Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

A Pell-egyenlet és története

Szakdolgozat

Papp Franciska
Matematika Bsc., elemző szakirány

Témavezetők: **Szabó Csaba**,
Algebra és Számelmélet Tanszék
Pongrácz András, CEU

Budapest
2011.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A diophantoszi egyenletek megoldása igen változatos módszereket igényel, univerzális megoldási módszer nem létezik. Ez a témakör bővelkedik híres megoldatlan problémákban. Dolgozatom célja egy nevezetes diophantoszi egyenlet, a Pell-egyenlet részletesebb megismertetése, és történetének bemutatása.

Már az ókori görögök is oldottak meg Pell-típusú egyenleteket. Arkhimédesz marhaproblémája is Pell-típusú egyenletre vezet, ezért először a tudós életét, majd a marhaproblémát és annak megoldását ismertetem. Ezen megoldás matematikusok több száz éves munkája által vált ismertté. Ezek után definiálom a Pell-egyenletet és bevezetem a hozzá tartozó legfontosabb tételeket és definíciókat. Matematikusokon keresztül szemléltetem a Pell-egyenlet megoldási módszereinek fejlődését, kialakulását. A Pell-egyenlet gyökeinek meghatározására számos módszer létezik: lánctörtekkel, absztrakt algebrai módszerekkel és kvantumszámítógéppel is kereshetjük a megoldásokat. A 4. fejezetben a lánctört fogalmát vezetem be, majd tételek segítségével mutatom meg, hogyan találjuk meg a Pell-típusú egyenletek megoldását a lánctört-módszer segítségével. Az utolsó fejezetben az $x^2 - 2y^2 = 1$ Pell-egyenletnek keresem a megoldását a lánctört-módszer és a gyűrűelméleti módszer felhasználásával.

2. fejezet

Arkhimédesz és a marha-probléma

2.1. Arkhimédesz élete

Arkhimédesz (kb. i. e. 287., Szirakúza - i. e. 212., Szirakúza) természettudós, matematikus, filozófus, fizikus, csillagász és mérnök volt. Életéről nagyon kevés írásos dokumentum maradt fenn. Ezek a iratok sem tekinthetők teljes értékűeknek, mert sok bennük a bizonytalan tényező. Arkhimédeszt minden idők egyik legnagyobb matematikusaként tartják számon napjainkig is. Felfedezései, találmányai a mai technikával felszerelt világban is megdöbbentik az embert, és méltó csodálatot vívnak ki maguknak. Heracleides (i. e. 390. Hérakleia, - i. e. 322., görög filozófus, csillagász) megírta Arkhimédesz életét, de sajnálatos módon ez az írásos dokumentum nem maradt fenn.
Arkhimédesz i. e. 287-ben született Szirakúzában, és ott is halt meg i. e. 212-ben. Fenn maradt dokumentumok szerint 75 éves korában érte a halál, csak ez alapján következtetünk születési dátumára.
Édesapja Pheidiasz nagy csillagász volt, aki valószínűleg már gyermekkorában bevezette Arkhimédeszt a természettudomány szépségeibe. Gyermekkorától kezdve jó kapcsolatot ápolt Hieron királlyal és fiával, egyes feljegyzések szerint rokoni kapcsolatban is álltak.
Fiatal korában Alexandriában, a kor szellemi központjában élt és tevékenykedett. Itt ismerkedett meg többek között Eratoszthenésszel (i. e. 276. Alexandria, i. e. 194., hellenisztikus matematikus, földrajztudós, csillagász, filozófus, költő, zenész.), aki állítólag ezekben az években magánál Euklidesznél (i. e. 300. körül, görög matematikus, filozófus) lakott, és az ő tanítványa volt. Ezek alatt az évek alatt barátkozott össze Cononnal (i. e. 260.). Szirakúzába való hazatérése után a matematikai kutatásának és találmányai-

nak szentelte életét, közben levelezést folytatott Cononnal és Eratoszthenészszel ezekben a témákban. Leveleiben felfedezései publikálása előtt mindig kikérte Conon véleményét. Eratoszthenésznek Módszer című híres írása mellett a marha-problémát is elküldte, amely szakdolgozatom alappillére.
Az életéről a római történészek is sok legendát őriznek, melyek általában valamelyik találmányához köthetőek. Életében híressé a zseniális mechanikai találmányai tették, ilyen például az arkhimédeszi csavar és a csigasor. Szirakúza az Arkhimédesz által szerkesztett hadigépekkel állt ellen a Marcellus (i. e. 268. - i. e. 208.) vezette római ostromnak, a II. pun háború idején.
Arkihimédesz munkássága csak levelezések, elbeszélések útján maradt fenn. Felfedezéseit nem hagyta fenn az utókorra, egyetlen könyvet írt, Gömb készítése címmel.
Halálának körülményeit ugyanolyan misztikum övezi, mint életét.
Plutarkhosz (i. u. 45. , Khairóneia - i. u. 120.) a következőképpen írta le a tudós halálát: A matematikus mértani idomokat tanulmányozott otthonában. Annyira elmerült ebben a munkában, hogy észre se vette amikor a rómaiak elfoglalták a várost. Egy római katona betört Arkhimédesz otthonába és felszólította, hogy azonnal kövesse őt Marcellushoz. Arkhimédesz csak azzal a feltétellel egyezett ebbe bele, hogyha előtte végiggondolhatja a vizsgált geometriai problémát. Ez a válasz annyira felbőszítette a katonát, hogy kardjával leszúrta a tudóst. Marcellus a gyilkos katonát megbüntette, Arkhimédeszt pedig a kívánsága szerint helyezte végső nyugalomba. Eszerint végakaratában arra kérte rokonait, barátait, hogy legkedvesebb tételének ábráját véssék sírkövére: egy egyenlő oldalú hengerbe írt gömb és kúp körvonalait. A tétel szerint az egyenlő alapú és magasságú kúp, félgömb és henger térfogatának aránya: 1:2:3. Ebből arra lehet következtetni, hogy magának tulajdonította ezen arány felfedezését.
Sok évvel később i. e. 75-ben a híres római szónok, Cicero megtalálta és helyreállíttatta a már elvesztettnek hitt síremléket. Később sajnos ismét eltűnt, de 1965-ben egy hotel építkezésekor rábukkantak.

