Optimális stratégiák magas tranzakciós költség esetén és a szerencsejátékokban

Szakdolgozat

Készítette: Halász Sándor

Matematika B.Sc., Matematikai elemző szakirány

Témavezető: Csiszár Villő, adjunktus

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2010

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke

1. Bevezetés

Tranzakciós költségekkel napjainkban bármelyik banknál találkozunk. Jellemzően fizetnünk kell, ha készpénzt szeretnénk felvenni, ugyanakkor természetesen a bankban tárolt pénzünk után kamatot fizet nekünk a bank. Megtakarításainkat mindenképp forgatnunk kell, ha profitot szeretnénk elérni. Hogy ezt mi módon tehetjük, arra nem térnék ki, hiszen az a sejtés, hogy lehetőségeink tárháza tart a végtelenhez. Dolgozatomban két esettel fogok foglalkozni, a már említett banki lekötés mellett a szerencsejátékokkal. A bankban elhelyezett, és a szerencsejátékra fordított pénz tekinthető egyfajta befektetésnek, éppen ezért semmiképp sem gondolhatunk veszteségminimalizálásra. A befektetés egyértelmű célja a profitmaximalizálás. Mindkét lehetőség érdekes, tanulságos, és a vizsgálatukban hatalmas segítséget nyújt a matematika.

Megfigyelhető a banki reklámokban, hogy a biztonság mellett a kamat mértékét emelik ki, és többnyire ez a két szempont a legfontosabb, amikor megválasztjuk a számlánkat. Érdemes meggondolni azonban, hogy magas tranzakciós költség mellett a kamatunk akár teljesen elvész, sőt, az is előfordulhat hogy a költségek címén levont pénz meghaladja a kamatra kifizetett összeget, és így rosszabbul járunk, mintha a "párnánk alá tettük volna a pénzünket".

A szerencsejátékok esetében szintén kockázatot vállalunk, azonban mégsem hasonlítható egy bankbetéthez, a szerencsejáték ugyanis nem adhat biztonságot, ugyanakkor lényegesen nagyobb profit érhető el vele (természetesen óriási kockázat mellett). Éppen emiatt a bátorság könnyen válhat botorsággá, és ezt elkerülendő, mindenképp szükséges egy alapos matematikai vizsgálat, mielőtt a befektetés ezen formáját választjuk.

Dolgozatom célja, hogy választ adjak arra a kérdésre, hogy adott feltételek mellett mekkora profitot érhetünk el maximum, és hogy ezt a profitot hogyan tudjuk elérni.

1.1. A dolgozat felépítése

Dolgozatomban valóságon alapuló modelleket fogok vizsgálni, és ennek alapján fogom maximalizálni a pénzeszközöket.

A 2. fejezetben a szükséges ismereteket írom le a dinamikus programozásról. Ez a témakör a dolgozat szempontjából kiemelten fontos, éppen ezért szemléltetem is néhány egyszerű példával. A fejezetet a [4] és a [3] források különböző alfejezetei alapján készítettem.

A 3. fejezetben egy modellt építek, és ennek segítségével keresek optimális megoldást arra, hogy hogyan tudjuk a profitunkat maximalizálni magas tranzakciós költség mellett. A felmerülő fogalmakat az adott alpontok elején definiálom, továbbá a könnyebb megértés érdekében bizonyos részeknél egyszerű magyarázatot is adok, hogy 1-1 lépés mit is jelent a gyakorlatban. A fejezetet az [1] kézirat alapján készítettem.

Az 4. fejezetben betekintünk a szerencsejátékok világába, és optimális stratégiákat keresünk különböző helyzetekre. A fejezetet a [3] jegyzet hasonló fejezetei alapján készítettem.

2. Dinamikus programozás

A dinamikus programozás módszerét gyakran használjuk valamilyen numerikus paraméterektől függő érték optimumának a meghatározására. Az a lényege, hogy az optimális megoldást arra alkalmas kisebb részfeladatok optimális megoldásából próbáljuk előállítani. A dinamikus programozást használó algoritmusok vezérlési szerkezete gyakran emlékeztet egy *táblázat* szisztematikus (pl. sorról sorra haladó) kitöltésére. A táblázat kitöltését általában egy *rekurzív összefüggés* teszi lehetővé, ami alapján a bejárási sorrend szerint korábbi elemekből meghatározhatók a későbbiek. A kapott módszer költségét többnyire a kitöltendő táblázat mérete határozza meg. A rekurzív összefüggés megtalálásában sokszor a segítségünkre van az *optimalitás elve*.

A dinamikus programozásnak vannak erőteljes alkalmazásai a könnyű és nehéz problémák körében egyaránt. Működését néhány példán keresztül szeretném bemutatni.

2.1. Binomiális együtthatók számítása

Tegyük fel, hogy az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható értékére vagyunk kíváncsiak. Lehetséges utat jelent a jól ismert

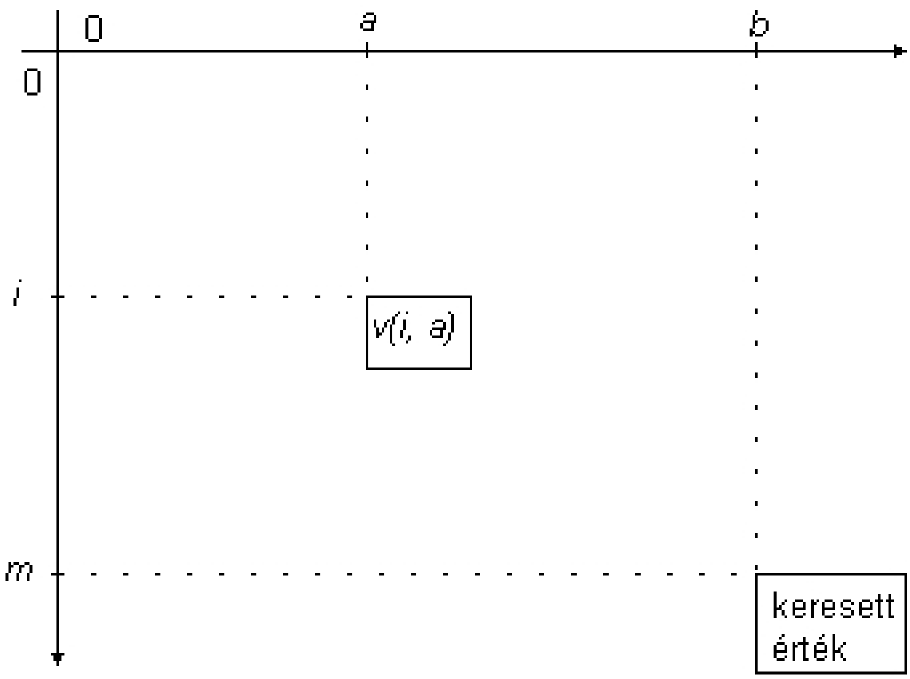
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \tag{1}$$

azonosság használata. Ennek segítségével a kisebb n értékektől a nagyobbak felé haladva adódnak a binomiális együtthatók: ha az összes $\binom{n-1}{j}$ értéket ismerjük ($0 \leq \leq j \leq n-1$), akkor az $\binom{n}{k}$ alakú együtthatók egy-egy összeadással megkaphatók. Az elindulás lehetőségét az $\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$ értékek biztosítják. Tulajdonképpen a nevezetes Pascal-háromszög (vagyis egy háromszög alakú táblázat) kitöltéséről van szó. Az algoritmus csak összeadásokat használ, ezért gyakorlati szempontból is érdekes lehet olyan aritmetikai környezetben, ahol az összeadás sokkal gyorsabb, mint a szorzás.

A dinamikus programozás *alulról építkező*, a kisebb esetektől a nagyobbak felé menő stratégiája gyakran hatékonyabb alternatívát kínál, a rekurzív eljárások felülről lefelé haladó felfogásával szemben. A binomiális együtthatók számítása jól mutatja ezt. A (1) összefüggés alapján megírt rekurzív eljárás hátránya, hogy többször is kiszámítja ugyanazokat a (közbülső) binomiális együtthatókat. Például az $\binom{n}{k}$ számításakor az $\binom{n-2}{k-2}$ együtthatót kétszer is kiszámoljuk. A dinamikus programozás gondolatát követő módszer kiküszöböli ezeket az ismétlődéseket.

2.2. A hátizsák probléma

Ez egy klasszikus példafeladat. Tekintsünk egy betörőt, aki egy őrizetlenül hagyott házban válogat a "kincsek" között. A lehető legnagyobb értéket szeretné



1. ábra. A hátizsák probléma súly/érték tábázata

magával vinni, de a hátizsákja csak meghatározott súlyt bír el. Legyen minden tárgynak egy adott s_i súlya, és v_i értéke.

Adottak az $s_1, ..., s_m$ súlyok, a b súlykorlát, a $v_1, ..., v_m$ értékek és a k értékkorlát. A kérdés, hogy van-e olyan $I \subseteq \{1, ..., m\}$ részhalmaz, melyre teljesül, hogy $\sum_{i \in I} s_i \leq b$ és $\sum_{i \in I} v_i \geq k$. Feltesszük még, hogy a szereplő mennyiségek mind pozitív egészek. A feladatról tudjuk, hogy NP-teljes.

Itt most egy dinamikus programozást használó megoldást ismertetünk. Szeretnénk a feladatot visszavezetni kisebb hasonló problémákra. Ilyenkor gyakran segít, ha a feladatban megadott bizonyos paramétereket változónak tekintjük, és egy értelmes tartományban "futni hagyjuk". A mi esetünkben az m és a b lesznek a paraméterek. Pontosabban fogalmazva legyen $v(i,a)$ a maximális elérhető érték az $s_1, ..., s_i$ súlyokkal, $v_1, ..., v_i$ értékekkel és a súlykorláttal megadott feladatra (mivel a maximális értéket keressük, nincs szükség értékkorlátokra). Ekkor $v(0,a) = = v(i,0) = 0$ tetszőleges a és i számokra, és célunk a $v(m,b)$ mennyiség meghatározása, illetve annak eldöntése, hogy fennáll-e a $v(m,b) \geq k$ egyenlőtlenség. A feladat úgy is felfogható, hogy meg akarjuk határozni az $m+1$ sorból, és $b+1$ oszlopból álló $[v(a,i)]$ táblázat (m,b) pozíciójú elemét.

