Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Variációszámítás és alkalmazása

Szakdolgozat

Tajti Melinda
Matematika B.Sc., elemző szakirány

Témavezető: **Keleti Tamás**, egyetemi docens
Analízis Tanszék

Budapest
2012

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Szakdolgozatom témájának választásakor fontosnak tartottam, hogy olyan területet, vagy problémát járjak körül, melynek gyakorlati alkalmazása igen jelentős. Tanulmányaim során sokat foglalkoztam szélsőértékszámítással, melyre a való életben is gyakran szükség van. Választott témám a variációszámítás, mely funkcionálok szélsőértékének keresésével foglalkozik. Számos területen alkalmazzák: optikán, közgazdaságtanon, mechanikán belül.

A variációszámítás a brachisztochron-problémával született és kezdett el fejlődni. A feladat az, hogy adott két pont (melyek nem egy függőleges egyenesen helyezkednek el), a magasabban fekvő pontból milyen pályán jut el leggyorsabban egy anyagi pont a másikba, ha csak a gravitáció hat rá? Legelőször Galilei[1] tette fel a kérdést, melyet meg is válaszolt, de tévesen. A problémát Johann Bernoulli[2] újra felvetette a matematikusoknak, majd közzétette megoldását közel 60 évvel Galilei után. Eztán számos kérdés merült fel a variációszámítás témakörén belül, például, hogy a két pontban rögzített lánc milyen alakot vesz fel, és hogyan lehet megtalálni a minimális felszínű forgásfelület [3].

[1] Galileo Galilei (1564–1642): olasz természettudós.
[2] Johann I. Bernoulli (1667–1748): svájci matematikus, ő oktatta a fiatal Leonhard Eulert.

2. fejezet

Variációszámítás

2.1. Bevezetés

Mivel a variációszámítás funkcionálok szélsőértékszámításával foglalkozik, elevenítsük fel a szélsőértékek kereséséről szóló eddigi ismereteinket.

A kétszer differenciálható, egyváltozós $f(x)$ függvénynek lokális szélsőértéke csak akkor lehet az x_0 pontban, ha az f függvény első deriváltja x_0 helyen 0. Ha ez teljesül, akkor vizsgáljuk meg a második deriváltakat.

- Az f függvénynek lokális maximuma van x_0 helyen, ha $f'(x_0) = 0$ és a második deriváltra teljesül, hogy $f''(x_0) < 0$.
- Az f függvénynek lokális minimuma van x_0 pontban, ha $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) > 0$.
- Ha $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) = 0$, akkor a magasabb rendű deriváltakat kell tovább vizsgálnunk, hogy megtudjuk, x_0 helyen az f függvénynek van-e lokális szélsőértéke.

A $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $\mathbb{R}^n$-ből $\mathbb{R}$-be képező, kétszer differenciálható függvényekre az előb–biekhez hasonló a szükséges, illetve az elégséges feltétel. A g függvénynek $a \in \mathbb{R}^n$-ben lokális szélsőértéke csak akkor lehet, ha a gradiensvektor

$$g'(a) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(a), \frac{\partial g}{\partial x_2}(a), \cdots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(a) \right) = (0, \cdots, 0).$$

Ha ez teljesül, és

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(a)(x_i - a_i)(x_j - a_j)$$

kvadratikus alak pozitív szemidefinit, akkor g-nek a-ban lokális minimuma, ha negatív szemidefinit, akkor lokális maximuma van.

Ezek alapján kijelenthetjük, hogy lokális szélsőértékek létezésének szükséges feltételt egyszerűbb adnunk, mint elégségeset, ugyanez érvényes a funkcionálokra is.

Ahhoz, hogy funkcionálok szélsőértékszámításáról beszélhessünk, szükségünk van néhány alapvető definícióra.

2.1. Definíció. *Legyen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $a < b$, és legyen f az $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tartományon értelmezett folytonos, valós értékű függvény. Az*

$$\mathcal{M} := \{x \in C^1([a,b]); x(a) = c, x(b) = d, \mathcal{R}_{(id,x,\dot{x})} \subset \Omega\},$$

(ahol $\mathcal{R}_{(id,x,\dot{x})}$ az $(id, x, \dot{x})$ függvény értékkészlete) ***megengedett függvényosztályon*** *értelmezett*

$$I(x) := \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t))\mathrm{d}t = \int_a^b f \circ (id, x, \dot{x}) \tag{2.1}$$

funkcionál szélsőértékhelyeinek meghatározását a ***legegyszerűbb variációs problémának*** *nevezzük. Az itt szereplő f függvény neve:* ***alapfüggvény****.*

Ahhoz, hogy lokális (relatív) szélsőértékekről beszélhessünk definiálnunk kell az $\mathcal{M}$ halmazon valamilyen távolságot, ez lesz az erős norma, illetve a gyenge norma.