2.2. Mese a Pell-egyenletről

A Pell-egyenlet eredetét Arkhimédesz nevéhez kapcsolják, pontosabban a tudós egyik feladványához. A feladatot marha-problémának nevezete el, és Eratoszthenésznek ajánlotta egyik levelében. Magyar nyelven Ponori Thewrewk Emil, Görög Anthólogiabeli Epigrammák című művében olvashatjuk, amelyben ezen kívül, több matematikai témájú

epigrammát gyűjtött össze.
Érdekessége a történetnek, hogy a feladvány 8 ismeretlent tartalmaz, de csak 7 egyenletet tudunk hozzá felírni az egyenletrendszerben. Ezen kívül tartozik még hozzá 2 segédegyenlet is. Arkimédesz feltehetőleg ismerte a feladvány megoldását, ami azért csodálatraméltó, mert a fennmaradt feladványt csak a 17-18. században tudták matematikusok együttes erővel megfejteni. A megfejtéshez a mai napig nagyon hosszas számolásra, vagy számítógépes programok segítségére van szükség.
A feladvány keletkezésének körülményeit kétes körülmények övezik. A legenda szerint, Arkhimédesz egy olimpia játék alkalmával adta fel ezt a feladatot az egyik nézőtársának, ezen beszélgetésnek Heiron király is tanúja volt. A néző nehezményezte, hogy miért csak fizikális olimpiát rendeznek, a tudást, az észt miért nem mérik össze hasonló keretek között. Arkhimédesznek erre az volt a válasza, hogy ez azért lehetetlen, mert a bírónak minden kérdésre tudnia kellene a választ, ezáltal nem a győztest illetné meg a babérkoszorú, hanem magát a bírót. Azért, hogy az illető megnyugodhasson, feladta neki a marha-problémát, ha azt meg tudja fejteni, akkor méltán indulhatna a szellemi olimpián. A király felajánlott díj fejében egy aranybika szobrot. Az említett versenyző egy napot kért az eredmény kiszámolásához, Arkhimédesz nagyvonalúan két hetet adott probléma megoldásához. A történet szerint az úr sose jelentkezett a megoldással.

2.3. Marha-probléma

A feladvány:
A Napisten Thrinákia szigetén legeltette marháit. Négy csordája volt, az egyikben minden állat fehér, a másikban mind fekete, a harmadik csorda bikái és tehenei sárgásbarnák voltak, végül a negyedikben tarkák. Mindegyik csordában a bikák száma jóval meghaladta a tehenekét. A fehér bikák száma annyi, mint a fekete bikák fele meg egyharmada, meg valamennyi barna bika. A fekete bikáké annyi, mint a tarka bikák negyede meg ötöde meg valamennyi barna bika. Végül a tarka bika annyi van, mint a fehér bikák hatoda meg hetede meg valamennyi barna bika. A fehér tehenek száma annyi, mint az egész fekete csorda - tehát a bikák és a tehenek együtt - számának egyharmada meg egynegyede, a fekete tehenek száma annyi, mint a tarka csorda egynegyede meg egyötöde, tarka tehén annyi van, mint a barna csorda egyötöde meg egyhatoda, végül barna tehén annyi van, mint a fehér csorda egyhatodának meg egyhetedének az összege. Ha megfelelően állítjuk fel valamennyi fehér és fekete bikát, akkor az állatok alakzata egy négyzet lesz, ha pedig

a barna és tarka bikákat állítjuk fel, akkor háromszöget kapunk.
Az egyszerűség kedvéért, a következő jelöléseket alkalmazom:

$$\begin{aligned} x &= \text{fehér bikák}, & x_1 &= \text{fehér tehenek} \\ y &= \text{fekete bikák}, & y_1 &= \text{fekete tenehek} \\ z &= \text{barna bikák}, & z_1 &= \text{barna tehenek} \\ t &= \text{tarka bikák}, & t_1 &= \text{tarka tehenek} \end{aligned}$$

A feladat matematikai formában:

$$\begin{aligned} x &= \frac{y}{2} + \frac{y}{3} + z \\ y &= \frac{t}{4} + \frac{t}{5} + z \\ t &= \frac{x}{6} + \frac{x}{7} + z \\ x_1 &= \frac{y + y_1}{3} + \frac{y + y_1}{4} \\ y_1 &= \frac{t + t_1}{4} + \frac{t + t_1}{5} \\ t_1 &= \frac{z + z_1}{5} + \frac{z + z_1}{6} \\ z_1 &= \frac{z + z_1}{6} + \frac{z + z_1}{7} \end{aligned}$$

A fenti egyenletrendszerből fejezem ki az x-et, y-t és t-t.

$$x = \frac{742}{297}z, \qquad y = \frac{178}{99}z, \qquad t = \frac{1580}{891}z$$

Mivel x, y, $t \in \mathbb{N}$, és az együtthatójukban, a számlálójuk és a nevezőjük relatív prímszámok, ezért a z számról tudjuk, hogy oszthatónak kell lennie 297-tel, 99-cel és a 891-gyel.
A három szám legnagyobb közös osztója a 891, tehát $z = 891 \cdot k$, ahol $k \in \mathbb{N}$.
Ebből adódóan az egyenleteink:

$$x = 2226k, \qquad y = 1602k, \qquad t = 1580k.$$

Az így kapott eredményeket behelyettesítve az egyenletrendszerbe:

$$x_1 = \frac{7}{12}y_1 + \frac{1896}{2}k$$

$$y_1 = \frac{9}{20}t_1 + 711k$$

$$t_1 = \frac{11}{30}z_1 + \frac{3267}{10}k$$

$$z_1 = \frac{13}{42}x_1 + 689k.$$

Ezekből az egyenletekből kifejezve x-et, y-t, z-t és t-t:

$$x = \frac{7206360}{4657}k, \quad y = \frac{4893246}{4657}k, \quad z = \frac{5439213}{4657}k, \quad t = \frac{3515820}{4657}k.$$

egyenleteket kapjuk.
Ahhoz, hogy x, y, z, t, x_1, y_1, z_1, $t_1 \in \mathbb{N}$ feltételnek a megoldásaink eleget tudjanak tenni, az kell, hogy $k = 4657n$ alakú legyen és $n \in \mathbb{N}$. Így a 8 ismeretlenes 7 egyenletből álló egyenletrendszerünk megoldása:

$$x = 10366482n, \qquad x_1 = 7206360n$$

$$y = 7460514n, \qquad y_1 = 4893246n$$

$$z = 4149387n, \qquad z_1 = 5439213n$$

$$t = 7358060n, \qquad t_1 = 3515820n.$$

Összesen $50389082k$ marha legelészik Trinákia mezején.

