Fejezetek a differenciálszámítás történetéből

Szakdolgozat

Írta: **Bognár Izabella Mária**

Matematika BSc, Matematikai elemző szakirány

Témavezető: **Sikolya Eszter**, adjunktus

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2011

„A matematikát, ha helyesen fogjuk fel, nemcsak igazság, hanem egyszersmind magasrendű szépség is jellemzi: hideg és szigorú, a szobrászatéhoz hasonló szépség, mely nem fordul gyöngébb természetünk egyetlen részéhez sem, s amely nélkülözi a festészet és a zene elkápráztató kellékeit, viszont fenségesen tiszta, és oly szigorú tökélyre képes, amilyent csak a legnagyobb művészet tud felmutatni."

Bertrand Russell

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés: A matematikai analízis kialakulása

Az analízis a matematikának egyik meghatározó területe. Nélkülözhetetlen alapját képezi mind a matematikának, mind a természettudományoknak, sőt manapság a társadalomtudományoknak is. Elődeinkben felemerült az az igény, hogy a világegyetemet matematikai nyelven írják le. Az analízis elméletének kidolgozása csaknem 300 évet vett igénybe. Módszerei alkalmasak arra, hogy olyan problémákat oldjunk meg, melyeket algebrai eszközökkel (módszerekkel) képtelenek lennénk (esetleg nagyon bonyolult módon jutnánk eredményhez). Lényegében arról van szó, hogy a matematikai feladatok pontos megoldásához közelítő értékek segítségével jutunk el. E témakörön belül két jelentősebb területet különböztetünk meg:

- a differenciálszámítást, és
- az integrálszámítást.

Szakdolgozatom célja bemutatni miként alakult ki a mai differenciálszámítás. A történelem során nagy matematikusok egész sora foglalkozott ezen témakörrel. Időrendi sorrendben haladva tárgyalom az egyes emberek eredményeit.

A matematikai analízis problémaköréhez tartozó kérdések az i.e. V. században merültek fel először, amikor a görög matematikusok különböző görbevonalú idomokat kezdtek el vizsgálni.

Eudoxosz (i.e. 408-355) megalkotta a *kimerítés módszerét.* Ez jelentős előrelépés volt. A kimerítés módszerének alapja, hogy ha egy mennyiségből elvesszük legalább a felét, a maradékból ismét elvesszük legalább a felét és ezt az eljárást folytatjuk, akkor előbb-utóbb bármely, előre megadott mennyiségnél kisebb mennyiséget kapunk.

Az ezt követő évszázadokban nem volt különösebb előrelépés ezen a területen. Egészen a XVII. századig kellett várni az újabb ötletekre. A XVII. század nagy matematikusai kidolgoztak egy elméletet, az ún. *kalkulust* vagy más néven differenciálszámítást, melynek három összetevője volt.[1]

Az első összetevő a *koordináta-rendszer*, amely *René Descartes (1596-1650)* nevéhez fűződik. *Descartes* rámutatott arra, hogyan lehet a kooordináta-rendszerrel geometriai problémákat algebraiakká átfogalmazni.

A kalkulus második összetevője a *változó mennyiség* fogalma. A XVII. század matematikusai úgy képzelték el a fizikai jelenségekben szereplő mennyiségeket, hogy azok időtől folytonosan függő változók, melyek értékei pillanatról pillanatra megváltoznak. Minden görbét úgy képzeltek el, mint egy folytonosan mozgó pont pályáját.

A harmadik (legfontosabb) összetevő a *változó mennyiségek differenciálja.* Ennek a lényege, hogy minden változás végtelenül kicsi változások összegződéséből keletkezik. Ezáltal az idő is végtelenül kicsi időintervallumokból adódik össze. Egy x változó mennyiség differenciálja az a végtelenül kicsi mennyiség, amennyivel x megváltozik egy végtelenül kicsi időintervallum alatt. Az x differenciálját dx-szel jelöljük.

Kijelenthetjük, hogy a kalkulus egy nagyon hatékony módszer, sokféle feladat megoldására alkalmazható. A kalkulust, mint önálló rendszert nagy matematikusok sora fejlesztették ki, majd *Isaac Newton (1643-1727)* és *G.W.Leibniz (1646-1716)* foglalták össze.

[1] Laczkovich Miklós-T. Sós Vera, *Analízis I.*, 10-11. oldal, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2005.

2. fejezet

A koordináta-módszer

A koordináta-módszert *René Descartesnak (1596-1650)* köszönhetjük. *Descartes* francia filozófus, matematikus és fizikus volt. Nemesi család sarja, La Haye város szülötte. Filozófiájának alapja az a feltételezés, hogy létezik egy tőlünk független valóság. Ezt a világot értelmi úton ismerhetjük meg. Élete során ezeket a megismerési módszereket kereste illetve próbálta kidolgozni. Ezen oknál fogva tanulmányozta a természettudományokat és a matematikát. Geometriájának meghatározó lépése a változó mennyiség fogalmának használata volt.

Módszere lehetővé tette geometriai feladatok algebrai úton való megoldását. E módozat elsősorban olyan eljárásokat keresett, melyekkel meg tudták határozni különböző görbék érintőit. Probléma volt azonban az érintő fogalma. Nem volt megfelelő definíciója, ez sok matematikusnak okozott problémát abban az időben. A határérték fogalma segítséget nyújtott volna a jó definíció megfogalmazásához, de ez a fogalom *Descartes* idejében még ismeretlen volt.

Nézzük, hogyan segíthet rajtunk a határérték fogalma![2]

Feladat: Vegyünk egy görbét, melynek egy adott x abszciszzaértékéhez egyetlen pont tartozik. Keressük meg a görbe érintőjének egyenletét az $(x_0; y_0)$ pontban!

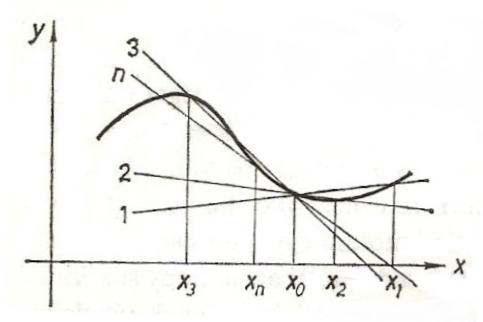
[2]Császár Ákos: Nagy pillanatok a matematika történetéből 90-92. o.

Ez az érintő egy olyan egyenes, mely átmegy a görbe $(x_0; y_0)$ pontján, vagyis az egyenlete

$$y = y_0 + m(x - x_0).$$

Határozzuk meg az érintő m meredekségét!

Nézzünk további pontokat a görbén: $x_1, x_2, x_3, \ldots$ illetve a hozzájuk tartozó $y_1, y_2, y_3, \ldots$; továbbá feltesszük, hogy $x_n \neq x_0$, viszont az $(x_n; y_n)$ pontok tartanak az $(x_0; y_0)$ ponthoz, méghozzá abban az értelemben, hogy $x_n \to x_0$.



1. ábra

Nézzük most a görbe $(x_0; y_0)$ valamint $(x_n; y_n)$ pontjain áthaladó szelőt; melynek egyenlete

$$y = y_0 + m_n(x - x_0).$$

Mivel az $(x_n; y_n)$ pont rajta van az egyenesen, ezért nem nehéz számolással adódik:

$$m_n = \frac{(y_n - y_0)}{(x_n - x_0)}.$$

A kérdéses pontban azt az egyenest fogjuk érintőnek venni, melynek meredeksége az előbb kiszámított m_n meredekségének a határértéke: azaz

$$m = \lim m_n.$$

Ezt tekinthetjük azon szemléletes elvárás világos megfogalmazásának, hogy az érintő az egy olyan egyenes, amely „jól hozzásimul” a görbéhez. Ez épp olyasmit jelent, hogy az érintési ponthoz közel eső görbepontokon áthaladó szelők iránya nem sokkal tér el az érintőétől. Ez az eljárás azonban csak akkor működhet, ha a fenti $m_1, m_2, m_3, \ldots$ sorozatnak valóban létezik határértéke, és ez független az $x_1, x_2, x_3, \ldots$ sorozat megválasztásától. Ezek a feltételek sok egyszerű görbe esetén megvalósulnak, ezáltal valóban eljutottunk az érintő meghatározásának egy általános módszeréhez.