A táblázat 0 indexű sorában, illetve oszlopában az értékek ismertek. Az érdekesebb helyeken levő számok meghatározásában segít a következő egyszerű összefüggés:

$$v(i,a) = \max\{v(i-1,a); v_i + v(i-1,a-s_i)\}.$$

Indoklásul megjegyezzük, hogy a jobb oldalon az első mennyiség az i-edik súlyt nem tartalmazó választások optimális értéke, a második pedig az i-edik súlyt tartalmazó választások optimális értéke (mindkét esetben a súlykorlát mellett). Itt is érvényesül az optimalitás elve: ha a $v(i,a)$ értéket adó kitöltésben az s_i súly szerepel, akkor a zsákban levő többi (az $s_1, s_2, ..., s_{i-1}$ közül kikerülő) súlynak optimális kitöltést kell adnia az $a - s_i$ súlykorláttal.

Az összefüggés alapján a táblázat kitölthető úgy, hogy vesszük rendre az $1, 2, ..., m$ indexű sorokat, ezeken belül pedig az a indexet növelve haladunk. A táblázatnak mb eleme van. A módszer *nem polinomiális idejű*, mert b mérete $\lceil \log_2(b+1) \rceil$, az input hossza pedig

$$L = \sum_{i=1}^{m} (\lceil \log_2(s_i+1) \rceil + \lceil \log_2(v_i+1) \rceil) + \lceil \log_2(k+1) \rceil + \lceil \log_2(b+1) \rceil.$$

Másfelől a táblázat mérete is legalább mb, ami L-hez képest exponenciálisan nagy is lehet. Ha viszont b nem túl nagy a többi input paraméterhez képest, akkor a módszer akár polinom idejű is lehet. Ezt most pontosabban is megfogalmazzuk.

Definíció: A b *egész* unáris ábrázolása: $0^b := 0...0$*(összesen b darab 0 egymás után.)*

Definíció: *Egy feladat egy egész input paramétere* apró, *ha unárisan számítjuk bele az input hosszába.*

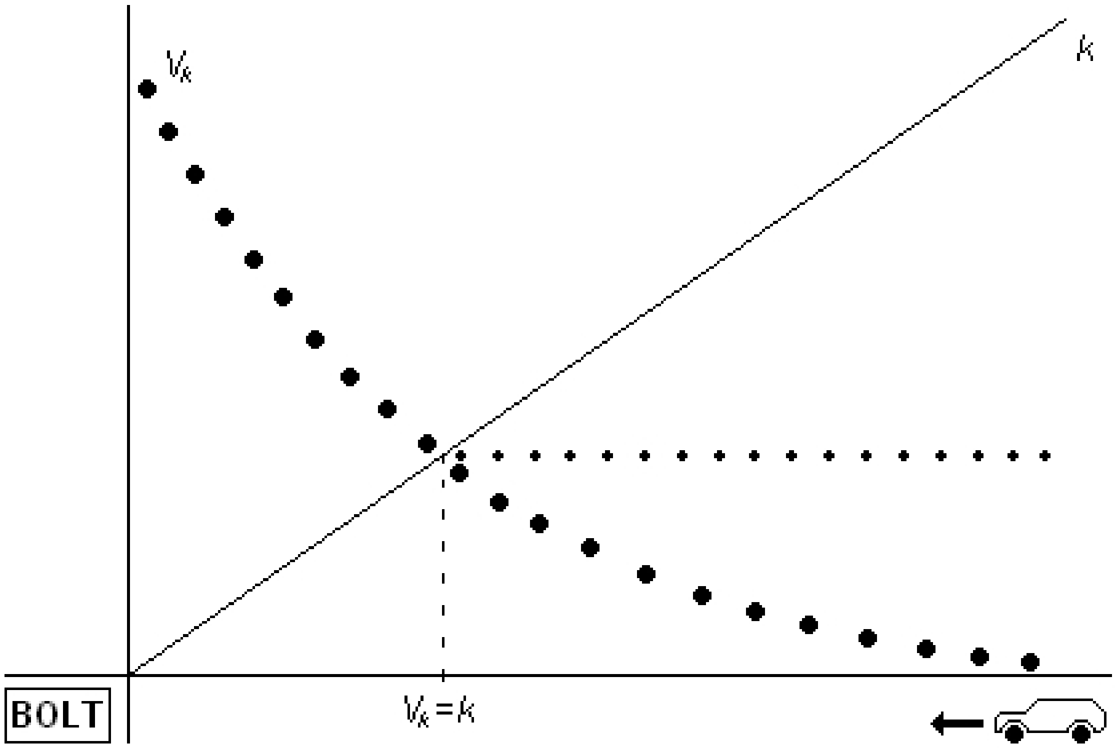
Ha a b paraméter apró, akkor az input méretéhez való hozzájárulása $|b|$ és nem $\lceil \log_2(b+1) \rceil$, mint a bináris megoldás esetén. A b-t akkor érdemes aprónak tekinteni, amikor az unáris ábrázolása az inputban nem növelné meg az input méretének *nagyságrendjét.* Ez teljesül, ha $|b|$ felülről becsülhető az input más összetevői méretének egy polinomjával. Például a Hátizsák feladatnál ha $b \leq m^5$, akkor b-t szemlélhetjük úgy, mint egy apró paramétert. Ez természetesen nem jelenti azt, hogy b-t unárisan kell ábrázolnunk az inputban. Arról van csupán szó, hogy a költségszámításnál az unáris hosszát vesszük figyelembe.

Következmény: *A Hátizsák probléma apró súlykorlát esetén megoldható polinom időben.*

Igazolásul elég annyi, hogy ekkor $L \geq b$, tehát a futási idő az input hosszának polinomjával becsülhető: $O(L^2)$.

2.3. Optimális parkolás

A bolt a kezdőpontban van, és a hozzá vezető út $k = 1, 2, ..., N$ helyein lehet parkolni. A parkolóhelyek egymástól függetlenül, $0 < p < 1$ valószínűséggel szabadok, $q = 1 - p$ a foglaltság esélye. Ha a Vásárló beáll a k-ik üres helyre, akkor (mondjuk a cipekedés miatt) k lesz a költsége, tehát a bolthoz minél közelebb



2. ábra. Optimális parkolás V_k, k függvényei

szeretne leállni. Ha viszont annyira előremegy hogy már nem talál helyet, akkor $C \gg 1$ pénzt fizet (mondjuk azért, mert ebben az esetben kénytelen behajtani egy fizetős parkolóházba). Az persze nem tudható hogy a $j < k$ helyek között van-e üres. Mindegyik szabad parkolónál döntenie kell: beáll vagy tovább megy, várni vagy visszafordulni nem lehet. Jelölje V_k annak optimális várható veszteségét, aki a k-ik parkolónál van, persze $V_0 = C$. Ezt a sorozatot kell meghatározni: ha a k-ik hely szabad, de $V_{k-1} < k$, akkor érdemes tovább menni. A dinamikus programmozás alapelve szerint

$$V_k = p \min(k, V_{k-1}) + qV_{k-1}, \tag{2}$$

mert ha a k-ik hely foglalt, akkor tovább kell menni, egyébként döntési helyzet van. Világos hogy $V_1 = p + qC$, de az iteráció ezután elbonyolódik.

Könnyű észrevenni hogy $V_k \leq V_{k-1}$ mindig igaz, és ha $V_{k-1} \leq k$ akkor $V_k = = V_{k-1} < k+1$, tehát $V_{k+1} = V_k = V_{k-1}$, és így tovább. Másrészt, $V_k < V_{k-1}$ feltétele $V_{k-1} > \min(k, V_{k-1})$, vagyis $V_{k-1} > k$. Ez indokolja a $\widetilde{V}_k = pk + q\widetilde{V}_{k-1}$ sorozat vizsgálatát a $\widetilde{V}_0 = C$ kezdeti feltétel mellett (ez tulajdonképpen a (2), csak épp a $\min(k, V_k)$ helyén k áll, így egyszerűbb). Ez nem nehéz, néhány iteráció után felismerhető hogy $\widetilde{V}_k = k + C - a + aq^k$ alakú, amit a rekurzióba visszahelyettesítve

$$\widetilde{V}_k = k + 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p}(q + pC)q^k \tag{3}$$

adódik. Másrészt $\widetilde{V}_k \leq \widetilde{V}_{k-1}$ ha $k \leq \widetilde{V}_{k-1}$, tehát az is látható, hogy $V_k = \widetilde{V}_k$ feltétele éppen $\widetilde{V}_{k-1} \geq k$, és a (3) egyenletből k kritikus értéke a $(q + pC)q^{k-1} = 1$ egyenlet $k* := 1 + \log(q + pC)/\log(1/q)$ megoldása. Ez persze nem biztos hogy egész, előtte $V_k = \widetilde{V}_k$, utána V_k már nem változik.

Szemléletesen ez azt jelenti, hogy amíg $k > V_k$ (vagyis amíg messze vagyok a bolttól), addig mindenképpen továbbmegyek. Amint $V_k > k$ (vagyis kellően közel értem), beállok az első szabad helyre.