Most felhasználom az utolsó két feltételt, amely a bikák alakzatára vonatkozik.
Ha megfelelően állítjuk fel valamennyi fehér és fekete bikát, akkor az állatok alakzata egy négyzet lesz:

$$x + y = a^2 = 17826996 = 2^2 \underbrace{\cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657}_{\alpha} \cdot k$$

$$a^2 = 2^{\cdot}\alpha \cdot k \Rightarrow k = \frac{a^2}{2^2} \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{a^2}{2^2 \cdot \alpha^2} \cdot \alpha$$

$K = \frac{a}{2 \cdot \alpha}, \qquad K^2 = \frac{a^2}{2^2 \cdot \alpha^2}, \qquad k = K^2 \cdot \alpha$

Ha a barna és tarka bikákat állítjuk fel megfelelően, akkor háromszöget kapunk:

$t + z = \frac{(b+1) \cdot b}{2} = 11507447 \cdot t = \underbrace{7 \cdot 353 \cdot 4657}_{\beta} \cdot k$

$\frac{(b+1) \cdot b}{2} = \beta \cdot k$, $(2b+1)^2 = 8\beta \cdot k + 1$

$\underbrace{(2b+1)^2}_{L} = 8 \cdot \beta \cdot k + 1 = 8 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot K^2 + 1$

$L^2 - 8 \cdot \alpha \cdot K^2 = 1$

$L^2 - 410286423278424 \cdot K^2 = 1$

Az egyenlet rövid megoldása:

A megoldás megkönnyítése érdekében az $L^2 - 410286423278424 \cdot K^2 = 1$ egyenletet átírjuk a következő alakba:

$l^2 - \underbrace{4729494}_{\varphi} k^2 = 1$, ahol $l = L$ és $k = 2 \cdot 4657 \cdot K$

Az (l_1, k_1) számpár az $l^2 - \underbrace{4729494}_{\varphi} k^2 = 1$ egyenlet minimális megoldása. (Minimális megoldáson azt a számpárt értem, amely az egyenlet megoldásai közül a második változójában minimális.)

$l_1 + k_1\sqrt{\varphi} = 109931986732829734979866232821433543901088049+$

$$50549485234315033074477819735540408986340\sqrt{\varphi} =$$

$$\left(300426607914281713365 \cdot \sqrt{609} + 84129507677858393258 \cdot \sqrt{7766}\right)^2$$

Ezután megkeressük a minimális megoldást, amely eleget tesz a $2 \cdot 4657 | k$ oszthatóságnak:

$$\left(l_1 + k_1\sqrt{\varphi}\right)^2 329 = L_1 + K_1\sqrt{410286423278424}$$

$$k_i = \frac{\left((l_1 + k_1\varphi)^4 \, 658^i - \frac{1}{(l_1+k_1\varphi)}\right)^2}{368238304} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

Hosszú számolások után kapjuk meg az összes marha számát, figyelembevéve az utolsó két feltételt. (Ha megfelelően állítjuk fel valamennyi fehér és fekete bikát, akkor az állatok alakzata egy négyzet lesz, ha pedig a barna és tarka bikákat állítjuk fel, akkor háromszöget kapunk.)

Az összes marha száma: $7,7602714 \ldots \cdot 10^{206544}$.

A teljes megoldás 47 oldal terjedelmű, ezért is egészen elképesztő, ha Arkhimédesz valóban meg tudta oldani ezt a feladványt.

Fontos kérdés lehet akár az is, hogy Arkhimédesz biztosan tudta-e, hogy a válasz létezik.

3. fejezet

Pell-egyenlet

3.1. Definíció, elnevezés

Ebben a fejezetben bemutatom a dolgozatom fő témáját a Pell-egyenletet, és definiálok néhány fogalmat, amelyeket a későbbiek során felhasználok.

Definíció: Diophantoszi egyenletnek általában olyan egész együtthatós algebrai egyenletet nevezünk, melynek a megoldásait is az egész (esetenként a racionális) számok körében keressük.

Az $ax + by = c$ egyenletben a, b, c rögzített egész számok, és megoldáson, például egy (x, y) egész számpárt értünk.

A Pell-egyenlet az egyik legegyszerűbb diophantoszi egyenlet.

Definíció: Pell-egyenletnek nevezzük az $x^2 - dy^2 = 1$ alakú diophantoszi egyenletet, illetve általánosabb formában az $x^2 - dy^2 = b$ alakú egyenleteket, ahol $d \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Z}$ és $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$. Az (x, y) megoldásokat tehát az egészek között keressük.

Az $x^2 - dy^2 = 1$ egyenletnek vannak triviális megoldásai: $x = \pm 1$, $y = 0$.

Ha $d < -1$, akkor $x^2 - dy^2 > 1$, kivéve, ha $x = y = 0$, így ez esetekben nincs megoldása az $x^2 - dy^2 = 1$ egyenletnek.

Ha pedig $d = -1$, akkor további két triviális megoldása van: $x = 0$, $y = \pm 1$.

Végül, ha $d = n^2$ esetben is csak triviális megoldásai vannak, hiszen az

$$x^2 - dy^2 = x^2 - n^2y^2 = (x + ny)(x - ny) = 1$$

esetben

$$x + ny = x - ny = \pm 1,$$

ami ismét csak az $x = \pm 1$, $y = 0$ esetekben áll fönn.
Így csak azt az esetet kell vizsgálnunk, amikor $d > 0$, és nem négyzetszám. Nyilvánvaló, hogy elegendő a pozitív megoldásokat megkeresni, és ha $x_1, y_1 \in \mathbb{N}$ megoldás, akkor ln.k.o.$(x_1, y_1) = 1$.
Pell-egyenletre vezetett a korábbiakban említett marha-probléma is.

A Pell-egyenlet elnevezése

A Pell-egyenlet **John Pell** (1611-1685) angol matematikusról kapta a nevét, aki munkássága során algebrával és számelmélettel foglalkozott. Fő munkája egy táblázat megalkotása volt, amelyet 1668-ban adott ki, amelyben az első 100000 szám szorzatra bontása szerepelt. Sokat publikált, főbb írásai: Idea of Mathematics (1638), Controversiae de vera circuli mensura (1647). Később jutott csak napvilágra, hogy Euler tévesen nevezte el a $x^2 - dy^2 = 1$ típusú egyenleteket Pell-egyenletnek, az érdemi munka Lord Brouncker nevéhez fűződik.