Nézzünk egy példát!

Példa: A parabola, $y = x^2$ esetében, ha $x_n \to x_0$, akkor

$$m_n = \frac{(x_n^2 - x_0^2)}{(x_n - x_0)} = x_n + x_0 \to 2x_0,$$

vagyis az iménti parabola x_0 pontjában húzott érintő meredeksége $2x_0$, egyenlete pedig

$$y = y_0 + 2x_0(x - x_0) = x_0^2 + 2x_0(x - x_0).$$

3. fejezet

Differenciálmódszerek

A differenciálmódszerek (együtt az integrálmódszerekkel) a XVII. században alakultak ki. Differenciálmódszereknek hívjuk azokat a módszereket, amelyek a későbbi differenciálszámítás elemeit tartalmazzák. A differenciálmódszereket olyan feladatok megoldására alkották meg, amiket ma a differenciálás segítségével oldunk meg.

Abban az időben az ilyen jellegű feladatoknak három fajtáját különböztették meg:

- görbék érintőjének meghatározása,
- függvények maximumának és minimumának megállapítása,
- feltétel keresés arra, hogy algebrai egyenletnek legyen többszörös gyöke.

Az érintő meghatározására nem dolgoztak ki eljárásokat. Általános volt az érintő azon értelmezése, mi szerint az érintő egy olyan egyenes, amelynek egy közös pontja van a görbével és lokálisan a görbe egyik oldalán helyezkedik el.

A fejezet további részeiben *K. A. Ribnyikow: A matematika története* című könyv XII. fejezetének terminológiáját követem.

3.1. Hajítások

Görbék érintőjének és normálisának meghatározására már *Galilei (1564-1642)* iskolájában alkalmaztak kinematikus[3] módszereket.

[3]kinematika: görög szó, a mechanikának az az ága, amely a testek mozgását csak geometriai oldalról nézi, csupán leírja a mozgást, függetlenül a fizikai okoktól vagy erőktől, melyek ezt a mozgást előidézik.

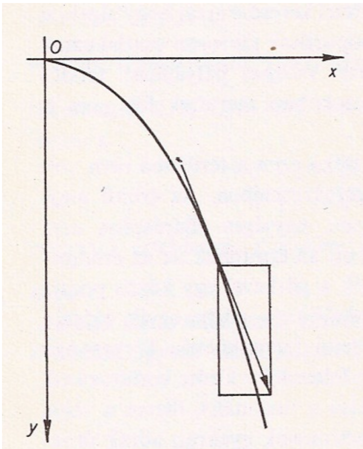
Itt az érintő úgy jelentkezik, mint a sebesség vízszintes és függőleges komponense által meghatározott paralelogramma átlója.[4]

Például, ha elhajítunk egy pontszerű anyagi testet bizonyos vízszintes kezdősebességgel, akkor a pontnak az x-tengely menti elmozdulása arányos az idővel:

$$x = ut,$$

az y-tengely menti elmozdulása pedig az idő négyzetével:

$$y = \frac{g}{2}t^2.$$



2. ábra

A pont pályája egy parabola, melynek paramétere *Galilei* szerint négyszerese azon szabadesés magasságának, ami ahhoz lenne szükséges, hogy a pont végsebessége egyenlő legyen a vízszintes kezdősebességgel:

$$y = \frac{1}{2}\frac{g}{u^2}x^2.$$

Torricelli[5] a $\frac{2u^2}{g}$ paramétert $2p$-vel jelölte. Így felfedezte, hogy a sebesség függőleges gt komponensének aránya a vízszintes u komponenshez egyenlő $\frac{2y}{x}$-szel, vagyis $\frac{x}{p}$-vel.

Ebből levonta azt a következtetést, hogy a parabola tengelyét az érintő abban a pontban metszi, amely $2y$-nal magasabban van, mint az adott pont, illetve y-nal magasabban van, mint a parabola csúcsa.

[4]K. A. Ribnyikov: A matematika története 163. o.

[5]Evangelista Torricelli (1608-1647) olasz matematikus és fizikus. Galilei tanítványa volt.

Ez a módszer megalapozta a különféle hajítások és összetett pályamozgások vizsgálatát.

A módszer szisztematikus kifejtését és legfontosabb alkalmazásait 1640-ben *Roberval*[6] adta meg.

3.2. Normálismeghatározási módszer

Ezt a módszert *Descartes* a *„Geometria”* második könyve tartalmazza.[7]

Feladat: Tegyük fel, hogy egy algebrai görbe[8] (a, b) pontjában meghúztuk a normálist. Keressük c-értékét! A normális az x-tengelyt a $(c, 0)$ pontban metszi.

A $(c, 0)$ középpontú körök közül az $R = \sqrt{(a-c)^2 + b^2}$ sugarú körnek a görbével közös két pontja egybeesik; ez a pont nem más, mint az (a, b).

Két ismeretlenből az egyiket, mondjuk x-et, ki lehet küszöbölni az adott görbe és a kör egyenletéből.

Mivel $x = a$ az így kapott egyenletnek kétszeres gyöke, ezért az egyenlet

$$(x-a)^2 \cdot P(x) = 0$$

alakra rendezhető. Innen a határozatlan együtthatók módszerével meg tudjuk állapítani c értékét.

Descartes az egyenlet bal oldalát egyenlővé tette az $(x-a)^2$-nek és egy az eredetinél 2-vel alacsonyabb fokú határozatlan együtthatós polinomnak a szorzatával. Az azonos fokszámú tagok együtthatóinak összehasonlításával kapott egyenletek segítségével c értéke meghatározható.

---

[6] Giles Persone de Roberval (1602-1675) francia matematikus.

[7] K. A. Ribnyikow: A matematika története 164. o.

[8] algebrai görbe: egy olyan K síkbeli halmaz, melyre igaz, hogy egy megfelelően választott S Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben létezik olyan $F(x, y)$ polinom, melyre a K halmaz pontjai az S kooordináta-rendszerben az $F(x, y) = 0$ egyenletet kielégítő (x, y) pontpárok. Ha ez a polinom n-edfokú, akkor K halmaz n-edrendű algebrai görbe.

3.3. Fermat

Pierre Fermat (1601-1665) előtt a mai differenciálszámítás sok eleme készen állt. *Fermat* francia matematikus és fizikus volt. Egy dél-franciaországi kereskedő család gyermeke. Jogot tanult, a matematikával csupán szabadidejében foglalatoskodott. Számelméleti felfedezései nagy hatással voltak a számelmélet fejlődésére. Művei nagy része csak halála után került nyilvánosságra. 1638-ban írt egy levelet *Descartesnak*, melyben kifejtette, hogy megoldotta az *f polinom szélsőértékei meghatározásának feladatát.* *Fermat* a következő képletet használta:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0,$$

majd a bal oldalon végzett azonos átalakítások után feltette, hogy $h=0$. *Fermat* ehhez a feltételhez algebrai úton jutott el.

Megfontolásának a lényege a következő.

Feladat: Legyen adott egy f polinom. Határozzuk meg a szélsőértékeit!