2.2. Definíció (Metrikus tér). *Legyen X egy tetszőleges, nemüres halmaz, legyen $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy érvényesülnek a következő tulajdonságok:*

1. $\rho(x, y) \geq 0, \quad \rho(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

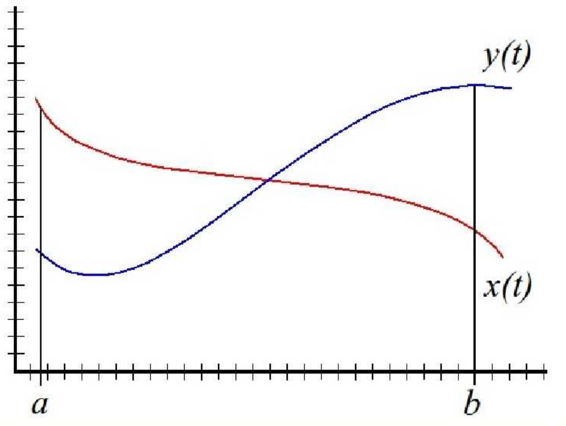
Az ilyen tulajdonságú $\rho(x, y)$ függvényt metrikának, az (X, ρ) párt pedig metrikus térnek nevezzük.

Ilyen metrikus tér az

$$X = C([a,b]), \quad \rho(x, y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)| =: \|x - y\|_0. \tag{2.2}$$

Ezt az $\|x - y\|_0$ normát nevezzük **erős normának**.

2.1. ábra. max metrika



A **gyenge normát** $\|x-y\|_1$-nal jelöljük, definíciója pedig $\|x-y\|_1 := \max|x-y| + \max|\dot{x}-\dot{y}|$.

Szemléletesen: Az erős norma azokat a függvényeket tekinti hasonlónak, amiknek a maximális különbsége elég kicsi. A gyenge norma azt is megköveteli, hogy ne csak a maximális különbségük legyen elég kicsi, hanem a meredekségük is nagyjából egyezzen.

2.3. Definíció. *Az I funkcionálnak az $x_0 \in \mathcal{M}$ függvényen* ***relatív gyenge minimuma*** *van, ha van olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathcal{M}$, $\|x-x_0\|_1 < \delta$ esetén $I(x_0) \leq I(x)$.*

2.4. Definíció. *Az I funkcionálnak az $x_0 \in \mathcal{M}$ függvényen* ***relatív erős minimuma*** *van, ha van olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathcal{M}$, $\|x-x_0\|_0 < \delta$ esetén $I(x_0) \leq I(x)$.*

Az erős, illetve gyenge norma definíciójából látható, hogy $\|\cdot\|_0$ az erősebb norma, mert $\|x-x_0\|_0$ körüli δ sugarú gömb tartalmazza az $\|x-x_0\|_1$ körüli δ sugarú gömböt.

A $-I$ funkcionálnak pontosan ott van lokális maximuma, ahol az I funkcionálnak lokális minimuma, így most csak a lokális minimum vizsgálatával foglalkozunk. Lokális szélsőértéket a variációszámításban relatívnak hívják, így mi is ezt fogjuk használni.

2.2. Euler–Lagrange-féle differenciálegyenlet

Euler[1] fogalmazta meg a variációszámítás alapfeladatát és fedezte fel a variációszámítás alaptételét, melyben az I funkcionál relatív gyenge szélsőértékének létezésére ad egy szükséges feltételt. Ezt Lagrange[2] bizonyította be, ezért lett a tételben szereplő differenciálegyenlet neve Euler–Lagrange-féle differenciálegyenlet [3].