2.4. A legszebb kiválasztása

Egyesével vonul el előttünk n hölgy, és a legszebbet úgy kellene megtalálni hogy némi szemlélődés után az éppen előttünk állóról kijelentjük: Ő az. Azt is mondhatjuk hogy n különböző szám van a kalapban, és nem tudjuk hogy a legnagyobb mekkora. Visszatevés nélkül húzzuk ki őket, tehát minden sorozat egyformán $1/n!$ valószinűségű. Legyen ξ_k a k-ik húzás eredménye, $\xi^*_m := \max \xi_k : k \leq m$. Azt az s időpontot kell meghatározni, ameddig szemlélődünk, vagyis $\xi^*_{t-1} = \xi^*_s$ és $\xi^*_t > \xi^*_s$ bekövetkeztekor ξ_t mellett döntünk. Feladatunk a siker

$$p(s) = \sum_{t=s+1}^{n} P[\xi_s^* = \xi_{t-1}^* < \xi_t = \xi_n^*] \tag{4}$$

valószínűségének maximalizálása.

Ha $t > s$ és $\xi_t = \xi_n^*$, akkor

$$P[\xi_s^* = \xi_{t-1}^* < \xi_t = \xi_n^*] = \frac{1}{n!}\binom{n-1}{t-1} s(t-2)!\,(n-t)! =$$

$$= \frac{(n-1)!\,s(t-2)!\,(n-t)!}{n!\,(t-1)!\,(n-t)!} = \frac{s}{n(t-1)}$$

adódik, tehát $p(s) = (s/n)\sum_{t=s+1}^{n}(t-1)^{-1}$ akkor maximális ha $s = s(n)$ az a szám, melynél $\sum_{t=s+1}^{n-1} t^{-1} \leq 1 \leq \sum_{t=s}^{n-1} t^{-1}$. Stratégiánk tehát a következő: az így meghatározott $s = s(n)$ időpontig szemlélődünk, majd a soron következő, aktuális legszebbnél igent mondunk. Látható, hogy $s(n) \approx n/e$, és a siker valószinűsége körülbelül $1/e$.

Egy példa segítségével szemléltetem az algoritmust. Legyen 10 szám a kalapban, és a következő sorrendben húzzuk ki: 3, 7, 1, 2, 5, 4, 10, 8, 6, 9, és legyen $s = 4$.

$$\underbrace{3, \underline{7}, 1, 2}_{s}, 5, 4, \underline{10}, 8, 6, 9$$

Az első 4 számot megnéztük, és kiválasztottuk a maximumot, vagyis $\xi_s^* = 7$. Ezek után húzzuk sorra a számokat, és az első olyat kiválasztjuk, amelyik nagyobb, mint ξ_s^*, ez pedig a t. lesz, jelen példában a 10. Látható, hogy ha az utolsó három szám között lenne a 10-nél nagyobb, akkor is a 10-re esett volna a választás, éppen ezért nagyon fontos az s-t jól megválasztani (ha túl kicsi, könnyen lehet hogy nem a maximumot választjuk, ha viszont túl nagy, lehet hogy bele kerül a legnagyobb szám, könnyen meggondolható, hogy ilyenkor a sorrendben utoljára kihúzott számmal kell megelégednünk).

3. A magas tranzakciós költség problémája

Ebben a fejezetben egy modellt fogunk vizsgálni. Adott egy bank, ahol a lekötéseink kamatoznak, a pénzfelvétel pedig komoly tranzakciós költséggel jár (és szükségünk van készpénzre is). Az a célunk, hogy vagyonunkat maximalizáljuk, és optimális sratégiát fogunk keresni arra az esetre, ha a tranzakciós költség lényegesen magasabb, mint a kamat.

3.1. Modell

Adott egy X_i iid cash-flow, ennyi készpénzt kapunk az i. napon ($i \geqq 0$). Vagyonunkat kétféle eszközben tartjuk, készpénzben (z_i), illetve bankban (w_i). Jelöljük y_i-vel azt az összeget, amennyit a bankból kiveszünk az i. napon, ezt mi választjuk. A bankban lévő vagyon minden lépésben kamatozik, azaz fix q-szorosára nő. A bankból való pénzkivét esetén tranzakciós költséget kell fizetni, azaz a kivett összeg Q-szorosa vonódik le az egyenlegünkből. Formálisan:

$$z_0 = w_0 = 0,$$

$$z_i = z_{i-1} + X_i + y_i, i \geq 1$$

$$w_i = qw_{i-1} - b(y_i), i \geq 1$$

ahol

$$b(y) = \begin{cases} y & \text{ha } y < 0 \\ Qy & \text{ha } y \geq 0 \end{cases}$$

valamint megköveteljük, hogy $z_i \geq 0$ minden i-re (ez a feltétel nemcsak a valóságszerűséghez kell, meggondolható, hogy ellenkező esetben legfeljebb egyszer, az utolsó lépésben vennénk ki pénzt). A bankban hitelünk is lehet (negatív pénzünk), ez ugyanúgy kamatozik, mint a betétünk. A probléma akkor érdekes, ha $1 < q <$

Q teljesül, éppen ezért ezt mindig feltesszük.
Bevezetjük továbbá a $\zeta_i = z_{i-1} + X_i$ jelölést, amely az i. napon a készpénzünk, miután a cash-flow beérkezett, de mielőtt a bankba mennénk. Célunk olyan $\{y_i\}$ (adaptált) stratégia keresése, mely maximalizálja a $\mathbb{E}(z_t + w_t)$ várható értékét, ahol t egy meghatározott időhorizont.

3.2. Bellman egyenlet

Az alábbiakban a Bellman-elv szerint fogunk gondolkodni, melynek lényege, hogy egy optimális stratégiának minden része is optimális.

Jelölje $v_h(\zeta, w)$ a h nap múlva elérhető vagyon maximális várható értékét, amennyiben a mai napon ζ készpénzünk van, a bankban pedig w összeg (és a mai cash-flow már beérkezett, de a bankban még nem voltunk). Vegyük észre, hogy érvényes a

$$v_h(\zeta, w) = v_h(\zeta,0) + q^h w$$

összefüggés.

A $h = 0$ esetet könnyen elintézhetjük:

$$v_0(\zeta,0) = -b(-\zeta) = \begin{cases} \zeta & \text{ha } \zeta \geq 0 \\ Q\zeta & \text{ha } \zeta < 0 \end{cases}$$

hiszen még ezen a napon is ki kell venni a bankból, ha negatív a készpénzünk.
A Bellman-egyenlet pedig:

$$v_h(\zeta,0) = \max_{y:\zeta+y\geq 0} \mathbb{E}[v_{h-1}(\zeta + X + y, -qb(y))] = \max_{y:\zeta+y\geq 0} \mathbb{E}[v_{h-1}(\zeta + X + y,0) - q^h b(y)].$$

Bevezetve a $V_h(\zeta) = v_h(\zeta,0)/q^h$ jelölést, és a $z = \zeta + y$ változót, kapjuk:

$$V_h(\zeta) = \max_{z\geq 0} \mathbb{E}[q^{-1}V_{h-1}(z+X)-b(z-\zeta)] = \max_{z\geq 0}[q^{-1}\mathbb{E}(V_{h-1}(z+X))-b(z-\zeta)]. \quad (5)$$

(Szemléletesen, V_h azt mutatja meg, hogy ha ζ készpénzünk van, és a bankban 0, akkor h nap múlva mennyi az elérhető diszkontált vagyon maximális várható értéke.)

Természetesen a maximum értéke mellett az optimális stratégia is érdekel minket: legyen $s_h(\zeta) = z$ az a függvény, amely ζ-hoz hozzárendeli (5) egyenletben maximumot szolgáltató (remélhetőleg egyértelműen létező) z-t. Az a sejtésünk, hogy minden h-ra létezik c_h konstans, melyre

$$s_h(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{ha } \zeta \leq 0 \\ \zeta & \text{ha } 0 \leq \zeta \leq c_h \\ c_h & \text{ha } \zeta \geq c_h \end{cases} \quad (6)$$

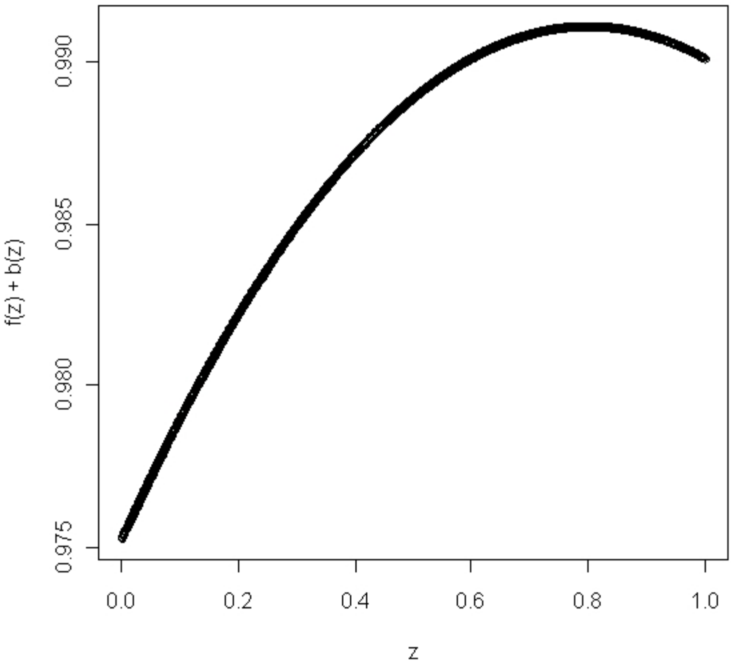
Ez szemléletesen azt jelenti, hogy ez a c_h konstans az, amit tartalékolnunk kell ahhoz, hogy nagy valószínűséggel elkerüljük a pénzkivétet. Ha 0 készpénzünk volt, és $\zeta \leq 0$, akkor ζ-t veszünk ki a bankból, és továbbra is 0 marad a készpénzünk. Ha $0 \leq \zeta \leq c_h$, akkor nem teszünk be pénzt a bankba, így ζ készpénzünk lesz. Ha viszont $\zeta \geq c_h$, akkor csak c_h-t tartalékolunk, és $\zeta - c_h$-t teszünk a bankba.

