sin^2(y)},$$

$$x = \arcsin\frac{2a\sin(y)}{a+b+(a-b)\sin^2(y)},$$

$$dx = \frac{2a\cos(y)[a+b-(a-b)\sin^2(y)]}{\sqrt{(a+b)^2+2(a+b)(a-b)\sin^2(y)+(a+b)^2\sin^4(y)-4a^2\sin^2(y)}(a+b+(a-b)\sin^2(y))}\,dy.$$

Az integrandusban elvégezve a helyettesítést:

$$a^2\cos^2(x) + b^2\sin^2(x) = a^2 + (b^2 - a^2)\sin^2(x) = a^2 + \frac{(b^2-a^2)4a^2\sin^2(y)}{(a+b+(a-b)\sin^2(y))^2} =$$

$$\frac{a^2(a+b)^2 + 2a^2(a+b)(a-b)\sin^2(y) + a^2(a-b)^2\sin^4(y) + (b^2-a^2)4a^2\sin^2(y)}{(a+b+(a-b)\sin^2(y))^2} =$$

$$\frac{a^2(a+b)^2 - 2a^2(a+b)(a-b)\sin^2(y) + a^2(a-b)^2\sin^4(y)}{(a+b+(a-b)\sin^2(y))^2} =$$

$$\frac{(a[a+b-(a-b)\sin^2(y)])^2}{(a+b+(a-b)\sin^2(y))^2},$$

így

$$\sqrt{a^2\cos^2(x) + b^2\sin^2(x)} = \frac{a[a+b-(a-b)\sin^2(y)]}{a+b+(a-b)\sin^2(y)}.$$

Tehát a fenti helyettesítéssel

$$H = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2(x) + b^2\sin^2(x)}} dx =$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{a+b+(a-b)\sin^2(y)}{a[a+b-(a-b)\sin^2(y)]} \cdot \frac{2a\cos(y)[a+b-(a-b)\sin^2(y)]}{\sqrt{(a+b)^2+2(a+b)(a-b)\sin^2(y)+(a-b)^2\sin^4(y)-4a^2\sin^2(y)(a+b+(a-b)\sin^2(y))}} dy =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos(y)}{\sqrt{(a+b)^2 - 2(a^2+b^2)\sin^2(y) + (a+b)^2\sin^4(y)}}.$$

Elemi átalakítással

$$[(a+b)^2 - (a-b)^2\sin^2(y)](1-\sin^2(y)) =$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2\sin^2(y) - (a+b)^2\sin^2(y) + (a-b)^2\sin^4(y) =$$

$$(a+b)^2 - 2(a^2+b^2)\sin^2(y) + (a-b)^2\sin^4(y).$$

Így

$$H = \int_0^{\pi/2} \frac{2}{\sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2\sin^2(y)}} dy = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{a_1^2\cos^2(y) + b_1^2\sin^2(y)}} dy,$$

ahol $a_1 := \frac{a+b}{2}$, $b_1 := \sqrt{ab}$. Ezt indukcióval folytatva

$$H = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{a_n^2\cos^2(y) + b_n^2\sin^2(y)}} dy,$$

ahol (a_n) és (b_n) az a és b pozitív számok Gauss-féle számtani mértani-közepének definiálásakor bevezetett két sorozat. H-ban b_n helyére a_n-t írva

$$H \geq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{a_n^2(\cos^2(y) + \sin^2(y))}} dy = \frac{\pi}{2a_n}, n \in \mathbb{N}^+.$$

Hasonlóan, a_n helyére b_n-t írva

$$H \leq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{b_n^2(\cos^2(y) + \sin^2(y))}} dy = \frac{\pi}{2b_n}, n \in \mathbb{N}^+.$$

Tehát

$$\frac{\pi}{2b_n} \leq H \leq \frac{\pi}{2a_n}.$$

Az (a_n) és (b_n) sorozatok határértéke közös, mégpedig az a és b számok Gauss-féle számtani mértani-közepe, ebből következik

$$H = \frac{\pi}{2G(a, b)}.$$

Köszönetnyilvánítás

Hálásan köszönöm témavezetőmnek, Pfeil Tamásnak, hogy hasznos tanácsaival, türelmével, precíz munkájával hozzájárult a szakdolgozatom elkészítéséhez. Szeretném még megköszönni a támogatást, amelyet a családomtól és a szeretteimtőlkaptam.

Irodalomjegyzék

[1] Liu Zheng, *An Elementary Proof for Two Basic Alternating Series*, The American Mathematical Monthly 109, February 2002, 187-188.

[2] Reinhard Michel, *On Stirling's Formula*, The American Mathematical Monthly 109, April 2002, 388-389.

[3] Li Yingyling, *On Euler's Constant-Calculating Sums by Integrals*, The American Mathematical Monthly 109, November 2002, 845-848.

[4] Hei-Chi Chan, *More Formulas for* π , The American Mathematical Monthly 113, May 2006, 452-454.

[5] Stephen K. Lukas, *Approximations to* π *Derived from Integrals with Nonnegative Integrands*, The American Mathematical Monthly 116, February 2009, 166-167.

[6] Fichtenholz'c, G. M., *Differential- und Integralrechnung 1-2*, VEB Deutscher Verl. der Wissenschaften, Berlin, 1964.

[7] R.M. Young, *Euler's constant*, Math. Gazette 75, 1991, p. 187-190.

[8] Laczkovich Miklós - T. Sós Vera, *Analízis II*, Nemzeti Tankönyvkiadó 2007.