3.2. A Pell-egyenlet története

A Pell-típusú egyenletek több évszázadon keresztül foglalkoztatták a matematikusokat. Az egyenletet először Diophantosz nevéhez köthetjük, mivel a Pell-egyenlet egy diophantoszi egyenlet. Későbbiekben két indai matematikus, Aryabhata és Brahmagupta az euklideszi algoritmus felhasználásával közelítette meg a problémát. Ezek után Bhaskara, Brahmagupta módszerét továbbfejlesztve megoldásokat előállító algoritmust adott meg az $x^2 - dy^2 = 1$ típusú egyenletekre. Több száz évig a probléma feledésbe merült, amíg Fermát felhívására a 17-18. században élő matematikusok újabb megoldási módszereket nem kerestek. A 17. században Lord Brouncker a lánctört-módszerével általános eljárást adott a Pell-típusú egyenletek megoldására, amely helyességét később Lagrange bizonyította. Ebben a fejezetben erről a fejlődésről írok részletesebben.
Diophantoszt (kb. i. e. 250.) az egyenletekkel kapcsolatos munkája emelte ki a görög matematikusok közül. Szakított a görög geometrikus hagyományokkal, és szinte kizárólag algebrai és számelméleti feladatokkal foglalkozott. Diophantoszt tekintik az algebrai jelrendszer megalapítójának. Első és másodfokú egyenleteket oldott meg, ezek megoldásait és együtthatóit az egész számok körében kereste. Minden feladatában speciális számértékeket használt, soha nem mondott ki általános tételeket. Többségében másodfokú egyen-

letekre vezető feladatokat oldott meg. Munkája során több, mint 130 egyenlet megoldását vezette le, minden esetben csak egyetlen gyököt keresett meg. Nem dolgozott ki általános megoldási módszert, ahogyan ezen egyenleteket nem is osztályozta. A kapott eredményei helyességét csupán azzal igazolta, hogy azok a behelyettesítéskor kielégítették a feladat feltételeit. Munkásságánál meg kell még említenünk a diophantikus approximációt, amely a valós számok racionális számokkal való közelítését vizsgálja. Látható az, hogy Diophantosz munkássága lényegében kiindulópontját képezte számos algebrai és számelméleti kutatásnak, mint a Pell-típusú egyenleteknek is.
Aryabhata (500.) és **Brahmagupta** (598-670) közös és egyéni felfedezései fontos szerepet játszottak az $x^2-dy^2=1$ típusú egyenletek megoldásainak megtalálásában. Munkásságuknak jellemző vonása volt az aritmetikai algebrai jelleg, amely megmutatkozik abban, hogy szerettek egyenletekkel foglalkozni. Az $x^2-dy^2=1$ típusú egyenlet megoldását az euklideszi algoritmusra alapozták. Új egyedi jelölésrendszert vezettek be, amelyet a lánctört ősének is tekinthetünk. Ez azért is fontos, mert a lánctörtek módszere a Pell-típusú egyenletek ma ismert megoldási lehetőségeinek egyike. (A lánctörtekkel a későbbiekben még részletesebben foglalkozom.) Közös munkájuk során racionális megoldásokat találtak a Pell-egyenletre, mégpedig a következő módon:
Észrevették, hogy ha az $ax_1^2-y_1^2=b_1$ és az $ax_2^2-y_2^2=b_2$ egyenleteknek van megoldása, akkor a b_1b_2-nek is, ugyanis legyenek x_1, y_1 és x_2, y_2, olyanok, hogy

$$ax_1^2-y_1^2=b_1, \qquad ax_2^2-y_2^2=b_2.$$

Ekkor ezek felírhatóak

$$b_1=\left(x_1\sqrt{a}-y_1\right)\cdot\left(x_1\sqrt{a}+y_1\right), \qquad b_2=\left(x_2\sqrt{a}-y_2\right)\cdot\left(x_2\sqrt{a}+y_2\right)$$

alakban, és a szorzatuk:

$$b_1b_2=\left(ax_1x_2\pm y_1y_2\right)^2-a\left(x_1y_2\pm x_2y_1\right)^2$$

kiadja a kívánt megoldást.
Brahmagupta ennek alapján felfedezte a kompozíciós módszert az $ax_1^2-y_1^2=b_1$ egyenletre, amely az (a,b) és (c,d) megoldáspárok segítségével további megoldást eredményezett. A módszer a következő: Ha (a,b) és (c,d) megoldása az egyenletnek, akkor

$(ac + Dbd, ad + bc)$ is. Ugyanis

$$\underbrace{\overbrace{\left(a^2 - Db^2\right)}^{1} \cdot \overbrace{\left(c^2 - Dd^2\right)}^{1}}_{1} = (ac + Dbd)^2 - D\,(ad + bc)^2\,.$$

Azt az esetet is vizsgálta, mikor az a=c és b=d, ekkor az $(a^2 + Db^2, 2ab)$ is megoldása lesz az egyenletnek.

Bhaskara (1114-1185) továbbfejlesztette Brahmagupta és Aryabhata munkáját, a következő módszerrel adott megoldást az $x^2 - dy^2 = 1$ egyenletre. Első lépésben próbálgatással keresett olyan x_1, y_1, b_1 számokat, amelyek kielégítették az $x^2 - dy^2 = b_1$ egyenletet, emellett az $(y_1, b_1) = 1$ feltételnek is megfeleltek. Következő lépésben keresett olyan y_2, $z \in \mathbb{Z}$ számokat, hogy $\frac{y_1 z + x_1}{b_1} = y_2$, vagyis $y_1 z + x_1 = b_1 y_2$ és $z^2 - d$ a lehető legkisebb legyen. Ekkor $\frac{z^2 - d}{b_1} = b_2 \in \mathbb{Z}$, $dy_2^2 + b_2$ pedig négyzetszám, amelyet x_2^2-tel jelölünk, vagyis $dy_2^2 + b_2$=x_2^2. Az eljárás megismétlésével kapott az egész számoknak egy sorozatát: b_1, b_2, $\ldots$, b_k, így végül $b_k = 1$ azaz $dy_k^2 + 1 = x_k^2$. Ekkor az (x_k, y_k) lesz az $x^2 - dy^2 = 1$ eredeti egyenletünk megoldása.

A 17. században több neves matematikus is foglalkozott az $x^2 - dy^2 = 1$ egyenlettel. Ennek a valószínűsíthető oka az lehetett, hogy **Fermat** (1601-1665) felhívta angol, francia, német tudóstársainak figyelmét ezen és az ilyen típusú egyenletek megoldásának problémájára. Ő maga is sokat foglalkozott a diophantoszi határozatlan analízissel, amely a racionális számok között keresi a megoldást a határozatlan egyenletekre és egyenletrendszerekre.

Lord Brouncker-t (1605-1675) az első európai tudósként tartják számon, aki általános megoldást adott az $x^2 - dy^2 = 1$ egyenletre, felfedezte a lánctört módszerét. A lánctört segítségével az egyenlet általános megoldási módszere:

$$\underbrace{\left(x + y\sqrt{d}\right)}_{nagy} \cdot \underbrace{\left(x - y\sqrt{d}\right)}_{kicsi} = 1$$

Ekkor

$$\left(x - y\sqrt{d}\right) \approx 0 \Rightarrow \frac{x}{y} \approx \sqrt{d}.$$

A $\sqrt{d}$ lánctört alakjának valamely kezdő szelete lesz az (x, y) megoldáspár. Brouncker ezt a megoldási módszert nem bizonyította. Megoldott több $x^2 - dy^2 = 1$ típusú egyenletet, például az $x^2 - 313y^2 = 1$-et. Az egyenlet legkisebb megoldása az $(x, y) = (32188120829134848, 1819380158564160)$ számpár. Állítása szerint a megoldáson csupán néhány órát dolgozott.