3.3. A h=1 eset

Számítsuk ki a $V_1(\zeta)$ és $s_1(\zeta)$ függvényeket! Látni fogjuk, hogy $s_1(\zeta)$ valóban (6) alakú. Természetesen a $h = 1$ eset nem túl izgalmas, de legalább számolható. Jelölje X eloszlásfüggvényét $F(x)$. (2) szerint:

$$V_1(\zeta) = \max_{z\geq 0}[q^{-1}\mathbb{E}(V_0(z + X)) - b(z - \zeta)].$$

ahol $V_0(\zeta) = -b(-\zeta)$. Mivel V_0 konkáv, ugyanez igaz az $u(z) = q^{-1}\mathbb{E}V_0(z + X)$



3. ábra. $[q^{-1}\mathbb{E}(V_0(z+X)) - b(z-\zeta)]$ függvény Q=10, q=1.1, $\zeta = 1$ esetén, X egyenletes eloszlású a $[-1, 1]$ intervallumon

függvényre is, azaz u bal (jobb) oldali deriváltja monoton csökken, és

$$\lim_{z\to-\infty} u'(z) = Q/q > 1,$$

és

$$\lim_{z\to\infty} u'(z) = 1/q < 1,$$

ahol u' jelölje az egyértelműség kedvéért a baloldali deriváltat. Mindebből adódik, hogy $s_1(\zeta)$ valóban (6) alakú, és $c_1 = \sup\{c : u'(c) \geq 1\}$, amennyiben ez pozitív, egyébként pedig $c_1 = 0$. Mivel $u'(z) = 1 + (Q-1)F(-z+0)$, kapjuk, hogy

$$c_1 = \max(-F^-(\frac{q-1}{Q-1}), 0),$$

ahol F^- az F általánosított inverze. A maximum értéke pedig $V_1(\zeta) = u(s_1(\zeta)) - b(s_1(\zeta) - \zeta)$, behelyettesítve kapjuk:

$$V_1(\zeta) = \begin{cases} u(0) + Q\zeta & \text{ha } \zeta \leq 0 \\ u(\zeta) & \text{ha } 0 \leq \zeta \leq c_1 \\ u(c_1) - c_1 + \zeta & \text{ha } \zeta \geq c_1 \end{cases}$$

$V_1(\zeta)$ is monoton növekvő, konkáv függvény. Kérdés, hogy lehet-e innen tovább számolni explicit módon, vagy legalább kvantitatívan. Láthattuk, hogy $h = 1$ esetén c_1 kiszámítható explicit módon, $h > 1$ esetben azonban nem. Viszont azt meg tudjuk mutatni, hogy az optimális stratégia (6) alakú.

3.4. A h>1 eset

Megmutatjuk, hogy $s_h(\zeta)$ mindig (6) alakú. Indukcióval tegyük ugyanis fel, hogy h-ig már tudjuk $s_h(\zeta)$ alakját, valamint azt, hogy $V_h(\zeta)$ monoton növő, konkáv függvény, mely a $\zeta \leq 0$ félegyenesen lineáris Q meredekséggel, a $\zeta \geq c_h$ félegyenesen szintén lineáris 1 meredekséggel. Az előző szakasz szerint $h = 0{,}1$-re ezeket már mind tudjuk.

A (5) Bellman egyenlet szerint

$$V_{h+1}(\zeta) = \max_{z \geq 0}(u_{h+1}(z) - b(z - \zeta)),$$

ahol $u_{h+1}(z) = q^{-1}\mathbb{E}V_h(z + X)$. Az indukciós feltevés szerint $u_{h+1}(z)$ monoton növő, konkáv függvény, és

$$\lim_{z \to -\infty} u'_{h+1}(z) = Q/q > 1,$$

és

$$\lim_{z\to\infty} u'_{h+1}(z) = 1/q < 1$$

(ahol u'_h jelölje az egyértelműség kedvéért a baloldali deriváltat). Mindebből adódik, hogy $s_{h+1}(\zeta)$ valóban (6) alakú, és $c_{h+1} = \sup\{c : u'_{h+1}(c) \geq 1\}$, amennyiben ez pozitív, egyébként pedig $c_{h+1} = 0$. (Amennyiben $u'_{h+1} = 1$ egy pozitív hosszúságú intervallumon teljesül, akkor c_{h+1} más is lehetne.)
A maximum értéke pedig $V_{h+1}(\zeta) = u(s_{h+1}(\zeta)) - b(s_{h+1}(\zeta) - \zeta)$, behelyettesítve kapjuk:

$$V_{h+1}(\zeta) = \begin{cases} u_{h+1}(0) + Q\zeta & \text{ha } \zeta \leq 0 \\ u_{h+1}(\zeta) & \text{ha } 0 \leq \zeta \leq c_{h+1} \\ u_{h+1}(c_{h+1}) - c_{h+1} + \zeta & \text{ha } \zeta \geq c_{h+1} \end{cases}$$

azaz $V_{h+1}(\zeta)$-ra teljesülnek az indukció folytatásához szükséges feltételek.
Megmutatjuk azt is, hogy a stratégiákat definiáló c_h konstansok monoton nőnek (vagyis minél több nap van még hátra, annál több pénzt kell tartalékolni).

Tegyük fel indukcióval, hogy $c_h \geq c_{h-1}$ és $V'_h \geq V'_{h-1}$ már ismert ($h = 1$-re ezeket tudjuk). Ezért

$$u'_{h+1}(z) = q^{-1}\mathbb{E}V'_h(z + X) \geq q^{-1}\mathbb{E}V'_{h-1}(z + X) = u'_h(z)$$

Ebből már következik, hogy $c_{h+1} \geq c_h$ és $z > 0$-ra

$$V'_{h+1}(z) = \max\{u'_{h+1}(z), 1\} \geq \max\{u'_h(z), 1\} = V'_h(z).$$

□

3.5. Kontrakció

Definíció: Legyen X egy tetszőleges nem üres halmaz, $\varrho : X \times X \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy érvényesek a következő tulajdonságok:

$1 : \varrho(x,y) \geq 0$, emellett $\varrho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
$2 : \varrho(x,y) = \varrho(y,x)$
$3 : \varrho(x,y) \leq \varrho(x,z) + \varrho(z,y)$

Az ilyen tulajdonságú függvényt metrikának, az (X, ϱ) párt metrikus térnek nevezzük. Azokat a metrikus tereket, amelyekben minden Cauchy-sorozat konvergens, teljes metrikus térnek, más néven **Banach-tér**nek nevezzük.

Definíció: $f : X \to X$ **kontrakció**, ha $\exists\ q \in [0{,}1)$, amelyre $\varrho(f(x_1), f(x_2)) \leq$ $\leq q\varrho(x_1, x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in X$.

Tétel: Legyenek

•X Banach-tér
•$f : X \to X$ egy kontrakció, $D(f) = X$.

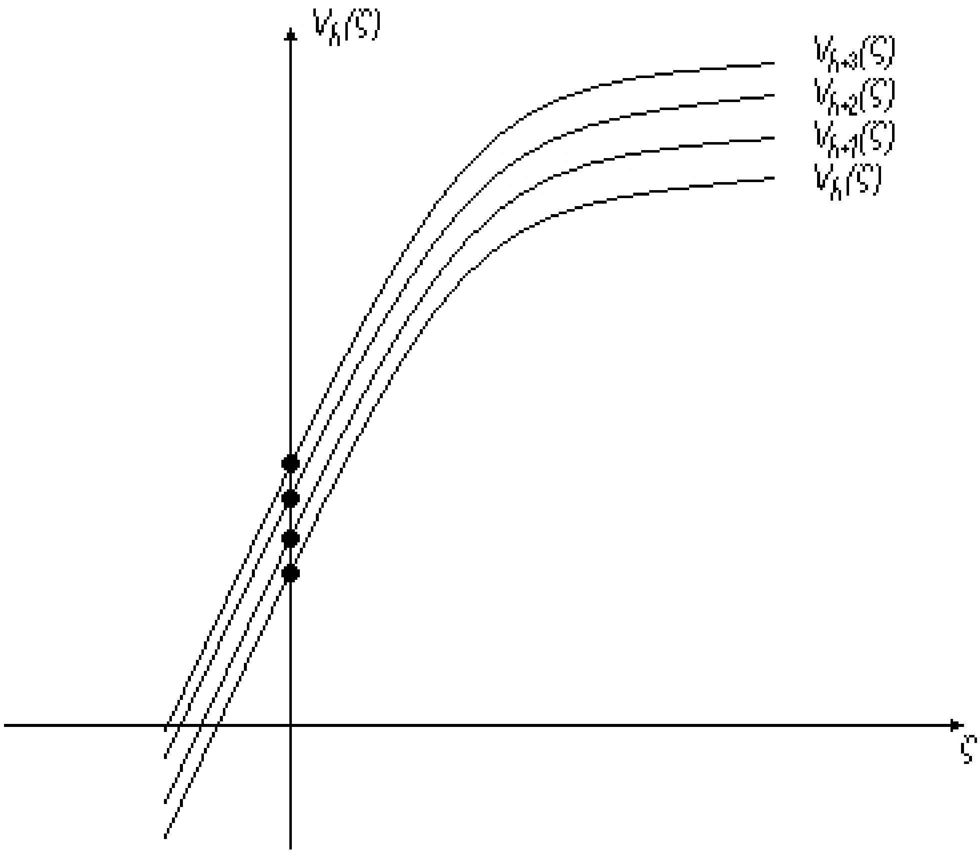
Ekkor

1: f-nek $\exists$ **fixpont**ja
2: egyetlen fixpontja van (x^*)
3: az $x^{(n)} := f(x^{(n-1)})\ n = 1, 2, ..., x^{(0)}$ tetszőleges iteráció konvergens, és $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x^*$
4: érvényes a $\varrho(x^*, x^{(m)}) \leq A\varrho(x^{(1)}, x^{(0)})q^m$ becslés, ahol A egy konstans.