2.5. Definíció. *Legyen $J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $x \in C^1(J)$. x* ***első felemeltjét*** *a következőképp definiáljuk: $x^{[1]} := (id, x, \dot{x}) : J \to \mathbb{R}^3$.*

2.1. Tétel. [1] *Legyen f kétszer folytonosan differenciálható. Ha a kétszer folytonosan differenciálható $x_0 \in \mathcal{M}$ függvény az I funkcionál relatív gyenge szélsőértéke, akkor kielégíti a*

$$(\partial_3 f \circ x_0^{[1]})^{\cdot} = \partial_2 f \circ x_0^{[1]} \tag{2.3}$$

Euler–Lagrange-féle differenciálegyenletet*.*

Az Euler–Lagrange-féle differenciálegyenlet egy másodrendű differenceiálegyenlet az x_0 függvényre, a (2.3) egyenlet

$$\partial_3 f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))^{\cdot} = \partial_2 f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))$$

az alakba hozható. Innen a deriválást elvégezve

$$\partial_{13} f(x_0^{[1]}(t)) + \partial_{23} f(x_0^{[1]}(t))\dot{x}_0 + \partial_{33} f(x_0^{[1]}(t))\ddot{x}_0(t) = \partial_2 f(x_0^{[1]}(t)) \tag{2.4}$$

kapjuk.

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in C^2([a, b]) \cap \mathcal{M}$ függvény az I funkcionál relatív gyenge szélsőértékhelye, és $\eta \in C_0^1([a, b])$ tetszőleges függvény, ahol $C_0^1([a, b]) := \{\eta \in C^1([a, b]); \eta(a) = \eta(b) = 0\}$. Vezessük be a φ függvényt az alábbi módon

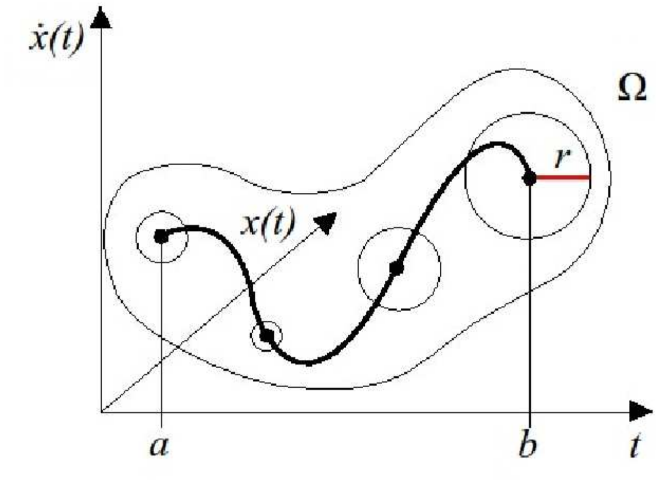
$$\varphi(\varepsilon) := I(x_0 + \varepsilon\eta). \tag{2.5}$$

Felmerül a kérdés, hogy a $\varphi(\varepsilon) \in ? \ \mathcal{M}$, vagyis x_0 variálásával az $\mathcal{M}$ halmaz értékkészletén belül maradunk-e. Tudjuk, hogy $x_0(t) \in \mathcal{M}$, $\eta(t) \in C_0^1([a, b])$ és $\eta(t)$ definíciója miatt

[1] Leonhard Euler (1707–1783): svájci matematikus és fizikus, a matematika egyik legjelentősebb alakja. 1732 körül fogalmazta meg a variációszámítás alapfeladatát, 1744-ben megjelent könyvében írt a megoldásáról.

[2] Joseph Louis Lagrange (1736–1813): olasz születésű francia matematikus. 1755-ben ő oldotta meg szabatosan a variációszámítás alapfeladatát.

$x_0(t)+\eta(t)$ a-ban c, b-ben pedig d. Tehát az maradt még hátra, hogy ε mely megválasztása esetén igaz, hogy $x_0(t) + \varepsilon\eta(t) \in \Omega$.



Az $x_0^{[1]}(t)$ görbén minden $t \in [a, b]$ pontra határozzuk meg a $t \mapsto r(t)$ függvényt, ahol $r(t)$ az $x_0^{[1]}(t)$ pont köré rajzolható olyan maximális gömb sugara, mely eleme az Ω nyílt halmaznak. Kérdés: van-e $\delta = \min_{t \in [a,b]} r(t)$?

Az $r(t)$ függvény egy folytonos függvény a háromszög-egyenlőtlenség miatt, vagyis ha t-t egy kicsit megváltoztatjuk, akkor az $r(t)$ értéke legfeljebb annyival változhat meg, amennyivel $x_0^{[1]}(t)$-t megváltoztattuk. Könnyen látható, hogy $r(t)$-re tekinthetünk úgy, mint az Ω halmaz komplementerétől vett távolságot. Erre azért van szükség, hogy a Weierstrass-tételt alkalmazhassuk. Az $[a, b]$ zárt intervallumon az $r(t)$ folytonos függvény felveszi a minimumát, tehát van ilyen δ.