Legyen a függvénynek valamely x-re maximuma. Ekkor

$$f(x \pm h) < f(x),$$

majd *Fermat* a következő lépésben az alábbi képletet okoskodta ki:

$$f(x) \pm Ph + Qh^2 \pm \cdots < f(x).$$

Mindkét oldalból kivonunk $f(x)$-et, h-val elosztunk, ezután a következőt kapjuk:

$$\pm P + Qh \pm \cdots < 0.$$

Mivel h-t tetszőlegesen kicsinek választhatjuk, a P-t tartalmazó tag abszolút értékben nagyobb az összes többi tag összegénél. Így az egyenlőtlenség csak a $P=0$ esetben áll fenn, ami megadja *Fermat* feltételét.

Fermat tudta azt is, hogy Q előjele meghatározza a szélsőérték jellegét.

Szeretném ismertetni a tételt a matematika mai nyelvezetén is.

Geometriailag a tétel azt mondja ki, hogy a függvénynek csak ott lehet minimuma vagy maximuma, ahol a függvény grafikonjához húzott érintő „vízszintes”.

Tétel: Legyen az f valós függvény az u-pontban differenciálható, u az értelmezési tartományának egy belső pontja. Ha f-nek u-ban lokális maximuma vagy lokális minimuma van, akkor ott a deriváltja nulla:

$$f'(u) = 0.$$

Bizonyítás: A derivált definíciójából[9]

Tegyük fel, hogy a függvénynek u-ban lokális minimuma van. Legyen V olyan nyílt környezete u-nak, ahol f értékei nem kisebbek $f(u)$-nál. Vegyünk egy x-pontot, amely V-beli és értelmezési tartománybeli, valamint teljesül, hogy $x > u$. Ekkor:

$$f(x) - f(u) \geq 0,$$

így

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} \geq 0,$$

vagyis a határérték és a rendezés tulajdoságai miatt:

$$f'(u) = \lim_{x \to u^+} \frac{f(x) - f(u)}{x - u} \geq 0.$$

Az egyenlőség az u-beli differenciálhatóság miatt teljesül.

Hasonlóan, ha x olyan V-beli, hogy $x < u$, akkor

$$f(x) - f(u) \leq 0,$$

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq 0,$$

vagyis a határérték és a rendezés tulajdonságai miatt:

$$f'(u) = \lim_{x \to u^-} \frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq 0.$$

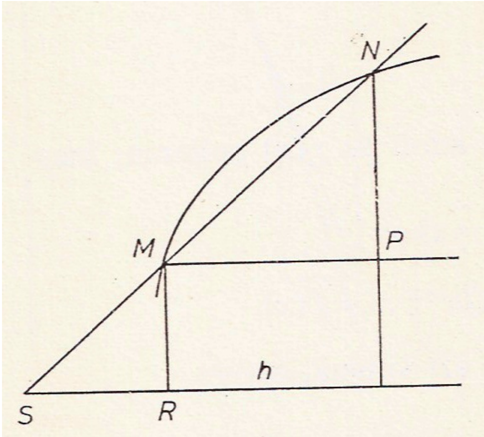
Összegezve: $f'(u) \geq 0$ illetve $f'(u) \leq 0$ tehát

$$f'(u) = 0.$$

Fermat az algebrai görbék érintőjének meghatározására is megalkotott egy módszert.

Feladat: Nézzük az $y = f(x)$ egyenletű algebrai görbét! Határozzuk meg a görbe érintőjét!

[9] Definíció: Legyen f értelmezve az a pont egy környezetében. Azt mondjuk, hogy az f függvény az a pontban *differenciálható*, ha a $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ véges határérték létezik. Ez a határérték az f függvény a pontbeli *differenciálhányadosa* vagy *deriváltja*.



3. ábra

Fermat a görbe MN ívéhez, először meghúzta az SMN szelőt, majd megszerkesztette az MNP karakterisztikus háromszöget. $MNP_\Delta \approx SMR_\Delta$. Innen

$$SR = \frac{MR \cdot MP}{PN},$$

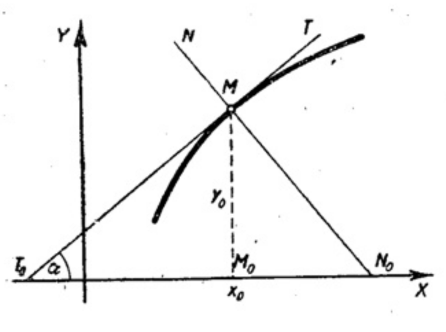
vagy más jelöléssel

$$SR = \frac{f(x)h}{f(x+h) - f(x)}.$$

Ezután *Fermat* feltette, hogy $h = 0$, a szelőről áttért az érintőre, és ezzel az S_t szubtangensre kapta, hogy

$$S_t = \frac{y}{y'}.$$

Néhány szót arról, mi is az a szubtangens[10].



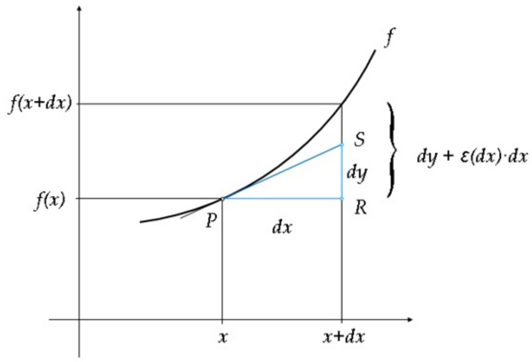
4. ábra

[10]http://www.mathematika.hu/downloads/Bermant.pdf

A görbe M pontbeli *szubtangense*: így nevezzük az M pontban a görbéhez húzott érintőnek és az x-tengelynek a T_0 metszéspontjától az M érintési pontig terjedő T_0M érintődarabnak az x-tengelyre való T_0M_0 vetületét. A T_0M_0 szubtangens hossza:

$$T_0M_0 = \frac{y_0}{f'(y_0)}.$$

A *karakterisztikus háromszög* szemléltetése[11]: Rajzoljuk be a függvénygörbe egy P pontjához az érintőt (PS szakasz), tetszőleges dx távolsággal eltávolodva x-től a függvény $f(x+dx)$ értéket vesz fel, míg az azt közelítő lineáris $f(x)+dy$ értéket (S pont). Az ábrán látható PRS háromszöget nevezzük karakterisztikus háromszögnek.



5. ábra

A későbbiekben *Fermat* általánosította ezt az érintőmeghatározási módszert az $f(x, y) = 0$ implicit függvény esetére is. Számára minden függvény algebrai polinom volt. Ha a függvényben irracionalitások fordultak elő, tőlük hatványozással szabadult meg.

A XVII. század közepére elég jelentős készlet halmozódott fel a különféle megoldási módszerekből. Azonban a differenciálás egyedi művelete, a derivált és a differenciál fogalmával egyenértékű fogalmak még nem voltak körülhatárolva.