Vezessük be a $V_h'(z) = g_h(z)$ jelölést $(z \geq 0)$. Láthattuk, hogy ezekre a függvényekre $g_{h+1} = Tg_h$. Itt $T = \max(S, 1)$, ahol $S, T : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ operátorok. Itt $\mathcal{G}$ a $g : \mathbb{R}^+ \to [0, Q]$ balról folytonos, monoton függvények szuprémum normával ellátott Banach-tere. Konkrétan

$$(Sg)(z) = \frac{Q}{q}F(-z+0) + \frac{1}{q}\int_{-z+0}^{\infty} g(z+x)F(dx) \qquad z > 0$$

S, és így T is kontrakció, mivel



4. ábra. A V_h függvények elrendeződése különböző h értékekre

$$\sup_{z>0}|(Sg)(z)-(Sh)(z)| = \frac{1}{q}\sup_{z>0}\left|\int_{-z+0}^{\infty}(g(z+x)-h(z+x))F(dx)\right| \leq \frac{1}{q}\sup_{z>0}|g(z)-h(z)|$$

Emiatt egyértelműen létezik g_∞, melyre $Tg_\infty = g_\infty$, és $g_h \to g_\infty$. Továbbá $c_h \to c_\infty$, ahol $c_\infty = \sup\{z : g_\infty(z) \geq 1\}$. Később belátjuk, hogy $c_\infty < \infty$.

Vizsgáljuk meg V_h konvergenciáját!

$$V_h(\zeta) = \begin{cases} V_h(0) + \int_0^\zeta V_h'(z)dz & \text{ha } \zeta > 0 \\ V_h(0) + Q\zeta & \text{ha } \zeta \leq 0 \end{cases}$$

Ha tehát valamilyen h-ra $V_{h+1}(0) \geq V_h(0)$, akkor $V_{h+1}(\zeta) \geq V_h(\zeta)$ minden ζ-ra, amint azt a 4. ábra mutatja (a deriváltak monotonitása miatt). Ez a tulajdonság pedig öröklődik, azaz $V_{n+1}(\zeta) \geq V_n(\zeta)$ minden $n \geq h$-ra és minden ζ-ra.

Tehát a $V_h(0)$ sorozat két monoton szakaszból állhat, egy csökkenőből, majd egy növekvőből, de a kettő közül bármelyik hiányozhat is. Azonban mindenképp létezik a $V_\infty(0) = \lim_{h\to\infty} V_h(0)$ véges határérték. A végesség onnan adódik, hogy ha X sztochasztikusan kisebb, mint Y, akkor könnyen láthatóan $V_h^X \leq V_h^Y$ minden h-ra (nyilván, hiszen ha várhatóan kevesebb pénzt kapunk, várhatóan kevesebbet is fogunk megtakarítani). Így

$$V_h^- \leq V_h \leq V_h^+$$

minden h-ra, ahol $V_h^-(V_h^+)$ az X negatív (pozitív) részéből számolódik. Ha pedig a cash-flow mindig kiadás (vagy bevétel), akkor explicit ki lehet számolni $V_h(0)$-t.

Kaptuk tehát, hogy V_h konvergál, mégpedig

$$V_\infty(\zeta) = \begin{cases} V_\infty(0) + \int_0^\zeta g_\infty(z)dz & \text{ha } \zeta > 0 \\ V_\infty(0) + Q\zeta & \text{ha } \zeta \leq 0 \end{cases}$$

Ez a V_∞ függvény fixpontja a V_h-ból V_{h+1}-et előállító operátornak, azaz $V_\infty(0) = = q^{-1}\mathbb{E}V_\infty(X)$. Ebből

$$V_\infty(0) = \frac{1}{q-1}\left[Q\int_{-\infty}^0 xdF(x) + \int_0^\infty g_\infty(x)(1-F(x))dx\right]$$

Ez szemléletesen arról szól, hogy ha h elég nagy (vagyis sok időm van még hátra), akkor a h, és a $h+k$ $(k>0)$ nap múlva elérhető összeg jelenértéke közel lesz egymáshoz (nyilván, hiszen mind a kettő V_∞ jelenértékéhez konvergál).

3.6. Triviális eset

Nézzük meg röviden azt a triviális esetet, amikor $F(0) < \frac{q-1}{Q-1}$. Láttuk, hogy ekkor $c_1 = 0$, és indukcióval megmutatható, hogy $c_h = 0$ minden h-ra is teljesül. (Ha $F(0) = \frac{q-1}{Q-1}$, akkor c_1 esetleg nem egyértelmű, a korábbi definíciónk szerint pozitív is lehet, de ebben az esetben is választhatjuk 0-nak, azaz a továbbiak erre az esetre is vonatkoznak.)
Azaz, amikor elég kicsi annak a valószínűsége, hogy holnap kiadásunk lesz, akkor soha nem tartalékolunk pénzt. Továbbá kapjuk, hogy

$$V_h(\zeta) = V_0(\zeta) + u_1(0) \sum_{i=0}^{h-1} q^{-i}$$

Ha ugyanis ezt h-ra már tudjuk (ahol $h = 1$-gyel elkezdhetjük az indukciót), akkor

$$u_{h+1}(z) = q^{-1}\mathbb{E}V_h(z+X) = u_1(0) \sum_{i=0}^{h-1} q^{-i+1} + q^{-1}\mathbb{E}V_0(z+X)$$

Innen látszik egyrészt, hogy $c_{h+1} = 0$. Másrészt $V_{h+1}(\zeta) = u_{h+1}(0) + V_0(\zeta)$, ahol $u_{h+1}(0) = u_1(0) \sum_{i=0}^{h} q^{-i}$, mivel $q^{-1}\mathbb{E}V_0(X) = u_1(0)$. Visszahelyettesítve megkapjuk, hogy

$$V_h(\zeta) = V_0(\zeta) + \mathbb{E}V_0(X) \frac{1 - q^{-h}}{q-1}$$

ahol $V_0(\zeta) = -b(-\zeta)$.

3.7. Kétértékű nempozitív cash-flow

Vajon tovább tudunk-e explicit számolni egy egyszerű konkrét esetben? Tegyük fel, hogy X eloszlása

$$P(X=0) = 1 - \epsilon, \mathrm{P}(X=-1) = \epsilon$$

Természetesen a negatív érték -1 helyett tetszőleges $-A$ lehet. Az előző szakasz triviális esetét zárjuk ki, azaz legyen $\epsilon > \frac{q-1}{Q-1}$. Ebben az esetben ki tudjuk számolni a g_∞ függvényt. Induljunk ki a $g_0(z) \equiv 1$ függvényből. Vegyük észre, hogy minden $h, k \geq 0$-ra g_h konstans lesz a $(k, k+1)$ intervallumban, azaz g_∞ is konstans lesz ezekben az intervallumokban. Jelölje G_k a g_∞ értékét a $(k-1, k)$ intervallumban!

Foglalkozzunk először a (0,1) intervallummal! Itt $qg_{h+1}(z) = \epsilon Q + (1-\epsilon)g_h(z)$. Azaz a $qG_1 = \epsilon Q + (1-\epsilon)G_1$ fixpontegyenletből $G_1 = Q/d$, ahol $d = \frac{q-1+\epsilon}{\epsilon}$. Ez pontosan akkor lesz 1-nél nagyobb, ha $\epsilon > \frac{q-1}{Q-1}$. Rátérve az (1,2) intervallumra, a fixpontegyenlet: $qG_2 = \epsilon G_1 + (1-\epsilon)G_2$, ebből pedig $G_2 = Q/d^2$. Ez akkor lesz 1-nél nagyobb, ha $\epsilon > \frac{q-1}{Q^{1/2}-1}$. Ezt iterálva végül kapjuk, hogy $G_k = \max(Q/d^k, 1)$, és c_∞ az az egész szám, melyre

$$\frac{q-1}{Q^{1/c_\infty}-1} < \epsilon \leq \frac{q-1}{Q^{1/(c_\infty+1)}-1}$$

Vegyük észre, hogy $c_\infty \to \triangle - 1$, ha $\epsilon \to 1$, ahol $\triangle$ a legkisebb egész szám, melyre $q^\triangle \geq Q$.

Szemléletesen c_∞ azt mutatja meg, hogy ha ∞ napunk van még hátra, akkor mennyi készpénzt kell tartalékolnunk. Ez kiszámolható Q, q, és ϵ értékekből. Fontos megjegyezni, hogy általános nempozitív cash-flow esetén is kiszámítható, hogy mennyi kezdőtőkével kell rendelkeznünk ahhoz, hogy hosszú távon a diszkontált vagyonunk várható értéke 0 legyen az optimális stratégia mellett, ettől azonban (a téma mélysége miatt) jelen dolgozatban eltekintek.

4. Szerencsejátékok optimális stratégiái

Különféle szerencsejátékok tanulmányozása jó alkalmat ad az optimális stratégia fogalmának illusztrálására, hiszen előfordulhat, hogy elsőre talán hasonló helyzetekben más-más módon tudjuk maximalizálni a pénzünket. A stratégia akkor optimális, ha az elérhető maximum a nyereményünk.

4.1. Tönkremenetel egyszerű játékban

Definíció: A Markov-lánc egy olyan diszkrét sztochasztikus folyamatot jelent, amely Markov-tulajdonságú. Markov-tulajdonságúnak lenni röviden annyit jelent, hogy adott jelenbeli állapot mellett, a rendszer jövőbeni állapota nem függ a múltbeliektől. Másképpen megfogalmazva, ez azt is jelenti, hogy a jelen leírása teljesen magába foglalja az összes olyan információt, ami befolyásolhatja a jövőbeli helyzetét a folyamatnak. A rendszer korábbi állapotai a későbbi állapotokra csak a jelen állapoton keresztül gyakorolhatnak befolyást.