Becsülje felülről az η abszolútértékét M_1, $\dot{\eta}$ abszolútértékét pedig M_2. Ekkor

$$\varepsilon\eta(t) \le \varepsilon M_1, \qquad \varepsilon\dot{\eta}(t) \le \varepsilon M_2,$$

vagyis $\varepsilon M_1 + \varepsilon M_2 < \delta$. Tehát

$$|\varepsilon| < \frac{\delta}{M_1 + M_2} \tag{2.6}$$

megválasztással $x_0(t) + \varepsilon\eta(t) \in \Omega$, tehát $x_0(t) + \varepsilon\eta(t)$ megengedett függvény.

A (2.1) képletbe behelyettesíthetjük $\varphi(\varepsilon)$ képletét, vagyis

$$\varphi(\varepsilon) = \int_a^b f(t, x_0(t) + \varepsilon\eta(t), \dot{x}_0(t) + \varepsilon\dot{\eta}(t))\mathrm{d}t. \tag{2.7}$$

Szeretnénk a $\varphi(\varepsilon)$ függvényt deriválni, amihez a [2] - 8.2.4.2 alpont szerinti alábbi tételre van szükségünk.

2.2. Tétel (Differenciálás az integráljel mögött). *Ha az* $\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x = F(y)$ *függvény értelmezve van a* $c \leq y \leq e$ *intervallumon és* $f(x,y)$ *folytonos az* $a \leq x \leq b$*,* $c \leq y \leq e$ *téglalapon és van* y *szerinti parciális deriváltja, akkor a* $[c,e]$ *intervallumban tetszés szerinti* y *esetén fennáll:*

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}x. \tag{2.8}$$

Az $f(t, x_0(t) + \varepsilon\eta(t), \dot{x}_0(t) + \varepsilon\dot{\eta}(t))$ függvényt t és ε szerinti függvénynek tekintjük, melyet ε szerint szeretnénk deriválni. A tétel feltételeinek ellenőrzése:

- Az $f(t, x_0(t) + \varepsilon\eta(t), \dot{x}_0(t) + \varepsilon\dot{\eta}(t))$ a $[c,d]$ zárt intervallumon van értelmezve, ezt korábban ellenőriztük;
- az $f(t, x_0(t) + \varepsilon\eta(t), \dot{x}_0(t) + \varepsilon\dot{\eta}(t))$ folytonos függvény (2.6) alapján a $[c,d] \times \left[-\frac{\delta}{M_1+M_2}, \frac{\delta}{M_1+M_2}\right]$ téglalapon;
- és létezzen ε szerinti parciális deriváltja.

Mivel $f(t, x_0(t) + \varepsilon\eta(t), \dot{x}_0(t) + \varepsilon\dot{\eta}(t))$ megengedett függvény, így a harmadik tulajdonság is teljesül, ezért alkalmazhatjuk 2.2 tételt, vagyis

$$\varphi'(\varepsilon) = \int_a^b \partial_2 f((x_0 + \varepsilon\eta)^{[1]}(t))\eta(t) + \partial_3 f((x_0 + \varepsilon\eta)^{[1]}(t))\dot{\eta}(t)\mathrm{d}t. \tag{2.9}$$

$\varepsilon = 0$ esetén a $\varphi'(0) = \int_a^b \partial_2 f(x_0^{[1]}(t))\eta(t) + \partial_3 f(x_0^{[1]}(t))\dot{\eta}(t)\mathrm{d}t$ egyenlet adódik. Mivel feltettük, hogy x_0 szélsőértékhelye az I funkcionálnak, ezért 0 szélsőértékhelye a φ függvénynek, tehát φ deriváltjának a 0 helyen 0-nak kell lennie. Helyettesítsük ezt be a (2.9) egyenletbe:

$$0 = \int_a^b \partial_2 f(x_0^{[1]}(t))\eta(t) + \partial_3 f(x_0^{[1]}(t))\dot{\eta}(t)\mathrm{d}t. \tag{2.10}$$

Az f és x_0 függvényekről feltettük, hogy kétszer differenciálhatók, és $\eta(a) = \eta(b) = 0$, ezért az integrandus második tagjában parciális integrálást alkalmazva

$$\int_a^b \partial_3 f(x_0^{[1]}(t))\dot{\eta}(t)\mathrm{d}t = -\int_a^b \left(\partial_{13} f(x_0^{[1]}(t)) + \partial_{23} f(x_0^{[1]}(t))\dot{x}_0(t) + \partial_{33} f(x_0^{[1]}(t))\ddot{x}_0(t)\right)\eta(t)\mathrm{d}t.$$

