Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Focibajnokságok és véges geometriák

Szakdolgozat

Dávid Péter

Matematika BSc, Matematikai elemző szakirány

Témavezető: **Kiss György**, egyetemi docens

Geometria Tanszék

Budapest

2012

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A dolgozatom a véges geometriákkal és a körmérkőzéses focibajnokságokkal foglalkozik. A megoldandó probléma az, hogy miként tudunk megrendezni egy körmérkőzéses bajnokságot. Az ilyen típusú megmérettetésben minden csapat játszik minden csapat ellen pontosan egyszer, és minden egyes fordulóban minden csapat pályára lép. Tehát azt kell megmondanunk, hogy a csapatok az egyes fordulókban melyik másik csapattal mérkőzzenek meg. Erre jó módszert találhatunk a véges geometriák segítségével, ami első ránézésre elég távoli fogalomnak tűnik, de majd, mint azt láthatjuk, ezt használva hatékonyan meg tudjuk oldani ezt a problémát.

Először bevezetjük a véges testek fogalmát, majd példákat is adunk rá. Megvizsgáljuk e testek tulajdonságait és két véges testet el is készítünk. Ezek után a véges geometriákat, azon belül a projektív síkokat és azok tulajdonságait tárgyaljuk. Látható lesz néhány példa is projektív síkra. A későbbiekben a projektív síkon néhány ponthalmazt fogunk közelebbről megvizsgálni. Majd kapcsolatot teremtünk a focibajnokságok rendezésével és a gráfokkal, ezzel alátámasztva, hogy a geometria milyen széles körben alkalmazható problémák megoldására. Két módszer lesz rögzítve, hogy miként szervezhetünk körmérkőzéses versenyeket. Ezután pedig a való élet egy labdarugó bajnokságán vizsgáljuk meg a bevezetett módszerek egyikét.

Én személy szerint több indíttatás miatt választottam ezt a témát. Ezek közt szerepel az, hogy a véges geometria a matematikának egy dinamikusan fejlődő ága. Ez számomra nagyon vonzóvá teszi ezt a témakört. Valamint a labdarúgás és a labdarugó bajnokságok közel állnak hozzám, én is aktívan játszom. Illetve szerettem volna egy olyan problémával foglalkozni, ami nagy mértékben kapcsolódik a való élethez. Ezek miatt nagyon motivált voltam, hogy mélyebb betekintést nyerjek ebbe a témakörbe. Erre pedig megfelelő lehetőséget biztosított ez a szakdolgozat.

2. Véges testek

2.1. A véges testek definiálása

A véges geometriák bevezetése előtt szükséges bevezetni a testek és a véges testek fogalmát. Testen olyan algebrai struktúrát értünk, melyre teljesülnek a következő tulajdonságok, testaxiómák (a, b, c tetszőleges elemei a testnek):

- értelmezünk a testen 2 műveletet, legyenek ezek $+$ és a $*$ kétváltozós műveletek, melyek a $T \times T \to T$ képező műveletek, azaz két T-beli elemhez egy másik T-beli elemet rendelnek hozzá (T a testet jelöli). A továbbiakban nevezzük a $+$ műveletet összeadásnak, a $*$ műveletet pedig szorzásnak.

- A műveletek asszociatívak:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(a * b) * c = a * (b * c);$$

- a műveletek kommutatívak:

$$a + b = b + a$$

$$a * b = b * a;$$

- a műveleteknek létezik egységelemük, legyen ez a $+$ műveletre nézve 0, a $*$ műveletre nézve pedig 1:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

$$a * 1 = 1 * a = a;$$

- a $+$ művelet a $*$ műveletre nézve disztributív:

$$a * (b + c) = (a * b) + (a * c);$$

- minden elemnek létezik additív inverze és ez egyértelmű, a 0-tól különböző elemeknek létezik multiplikatív inverzük és ez egyértelmű.

Ezek a testaxiómák. Ha egy test kielégíti a fenti tulajdonságokat, illetve a következő tulajdonságot:

- T test elemszáma véges, azaz $|T| < \infty$,

akkor $+$ és a $*$ műveletekre nézve véges testről beszélünk.
Definíció. Additív inverz: egy $a \in T$ szám additív inverze vagy ellentettje az a szám, mellyel őt összeadva az összeadás művelet neutrális elemét kapjuk. Egy a szám additív inverzét jelöljük: $(-a)$-val.
Definíció. Multiplikatív inverz: egy $a \in T, a \neq 0$ szám multiplikatív inverze vagy reciproka az a szám, mellyel őt megszorozva a szorzás művelet egységelemét kapjuk. Egy a szám multiplikatív inverzét jelöljük: a^{-1}-gyel. Tehát $(-a)$ és a^{-1} az a szám additív és multiplikatív inverzei, azaz:

$$a + (-a) = 0,$$

$$a * a^{-1} = 1.$$

2.2. Példa

Ilyen test például egy $\mathbf{Z}_p = \{0, 1, \cdots, p-1\}$ test, ahol p egy rögzített prímszám és $\mathbf{Z}_p$ elemeinek megfeleltetünk minden egész számot a következő módon: egy a számot reprezentál az ő p-vel való osztásánál fellépő maradéka. Tehát minden számot felírhatunk $np + m$ alakban, ahol m a maradék, ami $0 \leq m \leq p-1$, n pedig befutja az egész számok halmazát. Így tehát minden egész számot besorolhatunk egy csoportba, amit a csoport egy elemével tudunk reprezentálni. Két szám pontosan akkor tartozik egy csoportba, ha a különbségük osztható p-vel. Ezeket az osztályokat maradékosztályoknak nevezzük.

A véges testek definíciója szerint meg kell még határoznom a $+$ és a $*$ műveleteket. Az $a + b = c$ és $a * b = d$, ha az a és b számokkal az egészek közt elvégzett összeadás és szorzás eredménye azokba a maradékosztályokba esik, melyeket c és d reprezentál. Ha így definiálom a műveleteket, azt is be kell látnom, hogy a műveletek nem függnek attól, hogy az osztályok éppen melyik elemével számolunk, csak az osztálytól függnek. Ehhez felhasználok két különböző osztályból két-két különböző elemet. Legyenek ezek $a, a^{'}$ és $b, b^{'}$. Tehát ha a műveletek nem függnek az elemek választásától, akkor az $a + b$ és $a^{'} + b^{'}$ műveletek eredményének ugyanannyi maradékot kell adniuk p-vel osztva, valamint $a*b$ és $a^{'}*b^{'}$ eredményeiknek is ugyanabba az osztályba kell esnie. Ezek azért teljesülnek, mert ha

$$p \mid (a - a^{'}) \ \text{ és } \ p \mid (b - b^{'}) \Rightarrow p \mid (a - a^{'}) + (b - b^{'}) = (a + b) - (a^{'} + b^{'}).$$

A szorzást tekintve pedig:

$$p \mid (a - a') * b + (b - b') * a' = a * b - a' * b'$$

A kivonást az összeadás inverz műveleteként, az osztást pedig a szorzás inverz műveleteként definiáljuk.

Additív inverz létezése: kell, hogy $\forall m \in \mathbf{Z}_p$ elemnek létezzen $(-m)$ additív inverze, melyre definíciója szerint igaz, hogy $m + (-m) = 0$, ahol a 0 az összeadás neutrális eleme és ennek egyértelmünek kell lennie. Tekintsük a $p - m$ kivonás eredményét. Ezt m-mel összeadva nyilvánvalóan p-vel osztható számot kapok, azaz teljesül, hogy az összegük 0, és más nem negatív p-nél kisebb számra ez nem áll fenn, tehát az egyértelműség is teljesül.

Multiplikatív inverz létezése: $\forall m \in \mathbf{Z}_p^*$, ahol $\mathbf{Z}_p^* = \mathbf{Z}_p \setminus \{0\}$, elemnek kell, hogy létezzen multiplikatív inverze, melyre igaz, hogy $m * m^{-1} = 1$, ahol 1 a szorzás egységeleme. Ennek pedig egyértelműnek kell lennie. Tekintsük az m-mel való szorzást. Ez $\mathbf{Z}_p^*$ elemeinek egy permutációját adja. Ez igaz, mert ha tekintjük a és b számokat, ahol $a \neq b$, akkor láthatjuk, hogy $m * a \neq m * b$, hiszen ha egyenlőek lennének, akkor az azt jelentené, hogy

$$p \mid m * a - m * b = m * (a - b) \Rightarrow p \mid m \quad \text{vagy} \quad p \mid (a - b).$$

Ez viszont lehetetlen, mivel p prím és $0 < m < p$ és $0 < |a - b| < p$, ezért ellentmondásba ütköznénk. Így viszont, ha az m-mel való szorzás tényleg $\mathbf{Z}_p^*$ elemeinek egy permutációját adja, akkor $\mathbf{Z}_p^*$-ben pontosan egy olyan elem van, mellyel m-et szorozva 1-t kapunk, azaz az egyértelműség is fenn áll.

Mivel bebizonyítottunk a multiplikatív inverz létezését, ezért $\forall m \neq 0$ számmal való osztást megfeleltethetünk az ő m^{-1}-el jelölt multiplikatív inverzével való szorzásának. A 0-val való osztást nem engedjük meg, mivel $m * 0 = 0$ és az m-mel való szorzás permutálja $\mathbf{Z}_p$ összes elemét, ezért ha $m_1 * m_2 = 0$, akkor m_1 és m_2 közül legalább az egyik 0. Ezt úgy nevezzük, hogy a szorzás nullosztómentes.