Az *asszimetrikus bolyongás* olyan Markov-lánc, melynek állapottere $X = \mathbb{Z}$, és $p(x, x+1) = p$, $p(x, x-1) = 1-p$ a megengedett átmenetek valószínűsége, ahol $0 < < p < 1$. Adott $0 \le x \le r$ természetes számokkal jelölje $u_r(x)$ annak valószinűségét, hogy az x helyről induló bolyongás előbb éri el a 0 mint az r szintet, vagyis a játékos tönkremegy mielőtt a remélt r nyereséghez hozzájutna. Persze $u_r(0) = 1, u_r(r) = 0$, és a teljes valószinűség tétele miatt

$$u_r(x) = pu_r(x+1) + (1-p)u_r(x-1) \text{ ha } 0 < x < r. \tag{7}$$

Az adott peremfeltétellel ez az egyenlet egyértelműen oldható meg, például $u_r(x) = 1 - x/r$ ha $p = 1/2$, és $u_r(x) = \alpha(e^{\beta x} - \gamma)$ az általános megoldás (ezt a megoldást valahonnan "megsejtettük", de utólag igazolható, hogy tényleg ez a megoldás), ahol $pe^{\beta} + (1-p)e^{-\beta} = 1$, vagyis $e^{\beta} = (1-p)/p$, továbbá $\gamma = e^{\beta r}$ és $\alpha(1 - e^{\beta r}) = 1$, ahonnan

$$u_r(x) = \frac{e^{\beta x} - e^{\beta r}}{1 - e^{\beta r}}$$

ahol

$$\beta = \log \frac{1-p}{p} \tag{8}$$

A $p \to 1/2$ határátmenet után persze lineáris profilt kapunk, de ennél érdekesebb a $p = 1/2 - \epsilon/2$ és $r = 1/\epsilon$ "gyengén asszimmetrikus" határátmenet, amikoris (7) mint az $\frac{1}{2}\partial_x^2 u - \partial_x u = 0; u(0) = 1, u(1) = 0$ elliptikus peremérték feladat numerikus megoldásának algoritmusa jelenik meg.

Legyen $\tilde{u}_r(x) = u_r(rx)$, $0 \le x \le 1$, $u(x) = \lim_{r\to\infty} \tilde{u}_r(x)$.

Ha $\epsilon = \dfrac{1}{r}$ és $p = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\epsilon}{2}$, akkor (7) átírva:

$$\tilde{u}_r(x) = u_r(rx) = \Big(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2}\Big)u_r(r(x+\epsilon)) + \Big(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}\Big)u_r(r(x-\epsilon)) =$$

$$= \Big(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2}\Big)\tilde{u}_r(x+\epsilon) + \Big(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}\Big)\tilde{u}_r(x-\epsilon)$$

ezt átrendezve, és ϵ^2-tel osztva:

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{\tilde{u}_r(x+\epsilon) - 2\tilde{u}_r(x) + \tilde{u}_r(x-\epsilon)}{\epsilon^2}\Big) - \frac{\tilde{u}_r(x+\epsilon) - \tilde{u}_r(x-\epsilon)}{2\epsilon} = 0$$

Ennek megoldása tényleg

$$u(x) = \lim_{\epsilon\to 0} u_{1/\epsilon}(x/\epsilon) = \frac{e^2 - e^{2x}}{e^2 - 1} \tag{9}$$

mivel $(1/\epsilon)\beta \to 2$ amint $\epsilon \to 0$.

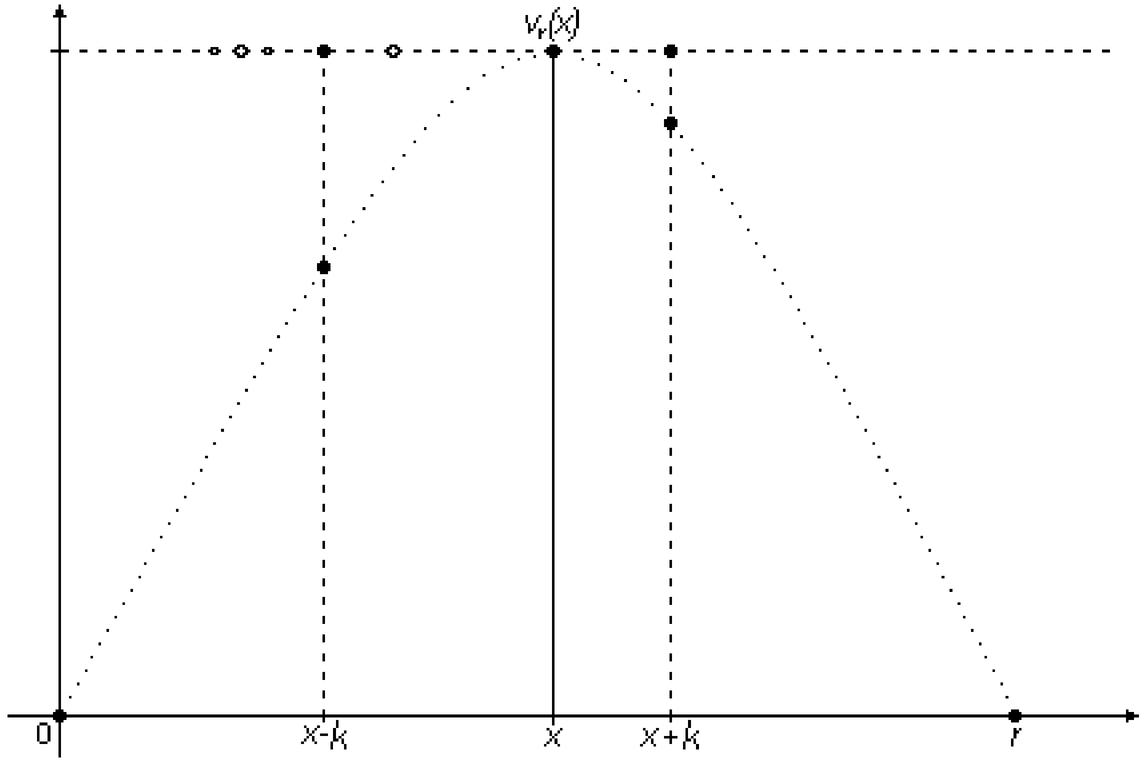
Szép esetekben jó sejtés lehet, hogy ha egy közelítő képlet tart egy differenciálegyenlethez, akkor a közelítő képlet megoldásának (jelen esetben $u_r(x)$) is tartania kell a differenciálegyenlet megoldásához (jelen esetben $u(x)$).

4.2. Kedvezőtlen helyzetben merész a jó játékos

A szerencsejátékos pénze n játszma után:

$$\zeta_n := x + \sum_{t=0}^{n-1} \gamma(\zeta_t)\sigma_t, \tag{10}$$

ahol $x \in \mathbb{N}$ a játékos induló tőkéje, σ_t független ± 1 sorozat, a nyerés valószínűsége $P[\sigma_t = 1] = p < 1/2$, végül $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a játékos stratégiája: $\gamma(y)$ az a tét,



5. ábra. Optimális stratégia $v_r(x)$ függvénye

amit y tőke birtokosaként kockáztat. Olyan bolyongásról van szó, ahol az ugrás nagyságát a játékos határozza meg, a cél az előre kitűzött $r > x$ összeg megszerzése. Feltesszük, hogy $\gamma, r \in \mathbb{N}$ és $0 < \gamma(x) \leq \tilde{\gamma}(x) := \min\{x, r-x\}, u_{r,\gamma}(x)$ a cél elérésének valószínűsége γ stratégia esetén. Csak véges sok megengedett stratégia van, a feladat az $u_r^*(x) := \max_\gamma u_{r,\gamma}(x)$ optimum megvalósítása. Jelölje τ azt a véletlen időpontot, amikor a játszma véget ér: $\zeta_\tau = 0$ ha tönkremegy, $\zeta_\tau = r$ ha sikeres. Mivel

$$ru_{r,\gamma}(x) = \mathsf{E}\zeta_\tau = x + (2p-1)\mathsf{E}\sum_{t=0}^{\tau-1}\gamma(\zeta_t), \tag{11}$$

akkor lesz a stratégiánk optimális (azaz akkor lesz $u_{r,\gamma}(x)$ maximális), ha az átlagos pénzforgalom, $\mathsf{E}\sum_{t=0}^{\tau-1}\gamma(\zeta_t)$, minimális (nyilván, hiszen x fix, $(2p-1)$ pedig negatív). A nagy számok törvénye szerint ez egyáltalán nem meglepő, az igazságtalan játékot olyan gyorsan be kell fejezni, ahogy csak lehet. Ha r páros és $x = r/2$, akkor nyilván a merész játék optimális, tehát $u_r^*(r/2) = u_{r,\tilde{\gamma}}(r/2) = p$.

Általában is igaz, hogy $1 \leq x < r$ esetén

$$u_r^*(x) = \max_k\{pu_r^*(x+k) + (1-p)u_r^*(x-k) : 1 \leq k \leq \tilde{\gamma}_r(x)\} \tag{12}$$

ami az optimális kontroll elméletének Bellman féle alapelve: optimális stratégia minden lépése (szakasza) is az. Először azt mutatjuk meg, hogy az $u_r^*(0) = 0$ és $u_r^*(r) = 1$ peremfeltétel mellett (12) egyértelműen oldható meg.

Állítás: Tegyük fel, hogy $\hat{u}_r$ is megoldás, és legyen $v_r(x) := u_r^*(x) - \hat{u}_r(x)$; persze $v_r(0) = v_r(r) = 0$. Mivel a két maximum helye különbözhet, $\max_k b_k - \max_k a_k \leq \max_k(b_k - a_k)$, tehát

$$v_r(x) \leq \max_k\{pv_r(x+k) + (1-p)v_r(x-k) : 1 \leq k \leq \tilde{\gamma}_r(x)\}.$$

A két oldal egyenlő, ha $v_r(x) = \bar{v}_r := \max_y v_r(y)$, ha tehát $0 < x < r$ maximumhely, akkor van $1 \leq k \leq \tilde{\gamma}(x)$ úgy, hogy $v_r(x-k) = v_r(x) = v_r(x+k)$. Ugyanezt az $x-k$ és $x+k$ helyekről is elmondhatjuk, és véges sok lépés után bizonyítandó $\bar{v}_r = v_r(0) = 0$ vagy $\bar{v}_r = v_r(r) = 0$ egyenlőséget kapjuk.