Ha ezt beírjuk a (2.10) egyenletbe, akkor

$$\int_a^b \left(\partial_2 f(x_0^{[1]}(t)) - \partial_{13} f(x_0^{[1]}(t)) - \partial_{23} f(x_0^{[1]}(t))\dot{x}_0(t) - \partial_{33} f(x_0^{[1]}(t))\ddot{x}_0(t)\right) = 0$$

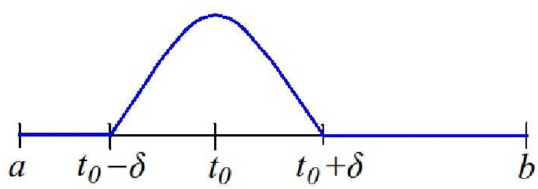
összefüggés adódik.

2.1. Lemma (Lagrange). [1] *Ha* $h \in C([a,b])$ *olyan függvény, hogy minden* $\eta \in C_0^1([a,b])$ *esetén fennáll* $\int_a^b h\eta = 0$*, akkor* $\forall t \in [a,b]\ h(t) = 0$.

Bizonyítás. Az állítást indirekt módon igazoljuk. Indirekt feltevésünk, hogy van olyan $t_0 \in [a,b]$, melyre $h(t_0) \neq 0$. Mivel h folytonos függvény, feltehető, hogy $t_0 \in (a,b)$, ugyanis ha t_0 valamelyik végpontban lenne, akkor a folytonosság miatt választhatunk egy közeli belső pontot, ahol a függvényérték nem zérus. Tegyük fel, hogy $h(t_0) > 0$ (ha $h(t_0) < 0$, a bizonyítás hasonlóan végezhető). Ekkor van olyan $\delta > 0$, melyre igaz, hogy minden t-re, mely t_0 δ sugarú környezetében van, a h függvény t-ben pozitív.

Egyszerűen megadható olyan $\eta \in C_0^1([a,b])$ függvény, melyre

$$\eta(t) = \begin{cases} \text{pozitív} & \text{ha } t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[, \\ 0 & \text{ha } t \in [a,b] \setminus]t_0 - \delta, t_0 + \delta[. \end{cases}$$



Ekkor

$$\int_a^b h\eta = \int_a^{t_0-\delta} h\eta + \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} h\eta + \int_{t_0+\delta}^{b} h\eta = \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} h\eta > 0,$$

ami ellentmond a lemma feltételének. ■

Mivel $\eta \in C_0^1([a,b])$ tetszőleges, ezért a 2.1 lemma szerint minden $t \in [a,b]$ esetén

$$\partial_2 f(x_0^{[1]}(t)) - \partial_{31} f(x_0^{[1]}(t)) - \partial_{32} f(x_0^{[1]}(t))\dot{x}_0(t) - \partial_{33} f(x_0^{[1]}(t))\ddot{x}_0(t) = 0.$$

Ezt átrendezve megkapjuk a (2.4) egyenletet:

$$\partial_2 f(x_0^{[1]}(t)) = \partial_{13} f(x_0^{[1]}(t)) + \partial_{23} f(x_0^{[1]}(t))\dot{x}_0 + \partial_{33} f(x_0^{[1]}(t))\ddot{x}_0(t), \tag{2.11}$$

ami az Euler–Lagrange-féle differenciálegyenlet. ■

3. fejezet

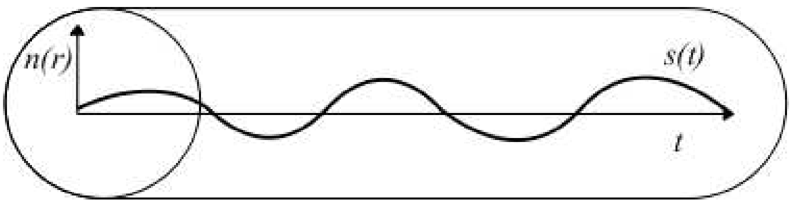
Alkalmazása

3.1. Optikai szál

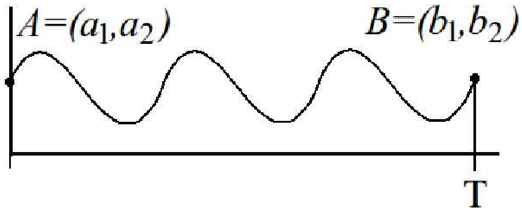
Manapság az élet összefonódott az elektronikus kommunikációval. Számítógépes háló–zatok, telefonközpontok összekötését a nagyobb teljesítmény érdekében optikai kábelekkel valósítják meg. Az optikai kábel egy nagyon tiszta üvegszálból (mag), és ezt körülvevő héjból áll. A lépcsős indexű optikai kábel olyan üvegszál, melynek törésmutatója a tengelytől a héj felé folyamatosan csökken, a legkisebb törésmutatóval a héj rendelkezik.