2.3. Véges test konstruálása

A dolgozat ezen részben két konkrét véges testet konstruálok, melyek segítségével könnyebben átlátható képet kaphatunk erről az algebrai struktúráról. Ehhez tekintsük a véges testek egy érdekes tulajdonságát. Ha tudunk két darab kétváltozós műveletet definiálni egy $\mathbf{F}$ véges halmazon úgy, hogy azok kielégítsék a testaxiómákat, akkor $\mathbf{F}$ elemszáma prímhatvány.

Tehát ez az állítás azt mondja, hogy egy véges test elemszáma prímhatvány. Ez egy algebrai állítás, melynek bizonyításától eltekintek, mivel ezen dolgozatnak nem célja algebrai állítások bizonyítása.

Tekintsük az előző állítás megfordítását. Ha $\mathbf{F}$ elemszáma prímszám, akkor a műveletek tulajdonságaikat tekintve csak az általunk definiált $+$ és $*$ műveletek lehetnek. E tulajdonság ismeretében tehát két prímhatvány elemszámú véges testet konstruálok. A testek elemeit majd számokkal azonosítom, és felírom a testek műveleti tábláit. Ezeket a táblákat egy faktorgyűrű vizsgálatával tudjuk felírni. Ehhez definiálni kell a csoport, Abel-csoport, gyűrű és egy test felett irreducibilis polinom fogalmát.

Csoportnak nevezünk egy nem üres G halmazt, melyen definiálva van egy $*$ kétváltozós művelet és teljesülnek a következő feltételek:

- $*$ asszociatív művelet;
- létezik $e \in G$ neutrális elem, azaz minden $a \in G$ elemre $a*e = e*a = a$ teljesül;
- minden $a \in G$ elemnek létezik a^{-1}-gyel jelölt inverze, mely szintén a G csoport eleme, azaz $a * a + a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Ha a $*$ művelet kommutatív, azaz $\forall a, b \in G$ elempárra $a * b = b * a$ teljesül, akkor a csoportot Abel-csoportnak nevezzük.

Legyen R egy halmaz. Ezen definiáljuk $+$ és $*$ kétváltozós műveleteket. R halmaz gyűrű, ha teljesülnek a következő feltételek:

- az R halmaz a $+$ műveletre nézve Abel-csoport;
- a $*$ művelet a $+$ műveletre nézve disztributív, azaz
$$a * (b + c) = a * b + a * c \quad \text{és} \quad (b + c) * a = b * a + c * a,$$
ahol a, b, c tetszőleges elemei R-nek;
- a $*$ asszociatív művelet, azaz tetszőleges $a, b, c \in R$ elemre
$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Az előző feltételeken fellül teljesülhetnek még más kritériumok is. Ekkor bizonyos elnevezésekkel illetjük a gyűrűket. Ezek a következők lehetnek:

- R egységelemes gyűrű, ha létezik $e \in R$ egységelem, melyre $a * e = e * a = a$, ahol a tetszőleges eleme a gyűrűnek;
- R kommutatív gyűrű, ha bármely a, b elemére teljesül, hogy $a*b = b*a$;
- az R gyűrű egy a eleme bal oldali nullosztó, ha létezik $b \neq 0$ elem R-ben, hogy $a * b = 0$. A jobb oldali nullosztó definíciója hasonló. Ha egy R gyűrűben nincs bal oldali, illetve jobb oldali nullosztó, akkor nullosztó mentesnek hívjuk.
- Ha egy R gyűrű kommutatív, egységelemes és nullosztó mentes, akkor integritási tartománynak nevezzük.

Tetszőleges T test feletti egyváltozós polinomok halmaza integritási tartományt alkot. Jelöljük ezeket $T[x]$-el. Egy algebrai állítás szerint minden véges integritási tartomány test. Ezt az állítást nem bizonyítom, mivel e dolgozatnak nem célja algebrai állítások bizonyítása.

Egy $\mathbf{T}$ test feletti n-ed fokú $f(x)$ polinom irreducibilis $\mathbf{T}$ felett, ha $f(x)$ bármely $f(x) = h(x)g(x)$ felbontása egy nulladfokú és egy n-ed fokú polinomból áll össze. Mint az a definícióból jól látszik egy polinom irreducibilitása nagyban függ attól, hogy épp mely test felett vizsgáljuk az adott polinomot.

Az előzőekben bevezetett fogalmak segítségével bevezethetem a faktorgyűrű fogalmát. Legyen $f(x) \in \mathbf{Z}_p$ irreducibilis m-ed fokú polinom, ahol p prím. Ekkor $\mathbf{Z}_p[x]/(f(x))$ faktorgyűrű. És ez a faktorgyűrű test.

Egy korábbi állítás szerint minden véges integritási tartomány test. Egy faktorgyűrű pedig véges integritási tartomány. Illetve $\mathbf{Z}_p[x]/(f(x))$ faktorgyűrű nullosztó mentes is, mert ha nem lenne az, akkor lenne két az $f(x)$ fokánál alacsonyabb fokú polinom, aminek szorzata $f(x)$ többszöröse lenne. A faktorgyűrű null eleme az $f(x)$ többszöröseiből áll. Így tehát beláttuk az eredeti állítást, miszerint $\mathbf{Z}_p[x]/(f(x))$ faktorgyűrű test.

2.3.1. Négyelemű test

Az első megkonstruált test elemszáma tehát legyen négy. Ezt a következő faktorgyűrű segítségével tudom megcsinálni: $\mathbf{Z}_2[x]/(x^2 + x + 1)$, ahol $\mathbf{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$. Az (x^2+x+1) polinom láthatóan irreducibilis $\mathbf{Z}_2[x]$ felett, mert a $\mathbf{Z}_2[x]$ testben nincs gyöke. Ez a faktorgyűrű pedig négyelemű lesz. Jelölje P ennek a polinomnak a $\mathbf{Z}_2$ test feletti többszöröseit. Ekkor a $\mathbf{Z}_2[x]/P$ faktorgyűrű minden eleme egyértelműen felírható a következő módon: $a_1 + a_2x + P$, ahol

$a_1, a_2 \in \mathbf{Z}_2$. Tehát a test elemi: $\overline{0} = 0+P$, $\overline{1} = 1+P$, $\overline{x} = x+P$, $\overline{1+x} = 1+x+P$, melyek egyszerű behelyettesítés után adódnak. Az összeadás $(+)$ és a szorzás $(*)$ műveletek eredményei legjobban egy táblázatban összefoglalva átláthatóak. A táblázatokban az egyes mezőkben az őt kijelölő oszlop és sor első elemeinek műveleti eredménye áll. Az első táblázat az összeadás művelet eredményeit írja le:

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{1+x}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{1+x}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1+x}$	$\overline{x}$
$\overline{x}$	$\overline{x}$	$\overline{1+x}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{1+x}$	$\overline{1+x}$	$\overline{x}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

1. táblázat. Összeadás

Ezek az eredmények összeadással jönnek ki, melyet $\mathbf{Z}_2$ felett végzünk. Például megvizsgálom a táblázat ötödik sorában és negyedik oszlopban lévő elemet. Itt $\overline{1+x}+\overline{x}$ összeadást kell elvégezni. Ennek eredménye $\overline{1+2x}$, ami egyenlő $\overline{1}$-gyel, mert $2 = 0$ $\mathbf{Z}_2$ felett, így a $\overline{2x}$ tag kiesik. A többi eredmény is hasonló számolás útján jön ki. A következő táblázat a szorzás művelet eredményeit összesíti:

$*$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{1+x}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{1+x}$
$\overline{x}$	$\overline{0}$	$\overline{x}$	$\overline{1+x}$	$\overline{1}$
$\overline{1+x}$	$\overline{0}$	$\overline{1+x}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$

2. táblázat. Szorzás

A szorzásnál már figyelembe kell venni a következő azonosságot:

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -x - 1 = x + 1,$$

ahol az utolsó egyenlőség azért teljesül, mert $\mathbf{Z}_2$-ben a kivonás és az összeadás ugyanaz. Ez alapján megvizsgálom például a táblázat negyedik sorának és ötödik oszlopának az elemét. Ekkor azt kapom, hogy:

$$\overline{x} * (\overline{1+x}) = \overline{x+x^2} = \overline{x+1+x} = \overline{1+2x} = \overline{1}.$$

A többi elem is hasonló számolás útján jön ki. Így tehát konstruáltam egy négyelemű testet, melyben kiszámoltam a műveletek eredményeit is.

2.3.2. Kilencelemű test

A második megkonstruált test elemszáma pedig legyen kilenc. Ezt egy másik módszer segítségével vezetem be, mely elég hasonló az előző technikához. Mindenekelött definiálom az összeadás ($+$) és a szorzás ($*$) műveleteket. Mindkét műveletet a komplex számok körében ismert műveletként definiálom. Tehát a test tetszőleges a_1, b_1 és a_2, b_2 elemeire:

- az összeadás:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i;$$

- a szorzás:

$$(a_1 + b_1 i) * (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

Ezek után tekintem a $\mathbf{Z}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ test elemit és az $x^2 + 1$ polinomot. Ez a polinom irreducibilis a $\mathbf{Z}_3$ test felett, mivel nincs gyöke benne. Ebből addódik az ötlet, hogy bővítsük ki a testet egy számmal, mely gyöke lesz ennek a polinomnak. Jelöljük ezt a számot i-vel. Ez a szám hasonló tulajdonságokkal rendelkezik, mint a komplex számok körében ismert i szám. Tehát i az $x^2 + 1$ polinom gyöke, azaz $i^2 = -1$. Ekkor a 3 elemü testet még éppen 6 elemmel bővítettem ki. Azaz a véges test elemei a következők lesznek:$0, 1, 2, i, 1 + i, 2 + i, 2i, 1 + 2i, 2 + 2i$. Az összeadás műveleti táblája a korábban bevezetett definíció szerint:

$+$	0	1	2	i	$1+i$	$2+i$	$2i$	$1+2i2$	$2+2i$
0	0	1	2	i	$1+i$	$2+i$	$2i$	$1+2i$	$2+2i$
1	1	2	0	$1+i$	$2+i$	i	$1+2i$	$2+2i$	$2i$
2	2	0	1	$2+i$	i	$1+i$	$2+2i$	$2i$	$1+2i$
i	i	$1+i$	$2+i$	$2i$	$1+2i$	$2+2i$	0	1	2
$1+i$	$1+i$	$2+i$	i	$1+2i$	$2+2i$	$2i$	1	2	0
$2+i$	$2+i$	i	$1+i$	$2+2i$	$2i$	$1+2i$	2	0	1
$2i$	$2i$	$1+2i$	$2+2i$	0	1	2	i	$1+i$	$2+i$
$1+2i$	$1+2i$	$2+2i$	$2i$	1	2	0	$1+i$	$2+i$	i
$2+2i$	$2+2i$	$2i$	$1+2i$	2	0	1	$2+i$	i	$1+i$

3. táblázat. Összeadás

Megvizsgálom például $1+i$ és a $2i$ elemek összegét. Ez a következő:$1+i+2i = 1+0+(1+2)i = 1+3i = 1$, mert ebben a testben $3 = 0$, így a $3i$ tag kiesik.
A szorzás műveleti táblája a korábban bevezetett definíció szerint:

$*$	0	1	2	i	$1+i$	$2+i$	$2i$	$1+2i$	$2+2i$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	i	$1+i$	$2+i$	$2i$	$1+2i$	$2+2i$
2	0	2	1	$2i$	$2+2i$	$1+2i$	i	$2+i$	$1+i$
i	0	i	$2i$	2	$2+i$	$2+2i$	1	$1+i$	$1+2i$
$1+i$	0	$1+i$	$2+2i$	$2+i$	$2i$	1	$1+2i$	2	i
$2+i$	0	$2+i$	$1+2i$	$2+2i$	1	i	$1+i$	$2i$	2
$2i$	0	$2i$	i	1	$1+2i$	$1+i$	2	$2+2i$	$2+i$
$1+2i$	0	$1+2i$	$2+i$	$1+i$	2	$2i$	$2+2i$	i	1
$2+2i$	0	$2+2i$	$1+i$	$1+2i$	i	2	$2+i$	1	$2i$

4. táblázat. Szorzás

Itt megvizsgálom például az $(1+i)*(1+i)$ szorzatot:

$$(1+i)*1+i = (1*1)-(1*1)+(1*1+1*1)i = 1-1+2i = 2i$$

A többi számolás is hasonlóképpen elvégezhető. Így tehát konstruáltam egy kilencelemű véges testet és a műveleti tábláit is megadtam. Ezen eljárások alapján hasonló módon lehet képezni más, több elemű, prímhatvány elemszámú véges testet.

3. Véges geometria

3.1. Bevezetés

Miután a korábbiakban leírtam a véges testek definícióját, illetve pár tulajdonságukat, és konstruáltam két véges testet, elérkeztünk a véges geometria bevezetéséhez. Mielőtt részletesebben tárgyalnám a véges geometria témakörével kapcsolatos ismerteket leírom, a bevezetés motivációját.

Mint ismert, a koordinátageometria sok geometriai kérdésre ad választ és egyszerű megoldási módot. Ekkor a valós számok műveleti tulajdonságait használjuk ki. Amint az előző részben látható volt a véges testek rendelkeznek a fontosabb műveleti tulajdonságokkal. Ezért kézenfekvő módon adódott, hogy a véges testek és a koordinátageometria között is lehet valamilyen kapcsolatot teremteni, amely segítségével egyszerűbben lehet megoldani geometriai problémákat. Ezen keresztül pedig geometriai problémára visszavezetett egyéb, például kombinatorikai problémákat is. Ebből alakult ki a véges geometria.

A geometria ezen része tehát a véges testek véges elemszáma miatt, véges sok pontból álló geometria rendszerekkel foglalkozik. Viszont a véges geometriának is több válfaja van, melyeket különböző axiómák segítségével tudunk precízen meghatározni. Ilyenek például az affin geometria, a projektív geometria vagy épp a hiperbolikus geometria. Én ezek közül a projektív geometriát, ezen belül pedig a projektív síkokat fogom részletesebben megvizsgálni.

A könnyebb érthetőség miatt leírom, hogy miként lehet elképzelni egy ilyen projektív síkot. Ha például egy rajzot tekintünk, látható rajta, hogy a párhuzamos vonalak a távolba haladva közelednek egymáshoz. És ezek a párhuzamos vonalak a horizonton találkoznak is, hiába párhuzamosak. Azaz a horizont pontjai és a vízszintes irányok közt egyfajta megfeleltetés figyelhető meg. A projektív geometria ezt a jelenséget foglalja magába, pontosan, matematikailag precízen leírva.

3.2. Projektív síkok

3.2.1. A klasszikus projektív sík

Az előző részben leírt megfigyelés csak szemléletes. Ahhoz, hogy a projektív síkokkal foglalkozzak, azokat pontosan, axiómatikusan be kell vezetnem.

A klasszikus projektív sík úgy is tekinthető, mint az euklidészi sík egyfajta kibővítése. Méghozzá az ideális egyenessel és az ideális pontokkal való kibővítése. Feltehetően az euklidészi sík mindenki által ismert. A klasszikus projektív sík bevezetéséhez szükségem van az ideális pontok és az ideális egyenes meghatározására.

Legyen V egy háromdimenziós vektortér. Legyenek $\mathbf{v} \in V$ irányvektorok. Azaz $(\forall \mathbf{v} \neq 0, \mathbf{v} \in V)$ meghatároz egy $[\mathbf{v}]$ axiális irányt vagy más néven tengelyirányt. Most számomra a $\mathbf{v}$ vektor iránya csak a lényeges. Ezért két vektort egyenlőnek tekintek, ha irányaik megegyeznek. Ez azt jelenti, hogy $[\mathbf{v}] = [\mathbf{w}]$, ha csak $c \neq 0$ konstansszorzóban különböznek. Ekkor $[\mathbf{v}]$ a $\mathbf{v}$ vektor által meghatározott egydimenziós altere V-nek. Ezen $[\mathbf{v}]$-k összeségét hívjuk projektív pontoknak, és ezek alkotják a projektív síkot.

Ezeket a pontokat a következő módon kaphatjuk meg: legyen S egy origon át nem menő sík. Ha $[\mathbf{v}]$ nem párhuzamos S-el, akkor $[\mathbf{v}]$-hez hozzárendeljük az S beli reprezentását. Ez az $S \cap [\mathbf{v}]$ pont. De ha $[\mathbf{v}]$ épp párhuzamos S-el, akkor nincs ilyen reprezentás pont. Ekkor egy megfelelеltetést hozunk létre. Minden ilyen S-el párhuzamos $[\mathbf{v}]$-nek megfeleltetjük a $\mathbf{v}$-vel párhuzamos S beli s egyenesek ekvivalencia osztályát. Ez a párhuzamossági osztály ideális pontja. Az összes ilyen párhuzamossági osztály adja az ideális pontokat. Ezek az ideális pontok alkotják az ideális egyenest.

A klasszikus projektív sík tehát az euklidészi sík az ideális pontokkal, azaz az ideális egyenessel való kibővítése. Ahhoz, hogy a projektív sík definíciója teljes legyen, geometriai értelemben is még meg kell határozni az egyenes fogalmát a projektív síkon.

Legyen $W \subset V$, V-nek egy kétdimenziós altere. Ekkor $[W] = \{[\mathbf{v}] : 0 \neq \mathbf{v} \in W\}$ ponthalmazt a W-hez tartozó projektív egyenes. Minden ilyen kétdimenziós altér meghatároz egy projektív egyenest. Azaz az összes ilyen egyenes halmaza a projektív egyenesek halmaza. Ha ezeket az egyeneseket az előbb tekintett az origón át nem menő S sik tekintetében vizsgáljuk akkor, kétfélék lehetnek:

- W és S nem párhuzamos egymással, ekkor a projektív egyenesnek W és S közös pontjai felelnek meg, ezek a közönséges pontok. Plusz még egy ideális pont, ami a W és S metszésvonala által meghatározott egyenessel párhuzamos S beli egyenesek ekvivalencia osztálya.

- A másik lehetőség, ha W és S párhuzamos egymással. Ez egyetlen egy esetben fordul elő. Ekkor $[W]$ pontjainak, azaz a projektív egyenesnek az ideális pontok felelnek meg. Azaz ebben az esetben az ideális egyenes lesz a projektív egyenes. És ideális egyenesből valóban egyetlen egy darab van a projektív síkon, amely megfelel annak, hogy csak egy ilyen eshetőség fordul elő.

3.2.2. Tulajdonságok

A geometriában egy nagyon fontos tulajdnság az illeszkedési viszonyok. Ezek a projektív síkon a következők:

- bármely két különböző ponthoz pontosan egy egyenes, a két pont összekötő egyenese illeszkedik;
- bármely két különböző egyeneshez pontosan egy darab pont, a két egyenes metszéspontja illeszkedik.

Ezek az illeszkedési viszonyok teljesen hasonlóak ahhoz, amit az euklidészi síkból készített projektív síkon tapasztalhatunk. Ahogy a koordináta-geometriában, úgy a projektív síkon is leírhatók koordinátákkal a pontok. A projektív síkon azonban egy pontot három koordináta ír le, nem pedig kettő. Ez azért van, mert a projektív síkot a valós elemű három dimenziós vektortérből származtatjuk.