□

Szemléletesen itt arról van szó, hogy ami a (12)-t kielégíti, az az optimális stratégia. Persze előfordulhat, hogy több stratégia is kielégíti, de ebben az esetben ugyanazok lesznek a nyerési esélyek, így mindegyik ilyen stratégia optimális.

Legyen $\tilde{u}_r(x)$ a merész játékos sikerének valószínűsége, ezt az

$$\tilde{u}_r(x) = \begin{cases} p\tilde{u}_r(2x) & \text{ha } x \le r/2 \\ p + (1-p)\tilde{u}_r(2x-r) & \text{ha } x \ge r/2 \end{cases} \tag{13}$$

rekurzió definiálja. Az $r = 2^d$ egyszerűsítő feltevés mellett, indukcióval bizonyítjuk, hogy $\tilde{u}_r$ megoldja a (12) Bellman egyenletet. Ehhez azt kell belátni, hogy

$$\tilde{u}_r(x) \ge p\tilde{u}_r(x+k) + (1-p)\tilde{u}_r(x-k) \quad \text{ha } 1 \le k \le \tilde{\gamma}_r(x); \tag{14}$$

(13) szerint az egyenlőség biztosan teljesül ha $k = \tilde{\gamma}_r(x)$. Tegyük fel hogy (14) igaz, az $\tilde{u}_{2r}(2x) = \tilde{u}_r(x)$ azonosság miatt csak az x páratlan értékeivel van gond. Az indukció végrehajtásakor négy esetet kell szétválasztani.

Ha $x + k \le r$ akkor $\tilde{u}_{2r}(x) = p\tilde{u}_{2r}(2x)$, míg $\tilde{u}_{2r}(x+k) = p\tilde{u}_{2r}(2x+2k)$ és $\tilde{u}_{2r}(x-k) = p\tilde{u}_{2r}(2x-2r)$, de az indukciós feltevés és $\tilde{u}_{2r}(2x) = \tilde{u}_r(x)$ miatt

$$\tilde{u}_{2r}(x) = p\tilde{u}_{2r}(2x) = p\tilde{u}_r(x) \ge p^2\tilde{u}_r(x+k) + p(1-p)\tilde{u}_r(x-k)$$

$$= p^2\tilde{u}_{2r}(2x{+}2k){+}p(1{-}p)\tilde{u}_{2r}(2x{-}2k) = p\tilde{u}_{2r}(x{+}k){+}(1{-}p)\tilde{u}_{2r}(x{-}2) \quad \text{ha } 1 \le k \le \tilde{\gamma}_r(x)$$

amit bizonyítani kellett.

Ha $x - k \ge r$ akkor $\tilde{u}_{2r}$ számolása (13) második sora alapján történik. Az indukciós lépés egyébként ugyanaz, mint fent; (14) a $2x - 2r$ helyen alkalmazandó.

Az $r \le 2x \le 3r$ sávban az indukció kulcsa az önmagában is tanulságos

$$\tilde{u}_{2r}(x) = \begin{cases} p^2 + (1-p)\tilde{u}_{2r}(2x-r) & \text{ha } r \le 2x \le 2r \\ (1-p)p + p\tilde{u}_{2r}(2x-r) & \text{ha } 2r \le 2x \le 3r \end{cases}$$

újabb azonosság, ami az első esetben

$$\tilde{u}_{2r}(x) = p\tilde{u}_{2r}(2x) = p^2 + p(1-p)\tilde{u}_{2r}(4x-2r) = p^2 + (1-p)\tilde{u}_{2r}(2x-r)$$

miatt, a második esetben pedig

$$\tilde{u}_{2r}(x) = p + (1-p)\tilde{u}_{2r}(2x-2r) = p + (1-p)p\tilde{u}_{2r}(4x-4r)$$

és

$$\tilde{u}_{2r}(2x-r) = p + (1-p)\tilde{u}_{2r}(4x-4r)$$

miatt igaz. A fennmaradó esetekben $x+k \geq r$ és $x-k \leq r$, tehát $r \leq 2x \leq 3r$. Ha most $r \leq 2x \leq 2r$ akkor az induktív feltevés szerint

$$\tilde{u}_{2r}(x) = p^2 + (1-p)\tilde{u}_{2r}(2x-r) \geq p^2 + p(1-p)\tilde{u}_{2r}(2x+2k-2r) + (1-p)^2\tilde{u}_{2r}(2x-2k)$$

viszont $\tilde{u}_{2r}(x+k) = p + (1-p)\tilde{u}_{2r}(2x+2k-2r)$ és $\tilde{u}_{2r}(x-k) = p\tilde{u}_{2r}(2x-2k)$, amiből $p < 1-p$ miatt állításunk következik.

Ugyanígy ha $2r \leq 2x \leq 3r$, akkor

$$\tilde{u}_{2r}(x) = (1-p)p + p\tilde{u}_{2r}(2x-r) \geq (1-p)p + p^2\tilde{u}_{2r}(2x+2k-2r) + p(1-p)\tilde{u}_{2r}(2x-2k)$$

Megint $\tilde{u}_{2r}(x+k) = p + (1-p)\tilde{u}_{2r}(2x+2k+2r)$ és $\tilde{u}_{2r}(x-k) = p\tilde{u}_{2r}(2x-2k)$ felhasználásával hajtjuk végre az indukció utolsó lépését. Tehát a merész stratégia igazságtalan ($p < 1/2$) helyzetben optimális, legalábbis akkor, ha $r = 2^d$.

Szemléletesen az a lényeg, hogy ha igazságtalan a játék, akkor minél több lépést teszek, annál nagyobb a csőd esélye, így kevés lépésre törekszem. Ezt úgy tudom elérni, ha nagyokat lépek, vagyis minden lépésben megduplázom a tétet, egészen addig, amíg már nincs szükségem arra, hogy az egész tétemet megnyerjem (például ha 8 forintot akarok nyerni, és már van 6 forintom, akkor nem kockáztatok, csak 2 forintot). Erről szól a $\tilde{\gamma}$, a teljes pénzemnél többet nem tehetek fel, a hiányzó összegnél pedig nyilván nem fogok többet feltenni.

4.3. Óvatos stratégia kedvező helyzetben

Azt a szituációt vizsgáljuk, amikor a játékos tőkéjének $c \in [0,1]$ hányadát kockáztatja minden játszmában, de most a játék előnyös. Feltehetjük, hogy a kezdőtőke $\zeta_0 = 1$, ekkor n játszma után

$$\zeta_n = \prod_{t=0}^{n-1}(1 + \sigma_{t+1}c) \tag{15}$$

a pénze, ahol σ_t független ± 1 sorozat, $P[\sigma_t = 1] = p > 1/2$.$\mathsf{E}\zeta_n = (1 + (2p - 1)c)^n$ akkor maximális, ha $c = 1$ (vagyis ha mindig felteszem az összes pénzem, hiszen p most kedvező), de ez a stratégia igen kockázatos, mert ilyenkor $P[\zeta > 0] = p^n$ (nyilván, hiszen kedvező p mellett is előfordulhat hogy veszítünk, és akkor azonnal tönkremennénk, tehát ezt a stratégiát mégsem fogjuk választani). Viszont

$$\frac{1}{n}\mathsf{E}\log\zeta_n = p\log(1+c) + (1-p)\log(1-c) = \max! \tag{16}$$

ha $c = 2p - 1$, és a tőke növekedésének exponenciális sebessége éppen $\log 2 - h(p) \geq 0$, ahol $h(p)$ az entrópia (ez azt mutatja meg, hogy mennyire bizonytalan a játék kimenetele). A $\log 2 - h(p)$ csak akkor 0, ha $p = 1/2$. Ha $p < 1/2$ akkor a számolás, és a hosszú távú játék értelmetlen.

Látható, hogy ez a példa folytonos (az előző egészeken "ugrált"). Ennek a stratégiának az a lényege, hogy akár nyerünk, akár veszítünk, a tőkének mindig egy c-ed részét kockáztatjuk. Ha $p > 1/2$, akkor ez a stratégia kedvezni fog nekünk.

4.4. Fogadások több lehetőségre

Sok ló közül a pályán az i nevű $p_i > 0$ valószínűséggel nyer, $p_1 + p_2 + ... + p_r = 1$. Ha a játékos az i nevű lóra S_i összeget tesz, és az nyer, akkor nyereménye $c_i S_i$ lesz; a $c_i > 1$ szorzókat az iroda határozza meg. Ha csak a befutóra akarunk fogadni, akkor stratégiánk a következő lehet: aktuális $S = S(t)$ pénzünkből csak βS összeget kockáztatunk, és ezt az r lehetőség között az $\alpha_i \geq 0$ arányok szerint osztjuk meg, vagyis $\beta\alpha_i S$ az i-ik tét. Persze $0 \leq \beta \leq 1, \sum \alpha_i = 1$, és a $t + 1$-ik futam után a pénzünk

$$S(t+1) = S(t)(1 - \beta + \beta \sum_{i=1}^{r} \alpha_i c_i \sigma_i(t+1)), \tag{17}$$

ahol $\sigma_i(t) = 1$ ha i nyer, egyébként $\sigma_i = 0$. Feltesszük, hogy $P[\sigma_i(t) = 1] = p_i \forall t$, és a $\sigma(t) := (\sigma_1(t), \sigma_2(t), ..., \sigma_r(t))$ sorozat teljesen független. Ilyenkor változatlan, determinisztikus stratégiával játszunk, tehát

$$\mathsf{E}(S(t+1)|\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(t)) = S(t) \sum_{i=1}^{r} p_i(1 - \beta + \beta\alpha_i c_i),$$

ami adott β mellett akkor maximális, ha $p_i c_i < v^* := \max\{p_k c_k\}$ esetén $\alpha_i = 0$. A maximum értéke, $S(t)(1 - \beta + \beta v^*)$ akkor a legnagyobb, ha $\beta = 0$ vagy $\beta = 1$, aszerint hogy $v^* < 1$ vagy $v^* > 1$. A $v^* = 1$ eset indifferens, persze senki sem lesz hajlandó fogadni, ha tudja hogy $v^* \leq 1$ (hiszen ekkor hosszabb távon mindenképp csökkenni fog a pénze). Ugyanúgy, mint az előző példánál, ha $\beta = 1$ akkor ez a stratégia hosszú távú játékra biztosan nem alkalmas, mert ha a favorit nem jön be, akkor mindenünket elveszítjük. Kérdés hogy az óvatosabb $\beta < 1$ választás mellett ez a merész stratégia lehet-e hosszú távon is eredményes.