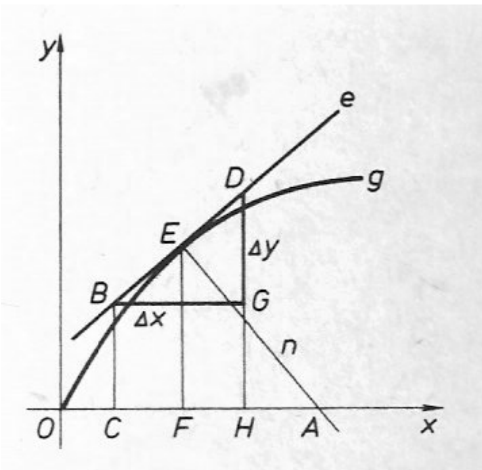
[11] http://hu.wikipedia.org/wiki/Differenciál

4. fejezet

Newton és Leibniz előtt

4.1. Pascal

Pascal (1623-1662) kiváló francia matematikus, fizikus és író volt. Matematikai munkássága szerteágazó. Továbbfejlesztette a projektív geometriát, a valószínűségszámítás egyik megalapozójának tekintik, továbbá a differenciál- és integrálszámítás területén is jelentős eredményeket ért el. 1659-ben megjelent művében (*Értekezések a negyedkör szinuszáról*) olvashatunk a karakterisztikus háromszögnek nevezett háromszögről, amely később *Leibniznél* a differenciálszámítás egyik alapja volt.[12]



6. ábra

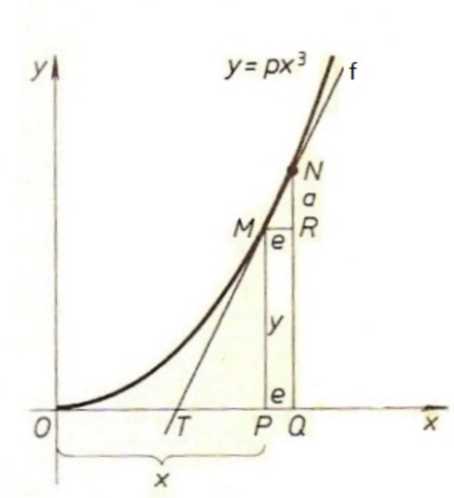
[12] Sain Márton: Nincs királyi út! 669. o.

Az fenti ábrán láthatjuk a g görbe E pontjához tartozó e érintőhöz tartozó BGD karakterisztikus háromszöget a CH intervallum fölött. A DG befogó az ordináták különbsége, a BG befogó pedig az abszcisszák különbsége. Ezt a háromszöget azonban nem *Pascal* használta először. 1624-ben már *Snell* is alkalmazta, majd *Torricelli* és *Roberval* is. Viszont *Pascal* volt az első, aki észrevette, hogy e háromszög két befogójának $BG : GD$ hányadosa mindig megegyezik az $EF : AF$ hányadossal, függetlenül attól, a CH intervallumot milyen kicsinynek választjuk is meg. Így a számolási eljárás összefüggést mutat a görbe érintője és a görbe alatti terület között. Ezek alapján mondhatjuk, hogy *Pascal* kezéből kicsúszott a differenciálhányados és az integrál fogalmának, valamint az azok közti összefüggésnek a felfedezése.

4.2. Barrow

Barrow (1630-1677) angol matematikus volt. A cambridge-i egyetem matematikaprofesszoraként egyik kiváló tanítványa nem más volt, mint *Newton*. *Barrow*-t az érintőkeresés problémájának úttörőjének tartják. Elsőként állapította meg a differenciálhányados és a határozatlan integrál kapcsolatát. A következő feledat a *Lectiones geometricae* (1669) című művének tizedik előadásában szerepel.

Feladat: Írjuk fel az $y = px^3$ görbe $M(x, y)$ pontjához húzott érintőjének egyenletét![13]



7. ábra

[13] Sain Márton: Nincs királyi út! 675. o.

Az érintő a T pontban metszi az x-tengelyt. Ha ismerjük a PT szubtangenst, akkor meg tudjuk rajzolni az M ponthoz tartozó érintőt. Ahhoz, hogy PT-t ki tudjuk számolni, mérjünk fel a görbére egy olyan kicsi MN ívet, hogy ez az ív egybeessen az érintővel.

Az N pont koordinátái: $(x+e)$ és $(y+a)$.

Rajzoljuk meg az NQ ordinátára merőleges $MR = e$ szakaszt is. Így, ha az N pontot sikerül elég közel felvenni az M ponthoz, akkor azt állíthatjuk, hogy a TPM háromszög hasonló az MRN háromszöghöz.

Innen:

$$\frac{y}{TP} = \frac{a}{e}.$$

Határozzuk meg az

$$\frac{a}{e}$$

hányadost!

Az ábráról leolvasható, hogy:

$$y = px^3,$$

$$y + a = p(x+e)^3.$$

A két egyenlet különbsége:

$$a = p(x+e)^3 - px^3 = 3epx^2 + 3e^2px + e^3p.$$

Osztva e-vel:

$$\frac{a}{e} = 3px^2 + 3epx + e^2p$$

Ha elhagyjuk a jobb oldalon azokat a tagokat, amelyekben a nagyon kicsi e szerepel, a következőt kapjuk:

$$\frac{y}{TP} = \frac{a}{e} = 3px^2,$$

amiből

$$TP = \frac{y}{3px^2}.$$

Az $\frac{a}{e}$ hányados az y függvény differenciálhányadosa az M pontban, továbbá még azt is láthatjuk, hogy az M ponthoz húzott érintő iránytangense.

A XVII. század közepére egészen nagy készlet halmozódott fel azoknak a feladatoknak a megoldási módszereiből, melyeket napjainkban differenciálás segítségével oldunk meg.

Azonban a differenciálás különös művelete, a derivált és a differenciál fogalmával azonos értékű fogalmak még nem voltak körülhatárolva. Nem tisztázódott még az integrál- és differenciálmódszerek kapcsolata sem. A matematikai analízis ekkor még az algebra, geometria és mechanika keretei között alakult ki, és ezen tudományok nyelvezetét használta.

5. fejezet

Infinitezimális analízis

A XVII. század második felében kezdett kialakulni a végtelen kicsi mennyiségek analízise. Megjelenését sok tudós munkája készítette elő. A differenciál- és integrálszámítás, mint a matematika egy önálló fejezete, két különböző változatban jelent meg, szinte egyidejűleg: elsősorban a fluxióelmélet alakjában *Newton* és követői munkáiban, továbbá a *Leibniz*-féle differenciálokkal való számolás alakjában.

5.1. A fluxiók elmélete

Az elmélet *Newton* felfedezése volt. *Isaac Newton (1642-1727)* kiváló angol fizikus, matematikus és csillagász volt. Nemesi családból származott. 19 éves kora körül kezdett el komolyan foglalkozni a tudományokkal. Olvasta Kepler, Eukleidész, Descartes, Viéte valamint Wallis műveit. Tudományos munkásságának alapvető területei a fizika, a mechanika, az asztronómia és a matematika volt. Mindössze 23 éves volt, amikor megalkotta a binomiális tételt és a fluxiók módszerét. Fő művének tekintik az 1687-ben megjelent *Philosophiae naturalis principia mathematica* című alkotását.

Newton már 1655 körül használta a fluxióelméletet fizikai és csillagászati kutatásaiban[14]. Az elmélet kidolgozása során fizikai modellt használt. *Newton* a képzeletben egyenletesen múló időtől függő, az időben lefolyó változásnak (például egy mozgásnak) az éppen vizsgált mennyiségét (pédául az útját) nevezte *fluensnek*. Minden fluens függ az időtől. Bevezette a fluens folyásának sebességét (ami az idő szerinti derivált), amit *fluxiónak*

[14]K. A. Ribnyikov: A matematika története 171. o.

nevezünk. A fluxió maga is egy változó, így értelmezhető a fluxió fluxiója, stb. Jelölje y a fluenst, ekkor az első, második stb. fluxió jelölése: $\dot{y}, \ddot{y}$ stb. Ezek a jelölések a mai nap is használatosak a fizikában. A fluxiók (azaz a pillanatnyi sebességek) kiszámításához szükségünk van a fluensek végtelen kicsinnyel való megváltoztatására, ezeket Newton *momentumoknak* nevezte. Az idő momentumának jele o; a fluens momentuma pedig $o\dot{y}$. Vagyis a fluens momentuma nem más, mint a pillanatnyi sebességnek az idő momentumával való szorzata.