Matematikai modellünk felállításához az optikai szálat tekinthetjük hengernek. A törésmutató folyamatos csökkenése miatt a fénysugarak nem hirtelen szenvednek teljes visszaverődést, hanem elhajlanak.

A henger tengelye legyen koordinátarendszerünk t tengelye. Az egyszerűség kedvéért most csak azon sugarakkal foglalkozzunk, melyek a henger tengelyét tartalmazó síkban mozognak. A törésmutató a henger belsejében a tengelytől vett távolságtól függ, legyen ez $r \mapsto n(r)$, a sugarak útját egy $t \mapsto s(t)$ függvénnyel írhatjuk le.



Először is határozzuk meg a fénysugár időbeli mozgását. Ezt egy (τ, ξ) függvénypárral írhatjuk le, ahol $\tau(u)$ a sugár első, $\xi(u)$ pedig a második koordinátája az u időpontban. Legyen $A = (a_1, a_2)$ a kezdőpont és $B = (b_1, b_2)$ a végpont, ahová halad a fény. A közeg törésmutatója a $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ pontban $n(t, x) \in \mathbb{R}^+$, azaz a fény sebessége a (t, x) pontban $v(t, x) = \frac{c}{n(t,x)}$, ahol c a fény sebessége vákuumban. Tekintsük az A és B pontot összekötő görbét, amit egy olyan $x : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}$ függvénnyel adunk meg, melyre $x(a_1) = a_2$ és $x(b_1) = b_2$.



Tegyük fel, hogy ezen a görbén T idő alatt halad végig a fény. Ekkor az alábbi feltételeknek kell teljesülnie:

$$\tau(0) = a_1, \quad \tau(T) = b_1, \quad \xi(0) = a_2, \quad \xi(T) = b_2 \tag{3.1}$$

$$x(\tau(u)) = \xi(u) \qquad s \in [0, T]. \tag{3.2}$$

A fény sebességét a $(\dot{\tau}(u), \dot{\xi}(u))$ deriváltvektor adja meg, a törésmutató pedig meghatározza a sebesség nagyságát, ezért minden $u \in [0, T]$ esetén

$$v(\tau(u), \xi(u)) = \sqrt{\dot{\tau}^2(u) + \dot{\xi}^2(u)}.$$

Feltehető, hogy $b_1 > a_1$, így $\dot{\tau}(u) > 0$ minden időpontban, vagyis a fény nem fordul vissza. Ekkor az egyenletre

$$\frac{\sqrt{1 + \dot{\xi}^2(u)/\dot{\tau}^2(u)}}{v(\tau(u), \xi(u))} = \frac{1}{\dot{\tau}(u)}$$

alak adódik. A (3.2) feltétel miatt

$$\dot{x}(\tau(u))\dot{\tau}(u) = \dot{\xi}(u). \tag{3.3}$$

Mivel τ szigorúan monoton növő, létezik inverze. Helyettesítsük be az $u = \tau^{-1}(t)$ kifejezést és alkalmazzuk a (3.3),

$$\frac{\sqrt{1 + \dfrac{\dot{x}^2((\tau(\tau^{-1}(t)))\dot{\tau}^2(\tau^{-1}(t))}{\dot{\tau}^2(\tau^{-1}(t))}}}{v(\tau(\tau^{-1}(t)), x(\tau(\tau^{-1})))} = \frac{1}{\dot{\tau}(\tau^{-1}(t))}.$$

Ezt egyszerűsítve kapjuk a

$$\frac{\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}}{v(t,x(t))} = (\tau^{-1})'(t)$$

egyenletet. Integráljuk ezt az $[a_1, b_1]$ intervallumon, és használjuk fel a (3.1) összefüggést.

$$\int_{a_1}^{b_1} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}}{v(t,x(t))} = T(x) \tag{3.4}$$

A fizikában ezt hívják Fermat-elvnek, ami tehát azt mondja ki, hogy a T funkcionált minimalizálandó x függvény adja meg azt a görbét, amelyet követve a fény A pontból legrövidebb idő alatt B pontba jut.