Tehát a projektív sík egy tetszőleges x pontját leírhatjuk a következő módon: $[x] = [x_1, x_2, x_3]$. Ez a projektív pont megfeleltethető az $(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_1}{x_3})$ közönséges pontnak, amennyiben $x_3 \neq 0$. Az $[x_1, x_2, 0]$ alakú pontok az $\langle x_1, x_2, 0\rangle$ irányvektorú egyeneseknek megfeleltetett ideális pontoknak tekinthetőek. Egy tetszőleges közönséges pont, mely az(x, y) koordinátákkal rendelkezik, megfeleltethető az $[x, y, 1]$ projektív pontnak.

Az egyenesek is három koordinátával adhatóak meg, mivel egy kétdimenziós altér leírható úgy, hogy azokat az $\langle x_1, x_2, x_3\rangle$ vektorokat tartalmazza, amire $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, ahol $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Így az ennek megfelelő egyenest az $[a_1, a_2, a_3]'$ jelöléssel illetjük. Tehát egy $[x_1, x_2, x_3]$ pont illeszekedik az $[a_1, a_2, a_3]'$ egyenesre, akkor és csak akkor,ha

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

Ezek után pedig tekintsük egy másik nagyon fontos tulajdonságát a projektív síknak. Ez pedig a dualitás. Azaz létezik egy dualitási reláció a projektív síkon belül. R relációt dualitási relációnak nevezzük a projektív síkon, ha

minden egyenesnek bijektíven megfeleltet egy pontot és minden pontnak bijektíven megfeleltet egy egyenest, az illeszkedési viszonyokat megtartva. Egy ilyen reláció például a projektív síkon: az $[x_1, x_2, x_3]$ koordinátákkal megadott pont a projektív sík egy pontja. Ezt megfeleltetjük ugyanezen koordináták által meghatározott $[x_1, x_2, x_3]'$ egynesnek.
Bizonyítás: ha a szorzatot kifejtjük akkor, az $e_1p_1 + e_2p_2 + e_3p_3 = 0$ adódik. Azaz az állítást beláttuk. Visszatérve az R dualitási relációra az valóban bijektív és illeszkedéstartó, mert az elöző állítás szerint:

$$[\mathbf{x}] \in [\mathbf{y}]' \Leftrightarrow \mathbf{xy} = 0 \Leftrightarrow [\mathbf{y}] \in [\mathbf{x}]'.$$

Az előzőekben bevezetett projektív sík a klasszikus projektív sík volt.

3.2.3. Absztrakt projektív sík

A klasszikus projektív sík mintájára lehet definiálni az úgynevezett absztrakt projektív síkot, amely során az előző részben felírt két illeszkedési tulajdonságot megtartom.
Definíció. $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{E}, I)$ hármast, ahol $\mathcal{P}$ és $\mathcal{E}$ két diszjunkt halmaz és $I \subset \mathcal{P} \times \mathcal{E}$ illeszkedésnek nevezett reláció projektív síknak nevezzük, ha kielégíti a következő négy axiómát:

- **P1.** $\mathcal{P}$ bármely két különböző eleméhez pontosan egy olyan eleme van $\mathcal{E}$-nek, amely mindkettővel relációban áll.
- **P2.** $\mathcal{E}$ bármely két különböző eleméhez pontosan egy olyan eleme van $\mathcal{P}$-nek, amely mindkettővel relációban áll.
- **P3.** $\mathcal{E}$ minden eleme legalább három különböző $\mathcal{P}$-beli elemmel áll relációban.
- **P4.** $\mathcal{P}$ minden eleme legalább három különböző $\mathcal{E}$-beli elemmel áll relációban.

(Az absztrakt projektív sík definíciója az [1] forrás alapján.)
A dolgozat további részében az absztrakt projektív síkokat projektív síkoknak fogom bevezni.

Amint az a definícióból jól látszik, a dualitás elve itt is érvényesül, mivel a P1, P2 és a P3, P4 axiómák egymás duálisai. A dualitás következménye az, hogy ha egy tételt vagy állítást belátunk, akkor az adott tétel vagy állítás duálisa is igaz. Ez egy rendkivül hasznos tulajdonsága az absztrakt projektív síkoknak.

A dualitásból következik, hogy minden projektív síknak létezik egy úgynevezett duális síkja. Ezt úgy kaphatjuk, hogy a duális sík pontjai az eredeti projektív sík egyenesei, a duális sík egyenesei pedig az eredeti projektív sík pontjai. A duális síkon pedig egy pont akkor és csak akkor van rajta egy egyenesen, ha az eredeti síkban a pontnak megfelelő egyenesen rajta van az egyenesnek megfelelő pont.

A projektív síkot meghatározó négy axióma közül az utolsó kettő az elfajuló projektív síkok kizárására szolgálnak. Ezek helyettesíthetők más axiómákkal is. Tehát a **P3** és **P4** axiómák helyettesíthetőek a következő két axióma valamelyikével:

- **P3'.** Létezik négy általános helyzetű pont, azaz négy olyan pont, melyek közül semelyik három nem kollineáris.
- **P3".** A sík bármely két egyeneséhez létezik olyan pont, amelyik a két egyenes egyikén sincs rajta.

Bizonyítás: tegyük fel, hogy Π kielégíti a **P1**, **P2**, **P3**, **P4** axiómákat. Egy tetszőleges P ponton át **P4** miatt, megy három különböző egyenes, legyenek ezek e, f és g. **P3** miatt léteznek az E_1Ie, E_2Ie, FIf és GIg különböző pontok. Az FG egynesen az E_1 és az E_2 pontok közül legalább az egyik nincs rajta. Feltehető, hogy az E_1 nincs az FG egyenesen. Ekkor P, F, G és E_1 négy általános helyzetű pont, tehát Π kielégíti a **P1**, **P2**, **P3'** axiómákat.

Tegyük fel, hogy Π kielégíti a **P1**, **P2**, **P3'** axiómákat, de nem elégíti ki a **P3"**-t. Ha az e és f egyenesek a sík összes pontját tartalmazzák, akkor a **P3'** miatt léteznek az E_1Ie, E_2Ie, F_1If és F_2If pontok, melyek mind különböznek az $e \cap f$ ponttól. Viszont **P1** és **P2** miatt létezik az $E_1F_1 \cap E_2F_2$ pont, amelyik sem az e, sem az f egyenesen nem lehet rajta. Ez az ellentmondás azt jelenti, hogy Π kielégíti a **P1**, **P2**, **P3"** axiómákat.

Ha Π kielégíti a **P1**, **P2**, **P3"** axiómákat, akkor a **P3"** miatt a sík minden pontján át legalább három egyenes megy, tehát **P4** teljesül. Ha e tetszőleges egyenes, akkor **P3"** miatt létezik rajta nem lévő P pont. P-n át legalább három különböző egyenes megy, ezek **P2** miatt metszik e-t, tehát e-n legalább három különböző pont van, vagyis Π kielégíti a **P3** axiómát is. (Az állítás és bizonyítása az [1] forrásból származik.)

Azt mondjuk, hogy a $\Pi' = (\mathcal{P}', \mathcal{E}', I')$ projektív sík a $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{E}, I)$ projektív sík részsíkja, ha $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$, $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$, és az I' reláció a $\mathcal{P}' \times \mathcal{E}'$ halmazon megegyezzik az I relációval. Azaz egy részsíkbeli pont akkor és csak akkor illeszkedik egy részsíkbeli egyenesre, ha az eredeti síkon is illeszkednek.

Érdekes kérdés még a projektív síkkal kapcsolatban, hogy hány pontból áll. Valamint, hogy ez az adat, a sík milyen egyéb jellemzőit határozza meg. Ezekre a kérdésekra ad választ a következő tétel.

Tétel. Ha a Π projektív síknak van olyan egyenese, amelyre $n+1$ pont illeszkedik, akkor

1. Π minden egyenesén $n+1$ pont van,
2. Π minden pontján át $n+1$ egyenes megy,
3. Π n^2+n+1 pontot és ugyanennyi egynest tartalmaz.

Bizonyítás: jelöljük az $n+1$ pontot tartalmazó egyenest e-vel, illetve a rajta lévő pontokat pedig $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$-gyel. Ha Q olyan pont, amelyik nincs rajta az e egyenesen, akkor a **P1** axióma miatt Q-t valamennyi P_i ponttal $(i = 1, 2, \dots, n+1)$ össze tudjuk kötni, s a QP_1 egyenesek mind különbözőek, mert Q nincs rajta e-n. Másrészt minden Q-n átenő egyenes metszi e-t a **P2** axióma miatt, s ez a metszéspont csak a P_i pontok valamelyike lehet, tehát Q-n át pontosan $n+1$ egyenes megy. Gondolatmenetünket dualizálva kapjuk, hogy ha van olyan E pont, amelyen át $n+1$ egyenes megy, akkor minden olyan egyenesen $n+1$ pont van, amelyik nem megy át E-n.

Ha f tetszőleges, e-től különböző egyenes, akkor **P4** miatt az $e \cap f$ ponton át megy legalább egy e-től is és f-től is különböző egyenes, aminek **P3** miatt van $e \cap f$-től különböző R pontja. Mivel R nincs rajta e-n, ezért rá $n+1$ egyenes illeszkedik. De R az f egyenesen sincs rajta, ezért f-re is $n+1$ pont illeszkedik, amivel állításunk első részét bebizonyítottuk.

Ha P a Π projektív sík tetszőleges pontja, akkor a **P3** és **P4** miatt van a síknak rajta át nem menő egyenese. Ezen az egyenesen az előzőekben bizonyítottak miatt $n+1$ pont van, vagyis P-n át $n+1$ egyenes megy.

A **P1** axióma miatt a sík össze pontjainak a számát megkapjuk, ha egy rögzített P ponttal összekötött pontokat megszámoljuk. Tudjuk, hogy P-n át $n+1$ egynes megy, és ezek mindegyike P-n kívül még n darab pontot tartalmaz. Tehát a projektív sík pontjainak a száma $1+(n+1)n = n^2+n+1$. Ennek az állításnak a duálisa szerint a projektív sík egyeneseinek a száma is n^2+n+1.(A tétel és bizonyítása az [1] forrásból származik.)