Tulajdonképpen a fluens momentuma megegyezik a fluens differenciáljával.

A fluxióelméletben *Newton* két fő feladatot oldott meg, melyeket mind matematikai mind mechanikai úton is megfogalmazott:

- Határozzuk meg a mozgás sebességét egy adott időpillanatban, ha az út adott! Más nyelven: meghatározandó a fluxiók közötti összefüggés, ha ismert a fluensek összefüggése.

- Határozzuk meg az adott időpillanatig befutott utat, ha ismerjük a mozgás sebességét! Azaz határozzuk meg a fluensek közti összefüggést, ha adott a fluxiók összefüggése!

Az első feladat az úgynevezett egyenes feladat. Általában implicit függvények differenciálását és a természet elemi törvényszerűségeit kifejező differenciálegyenletek előállítását jelenti.

A második pedig a legáltalánosabb alakú differenciálegyenletek kiintegrálásával ekvivalens. Speciális esetekben a primitív függvények előállításáról van szó.

Az első feladat megoldása

A feladat megoldására *Newton* egységes szabályt dolgozott ki, az úgynevezett függvények differenciálási algoritmusát. Legyen adott a következő összefüggés a fluensek között:

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0.$$

Adjuk hozzá minden egyes fluenshez a momentumát (azaz képezzük ugyanezt az összefüggést a fluensek pillanatnyi változását felhasználva):

$$(x + \dot{x}o)^3 - a(x + \dot{x}o)^2 + a(x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) - (y + \dot{y}o)^3 = 0.$$

A binomiális tétel alapján kifejtve:

$$\begin{aligned}
&x^3 + 3x^2\dot{x}o + 3x\dot{x}^2o^2 + \dot{x}^3o^3 \\
&-ax^2 - 2ax\dot{x}o - a\dot{x}^2o^2 \\
&+axy + ax\dot{y}o + ay\dot{x}o + a\dot{x}\dot{y}o^2 \\
&-y^3 - 3y^2\dot{y}o - 3y\dot{y}^2o^2 - \dot{y}^3o^3 \qquad\qquad = 0.
\end{aligned}$$

A feltétel szerint az első oszlop összege 0. A fennmaradó tagokat elosztjuk o-val, majd elhagyjuk azokat a tagokat melyek ezután is tartalmazzák az idő végtelen kicsi momentumát. Ezzel megkapjuk a fluxiók közti összefüggést, ami a következőképp néz ki:

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ax\dot{y} + ay\dot{x} - 3y^2\dot{y} = 0$$

.

Newton a módszert szabály alakjában is megfogalmazta:

- a bal oldalt a változók hatványai szerint rendezzük;
- a tagokat megszorozzuk rendre egy számtani haladvány tagjaival, majd a $\frac{\dot{x}}{x}$, illetve a $\frac{\dot{y}}{y}$-nal;
- a fluxiók összefüggését a szorzatok összege adja meg.

5.2. A differenciálokkal való számolás

A végtelen kicsiny mennyiségek analízise mondhatni egyidejűleg két különböző, egymástól független formában jött létre. Az első felfedezés, mint azt az előző pontban tárgyaltam, *Newton* nevéhez fűződik. A differenciálokkal való számolás megalapozójának pedig, *Leibnizet* tartjuk.

G. W. Leibniz (1646-1716) Lipcsében született. Matematikus és filozófus volt. Megalapította a berlini akadémiát, és pozitív hatással volt az oroszországi tudományok fejlődésére is. Tekintélyes diplomata, politikus és tudós volt. Érdeklődési köre nagyon széleskörű, akárcsak tudományos munkássága. Matematikai munkássága szorosan összefügg filozófiai tevékenységeivel. Leibniz szerette volna, ha a matematika általánosabb értelmezést nyer, kialakul az úgynevezett „egyetemes jellemzés”. *Leibniz* a szimbolika megválasztásának nagy jelentőséget tulajdonított. Egyik írásában így vélekedett: *"Gondoskodni kell arról, hogy a jelölések kényelmesek legyenek a felfedezések számára. Ez nagyrészt teljesül, ha a jelölés röviden azt is kifejezi, ami a dolgok legbensőbb lényegét tükrözi. Ilyenkor meglepő módon leegyszerűsödik az ész munkája."*

A *Leibniz* féle analízis a következő premisszákból keletkezett[15]:

- sorösszegzési és véges különbségrendszerek vizsgálata;
- érintőmeghatározási feladat megoldása a Pascal-féle karakterisztikus háromszög segítségével, és fokozatos áttérés a véges elemek közötti összefüggésekről a tetszőlegesekre, majd a végtelen kicsinyekre;
- érintőkre vonatkozó fordított feladatok vizsgálata, végtelen kis különbségek összegzése, a differenciál- és integrálfeladatok kölcsönös kapcsolatának felfedezése.

Ami alatt *Leibniz* a szimbolika kialakításán dolgozott, arra a gondolatra jutott, hogy a végtelen kis különbséget a d szimbólummal jelölje (d a differencia szó rövidítése). Az integrált mint az összes ordináta összegét fogta fel (akárcsak Cavalieri és Pascal) és az *omn* y vagy a gyakoribb *omn* l szimbólummal jelölte. A későbbiekben az *omn* szimbólumot $\int$-ra változtatta, a Summa szó kezdőbetűjéből kiindulva. *Leibniz* eredményeit először 1684-ben

[15]K. A. Ribnyikov: A matematika története 177. o.

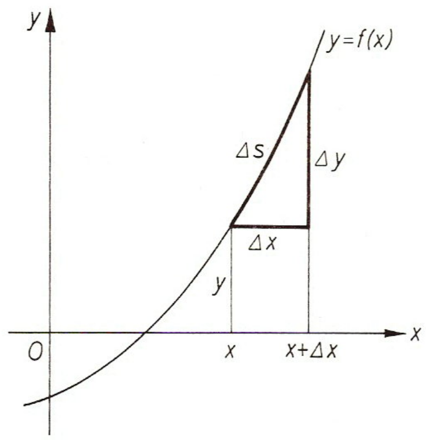
publikálta az *Acta Eruditorum*-ban. Ez egy mindössze 10 oldalas dokumentum volt, ami nem tartalmazott bizonyításokat.

A műben *Leibniz* a dx differenciálargumentumot tetszőleges mennyiségnek tekintette. A függvény dy differenciáljára pedig a következőképp tekintett:

$$dy = \frac{ydx}{S_t},$$

ahol S_t a görbe (x, y) pontjához tartozó szubtangens.

A differenciálok jelölésére a dx és dy szimnbólumokat használta. Ezeket kis növekményeknek tekintette, így y változásait x függvényében a $\frac{dy}{dx}$ aránnyal határozta meg.



8. ábra

Az ábrát tanulmányozva a következőket írhatjuk fel *Leibniz* szimbolikájával, ha $y = f(x)$ a függvényünk, akkor

$$dy = f(x + dx) - f(x),$$

vagyis

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx},$$

ami nem más mint az érintő meredekségének közelítése a szelőével.

Észrevette azonban, hogy ezzel problémák akadnak, ugyanis, ha dx és dy nem egyenlők nullával, akkor a $\frac{dy}{dx}$ hányados nem y változásának pillanatnyi értéke, csupán egy közelítése annak. Kiküszöbölve ezt, feltette dx-ről illetve dy- ról, hogy infinitezimálisan kicsik.