Frenicle de Bessy (1605-1675) csak kedvtelésből foglalkozott ezen problémával, munkája mégsem elhanyagolható. Táblázatba gyűjtötte a minimális megoldáspárokat $D \leq 150$-ig. (**Definíció:** Minimális megoldáson azt a számpárt értem, amely az egyenlet megoldásai közül a második változójában minimális.) **Wallis, John** (1616-1703) volt az, aki publikálta ezen matematikusok 1657-58-ban folytatott levelezéseit, eredményeit és igazolta Brahmagupta módszerének helyességét. **Rahn** (1622-1676) könyvében megjelenik az $x^2 - dy^2 = 1$ egyenlet általános megoldása, amely megírásában Pell segédkezett. Ez az egyedüli biztos kapcsolat Pell és az $x^2 - dy^2 = 1$ típusú egyenletek között.

Leonhard Euler (1707-1783) több szempontból is fontos szerepet játszott az egyenlet történetében. Eulertől származik a "Pell-egyenlet" elnevezése (összekeverte Lord Brouncker munkáját John Pell eredményeivel). A diophantikus problémák megoldásának segédeszközeként kidolgozta és szigorú alapokra helyezte a lánctört fogalmát. A lánctört módszert használta fel a megoldások megtalálásához, ezen módszerét később Lagrange finomította. Hasonlóan nagy eredményeket ért el a diophantoszi analízis területén.

Lagrange (1736-1813) - **Legendre** (1752-1833) közösen dolgozták ki a következő tételt:

Tétel: Az $x^2 - dy^2 = 1$ egyenletnek végtelen sok megoldása van. Minden (x, y) pozitív megoldás, a legkisebb pozitív (x_1, y_1) megoldásokból származtatható, valemely $k \in \mathbb{N}$ segítségével az alábbi módon:

$$x + y\sqrt{D} = \left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^k. \tag{3.1}$$

Ekkor $x_1 + y_1\sqrt{d}$ minimális.

Az összes megoldást az

$$x + y\sqrt{d} = \pm\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^n. \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{3.2}$$

képlettel meghatározott x, y egész számok adják.

A $x^2 - dy^2 = 1$ egyenlet felírható:

$$\left(x + y\sqrt{d}\right)\left(x - y\sqrt{d}\right) = 1 \tag{3.3}$$

alakban.

A 3.3 -as egyenlőségből látszik, hogy:

$$\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^{(-n)} = \left(x_1 - y_1\sqrt{d}\right)^n. \tag{3.4}$$

Ezért 3.2 az

$$x + y\sqrt{d} = \pm\left(x_1 \pm y_1\sqrt{d}\right)^n \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.5}$$

formában is megadható.

Bizonyítás:

A bizonyítás során többször is fel fogjuk használni, hogy ha (x_1, y_1), illetve (x_2, y_2) egy-egy megoldása az $x^2 - dy^2 = 1$ egyenletnek, akkor a megoldások alábbi értelemben vett szorzata is megoldás lesz:

$$\left(x_1x_2 + dy_1y_2 + (x_1y_2 + y_1x_2)\sqrt{d}\right)\left(x_1x_2 + dy_1y_2 - (x_1y_2 + y_1x_2)\sqrt{d}\right) = 1.$$

Ebből adódik, hogy $x_3 = x_1x_2 + dy_1y_2$, $y_3 = x_1y_2 + y_1x_2$ is megoldása lesz a $x^2 - dy^2 = 1$ egyenletnek.

A fentiekből és a 3.4 -ből nyilvánvalóan következik, hogy a 3.2 képlettel megadott (x, y) számpárok kielégítik a $x^2 - dy^2 = 1$ egyenletet. Most belátjuk, hogy ez az összes megoldás. Tegyük fel indirekt módon, hogy létezik egy (x, y) megoldás, amely nem ilyen alakú. Ekkor nyilván $(-x, -y)$ is megoldás és ez sem szerepel a fentiekben definiált megoldások között. Ezért feltehető, hogy $x + y\sqrt{d} > 0$. Ekkor létezik olyan t egész szám, melyre:

$$\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^t < x + y\sqrt{d} < \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^{(t+1)}. \tag{3.6}$$

A 3.6 -at $\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^t$-nal beszorozva

$$1 < \left(x + y\sqrt{d}\right)\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^t < x_1 + y_1\sqrt{d} \tag{3.7}$$

adódik. Itt

$$\left(x + y\sqrt{d}\right)\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^t = x' + y'\sqrt{d}$$

a megoldások összeszorzásával keletkezett, tehát (x', y') is megoldás, azaz

$$\left(x' + y'\sqrt{d}\right)\left(x' + y'\sqrt{d}\right) = 1. \tag{3.8}$$

A 3.7 -beli első egyenlőtlenség szerint

$$x' + y'\sqrt{d} > 1. \tag{3.9}$$

Így a 3.8 miatt

$$0 < x' - y'\sqrt{d} < 1. \tag{3.10}$$

A 3.10 miatt nem lehetségesek az $y' = 0$, az $x' < 0$, $y' > 0$ valamint az $x' > 0$ és a $y' < 0$ esetek, a 3.9 miatt pedig nem fordulhat elő az $x' < 0$, $y' < 0$. Ezért $x' > 0$, $y' > 0$, ez azonban 3.7 szerint ellentmond $x_1 + y_1\sqrt{d}$ minimalitásának. ■

Lagrange bizonyította be elsőként Euler és Brouncker azon felfedezését, hogy bármely szóba jöhető d-re végtelen sok megoldása van az $x^2 - dy^2 = 1$ egyenletnek.

Ginatempo (1969) nevéhez fűződő "Brute force" algoritmus a minimális (x, y) számpár megtalálásában segít. Ez az algoritmus az összes $x^2 - dy^2 = 1$ egyenletre alkalmazható, viszont hasznossága igen csekély, mivel problémája, hogy nagyok a korlátok.

Tétel: Legyen $d = \left[\sqrt{D}\right]$. Az $x^2 - dy^2 = 1$ egyenlet minimális megoldására teljesül, hogy:

$$y_1 \leq 2\,(d+1)\left(\frac{2}{3}d + 1\right)^2 d.$$
$$x_1 \leq (d+1)\,d.$$

A következő példán keresztül jól látható, miért is nem hasznosítható ez igazán.