Definíció: A *Largange-multiplikátorok módszeré*nek lényege, hogy egy adott szélsőérték feladatot egy adott mellékfeltétellel szeretnénk megoldani. Jelen esetben $f(\alpha) = 0$ a mellékfeltétel. Ennek λ-szorosát hozzáadjuk a függvényhez, és akkor lesz "használható" az eredmény, ha teljesül a mellékfeltétel.

Fix stratégia mellett a tőke exponenciális növekedésének rátája

$$J(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{r} p_i \log(1 - \beta + \beta\alpha_i c_i), \tag{18}$$

ennek keressük a maximumát, amit két lépésben találunk meg. Rögzített $\beta >$ > 0 mellett J az α konkáv függvénye. A Lagrange multuplikátorok módszerét alkalmazva az optimum α^* helyen:

$$\sum_{i=1}^{r} p_i \log(1-\beta+\beta\alpha_i c_i) = \max$$

$$\sum_{i=1}^{r} p_i \log(1-\beta+\beta\alpha_i c_i) - \lambda(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i - 1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} = -\lambda + p_i \frac{1}{1-\beta+\beta\alpha_i c_i} \beta c_i$$

$$\lambda = p_i \frac{1}{1-\beta+\beta\alpha_i c_i} \beta c_i \Rightarrow \frac{1}{1-\beta+\beta\alpha_i c_i} = \frac{\lambda}{p_i \beta c_i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\beta+\beta\alpha_i c_i) = \frac{p_i\beta c_i}{\lambda} \Rightarrow \beta\alpha_i c_i = \frac{p_i \beta c_i}{\lambda} - 1 + \beta$$

$$\alpha_i = \frac{p_i\beta c_i - \lambda + \lambda\beta}{\lambda\beta c_i}$$

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = \sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda\beta - \lambda + p_i c_i \beta}{\lambda \beta c_i} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\beta-1}{\beta c_i} + \sum_{i=1}^{r} \frac{p_i}{\lambda} = 1$$

$$1 - \sum_{i=1}^{r} \frac{\beta - 1}{\beta c_i} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{r} p_i \text{ , ahol } \sum_{i=1}^{r} p_i = 1$$

$$1 - \frac{\beta-1}{\beta} \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{c_i} = \frac{1}{\lambda} \text{ , legyen } \Gamma = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{c_i}$$

$$1 - \frac{\beta - 1}{\beta}\Gamma = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \frac{\beta - (\beta-1)\Gamma}{\beta} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{\beta}{\beta - (\beta-1)\Gamma} = \frac{\beta}{\beta(1-\Gamma)+\Gamma}$$

$$\lambda = \frac{\beta p_i c_i}{1-\beta+\beta\alpha_i^* c_i} = \frac{\beta}{\Gamma + \beta(1-\Gamma)} \text{ , } \Gamma := \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{c_i} \text{ , } \alpha_i^* = \frac{p_i\beta c_i - \lambda + \lambda\beta}{\lambda\beta c_i} \qquad (19)$$

egyenleteket kapjuk, a második egyenlőség a $\sum \alpha_i = 1$ mellékfeltétel következménye. Természetesen az $\alpha_i^* \geq 0$, vagyis a $\beta + p_i c_i \geq 1$ feltételeknek is teljesülni kell: $\beta \geq$

$\geq 1 - v_*$, ahol $v_* := \min\{p_i c_i\}$. Ebben a tartományban

$$J(\alpha^*, \beta) = \sum_{i=1}^{r} p_i \log \frac{\beta p_i c_i}{\lambda} = \sum_{i=1}^{r} p_i \log(p_i c_i(\Gamma + \beta(1 - \Gamma))), \tag{20}$$

legyen $q_i := (\lambda/\beta)(1 - \beta + \beta\alpha_i c_i)/c_i$. Mivel $\sum q_i = 1, \sum p_i \log q_i \leq \sum p_i \log p_i$, mert $p_i \log(q_i/p_i) \leq q_i - p_i$, tehát $J(\alpha, \beta) \leq J(\alpha^*, \beta)$, és (19) az egyenlőség feltétele. Az is látható, hogy $J(\alpha^*, \beta)$ a β szigorúan növő, illetve fogyó függvénye aszerint, hogy $\Gamma < 1$ vagy $\Gamma > 1$. Ha $\Gamma > 1$ akkor $\beta = \beta^* := 1 - v_*$ az optimális választás, de csak akkor érdemes játszani, ha $J^* > 0$. A $\Gamma < 1$ esetben az optimális ráta a $\beta = \beta^* := 1$ és $\alpha_i = \alpha_i^* := p_i$ választással érhető el, értéke pedig $J^* := = J(\alpha^*, \beta^*) = \sum p_i \; log(p_i ci) > 0$. A $\Gamma = 1$ eset $\beta \geq 1 - v_*$ szempontjából indifferens, $p_i \log(p_i c_i) \geq p_i - 1/c_i$ miatt most is igaz, hogy $J(\alpha*, 1) \geq 0$. Ez az egyszerű példa jól mutatja, hogy hosszú futamidőnél több lábon kell állni, vagyis mindegyik nyerési lehetőségnek érdemes sanszot adni. Meglepő hogy az optimális stratégia nem függ a c_i szorzóktól, és a $p_i c_i < 1$ eseteket is meg kell játszani.

Optimális stratégia készítéséhez ismerni kell(ene) a p_i sanszokat. Ha az iroda mohó, például $c_i < 1$ is előfordul, akkor elérheti, hogy a nyereség optimális rátája $J^* < 0$ legyen, ami a fogadókat hosszú távon biztosan elkedvetleníti, tehát a mohóság visszaüt. Valódi pénzügyi - matematikai feladat a c_i szorzók optimális megválasztása. Ha J^* túlzottan negatív, akkor a haszonkulcs magas ugyan, de kicsi lesz a forgalom, és így a nyereség is; $c_i := 1/p_i$ korrektnek tűnik (vagyis a szorzó pontosan a nyerés valószínűségének a reciproka), mert ekkor $J^* = 0$. Persze $J^* > 0$ még nem teszi az irodát veszteségessé, a fogadók többsége nyilván nem ért a lóhoz, csak szórakozni akar.

5. Összefoglalás

Dolgozatomban a valóságon alapuló modelleket vizsgáltam, és a profitmaximalizálás lehetőségeit mutattam be. Természetesen a modell mindig egyszerűbb, mint maga a jelenség, mégis a kapott eredmények, algoritmusok irányt mutathatnak.

A 3. fejezetben tárgyaltak valójában nem csak a banki lekötések esetén alkalmazhatóak. A klasszikus készletgazdálkodási problémák elemzése is hasonló elveken alapul (sőt, ha még messzebbről szemléljük, még több alkalmazási területet fedezhetünk fel).

A 4. fejezetben tárgyalt szerencsejátékok is egyre elterjedtebbé válnak, főként az online játékok az interneten, így érdemes, és napjainkban időszerű is ennek a jelenségnek a matematikai hátterét vizsgálni.

Köszönetnyilvánítás

Hálás köszönettel tartozom mindazoknak, akik segítettek abban, hogy ez a dolgozat létrejöhessen. Külön köszönet Csiszár Villő tanárnőnek, aki időt, és energiát nem sajnáva segített mind a témaválasztásban, mind a dolgozat megírásában. Készségesen elmagyarázta a nehezebben érthető részeket, észrevételeivel és hasznos tanácsaival pedig a dolgozatban tárgyaltak közérthető megfogalmazását segítette.

Hivatkozások

[1] CSISZÁR VILLŐ: Zsugori bank, iid cash-flow esete, *kézirat*, 2008

[2] DR. FARKAS MIKLÓS: Matematikai kislexikon, *3. kiadás*, Műszaki könyvkiadó, Budapest 1979

[3] FRITZ JÓZSEF: Pénzügyi Matematika, BME Matematika intézet, 2010, http://www.math.bme.hu/ jofri/JOFRI/OKTAT/pmmar.pdf

[4] RÓNYAI L. - IVANYOS G. - SZABÓ R.: Algoritmusok, Typotex kiadó 2005

[5] WIKIPÉDIA: Markov-láncok,http://hu.wikipedia.org/wiki/Markov-lánc

[6] I. N. BRONSTEJN - K. A. SZEMENGYAJEV - G. MUSIOL - H. MÜHLIG: Matematikai kézikönyv, *8., javított, átdolgozott kiadás*, Typotex kiadó, 2006

NYILATKOZAT

Név: Halász Sándor
ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc
ETR azonosító: HASNAAT.ELTE
Szakdolgozat címe:
Optimális stratégiák magas tranzakciós költség esetén és a szerencsejátékokban

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem teljes tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2010.12.30.

a hallgató aláírása