1676-ra eljutott odáig, hogy x egy tetszőleges hatványát sikerült integrálnia és differenciálnia is az alábbi képletet alkalmazva:

$$dx^n = nx^{n-1}dx,$$

ami a ma használatos jelöléssel a következőképpen néz ki:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}.$$

Ezek után megalkotta az állandó mennyiségeknek, valamint a függvények összegének, különbségének, szorzatának, hányadosának, hatványának és gyökének differenciálási szabályait. A későbbiekben a differenciálokat úgy definiálta, mint végtelen kicsiny különbségeket. Két differenciálható függvény deriváltja a derivált függvények összege:

$$d(x+y) = dx + dy.$$

A szorzatfüggvény deriváltja ennél kicsit bonyolultabb:

Állítás:

$$d(xy) = (dx)y + (dy)x.$$

Erre a képletre *Leibniz* nem adott bizonyítást. *Guillaume L'Hospital (1661-1704)* egyik művében olvashatunk a bizonyítás menetéről.

Bizonyítás:

x és y differenciálja legyen dx illetve dy. A differenciálok szorzata elhanyagolható, ha a megváltozások kicsik. Így:

$$(x+dx)(y+dy) - xy = (dx)y + x(dy) + dxdy = (dx)y + x(dy).$$

1686-ban *Leibniznek* ismét megjelent egy cikke, melyben kiterjesztette az alkalmazások körét. Későbbi publikációiban megjelent a logaritmus, az exponenciális és a trigonometrikus függvények differenciáljainak kiszámítási szabályai is.

1695-ben a következő képletet publikálta:

$$d^m(xy) = d^m x \cdot d^0 y + \frac{m}{1} d^{m-1} x \cdot dy + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} d^{m-2} x \cdot d^2 y + \dots,$$

ez a szorzat többszörös deriválásának a szabálya.

Összességében megállapíthatjuk, hogy sem *Leibniz*, sem *Newton* nem volt képes a differenciál- és integrálszámítás logikai alapjainak tisztázására. Mindketten meglátták azonban, hogy a differenciálszámítás és annak inverz művelete felhasználható a határozott integrál kiszámítására. Emiatt nevezzük ezt a kapcsolatot (teljes joggal) Newton-Leibniz tételnek.

6. fejezet

A XVIII. század eredményei

A XVIII. században megjelent az igény olyan feladatok megoldására, mint például a táblázatkészítés (különböző égitestek helyzetének rögzítése), a kronométer[16] feltalálása (hajózás), gömb síkra vetítése (térkép készítés) stb. A társadalomban új réteg alakult ki a hivatásos tudósok személyében. Feladatuk közé tartozott a tudományos kutatás és alkotás. A század folyamán jelentősen megváltozott a matematika tartalma. Gyökeres változáson ment át a matematikai analízis is, átalakult függvényanalízissé és a mai szemlélethet hasonló felépítést nyert.

6.1. A Bernoulli család

Európában *Leibniz* után a *Bernoulli család* néhány tagja folytatta a kalkulus „kutatását". Akiket érdemes megemlíteni az a család első két matematikusa *Jacob (1654-1705)* és *Johann Bernoulli (1667-1748). Jacob* egyébként *Leibniz* tanítványa volt, így mestere hatására kezdett el a matematikával foglalkozni.

1924-ben kiadott alkotásában az alábbi három axiómából indult ki[17]:

- Egy mennyiség, amit végtelen kicsi mennyiséggel lecsökkentünk vagy megnövelünk, nem lesz se kisebb se nagyobb.

- Egy görbe vonal végtelen sok végtelen kicsi szakaszból áll.

[16]chronométer: időmérő. Az igen pontosan járó billegős órákat, melyeknek a horgony-, henger- és orsógátszerkezettől eltérő szerkezete van, szokták így nevezni.

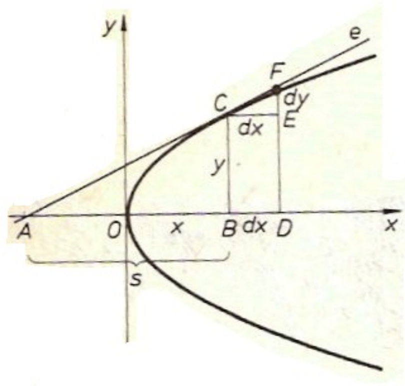
[17]Sain Márton: Nincs királyi út! 192. o.

- Egy síkidom, amelyet két ordináta, az abszcisszák különbsége és valamely görbének végtelen kicsiny darabja határol, paralelogrammának tekinthető,

Annak ellenére, hogy a végtelen kicsiny fogalmát ezen axiómák sem magyarázzák meg, mégis a differenciálszámítás megalapozásának kezdetét jelentik.

Azt, hogy miként építkezett *Bernoulli* ezen posztulátumokra egy feladaton keresztül szemléltetem.

Feladat: Írjuk fel az $y^2 = ax$ parabola érintőjének egyenletét!



9. ábra

Nézzük a fenti ábrát! Ha az x-et megnöveljük kis dx-szel, akkor az y ennek alapján dy-nal fog változni, tehát:

$$(y + dy)^2 = a(x + dx),$$

azaz

$$y^2 + 2ydy + (dy)^2 = ax + adx.$$

Ahhoz, hogy eljussunk a CEF háromszög oldalaihoz, az utóbbi egyenletből kivonjuk a paraboláét. Ekkor:

$$2ydy + (dy)^2 = adx.$$

Az első axióma szerint a $2ydy$ nem változott, amikor megnöveltük a hozzá képest végtelen kicsi $(dy)^2$-tel, vagyis

$$2ydy = adx,$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a}.$$

A második posztulátum alapján a görbe CF íve egy egyenes szakasz, ekkor a CEF háromszög és az ABC háromszög hasonlók, így:

$$dy : dx = y : AB.$$

Innen az $s = AB$ szubtangens:

$$s = AB = \frac{ydx}{dy} = \frac{y \cdot 2y}{a} = \frac{2ax}{a} = 2x.$$

Ha ismerjük a szubtangenst, akkor az érintőt is meg tudjuk határozni.

6.2. L'Hospital

Aki a testvéreken kívül maradandót alkotott az nem más, mint *Guillaume François L'Hospital (1661-1704)*. Kiváló francia matematikus volt. 1692-ben Párizsban találkozott *Johann Bernoullival*, aki aztán a tanára lett és megismertette *L'Hospitallal* a Leibniz-féle kalkulust. Ezért a munkájáért *Johann* pénzt is kapott tanítványától. Ennek következtében *Johann* minden eredményét megosztotta diákjával. Barátságuk azonban véget ért, amikor *L'Hospital* megírta a differenciálszámításról szóló analízis tankönyvet, mivel *Johann* tervei között ugyancsak szerepelt egy ilyen könyv kiadatása. Annak ellenére, hogy *L'Hospital* elismerte, felhasználta *Johann* és *Leibniz* felfedezéseit, egykori barátja képtelen volt szemet hunyni tette felett, sőt még halála után is plágiummal vádolta.

Ezért alakult úgy, hogy a következő tételt nem Bernoulli-, hanem **L'Hospital-szabálynak** nevezzük:

Tétel: Legyen f és g differenciálható α egy környezetében, és tegyük fel, hogy itt $g \neq 0$ és $g' \neq 0$. Tegyük fel továbbá, hogy

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \lim_{x \to \alpha} g(x) = 0.$$

Ha

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta,$$

akkor ebből következi, hogy

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=\beta.$$

Bizonyítás: Megjegyezendő, hogy ez a bizonyítás a matematika mai nyelvén van megfogalmazva. Így lehetséges az is, hogy a bizonyítás menete során hivatkozás történik a Cauchy-féle középértéktételre. Nyilván L'Hospital nem ismerhette ezt a tételt, mivel Cauchy akkor még meg sem született.