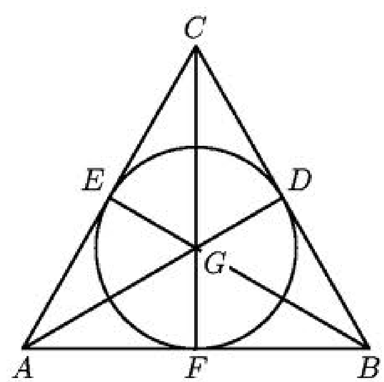
Azt mondjuk, hogy a Π projektív sík rendje n, ha Π-nek van olyan egyenese, amelyen $n+1$ pont van.

Egy projektív sík illeszkedési viszonyait praktikusan fel lehet írni egy úgynevezett illeszkedési mátrix segítségével. Ebben a mátrixban minden sornak megfeleltetünk egy egyenest és minden oszlopnak egy pontot. Ennek a mátrixnak minden eleme csupa 0 és 1. Az i. sorban és j. oszlopban álló eleme 1 akkor és csak akkor, ha az i. sornak megfeleltetett egyenesen rajta van, a j. oszlopnak megfeleltetett pont. Ha a Π sík rendje n, akkor az illeszkedési mátrix mérete $k \times k$, ahol $k = n^2 + n + 1$.

3.2.4. Példák

Ha a klasszikus projektív sík pontjait és egyeneseit valamint az illeszkedési viszonyokat vizsgáljuk a **P1-P4** axiómák tekintetében, azok nyílvánvalóan eleget tesznek a feltételeknek. Így tehát a klasszikus projektív sík is tekinthető absztrakt projektív síknak.

Azonban vannak további példák is projektív síkokra. A legegyszerübb ezek közül a Fano-sík. Ezt az euklidészi sík egy szabályos háromszöge segítségével készíthetjük el. Először is meg kell határoznom a $\mathcal{P}$ és az $\mathcal{E}$ halmazokat és azt, hogy mi legyen az I reláció. $\mathcal{P}$ halmaz a következő pontokból álljon: a szabályos háromszög három csúcsa, három oldalfelező pontja, és a beírható körének a középpontja. Az $\mathcal{E}$ halmaz a következő elemekből álljon: a szabályos háromszög három oldalegyenese, a három szögfelezőegyenese, és a beeírható köre. Az I illeszkedési reláció pedig a tartalmazás legyen. Ezt a következő ábrán láthatjuk:



1. ábra. Fano-sík

Az egyszerübb átláthatóság végett felírhatjuk a sík illeszkedési mátrixát. Ezt most nem mátrix, hanem táblázat formájában írom fel, melyben az oszlopokat és a sorokat az adott sor vagy oszlop első helyén álló $\mathcal{P}$ vagy $\mathcal{E}$ halmazbeli elemnek feleltetem meg. A mátrixos formát nyílván hasonlóan lehetne felírni. A táblázat a következő lesz (A beírható kört az O betű jelöli.):

$\mathcal{E} \setminus \mathcal{P}$	A	B	C	D	E	F	G
AB	1	1	0	0	0	1	0
AC	1	0	1	0	1	0	0
BC	0	1	1	1	0	0	0
AD	1	0	0	1	0	0	1
BE	0	1	0	0	1	0	1
CF	0	0	1	0	0	1	1
O	0	0	0	1	1	1	0

5. táblázat.

A táblázat segítségével könnyen ellenőrízhetjük a **P1**-**P4** axiómák teljesülését.

A **P1** axióma szerint bármely két különböző $\mathcal{P}$-beli elemmel pontosan egy $\mathcal{E}$-beli elem áll relációban. Ez valóban teljesül, hiszen ha a táblázat bármely két különböző sorát tekintjük, akkor pontosan egy oszlopban 1 az értéke mindkét sornak.

A **P2** axióma az előző duálisa. Tehát ebben az esetben az oszlopokat kell vizsgálni. Amint az látható, ha a táblázat bármely két különböző oszlopát tekintem, akkor pontosan egy sorban szerepel 1-es mindkét oszlopban. A

P3 és **P4** axiómák pedig azért teljesülnek, mert minden oszlopban és sorban pontosan három különböző helyen szerepel 1-es a táblázatban. Azaz mint látható, a Fano-sík valóban egy projektív sík. A rendje pedig kettő. Ez például abból adódik, hogy minden egyenesén három pont van. Azaz $n + 1 = 3 \Rightarrow n = 2$.

A sík a nevét Gino Fano olasz matematikusról kapta. Fano 1871. január 5.-én született Olaszországban, Mantovában. Tanulmányait a torinói egyetemen végezte. Ezek után egyetemi asszisztens, majd egyetemi tanár lett. Későbbiekben professzor. Jelentős eredményeket ért el a projektív geometriában és az algebra egyes területein. Ő építette fel elsőként axiomatikusan a projektív geometriát. 1952. november 8.-án hunyt el, Veronában.

A Fano-sík után álljon itt egy másik projektív sík. Ezt az illeszkedési táblája alapján fogom meghatározni. Ahhoz, hogy projektív sík legyen, ki kell elégítenie a korábban felírt négy axiómát. Ezt, ahogy az elöbbiekben láthattuk az illeszkedési tábla alapján könnyü ellenőrizni.

Tehát a **P1** és **P2** axiómák teljesüléséhez szükséges, hogy a táblázat bármely két különböző sorához pontosan egy olyan oszlop legyen, ahol mindkét sorban 1-es áll, illetve bármely két különböző oszlophoz pontosan egy olyan sor lehet, ahol mindkét oszlopban 1-es áll. A **P3** és **P4** axiómákhoz pedig, mit az előbb is az szükséges, hogy minden sorban és minden oszlopban legalább három darab 1-es álljon. Egy ilyen illeszkedési tábla például:

$\mathcal{E} \setminus \mathcal{P}$	A	B	C	D	E	F	G
a	1	0	0	0	1	1	0
b	0	1	0	0	0	1	1
c	1	0	1	0	0	0	1
d	1	1	0	1	0	0	0
e	0	1	1	0	1	0	0
f	0	0	1	1	0	1	0
g	0	0	0	1	1	0	1

6. táblázat.

A tábláról leolvashatjuk a $\mathcal{P}$ és az $\mathcal{E}$ halmaz elemeit. Ezek a következők lesznek: $\mathcal{P} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$, $\mathcal{E} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ Az I illeszkedést pedig a tábla mutatja. Ezek után érdemes összehasonlítani ezt a síkot a Fano-síkkal. Ha jobban megvizsgáljuk láthatjuk, hogy létezik a pontjaik és az egyeneseik között illeszkedéstartó megfeleltetés. Ezeket a síkokat izomorf síkoknak nevezzük.

A következő példán láthatjuk, ahogy a klasszikus projektív sík bevezetésénél is a projektív síkokat algebrai úton is meg lehet közelíteni.

Legyen T tetszőleges kommutatív test. V pedig egy három dimenziós vektortér K felett. $\mathcal{P}$ legyen V egydimenziós altereinek a halmaza, $\mathcal{E}$ pedig V kétdimenziós altereinek a halmaza. Az I illeszkedési reláció pedig legyen a halmazelméleti tartalmazás.

Ezek után ellenőrizni kell a négy axióma teljesülsét. A **P1** axióma teljesül, mert két különböző egydimenziós alteret pontasan egy kétdimenziós altér tartalmaz. A **P2** axióma teljesül, mert két különböző kétdimenziós altér metszete pedig mindig egydimenziós altér lesz.

Ezek után a **P3** axióma teljesülését kell ellenőriznem. Legyen V_2 egy kétdimenziós altér. Tegyük fel, hogy e_1 és e_2 V_2-nek bázisvektorai. Ekkor V_2 garantáltan tartalmazza e_1, e_2 által generált két különböző egydimenziós altereket, valamit tartalmazni fogja az e_1+e_2 által generált, az előző kettőtől különböző egydimenziós alteret. Így tehát **P3** is teljesül.

Végül a **P4** axióma teljesülését kell ellenőriznem. Legyen V_1 egy V-nek egy egydimenziós altere, és tegyük fel, hogy az e_1 vektor generálja. Ekkor létezik olyan e_2 és e_3 vektorok melyek e_1 vektorral V egy bázisát alkotják. Ekkor az $\langle e_1, e_2\rangle, \langle e_1, e_3\rangle$ valamint az $\langle e_1, e_2+e_3\rangle$ egymástól különböző egydimenziós alterek, melyek mind tartalmazzák V_1-t. Azaz **P4** is teljesül.

Ezen megközelítés alapján az egydimenziós altereket, vagyis a $\mathcal{P}$ halmaz elemeit az altér egy generáló vektorával, az $\mathcal{E}$ halmaz elemetit, azaz a kétdimenziós altereket az ortogonális kiegészítőjük egy generáló vektorával adhatjuk meg.

Ez alapján az absztrakt projektív síkon a koordináták hasonló módon írhatók fel, mint a korábban már említett klasszikus projektív síkon. Azaz egy tetszőleges x pontját az x_1, x_2, x_3 koordinátákkal adhatjuk meg, ahol $x_1 = x_2 = x_3 \neq 0$, azaz mindhárom koordináta egyszerre nem egyenlő 0. Az x pontot és a λx pontot egyenlőnek tekintjük, ahol $(0 \neq \lambda, \lambda \in T)$.