Példa: D=61

Ekkor az

$$y_1 \leq 563257931412, \qquad x_1 \leq 4506053451300.$$

Az egyenlet tényleges alapmegoldása ebben az esetben:

$$1766319049^2 - 61 \cdot 226153980^2 = 1.$$

Vagyis

$$x_1 = 1766319049, \quad y_2 = 226153980.$$

Ebből jól látható, hogy a korlátok nem pontosak, a korlátok túl nagyok.

4. fejezet

A Pell-egyenlet és a lánctörtek kapcsolata

Lánctörtek

Tetszőleges α valós szám esetén tekintsük a következő algoritmust. Legyen

$$c_0 = \lfloor \alpha \rfloor$$

és

$$\gamma_1 = \{\alpha\},$$

ekkor

$$\alpha = c_0 + \gamma_1. \tag{4.1}$$

Ha $\gamma_1 \neq 0$, akkor legyen

$$c_1 = \left\lfloor \frac{1}{\gamma_1} \right\rfloor \text{ és } \gamma_2 = \left\{ \frac{1}{\gamma_1} \right\}, \text{ ekkor } \alpha = c_0 + \gamma_1 = c_0 + \frac{1}{c_1 + \gamma_2}.$$

Ha $\gamma_2 \neq 0$, akkor $\frac{1}{\gamma_2}$ egész- és tört részét képezzük stb. Általában ha a $c_0, c_1, \dots, c_n$ és $\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}$ értékeket már meghatároztuk, és $\gamma_{n+1} \neq 0$, akkor legyen

$$c_{n+1} = \left\lfloor \frac{1}{\gamma_{n+1}} \right\rfloor$$

és

$$\gamma_{n+2} = \left\{ \frac{1}{\gamma_{n+1}} \right\}. \tag{4.2}$$

Ekkor

$$\alpha = c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{\ddots c_n + \cfrac{1}{c_{n+1} + \gamma_{n+2}}}}}. \tag{4.3}$$

A 4.3 jobb oldalán álló sok emeletes törtet (véges) lánctörtnek nevezzük, és az egyszerűbb írásmód kedvéért bevezetjük rá az $L\left[c_0, c_1, \ldots, c_n, c_{n+1} + \gamma_{n+2}\right]$ jelölést.
Ha $\gamma_{n+1} = 0$, akkor az eljárás véget ér.
Az ily módon kapott $c_0, c_1, \ldots$, egész számokat az α lánctörtjegyeinek nevezzük.
Definíció: Egy α valós szám lánctörtjegyein a 4.1 és a 4.2 képletekkel definiált (véges vagy végtelen) $c_0, c_1, \ldots$ számsorozatot értjük.
Megjegyzés: A definíció alapján világos, hogy a lánctörtjegyek egyértelműen meghatározott egész számok, és $c_i > 0$, ha $i \geq 1$.
Példa 1: Legyen $\alpha = \frac{201}{65}$. Ekkor

$$\frac{201}{65} = 3 + \frac{6}{65}, \qquad c_0 = 3,$$

$$\frac{65}{6} = 10 + \frac{5}{6}, \qquad c_1 = 10,$$

$$\frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}, \qquad c_0 = 1,$$

$$\frac{5}{1} = 5 + 0, \qquad c_0 = 5.$$

A $\frac{201}{65}$ lánctört jegyei tehát: $3, 10, 1, 5$. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy:

$$\frac{201}{65} = L\left[3, 10, 1, 5\right] = \frac{3}{\frac{1}{10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}}$$

.

Abban az esetben, ha az α irracionális, akkor a γ_n is irracionális, ekkor a lánctörtbe fejtés algoritmusa sohasem áll le.
Ebben az esetben a kifejezés így néz ki:

$$\alpha = c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{\ddots c_n + \gamma_{n+1}.}}}$$

Példa 2: Legyen $\alpha = \sqrt{2}$. Ekkor:

$$\sqrt{2} = 1 + \left(\sqrt{2} - 1\right), \qquad c_0 = 1,$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1 = 2 + \left(\sqrt{2} - 1\right), \qquad c_1 = 2,$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1 = 2 + \left(\sqrt{2} - 1\right), \qquad c_1 = 2,$$
$$\vdots$$

A $\sqrt{2}$ lánctörtjegyei tehát: $1, 2, 2, 2, \ldots$. Erre bevezetjük a $\sqrt{2} = L[1, 2, 2, 2, \ldots]$ jelölést és a "végtelen lánctört" elnevezést.
Az algoritmus során kapott véges lánctörteket nevezzük a végtelen lánctört csonkításainak. Mivel ezek racionális számok, így ezek a csonkítások α egy racionális közelítését adják meg.

Jelölése: $L[c_0, c_1, \ldots, c_n] = \frac{a_n}{b_n}$.

A Pell-egyenlet és a lánctört kapcsolata

A lánctörtek elméletéből tudjuk a következőt.
Lemma: Legyen α irracionális, $n \in \mathbb{N}$, továbbá $\alpha_n = \frac{a_n}{b_n}$ a lánctört n-edik kezdőszelete. Ha p, $q \in \mathbb{Z}$ és $1 \leq q < b_{n+1}$, akkor

$$|b_n\alpha - a_n| \leq |q\alpha - p|.$$

Ez mutatja, hogy a lánctörtek adják valamilyen értelemben az irracionális számok legjobb racionális közelítését.
Lord Brouncker felfedezte, hogy az $x^2 - dy^2 = 1$ egyenlet megoldásainak hányadosa kapcsolatban van a $\sqrt{d}$ racionális közelítésével, ugyanis nemcsak az igaz, hogy $\frac{x}{y} \approx \sqrt{d}$, hanem az alábbi erős állítás is.

Tétel: Legyen α irracionális szám. Ha a $\frac{p}{q}$ ($p \geq 1$, és $(p, q) = 1$) racionális szám, és

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2},$$

akkor valamely $n \in \mathbb{N}$-re
$$\frac{p}{q} = \alpha_n = \frac{a_n}{b_n},$$

ahol α_n az α lánctört alakjának n-edik kezdőszelete.