Ennek fényében nézzük a bizonyítást! Azt az esetet vizsgáljuk, amikor $\alpha = a$ véges, és

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = f(a) = g(a) = 0.$$

Ekkor a Cauchy-középértéktétel szerint az a pont egy környezetében minden $x \neq a$-hoz létezik olyan $c \in (x, a)$, amelyre

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Ha tehát (x_k) egy a-hoz tartó sorozat, akkor létezik egy $(c_k) \longrightarrow a$ sorozat, úgy, hogy

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \frac{f'(c_k)}{g'(c_k)}.$$

Így

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \lim_{k\to\infty}\frac{f'(c_k)}{g'(c_k)} = \beta,$$

tehát az átviteli elv szerint az eredeti állítás igaz.

6.3. Euler

Leonhard Euler (1707-1783) svájci matematikus volt, Baselben született. Édesapja lelkész volt, fiát is annak szánta. Élete során 530 könyve és értekezése jelent meg. A berlini Akadémia elnöki tisztjét is betöltötte. 1766-ban mindkét szemére megvakult, ennek ellenére töretlen maradt munkakedve. Műveit innentől kezdve diktálta. Munkássága a kor matematikájának szinte egészét magában foglalja. Analízis témakörben az alábbi három jelentős művét említhetjük:

- *Bevezetés a végtelenek analízisébe*, 1748

- *A differenciálszámítás alapjai* (két kötet), 1755

- *Az integrálszámítás alapjai* (négy kötet), 1767-1770, illetve a negyedik kötet, 1794.

Euler a differenciálhányadost alapfogalomnak tekintette, ami arra való, hogy a differenciáloknak a hányadosát jellemezze. A differenciálok értékét viszont nullának vette. Ez alapján a differenciálhányados $\frac{0}{0}$ alakú, értéke pedig egy x_0 helyen az a szám, melyhez abban a pontban a $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ hányados tart.

7. fejezet

A differenciálhányados fogalmának fejlődése Euler után

7.1. D'Alambert

Jean Le Rond d'Alambert (1717-1783) francia matematikus és fizikus. Életét elhanyagolt gyermekként kezdte. 1754-ben a francia akadémia titkára lett. Az *Enciklopédia* cikkeiben az infinitezimális számításait a határérték fogalmára építette. Jelentős fizikai feladatokat is megoldott a differenciálegyenletek segítségével. 1743-ban megjelent művében, a *Traité de dynamique*-ben, ismertette a róla elnevezett *D'Alambert*-elvet. Ez a törvény a pontrendszerek mozgástörvényeinek egy lehetséges megfogalmazása.

Newton egyik elméletét[18] fejlesztette tovább, definiálta a határérték fogalmát.

Newton szerint (mai jelöléssel) a $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ első arányok a $\frac{dy}{dx}$ aránnyá változnak. *D'Alambert* pedig az első és utolsó arányok elméletére a következőképp gondolt: a véges differenciálok $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ hányadosának a határértéke a $\frac{dy}{dx}$ differenciálhányados. Leírta az eljárás menetét is, ami szerint a differenciálhányados meghatározása a következőképpen zajlik.

Az $y = f(x)$ függvény x változóját egy véges Δx mennyiséggel megnöveljük, ekkor y is meg fog változni a véges Δy értékkel. Ezután egyszerűsítjük a $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ hányadost, majd az

[18] első és utolsó arányok elmélete: a módszer az „alig-alig" keletkező (első arány) vagy a „már-már" eltűnő (utolsó arány) mennyiségek arányának határérték-vizsgálatából áll. Olvashatjuk K. A. Ribnyikov: A matematika története c. könyv 177. oldalán. Newton ki tudta fejteni azokat a határértékekre és végtelen kis mennyiségekre vonatkozó alaptételeket, amelyek a mai analízis oktatás alapjait képezik.

egyszerűsített alakban x helyére 0-t írunk.

D'Alambert a határérték fogalmát a következőképp definiálta[19]: *"Egy A mennyiség a változó B mennyiség határértéke, ha B bármilyen közel juthat A-hoz, de A-t sohasem érheti el."*

7.2. Lagrange

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) francia matematikus, csillagász és fizikus volt. Torinóban született olasz és francia szülőktől. Már 19 éves korában matematikát tanított egy torinói tüzérségi iskolában. Később Párizsba költözött. Jelentős eredményeket ért el a matematika számos területén. Munkájának nagy részét azonban az analízis töltötte ki. A differenciálhányados fogalmát algebrai módszerekkel tisztázta.

1797-ben megjelent művében (*Théorie des fonctions analytiques*) a differenciálás algebrai módszereivel foglalkozott, célja a jobb logikai megalapozás volt. A módszer alapgondolatát egy példán szemléltette.

Példa: Mivel

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + \dots$$

így az n-edik differeciálhányados:

$$f^{(n)}(x) = n! + (n+1)(n)(n-1) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot x + \dots$$

A képlet alapján az $f(x)$ n-edik derivált függyvényének értéke az $x = 0$ helyen:

$$f^{(n)}(0) = n!.$$

Lagrange azt is bizonyította, hogy minden $f(x+h)$ kifejezés majdnem mindenhol kifejezhető az alábbi Taylor-sorral, tisztán algebrai módon:

$$f(x+h) = f(x) + a_1 h + a_2 h^2 + ... + a_n h^n + R_n.$$

[19] Sain Márton: Nincs királyi út! 707. o.

Értelmezésében a differenciálhányadosok a Taylor-sor együtthatói, emiatt nem kellett foglalkoznia a végetelen kicsinyekkel illetve a határérték fogalmával. Gondolatmenetének az a problémája, hogy csupán az analitikus függvényekre érvényes. *Lagrange* elsőként határozta meg R_n-nek (a sor maradéktagjai) a képletét egyes konkrét függvények esetében, valamint először sikerült előállítania a Taylor-sor maradéktagját integrál alakban.

Most szeretnék ismertetni egy fontos középértéktételt, mivel a későbbiekben hivatkozni fogok rá.

Rolle-tétel: Ha az f függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumban, differenciálható az intervallum belső pontjaiban és

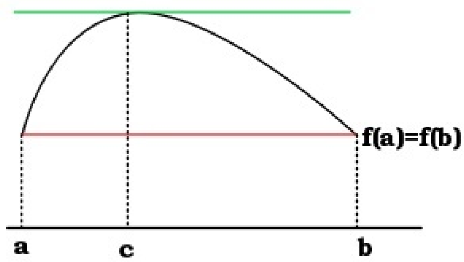
$$f(a) = f(b),$$

akkor van olyan $a < c < b$, hogy

$$f'(c) = 0$$

teljesül.

Szemléletes ábra a tételhez:



10. ábra

Bizonyítás:

Ha az f függvény az (a, b) intervallumon végig az $f(a) = f(b)$ értéket veszi fel, akkor konstans, tehát deriváltja mindenütt 0.

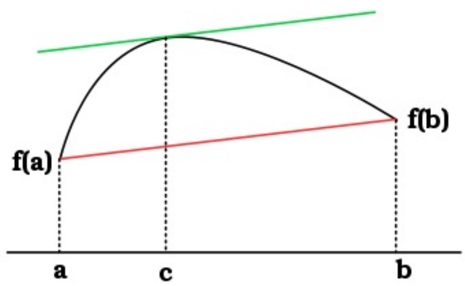
Tegyük fel, hogy egy pontban f értéke ettől eltér. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy ez az érték nagyobb $f(a) = f(b)$-nél (ellenkező esetben ugyanezt a gondolatmenetet a $-f$ függvényre kell alkalmaznunk). *Weierstrass* tétele szerint a függvény az $[a, b]$ intervallumban valahol felveszi maximumát. Legyen c egy ilyen pont. c nem lehet a-val vagy b-vel egyenlő, mert akkor lenne nála nagyobb értékű hely, ami ellentmond $f(c)$ maximális tulajdonságának. Mivel f a c-ben (mely az értelemezési tartomány belső pontjában van) differenciálható és ott maximuma van, ezért a szélsőértékekre vonatkozó *Fermat*-tétel miatt ott a deriváltja 0.