A projektív sík egyeneseit is hasonló módon három koordináta segítségével adhatjuk meg. Ebben az esetben is a T testbeli nem nulla konstans szorzóban különböző egyeneseket is egyenlőnek tekintjük. Ezeket a síkokat a $PG(2, T)$ formulával jelöljük. Ha pedig a T test a q elemű véges test, akkor a $PG(2, q)$ jelölést használjuk.
(Ez a fejezet az [1] forrás alapján)

3.2.5. Ponthalmazok

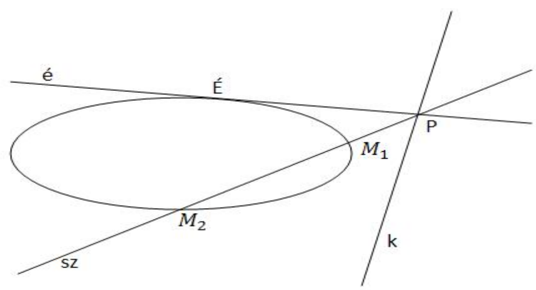
Ahogy az euklidészi síkon, úgy a projektív síkokon is lehet definiálni bizonyos ponthalmazokat. Az euklidészi síkon ilyen nevezetes ponthalmaz például a szakaszfelező merőleges vagy épp egy kör. A projektív síkon beszélhetünk úgynevezett ívekről. A dolgozat ezen részében ezekről az ívekről, az ívek típusairól, és azok tulajdonságaikról lesz szó bővebben. Mindenek elött álljon itt az ív, mint ponthalmaz definíciója.

Definíció. Ívnek nevezzük a projektív sík olyan ponthalmazát, amelynek nincs három egy egyenesen fekvő pontja. Ha az ív k pontból áll, akkor k-ívnek nevezzük. Az olyan k-íveket, melyek tartalmazásra nézve maximálisak, azaz nem képezik részét egy önmaguknál nagyobb $(k+1)$-ívnek, teljesnek hívjuk.

A projektív síkon korábban már definiáltam az egyeneseket. Ezért érdekes lehet, hogy a projektív síkon az egyenesek és az ívek milyen viszonyban lehetnek egymással. Ez a viszony háromféle lehet:

- szelő, ha a k-ívvel kettő közös pontja van;
- érintő, ha a k-ívvel egy közös pontja van;
- külső egyenes, ha a k-ívvel nulla közös pontja van.

Ezeket a viszonyokat ábrázolja a következő ábra:



2. ábra.

Az ív definíciójából következik, hogy egy ív része is ív, ezért a matematika szempontjából a teljes ívek lehetnek a legérdekesebbek. A legelső kérdés, ami ezzel kapcsolatban felmerül, hogy mekkora lehet egy q-adrendű projektív síkon a legnagyobb ív. Erre a kérdésre pontos eredmény még nem született, azonban alsó és felső korlátok léteznek. Ilyen felső becslést szolgáltat a következő tétel:

Bose tétele: q-adrendű sík bármely k-ívére $k \leq q+2$ teljesül. Ha q páratlan, akkor $k \leq q+1$ is igaz.

Bizonyítás: válasszuk ki az ív egy pontját, P-t. Ezen a ponton $q+1$ egyenes megy át, melyek mindegyikén a P-n kívül legfeljebb egy további pontja lehet ívünknek. Ez a definícióból következik. Így összesen legfeljebb $1+(q+1)$ pontú lehet az ív. A $k = q+2$ esetben bármelyik pontot is választottuk P-nek, minden rajta átmenő egyenes pontosan egy további pontot kell tartalmazzon ívünkről. Ez az jelenti, hogy minden egyenes, ami metszi az ívet az pontosan két pontban metszi azt. Ezt felhasználva láthatjuk, hogy ha q páratlan, akkor nincsenek $(q+2)$-ívek. Vegyünk egy tetszőleges pontot, ami nics az íven, legyen ez R. Az R-en átmenő egyenesek az előzőek alapján nulla vagy két pontban metszik az ívet. Ha az ív pontjait összekötjük R-rel, akkor ezzel R pontjait párba állítjuk, azaz ívünk mérete páros szám kell, hogy legyen. Ha pedig $q+2$ páros, akkor q is az.

(A tétel és bizonyítása az [1] forrás alapján.)

A teljes ív méretére alsó korlátok is léteznek. De, hogy az egyik ilyen tételt kimondhassuk és bizonyítsuk szükséges még egy fogalom bevezetése, és egy arra vonatkozó lemma is.

Definíció. Lefogó ponthalmaz: egy tetszőleges projektív sík valamely B ponthalmaza lefogó ponthalmaz, ha minden egyenes metszi B-t.

Lemma. A q-adrendű projektív sík bármely lefogó ponthalmaza legalább $q+1$ pontból áll. Ha a lefogó ponthalmaz elemszáma $q+1$, akkor az egyenes. Bizonyítás: Legyen $P \notin B$ tetszőleges pont. Ezen a ponton $q+1$ egyenes megy át, melyek mindegyike metszi B-t, azaz valóban $|B| \geq q+1$. Az is így látható, hogy $|B| = q+1$ esetén a lefogó ponthalmaz egyenes. Kössük össze B két pontját. Ha B nem az e egyenes, úgy választhatunk egy $P \notin B, P \in e$ pontot. Az ezen átmenő $q+1$ egyenes közül az egyik legalább két B-beli pontot tartalmaz, a fennmaradó q darab P-n átmenő egyenes lefogására pedig legfeljebb $q-1$ B-beli pont marad, ami lehetetlen, így $B = e$.

Ezek után következhet egy tétel, amely alsó korlátot ad a teljes ív méretére. A tétel megalkotói Lunelli, Sce voltak.

Tétel: q-adrendű sík k-íve nem lehet teljes ha $q \geq k(k-1)/2$.
Bizonyítás: ha a k-ív teljes, akkor az ívre nézve szelő egyenesek a sík minden pontját lefedik. Mivel ehhez az előző lemma duálisa miatt legalább $q+1$ egyenes kell, ezért $k(k-1)/2 \geq q+1$.
(A tétel és lemma valamint a bizonyításuk az [1] forrás alapján.)

Egy projektív síkon ívet vagy teljes ívet a mohó algoritmussal lehet kreálni. Tegyük fel, hogy már néhány pontot kiválasztottunk úgy, hogy ezek szelői nem fedik le a sík összes pontját. Akkor válasszunk egy pontot a nem lefedettek közül, és így tovább. Az eljárás akkor áll meg, ha teljes ívet kapunk.

Ezek után tekintsük az ívek két típusát, az oválisokat és a hiperoválisokat.
Definíció. Oválisnak az olyan ívet nevezzük, melynek minden pontjában egyetlen érintő egyenese van. Hiperoválisnak pedig azt az ívet nevezzük, amelynek nincs érintő egyenese.

A denfiníciók után joggal merül fel a kérdés, hogy mekkorák ezek az ívek, vagyis hány pontból állnak. Mivel egy k-ív minden pontján át pontosan $k-1$ szelő és ezért $q+2-k$ érintő egyenes megy, ezért a q-adrendű sík oválisai a $(q+1)$-ívek, a hiperoválisai pedig a $(q+2)$-ívek. Bose tétele szerint tehát páratlan rendű síkokon nem léteznek hiperoválisok. Érdekes lehet még, hogy mely projektív síkokon lehetnek ilyen oválisok és hiperoválisok.

Tétel. Tekintsük a $PG(2,q)$ projektív síkot, amelyet a korábbi jelölés szerint a q elemű véges test segítségével képzünk. Ebben a síkban léteznek

oválisok, ha q páros, akkor hiperoválisok is.
Az állítás bizonyításához elég mutatnom egy oválist, illetve egy hiperoválist a $PG(2,q)$ síkban. A bizonyítás során affin koordinátákkal számolunk. Legyen $\mathcal{P} = \{(x, x^2) : x \in \mathrm{GF}(q)\} \cup \{(\infty)\}$, ahol $\mathrm{GF}(q)$ a q elemű véges testet jelöli.(A GF rövidítés a Galois Field szavak kezdőbetűiből ered. Évariste Galois tiszteletére.) Ekkor $\mathcal{P}$ ovális, hiszen $|\mathcal{P}| = q+1$, és $\mathcal{P}$ és az $Y = mX + b$ egyenes metszéspontjait az $X^2 = mX + b$ egyenlet megoldásával kaphatjuk. Így legfeljebb két metszéspont lehet. Az $X = c$ egyenesek pontosan két pontban metszik $\mathcal{P}$-t, az ideális egyenes pedig pontosan egy pontban. Ha pedig q páros és hiperoválisra kell példát mutatni, akkor tekintsük a $x \mapsto x^2$ leképezést. Ez a GF(q) test automorfizmusa, így a (0) ideális pontis hozzávehető $\mathcal{P}$-hez. Így tehát egy hiperoválist kaptunk.

Ismét visszatérve az oválisokra, az oválisok definíciójából és abból, hogy az oválisok $(q+1)$-ívek adódik, hogy minden oválisnak $q+1$ érintője van. Ha egy páros q-rendű síkot tekintünk, akkor ezek az érintők egy ponton haladnak át. Ehhez azt kell belátni, hogy a sík minden pontján át megy érintő, mert egy korábbi lemma duálisa szerint a $q+1$ érintő pont ekkor megy át egy ponton. Az érintők nyílvánvalóan lefedik az ovális összes pontját.

Tehát tekintsünk egy P pontot, amely nem eleme az oválisnak. Ezt a pontot kössük össze az ovális összes pontjával. Ez $q+1$ darab összekötő egyenes lesz, mert $q+1$ pontja van az oválisnak. q párosságából fakadóan $q+1$ egy páratlan szám. Ebből és az egyenesek lehetséges három féle elhelyezkedéséből pedig következik, hogy ezek között az összekötő egyenesek közt biztosan lesz érintő. Vagyis valóban a sík összes pontját keresztűl megy érintő.