Bizonyítás: Tegyük föl, hogy $\frac{p}{q}$-ra teljesülnek a tétel feltételei, de nem egyezik meg egyetlen kezdőszelettel sem. Mivel a b_k sorozat szigorúan monoton növekvő, pontosan egy olyan $n \in \mathbb{N}$ van, amelyre $b_n \leq q < b_{n+1}$. Ezen n-re teljesül, hogy:

$$|b_n\alpha - a_n| \leq |q\alpha - p| = q\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q}.$$

Ebből az egyenlet b_n-nel való leosztásával egyszerűen kapható, hogy:

$$\left|\alpha - \frac{a_n}{b_n}\right| < \frac{1}{2qb_n}.$$

Mivel feltevésünk szerint $\frac{p}{q} \neq \frac{a_n}{b_n}$, így a $qa_n - pb_n$ különbség nem lehet 0, így

$$1 \leq |qa_n - pb_n|.$$

Ebből azonban következik, hogy:

$$\frac{1}{qb_n} \leq \left|\frac{qa_n - pb_n}{qb_n}\right| = \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{p}{q}\right| \leq \left|\frac{a_n}{b_n} - \alpha\right| + \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2qb_n} + \frac{1}{2q^2}.$$

A kapott:
$$\frac{1}{qb_n} < \frac{1}{2qb_n} + \frac{1}{2q^2}$$

egyenlőtlenségből $q < b_n$ adódik, amely ellentmond n választásának. Vagyis $\frac{p}{q}$ az α n-edik kezdőszelete. ∎

A következő tétel megmutatja, hogy a $\sqrt{d}$ szám lánctört alakjából, a lánctört csonkításával hogyan tudjuk meghatározni a $x^2 - dy^2 = 1$ Pell-egyenlet megoldásait.

Tétel: Ha a, b pozitív, és megoldása az $x^2 - dy^2 = 1$ egyenletnek, akkor az $\frac{a}{b}$ a $\sqrt{d}$ lánctört alakjának valamely kezdőszelete.

Bizonyítás: Tegyük föl, hogy $a^2 - db^2 = 1$, azaz $\left(a - \sqrt{d}b\right)\left(a + \sqrt{d}b\right) = 1$. Eszerint $a > b\sqrt{d}$.

Átalakítva az egyenletet azt kapjuk, hogy:

$$\tfrac{a}{b} - \sqrt{d} = \tfrac{1}{b\left(a+b\sqrt{d}\right)}.$$

Alkalmazva az $a > b\sqrt{d}$ becslést a következő adódik:

$$0 < \frac{a}{b} - \sqrt{d} = \frac{1}{b\left(a + b\sqrt{d}\right)} < \frac{\sqrt{d}}{b\left(b\sqrt{d} + b\sqrt{d}\right)} = \frac{\sqrt{d}}{2b^2\sqrt{d}} = \frac{1}{2b^2}.$$

Ezzel az egyenlőtlenséggel és az előző tételben szereplő bizonyítás segítségével bebizonyítottuk a tételt. ■

Példa: Az előző tételek felhasználásával, és a $\sqrt{d}$ lánctört alakja segítségével meghatározzuk az $x^2 - 7y^2 = 1$ egyenlet minimális (x_0, y_0) megoldáspárját.

A $\sqrt{7}$ lánctört alakja: $L\left[2, \overline{1, 1, 1, 4}\right]$.

Elkezdem vizsgálni a $\sqrt{7}$ lánctört alakjának kezdőszeleteit:

$$n = 0. \qquad 2 = \frac{2}{1} \qquad 2^2 - 7 \cdot 1^2 = (-3) \neq 1$$

$$n = 1. \qquad 2 + \frac{1}{1} = 3 \qquad 3^2 - 7 \cdot 1^2 = 2 \neq 1$$

$$n = 2. \qquad 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{5}{2} \qquad 5^2 - 7 \cdot 2^2 = (-3) \neq 1$$

$$n = 3. \qquad 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = \frac{8}{3} \qquad 8^2 - 7 \cdot 3^2 = 1$$

A negyedik lépésben az egyenletbe való visszahelyettesítéskor mindkét oldalon 1-et kaptunk eredményül, tehát megtaláltuk az $x^2 - 7y^2 = 1$ egyenlet minimális megoldását, a $\sqrt{7}$ lánctört alakjának segítségével. Eszerint a $(8, 3)$ a minimális megoldás.

5. fejezet

A Pell-egyenlet egy speciális esete

Ebben a fejezetben az $x^2 - 2y^2 = 1$ egyenlet összes megoldását adjuk meg.

5.1. Lánctört-módszer

Az előző fejezetben leírtak szerint jártunk el. Már kiszámoltuk, hogy a $\sqrt{2}$ lánctört alakja $\sqrt{2} = L[1, 2, 2, \ldots]$ $(4.fejezet)$. Ennek a csonkításával a következő törtek kaphatók meg:
$L[1] = \frac{1}{1}$. Ez nem ad megoldást: $1^2 - 2 \cdot 1^2 = (-1)$.
$L[1, 2] = \frac{3}{2}$. Ebből a $(3, 2)$ minimális megoldás adódik: $3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1$.
A 3.2. fejezetben szereplő tétel alapján a megoldások így adhatók meg:

$$x + y\sqrt{2} = \pm\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n, n \in \mathbb{Z}.$$

5.2. Gyűrűelméleti módszer

Az $x^2 - 2y^2 = 1$ egyenlet egész megoldásait keressük. Ehhez először egy nagyságrendi feltételt állapítunk meg x-re és y-ra.
Állítás: Ha $x^2 - 2y^2 = 1$, akkor $|y| < |x| < 2|y|$ kivéve, ha $y = 0$ és $x = \pm 1$.
Bizonyítás: Indirekte tegyük fel, hogy $|x| \leq |y|$. Ekkor $x^2 \leq y^2$. A feltétel szerint tehát $2y^2 + 1 \leq y^2$, azaz $y^2 + 1 \leq 0$, ami ellentmondás. A másik egyenlőtlenség bizonyításához tegyük fel, hogy $|x| \geq 2|y|$. Négyzetre emelés után ebből azt kapjuk, hogy $x^2 \geq 4y^2$. Kifejezve az x^2-et ebből $2y^2 + 1 \geq 4y^2$ adódik, ami $1 \geq 2y^2$-re vezet. Ennek csak az $y = 0$ lehet megoldása. Azt az egyenletbe beírva $x = \pm 1$-et kapunk. $\blacksquare$

Az egyenlet bal oldala szorzattá alakítható:

$$x^2 - 2y^2 = \left(x + \sqrt{2}y\right)\left(x - \sqrt{2}y\right).$$

Ennek a lépésnek az a hátránya, hogy az $x + \sqrt{2}y$ alakú kifejezések általában nem egész számok. Ezért egy, az egészeknél bővebb gyűrűben kell dolgoznunk, ha az egyenletet meg szeretnénk oldani.

Definíció: $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{N}\right\}$. Ez a halmaz a szokásos (valós számokon értelmezett) összeadás és szorzás műveletekkel egy kommutatív, egységelemes, nullosztómentes gyűrűt alkot.

A Pell-egyenlet megoldásában segítségünkre lesz a $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ gyűrű számelmélete. Épp ezért most összefoglaljuk a legfontosabb definíciókat és tételeket, amik a megoldáshoz szükségesek lesznek. Számelméleti szempontból vizsgálva $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ egy euklideszi gyűrű, hiszen megadható rajta egy euklideszi norma. Egy $a + b\sqrt{2}$ alakú szám normája $N\left(a + b\sqrt{2}\right) = a^2 - 2b^2$. Ez a szám $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ esetén egy egész szám.