A funkcionál minimumának megkereséséhez az Euler–Lagrange-féle differenciálegyenletet fogjuk használni. A funkcionált meghatározó alapfüggvény tehát az

$$f(t,r,\dot{r}) = \frac{\sqrt{1+\dot{r}^2}}{v(t,r)} \qquad (t,r,\dot{r}) \in \Omega :=]a_1, b_1[\times \mathbb{R}^2. \tag{3.5}$$

Mivel a törésmutató csak a sugártól függ, azt az esetet vizsgáljuk, amikor a v sebességfüggvény csak a második változótól függ. Tegyük föl, hogy létezik olyan $V \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ függvény, amellyel $v(t,r) = V(r)$, ha $(t,r) \in \mathbb{R}^2$, a törésmutató pedig $n(r) = \frac{c}{V(r)}$. Ekkor tehát a (3.4) funkcionálhoz tartozó, az egész $\mathbb{R}^3 =: \Omega$ halmazon értelmezett alapfüggvény

$$f(t,r,\dot{r}) = n(r)\sqrt{1+\dot{r}^2}, \tag{3.6}$$

melynek parciális deriváltjai

$$\partial_2 f(t,r,\dot{r}) = n'(r)\sqrt{1+\dot{r}^2}, \qquad \partial_3 f(t,r,\dot{r}) = n(r)\frac{\dot{r}}{\sqrt{1+\dot{r}^2}}.$$

Az Euler–Lagrange-féle differenciálegyenlet megtalálásához szükségünk lesz az alapfüggvény harmadik parciális deriváltjának t szerinti deriváltjára.

$$\begin{aligned}\partial_3 f(t,r(t),\dot{r}(t)))^{\cdot} = {} & n'(r(t))\dot{r}(t)\frac{\dot{r}(t)}{\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}} + \\ & + n(r(t)) \underbrace{\left(\frac{\ddot{r}(t)(1+\dot{r}^2(t))^{1/2} - (\frac{1}{2})\dot{r}(t)(1+\dot{r}^2(t))^{-1/2} 2\dot{r}(t)\ddot{r}(t)}{1+\dot{r}^2 t}\right)}_{A}\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$A = \frac{\ddot{r}(t)(1+\dot{r}^2(t))^{1/2} - \dot{r}^2(t)\ddot{r}(t)(1+\dot{r}^2(t))^{-1/2}}{1+\dot{r}^2(t)} =$$

$$= \frac{\ddot{r}(t)\overbrace{\left[(1+\dot{r}^2(t))^{1/2} - \dot{r}^2(t)(1+\dot{r}^2(t))^{-1/2}\right]}^{B}}{1+\dot{r}^2(t)} \tag{3.8}$$

$$B = \sqrt{1+\dot{r}^2(t)} - \frac{\dot{r}^2(t)}{\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}} = \frac{1+\dot{r}^2(t)-\dot{r}^2(t)}{\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}} \tag{3.9}$$

$$\Longrightarrow A = \frac{\ddot{r}(t)(1+\dot{r}^2(t))^{-1/2}}{1+\dot{r}^2(t)} = \frac{\ddot{r}(t)}{(1+\dot{r}^2(t))^{3/2}} \tag{3.10}$$

$$\Longrightarrow \partial_3 f(t, r(t), \dot{r}(t))^{\cdot} = n'(r(t))\frac{\dot{r}^2(t)}{(1+\dot{r}^2(t))^{1/2}} + n(r(t))\frac{\ddot{r}(t)}{(1+\dot{r}^2(t))^{3/2}} =$$
$$= \frac{n'(r(t))\dot{r}^2(t)(1+\dot{r}^2(t)) + n(r(t))\ddot{r}(t)}{(1+\dot{r}^2(t))^{3/2}}$$

Tehát az alapfüggvény harmadik parciális deriváltjának t szerinti deriváltja

$$\partial_3 f(t, r(t), \dot{r}(t)))^{\cdot} = \frac{n'(r(t))\dot{r}^2(t)(1+\dot{r}^2(t)) + n(r(t))\ddot{r}(t)}{(1+\dot{r}(t)^2)^{3/2}}. \tag{3.11}$$

A 2.1 tétel alapján írjuk fel az $f(t, r, \dot{r}) = n(r)\sqrt{1+\dot{r}^2}$ függvény Euler–Lagrange-féle differenciálegyenletét.