Ennek az állításnak a következménye az is, hogy páros q-rendű síkon a $(q+1)$-ívek nem teljesek. Az előző állításból adódik még, hogy egy páros q-rendű tetszőleges projektív síkon tekintett ovális érintői egy pontban metszik egymást. Ezt a pontot az ovális magpontjának nevezzük.

Eddig páros q rendű síkon vizsgáltam az oválisok helyzetét. Most térjünk át a páratlan q-rendű projektív síkokra. Ezen tekintsünk egy oválist.

Tétel. Ekkor bármely az oválishoz nem tartozó pontján át nulla vagy két érintő megy.

Bizonyítás: legyen e az ovális egy érintője és E az érintési pont. Az e érintőn kivül még pontosan q darab érintő van, mivel az oválist alkotó $q+1$ pont mindegyikén át pontosan egy darab megy. Az e érintő pontosan $q+1$ pontból áll. Ebből levonva az E érintési pontot q darab pont marad. Ezért ha belátjuk, hogy az e érintő minden E-től különböző pontján megy át érintő, akkor igazolódik az állítás. Legyen P az e érintő E-től különböző tetszőleges pontja. Ezt kössük össze az ovális összes E-től különböző pontjával, ez q darab pont, ami páratlan. Ebből adódik, hogy lesz olyan pont melyet összekötve az imént választott tetszőleges pontunkkal, érintőt kapunk.

Jól látható, hogy az előző állítás a páratlan q-rendű tetszőleges projektív sík pontjait két csoportba sorolja egy oválishoz képest. Az egyik csoportba tartoznak azok a pontok, melyeken nulla darab érintő halad át. Ezeket a pontokat az oválisra nézve belső pontoknak nevezzük. A másik csoportba tartozó pontok, melyeken kettő darab érintő megy át. Ezeket az oválisra nézve külső pontoknak hívjuk. Ezek után joggal merül fel a kérdés, hogy melyik csoportba hány darab pont tartozik? Erre a kérdésre ad választ a következő lemma.

Lemma. A belső pontok száma $q(q-1)/2$ a külső pontoké pedig $q(q+1)/2$. Valamint egy tetszőleges, az oválisra nézve nem érintő egyenesen az oválison nem lévő pontok fele belső, fele külső pont.

Bizonyítás: az érintők száma összesen $q+1$, ezek a külső pontokat kétszer fedik. Így a külső pontok száma $(q+1)q/2$, a belsőké $q^2+q+1-(q+1)-q(q+1)/2 = q(q-1)/2$. Legyen az oválist nem érintő egyenes e. Ezen s darab külső pont. Az e egyenes m pontban metszi az oválist, akkor az ezen a pontokon átmenő érintők száma $2s+m=q+1$ Mivel az e egyenes nem érintő az oválisra nézve ezért $m=0$ vagy $m=2$, amivel adódik az állítás.

4. Focibajnokság szervezése

4.1. Bevezetés

A dolgozat előző részében láthattuk a projektív síkok néhány érdekes tulájdonságát. Az, hogy ezek egy körmérkőzéses focibajnokság szervezése szemszögéből miért is fontosak, az ezen részből fog kiderülni. Azonban mielőtt erre rátérnék, essen néhány szó egy ilyen bajnokságról.

Egy ilyen körmérkőzéses tornán páros vagy akár páratlan számú csapat is indulhat. Abban az esetben, ha páratlan darab csapat nevez be egy ilyen összecsapásra, akkor az együttesek névsorát kiegészíthetjük egy "Szabadnapos" nevű csapattal. Így visszavezetve a problémát a páros sok csapatú megmérettetés szervezésére.

A bajnokság fordulókra van osztva. Minden fordulóban játszik minden csapat. A torna végeztével pedig minden csapat játszott minden csapat ellen, pontosan egyszer. A való életben általában minden csapat minden csapat ellen kétszer játszik oda-vissza vágós alapon. Ekkor az egyik meccsen az egyik csapat a pályaválasaztó a másik meccseken pedig a másik csapat birtokolja a pályaválasztói jogot. Ez jórészt azt jelenti egy csapat szempontjából nézve, hogy az egyik meccset hazai pályán a másik meccset pedig idegenben játszák.

Ahogy fentebb már szerepelt ettől az oda-vissza vágós rendszertől és a pályaválasztói jogtól ebben az esetben eltekintünk, azaz minden csapat mindegyikkel pontosan egyszer mérkőzik meg. Ha az általunk majd meghatározott párosításokat még egyszer megismételtetnénk, akkor könnyedén kaphatnánk egy oda-vissza vágós rendszerű bajnokságot. Azonban, ha el is tekintünk az oda-vissza vágóktól, akkor is könnyen el lehet rontani a szervezést már hat csapat nevezése esetén is.

Az életben azonban ennél jóval több csapat szokott részt venni a bajnokságokban. Napjaink talán legjobb europai bajnokságaiban a spanyol és az angol első oszályú bajnokságokban húsz csapat szerepel. A német elsőosztályú bajnokságban viszont csak tizennyolc csapat indul. A magyar NB I-ben pedig tizenhat klub mérközik meg.

Amint láthatjuk elég változatos a csapatok létszáma a különböző bajnokságokban. Ezért a különböző csapatlétszámok miatt két módszert is leírok, hogy miként lehet szervezni egy körmérközéses focibajnokságot a létszám függvényében.

4.2. Módszer

Elöször is gráfelméleti szempontból közelítem a problémát. Ehhez szükséges néhány jelölés és definíció. A jelölések:

- $V(G)$ a G gráf csúcsainak a halmaza;
- $E(G)$ a G gráf éleinek a halmaza;
- K_n az n pontú teljes gráf.

Az n pontú teljes gráf jelenti azt a gráfot, melynek minden pontja össze van kötve minden pontjával és nem tartalmaz hurokélt, irányított élt és többszörös élt. Ezen felül szükséges még egy gráf 1-faktorának illetve 1-faktorizációjának a definíciója.

Definició. A G gráf 1-faktorának nevezzük az $F \subset E(G)$ élhalmazt, ha minden $x \in V(G)$ csúcs pontosan egy F-beli élen van rajta.

A G gráf 1-faktorainak $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots F_k\}$ halmazát G 1-faktorizációjának nevezzük, ha minden $e \in E(G)$ él pontosan egy $\mathcal{F}$-beli 1-faktorban van benne.

Ezek után következzen a probléma. Feltehető, hogy $2n$ darab csapat vesz részt a bajnokságban. Ekkor a csapatokat megfeleltetem a K_{2n} teljes gárf pontjainak. Tetszőleges két csúcs közti élt pedig a két csúcs által jelölt csapatok mérkőzésének feleltetem meg. Ekkor az egyes fordulókban lévő mérkőzések megfeleltethetőek a teljes gárf egy-egy 1-faktorának. Hiszen ha egy 1-faktort tekintünk, akkor minden csúcs pontosan egy élen van rajta. Ez azt jelenti, hogy egy mérkőzést játszik egy fordulóban.

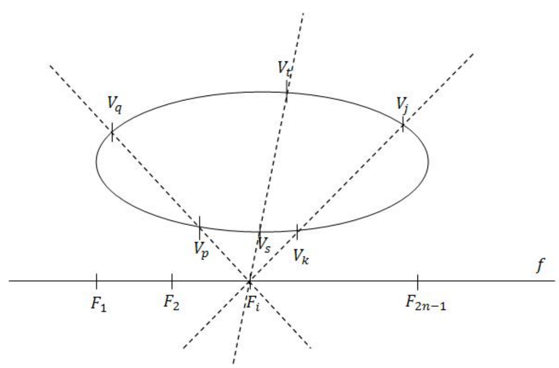
A teljes menetrend pedig a gráf egy 1-faktorizációjának feleltethető meg. De vajon miként lehet a K_{2n} teljes gráf egy 1-faktorizációját elkészíteni? Ha $2n$ speciális alakú szám, akkor a következő két stratégia megoldást jelent.

4.2.1. $2n = 2^k + 2$ létszámú bajnokság

Ebben az esetben a csapatok száma felírható egy kettőhatvány plusz kettő alakban. Az életben a leggyakoribb ilyen eset a tizennyolc fős bajnokságok, hiszen $18 = 2^4 + 2$. Ilyen bajnokság például a német vagy a holland elsőosztályú labdarúgó bajnokság.

De nem csak a tizennyolcra teljesül, hogy ilyen alakú szám. Tehát általánosan kell megadni egy módszert, amely segítségével kivitelezhető egy ilyen bajnokság megszervezése. Ez a módszer a következő. Tudjuk, hogy létezik a $PG(2, 2n-2)$ projektív sík. Ekkor a korábbi jelölések szerint q

páros szám, ebből következően a síkon létezik hiperoválís is. Ennek $q+2 = 2n$ pontja van. Feleltessük meg a csapatokat, azaz a teljes gráf pontjait az ív pontjainak. Ezek neve legyen $V_1, V_2, \ldots, V_{2n}$. Továbbá a síkon létezik a hiperoválist elkerülő egyenes. Egy ilyen egyenes legyen f. Ennek az egyenesnek összesen $q+1 = 2n-1$ pontja van. Ezeket a pontokat pedig feleltessük meg az egyes fordulóknak. Ezek neve legyen $F_1, F_2, \ldots, F_{2n-1}$. Minden egyes ilyen ponthoz hozzárendelünk egy 1-faktort a következőképpen. Az F_i ponthoz tartozó faktorban benne van egy $V_k - V_j$ él, akkor és csak akkor, ha F_i, V_j, V_k pontok kollineárisak. Így tehát elkészül egy forduló párosítása. Egy ilyen párosítást mutat a következő ábra az i. fordulóra:



3. ábra.