A $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ gyűrűben definiálható a konjugálás is: $\overline{a + b\sqrt{2}} = a - b\sqrt{2}$. Vegyük észre, hogy $N(z) = z\overline{z}$. Mivel a konjugálás szorzattartó, így a fenti összefüggés miatt ugyanez igaz a normára is:

$$N(z_1 z_2) = N(z_1)\, N(z_2).$$

Ez számunkra azért lesz fontos, mert így a $z = a + b\sqrt{2}$ szám normája megegyezik a Pell-egyenletünk bal oldalával. Ezért azokat a számokat keressük, amelyek normája 1.

Állítás: $z \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ egység akkor és csak akkor, ha $N(z) = \pm 1$.

Bizonyítás: $\Leftarrow$ Ha $N(z) = \pm 1$, akkor $z\overline{z} = \pm 1$, így $\pm\overline{z}$ inverze z-nek.

$\Rightarrow$ Ha z egység, akkor létezik $r \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, amire $rz = 1$. Alkalmazzuk a normát: $N(r)\, N(z) = N(1)$. Itt $N(r)$ és $N(z)$ egész számok. A szorzatuk csak úgy lehet 1, ha mindkettő ± 1. ■

A Pell-egyenlet bal oldalára most úgy tekintünk, hogy az az $x + y\sqrt{2}$ elem normája $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$-ben. Ez alapján az (x, y) számpár pontosan akkor megoldása a Pell-egyenletnek, ha $N\left(x + y\sqrt{2}\right) = 1$. Mivel a norma szorzattartó, így ha $N(z) = 1$, akkor $N\left(z^k\right) = 1$ minden $k \in \mathbb{Z}$ -re. (Itt z^{-1} a z egység egyértelmű inverzét jelöli.)

Állítás: $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$-ben végtelen sok 1-normájú elem van.

Bizonyítás: Észrevesszük, hogy $N\left(3 + 2\sqrt{2}\right) = 1$, hiszen $3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1$.

A korábbi megfigyelések szerint $N\left(\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^k\right) = 1$ minden $k \in \mathbb{N}$-re.

Ezek a hatványok mind különbözőek, hiszen $\sqrt{2}$ együtthatója k növelésével szigorúan monoton nő. ■

Célunk az összes megoldást megtalálni, vagyis $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ összes 1-normájú elemét meghatározni. Ebben éppen az előző állítás gondolatmenete ad ötletet.

Tétel: Legyen $x + y\sqrt{2} \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ egy 1-normájú elem, amelyre $x, y > 0$.
Ekkor $x + y\sqrt{2} = \pm\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n, n \in \mathbb{Z}$.

Bizonyítás: $|y|$ szerinti teljes indukcióval.
$|y| = 0$, ekkor $x^2 = 1$, tehát $x = \pm 1$. Ez az $1, (-1) \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ elemeket adja meg, amelyek valóban felírhatóak a fenti alakban ($n = 0$).
Tegyük fel, hogy $|y| \leq (k-1)$ esetén igaz az állítás. Legyen most $|y| = k$, és tegyük fel, hogy $N\left(x + y\sqrt{2}\right) = 1$.
1. eset: $y > 0$.
Vegyük észre, hogy:

$$N\left(\left(x + y\sqrt{2}\right)\left(3 - 2\sqrt{2}\right)\right) = N\left(x + y\sqrt{2}\right) N\left(3 - 2\sqrt{2}\right) = 1 \cdot 1 = 1$$

Tehát $\left(x + y\sqrt{2}\right)\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$ egy 1-normájú elem $\mathbb{Z}\left(\sqrt{2}\right)$-ben. Ha kibontjuk a zárójeleket:

$$\left(x + y\sqrt{2}\right)\left(3 - 2\sqrt{2}\right) = (3x - 4y) + (3y - 2x)\sqrt{2}.$$

A $\sqrt{2}$ együtthatójának abszolútértéke ennek során csökkent

$$3y - 2x < y, \qquad / - y, +2x$$

$$2y < 2x, \qquad / : 2$$

$$y < x.$$

Az indukciós feltétel szerint tehát készen vagyunk, hiszen ha $\left(x + y\sqrt{d}\right)\left(3 - 2\sqrt{2}\right) = \pm\left(3 + 2\sqrt{d}\right)^n$, akkor $x + y\sqrt{2} = \pm\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{n+1}$.
2. eset: $y < 0$.
Az előző eset mintájára történik a bizonyítás. Most $\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$-vel szorzunk:

$$N\left(\left(x + y\sqrt{2}\right)\left(3 + 2\sqrt{2}\right)\right) = N\left(x + y\sqrt{2}\right) N\left(3 + 2\sqrt{2}\right) = 1 \cdot 1 = 1.$$

A $\sqrt{2}$ együtthatója itt a $3y + 2x$. Vizsgáljuk meg, hogy ez abszolútértékben tényleg kisebb

$|y|$-nál. Ehhez két egyenlőtlenségre van szükségünk: $y < 3y + 2x < -y$.
$y < 3y + 2x$:

$$y < 3y + 2x \qquad / - y$$
$$0 < 2y + 2x \qquad / : 2$$
$$0 < y + x, mert\, |y| < |x|\,.$$

$3y + 2x < -y$:

$$3y + 2x < -y \qquad / - 3y$$
$$2x < -4y \qquad / : 2$$
$$x < -2y = 2\,|y|\,.\blacksquare$$

A tétel alapján ismét világos, hogy a minimális megoldás a $(3, 2)$ számpár.

Irodalomjegyzék

[1] Michael J. Jacobson, Jr., Hugh C. Williams: Solving the Pell Equation, *Springer*, 2000

[2] T. L. Heath: The works of Archimedes, London

[3] Sir Thomas Heath: A history of Greek matematics, Oxford, 1921

[4] Nelson H. L.: A solution to Archimedes' cattle problem, 1980

[5] Freud Róbert, Gyarmati Edit: Számelmélet, *Nemzeti Tankönyvkiadó*, Budapest, 2000

[6] K. A. Ribnyikov: A matematika története, *Tankönyvkiadó*, Budapest, 1974

[7] Dirk J. Struik: A matematika rövid története, *Gondolat Kiadó*, 1958

[8] Sain Márton: Matematikatörténeti ABC, *Tankönyvkiadó*, Budapest, 1974

Nyilatkozat

Név: Papp Franciska
ELTE TTK, Matematika B.Sc. szak, Matematikai elemző szakirány
ETR azonosító: PAFPAAT.ELTE
Szakdolgozat címe: A Pell-egyenlet és története

A szakdolgozat szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2011. január 4.

Papp Franciska