A kis kitérő után kanyarodjunk vissza *Lagrangehoz*! Az ő nevéhez is fűződik egy jelentős tétel, amely mai szóhasználattal az alábbi módon hangzik.

Lagrange-középértéktétele: Ha f folytonos függvény a zárt $[a, b]$ intervallumon és differenciálható a nyílt (a, b) intervallumon, akkor van olyan $a < c < b$ szám, amire

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

teljesül.



11. ábra

Bizonyítás:

A tétel visszavezethető Rolle-tételére.

Legyen $a \leq x \leq b$-re

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x.$$

A g függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon és a belső pontokban

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Továbbá

$$g(b) - g(a) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0.$$

Alkalmazzuk Rolle-tételét, így azt kapjuk, hogy van olyan c pont, amire

$$g'(c) = 0,$$

azaz

$$g'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

A Lagrange-féle középértéktétel általánosítása a *Cauchy-féle középértéktétel*, amit a következő pontban tárgyalok.

7.3. Cauchy

Augustin Louis Cauchy (1789-1857) mérnökként kezdte pályafutását Párizsban. Csupán 27 éves volt, amikor a párizsi akadémia tagjává választották és régi iskolájának professzora lett. 1848-ban a Sorbonne professzorává nevezték ki. *Cauchy* a matematikai szabatosság új irányának egyik úttörője volt. A kalkulus területén nagyot alkotott. A differenciál- és integrálszámítást megalapozta a határérték-elmélet segítségével, miután precíz definíciót adott a határérték-fogalomra. Számos vizsgálatot végzett a sorok konvergenciájával kapcsolatban.

Lássuk *Cauchy* definícióit!

Határérték: „Ha egy változó egymást követő értékei megközelítenek egy fix értéket úgy, hogy végülis attól csak tetszőlegesen kicsiny mennyiségben különböznek, akkor azt mondjuk, hogy a fix érték a változó értéksorozatának a határértéke."

Differenciálhányados: Az $y = f(x)$ függvény x változójához hozzáadunk egy $x = i$ növekményt, és az alábbi hányadost képezzük:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}.$$

Ha $i \longrightarrow 0$, akkor a hányados határértékét $f'(x)$-szel jelöljük, valamint az y x-re vonatkozó deriváltjának nevezzük.

Cauchy éppen fordítva járt el, mint *Leibniz*. Először a differenciálhányadost definiálta, majd ennek segítségével a differenciált. *Cauchy* így gondolkodott: Ha dx véges konstans, akkor az $y = f(x)$ függvény dy differenciálja az $f'(x)dx$.

Mint azt már az előző fejezetben említettem, *Cauchy* ránk hagyott egy fontos tétel. Nézzük most ezt!

Cauchy-középértéktétel: Ha az f és g függvények folytonosak $[a, b]$-ben, differenciálhatóak (a, b)-ben, és $x \in (a, b)$ esetén $g'(x) \neq 0$, akkor létezik olyan $c \in (a, b)$, amelyre

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Bizonyítás:

Rolle-tételéből következik, hogy $g(a) \neq g(b)$. Ha a $g(a) = g(b)$ fennállna, akkor abból következne, hogy g deriváltja nulla az (a, b) intervallum legalább egy pontjában, amit kizártunk. Legyen

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Az F függvény folytonos $[a, b]$-ben, differenciálható (a, b)-ben, és $F(a) = F(b) = 0$. Így Rolle-tétele szerint létezik egy olyan $c \in (a, b)$, amelyre $F'(c) = 0$. Ekkor

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c).$$

A feltétel szerint $g'(c) \neq 0$, ebből azt kapjuk, hogy

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Ezzel a tételt beláttuk.

7.4. Weierstrass

Carl Weierstrass (1815-1897) nagyszerű német matematikus. Ostenfeldében született. Édesapja polgármester volt. Tanári diplomát szerzett, 15 évig tanított egy braunsbergi gimnáziumban. Feladatának érezte az analízis tisztázatlan alapfogalmainak megalkotását. Definíciókat adott a függvény, a szélsőérték és a differenciálhányados fogalmára. Az analízis fogalmait aritmetikai fogalmakra vezette visssza.

Weierstrass első dolga volt, hogy meghatározza az irracionális szám olyan definícióját, ami nélkülözi a határérték fogalmát. Ez sikerült is neki, majd 1869-ben *Cauchy* definícióit helyettesítette. Példaként nézzünk egy ilyet!

Definíció: Az L szám az $f(x)$ függvényhatárértéke az $x = x_0$ helyen, ha bármely adott pozitív ϵ számhoz találhatunk egy olyan pozitív δ számot, hogy valahányszor $|x - x_0| < \delta$, teljesül az $|L - f(x)| < \epsilon$ egyenlőtlenség.

Ez a definíció megfelel a jelenlegi analízisbeli szóhasználatnak. *Weierstrassal* végleg megszűnt a kalkulusban a végtelen kicsiny fogalmának és a velük való számolásnak a problémája. Ezután már csak olyan definíciók láttak napvilágot, melyekben matematikailag megfogható fogalmak szerepelnek, így az infinitezimális számítás elnevezés feleslegessé vált.

8. fejezet

Befejezés

A kalkulust a történelem során rengeteg vita övezte. Ketelkedtek a módszer logikai tisztaságában, gondolatmeneteit sokszor zavarosnak tartották. Felmerült a kérdés, mit jelent az, hogy végtelen kicsi mennyiség. A kalkulus körüli vita egészen a XIX. századig elhúzódott. *Berkeley* szerint a kalkulus állításai semmivel sem tudományosabbak, mint a hit igazságai. *Hegel* pedig úgy gondolta, hogy a filozófia hivatott megoldani a kalkulus belső problémáit. Végül a változó mennyiség fogalmát a függvény fogalmával, a differenciált a határérték fogalmával, a differenciálhányadost pedig a deriválttal váltották fel.

Bátran mondhatjuk, hogy az analízis precíz, pontos elméletének kidolgozása az újkori nyugati kultúra egyik legnagyobb szellemi teljesítménye volt.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Sikolya Eszter tanárnőnek, aki hasznos tanácsokkal látott el, valamint még az utolsó percekben is készségesen segített. Továbbá hálásan köszönöm Édesanyámnak, aki mindenben támogatott, a nehéz percekben is mellettem állt, és köszönöm Édesapámnak, aki sajnos már nem lehet velünk...

Ábrajegyzék

Irodalomjegyzék

[1] K. A. Ribnyikov, *A matematika története*, Tankönyvkiadó, 1974.

[2] Laczkovich Miklós-T. Sós Vera, *Analízis I.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2005.

[3] Simonovits András, *Válogatott fejezetek a matematika történelméből*, Typotex, 2009.

[4] Császár Ákos, *Nagy pillanatok a matematika történelméből*, (3. fejezet), Gondolat, 1981.

[5] Sain Márton, *Matematikatörténeti ABC*, Nemzeti Tankönyvkiadó - Typotex, 1993.

[6] Sain Márton, *Nincs királyi út!*, Gondolat, 1986.

[7] Internet, *http://hu.wikipedia.org/wiki/Rolle-tétele*

[8] Internet, *http://hu.wikipedia.org/wiki/Lagrange-féle-középértéktétel*