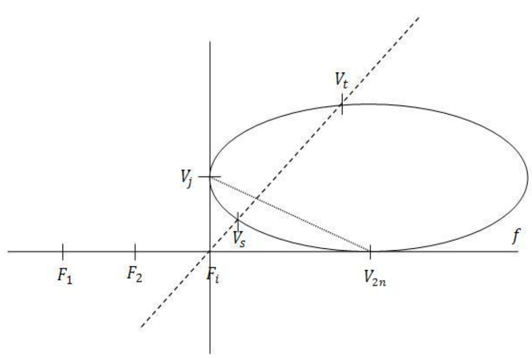
Az így készített fordulók mindegyike valóban 1-faktor, hiszen V_i a sík összes pontjával össze van kötve, illetve ha V_i-n átmegy egy egyenes, akkor az a hiperoválist pontosan két pontban metszi. A fordulók összessége pedig valóban a teljes gráf egy 1-faktorizációját adja meg, mert minden szelő, amely a hiperoválist két pontban metszi, az pontosan egy pontban metszi az f egyenest. Ez az jelenti, hogy minden egyes párosítás pontosan egy 1-faktorban van benne. Ez pedig azt jelenti, hogy minden csapat minden csapattal játszik és minden csapat minden fordulóban egyszer lép pályára.

Így tehát ez egy jó módszer egy ilyen típusú bajnokság szervezéséhez. De az életben nem csak olyan bajnokságok vannak, ahol a csapatok létszámát ilyen módon fel lehet írni. Például az egyik leggyakoribb létszám az életben a húsz csapatos bajnokság. Itt a húsz nem írható fel ilyen alakban. Azonban erre is van megfelelő módszer, melyet a következő alfejezet tartalmaz.

4.2.2. $2n = p^k + 1$ létszámú bajnokság

Ha a nevezett csapatok száma felírható p^k+1 alakban, ahol p egy páratlan prím egy másik módszer használható, mely sokban hasonlít az előző módszerhez. Ahogy azt az előzőekben leírtam, a húsz csapatos bajnokság pont ilyen létszámú, hiszen $20 = 19^1 + 1$. Ilyenek például a spanyol és angol elsőosztályú labdarugó bajnokságok.

A módszerhez kivítelezéséhez szükség van egy $PG(2, 2n-1)$ projektív síkra. Tudjuk, hogy ilyen létezik. Az előző jelölések szerint $q = p = 2n-1$. Az ilyen projektív síkokon pedig létezik ovális, melynek $p+1$ pontja van. Az együtteseket, vagyis a gráf csúcsait ebben az esetben is az ív pontjainak feleltetjük meg $(V_1, V_2, \ldots, V_{2n})$. Tudjuk, hogy a síkon létezik az ívnek érintő egyenese, melynek pontosan egy közös pontja van az oválissal, V_{2n}. Ez az egyenes legyen f. Az egyenes oválison nem lévő pontjainak neve pedig legyenek F_i, ahol $(i = 1, 2, \ldots, 2n-1)$. Az ovális és az egyenes közös pontja pedig legyen V_{2n}. Ebben az esetben is minden F_i ponthoz hozzárendelünk egy 1-faktort, azaz egy fordulót a következő módon. A $V_j - V_k$ csúcsok közti él benne van az F_i-hez rendelt faktorban, akkor és csak akkor, ha L_i, V_j, V_k pontok a projektív síkon kollineárisak. Ez alól csak a V_{2n} pont képez kivétel. A $V_j - V_{2n}$ él pedig akkor van benne az F_i-hez tartozó 1-faktorban, ha az F_iV_j egyenes érinti az oválist. Az i. forduló párosításának egy részét a következő ábra mutatja:



4. ábra.

Ebben az esetben is az elkészített fordulók valóban 1-faktorok, mert V_i a sík összes pontjával össze van kötve, valamint a két érintő kivételével F_i-n átmenő egyenesek az oválist két pontban metszik. Vagyis párosítja a csapatokat. Az F_i-khez rendelt 1-faktorok összesége pedig a gráf egy 1-faktorizációja, mert minden ilyen szelő egyenes egy pontban metszi az f egyenest. Ez alól kivételt képeznek a V_jV_{2n} szelők, ahol $(j = 1, \ldots, 2n-1)$. De ebben az esteben is a szelők benne vannak egy-egy 1-faktorban, hiszen az ovális f-től különböző érintői különböző pontokban metszik f-t. A V_jV_{2n} szelő pedig abba az 1-faktorba tartozik, amelyet ahhoz az F_i ponthoz rendeltünk hozzá, mellyel a V_jF_i egyenes érinti az oválist. Így tehát minden párosítást besorultunk egy fordulóba, azaz valóban a gráf egy 1-faktorizációja készült el.

Ezek után elmondható, hogy az ilyen létszámú bajnokságok szervezését is ki lehet vítelezni ennek a módszernek a segítségével.

4.3. Példa

A korábbiakban említett módszerek alapján egy 18 csapatos körmérkőzéses bajnoksággal fogok foglalkozni. A terjedelemre való tekintettel, csak egy tetszőleges forduló lehetséges párosítását fogom elkészíteni. Azonban a többi számolás is hasonló módon elvégezhető lenne. A számítások során a Maple programot használtam.

Erre a létszámra mindkét módszert alkalmazhatjuk, mivel $18 = 2^4 + 2 = 17 + 1$. Én az első módszer használtam. Ehhez első lépésben egy 16 elemű véges testet kellett elkészítenem. Ebből pedig létrehoztam a $PG(2, 16)$ projektív síkot. Ezen meghatároztam egy 18 pontú hiperoválist. Ennek pontjait megfeleltettem a csapatoknak. Ezután kiválasztottam egy, a hiperoválist elkerülő egyenest. Ennek 17 pontja van, amiből az egyik pont az úgynevezett ideális pont. Ezekhez a pontokhoz rendeltem hozzá a fordulókat. Kiválasztottam egy tetszőleges pontot és az ehhez tartozó párosítást készítettem el.

Az általam kiválasztott pont a számításaim során az ötödik fordulóhoz volt hozzárendelve. Meghatároztam az összes egyenes egyenletét, amely ezen a ponton haladt át. Ebből 17 darab volt, amiből 9 metszette is a hiperoválist. A következő lépésben megkerestem ezeknek az egyeneseknek és a hiperoválisnak a metszéspontjait. Ezen egyenesek mindegyike két pontban metszette a hiperoválist, így összepárosították a pontokat. Ezek után visszakerestem, hogy mely csapatnak feleltettem meg azokat a bizonyos pontokat. Így kirajzolódott az ötödik forduló párosítása. Ez a következőképpen alakult:

$$1-13, 2-10, 3-16, 4-18, 5-17, 6-7, 8-14, 9-12, 11-15,$$

ahol a számok a csapatokat jelölik.

5. Összefoglalás

Az írásom végén ebben a fejezetben röviden összefoglalom, hogy miről is szólt a szakdolgozatom.

A dolgozat elején a probléma rövid ismertetése után rátértünk a véges testek bevezetésére. Először is láthattuk a testaxiómákat, illetve néhány alapvető fogalmat. Ezek után felírtunk két módszert, amelyek segítségével véges testeket lehet konstruálni. Majd a két módszer használatával elkészítettünk két véges testet és felírtuk a műveleti tábláikat.

A harmadik fejezetben a véges testek segítségével be tudtuk vezetni a véges geometriákat és a projektív síkokat. A továbbiakban a projektív síkok tulajdonságait részleteztük, főbb definíciók és tételek segítségével. A projektív síkokra is mutattunk néhány példát. A fejezet hátralévő részében pedig a ponthalmazokkal, azon belül is az ívekkel foglalkoztunk, amelyek, amint az látható volt nélkülözhetetlen kellékek a dolgozat problémájának megoldásában. Ezekre az ívekre is kimondtunk és bizonyítottunk néhány tételt és lemmát.

A dolgozat negyedik részében pedig rátértünk magára a problémára és annak megoldásra. A feladat részletezése után gráfelméleti szempontból közelítettük meg a problémát és rávilágítottunk egy lehetséges megoldásra az 1-faktorizáció révén.

Ezek után már csak az volt a kérdés, hogy miként tudunk elkészíteni egy ilyen 1-faktorizációt egy $2n$ pontú teljes gráfon. Erre pedig a $2n$ szám formájának függvényében két módszert is mutattunk. Majd ezt a két módszert le is teszteltük egy példán, így bizonyítva azok hatékonyságát.

6. Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Kiss Györgynek a sok segítséget és a hasznos észrevételeket, amellyel nagymértékben hozzájárult jelen dolgozat elkészüléséhez. Ezen felül korábbi tanáraimnak is szeretnék köszönetet mondani, akik megfelelő matematikai alapot biztosítottak nekem, hogy könnyebben és jobban megérthessem a dolgozatban tárgyalt részeit a matematikának. És végül, de nem utolsó sorban a családomnak és páromnak szeretném megköszönni, akik mindig a segítségemre voltak és támogattak, valamint megteremtették a megfelelő körülményeket a tanuláshoz és a szakdolgozatíráshoz.

7. Irodalomjegyzék

[1] Kiss György - Szönyi Tamás: Véges geometriák, SZTE Bolyai Intézet, Szeged, 2001.

[2] Kiss György: Hogyan szervezzünk körmérkőzéses focibajnokságot?, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 2006/9.

[3] Kiss Emil: Bevezetés az algebrába, Typotex kiadó, 2007.

[4] Freud Robert: Lineáris algebra, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1998.

NYILATKOZAT

Név: Dávid Péter
ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc
ETR azonosító: DAPRAAT.ELTE
Szakdolgozat címe: Focibajnokságok és véges geometriák

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2012. május 28.

a hallgató aláírása