$$\frac{n'(r(t))\dot{r}^2(t)(1+\dot{r}^2(t)) + n(r(t))\ddot{r}(t)}{(1+\dot{r}(t)^2)^{3/2}} = n'(r(t))(1+\dot{r}^2(t))^{1/2} \tag{3.12}$$

$$n'(r(t))\dot{r}^2(t)(1+\dot{r}^2(t)) + n(r(t))\ddot{r}(t) = n'(r(t))(1+\dot{r}^2(t))^2 \tag{3.13}$$

$$n'(r(t))\dot{r}^2(t)(1+\dot{r}^2(t)) - n'(r(t))(1+\dot{r}^2(t))^2 = n'(r(t))(1+\dot{r}^2(t))\left[\dot{r}^2(t) - (1+\dot{r}^2(t))\right] =$$
$$= -n'(r(t))(1+\dot{r}^2(t)) \tag{3.14}$$

A (3.13) és a (3.14) egyenletekből a következőt kapjuk:

$$n(r(t))\ddot{r}(t) - n'(r(t))(1+\dot{r}^2(t)) = 0 \tag{3.15}$$

Legyen $n(\bar{r}) = \dfrac{n_0}{1+\lambda\bar{r}}$. Ekkor $n'(r(t)) = -n_0(1+\lambda r(t)))^{-2}\lambda$. Helyettesítsük be ezeket a (3.15) egyenletbe. Ekkor a következőt kapjuk:

$$\frac{n_0}{1+\lambda r(t)}\ddot{r}(t) + n_0(1+\dot{r}^2(t))(1+\lambda r(t)))^{-2}\lambda = 0.$$

Ezt leosztva n_0-al és beszorozva $(1+\lambda r(t))^2$-nel

$$\ddot{r}(t)(1+\lambda r(t)) + \lambda\dot{r}^2(t) + \lambda = 0. \tag{3.16}$$

Ez a másodrendű differenciálegyenlet visszavezethető elsőrendűre, amit a következő–képpen csinálunk. Legyen az y olyan függvény, hogy minden t pontban

$$y(r(t)) = \dot{r}(t).$$

Ekkor

$$\ddot{r}(t) = y'(r(t))\dot{r}(t) = y'(r(t))y(r(t)).$$

Ezeket behelyettesítve a (3.16) differenciálegyenletbe, és felhasználva r invertálhatóságát a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$y'(\bar{r})y(\bar{r})(1+\lambda\bar{r}) + \lambda y^2(\bar{r}) + \lambda = 0. \tag{3.17}$$

3.1. Definíció. *Legyen k olyan valós szám, hogy $k \neq 0$ és $k \neq 1$. Az*

$$y' + p(x)y = q(x)y^k$$

alakú differenciálegyenletet, ahol p és q az x független változótól függő adott folytonos függvények, Bernoulli-típusú differenciálegyenleteknek nevezzük.

Tehát a (3.17) egyenlet egy Bernoulli-típusú differenciálegyenlet, amit lineáris differen–ciálegyenletre való visszavezetéssel oldunk meg. Vezessük be a z függvényt úgy, hogy

$$z = y^2.$$

Ekkor $z' = 2yy'$, vagyis $y' = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{z'}{y}$. Ezek felhasználásával a (3.17) egyenlet a következőképp alakul

$$\frac{1}{2}z'(r)(1+\lambda r) + \lambda z(r) + \lambda = 0.$$

Oldjuk meg ezt a lineáris differenciálegyenletet.

$$z'(r)(1+\lambda r) = -2\lambda - 2\lambda z(r)$$

$$z'(r) = \underbrace{\frac{-2\lambda}{1+\lambda r}}_{a_0} + \underbrace{\frac{-2\lambda}{1+\lambda r}}_{a_1} z(r)$$

3.1. Tétel. [1] *Legyen $\tau \in I$, $\xi \in \mathbb{R}$ tetszőleges, és tekintsük az $\dot{x}(t) = a_0(t) + a_1(t)x(t)$ ($t \in D_x$) differenciálegyenletet az $x(\tau) = \xi$ kezdeti feltétel mellett. Ennek a kezdetiérték-problémának létezik megoldása, és az globálisan egyértelmű. A teljes megoldás:*

$$\forall t \in I \quad t \mapsto x(t) = e^{\int a_1} \left(\xi + \int a_0 e^{-\int a_1} \right).$$

Alkalmazzuk a 3.1 tétel megoldóképletét.

$$\int_0^{r_1} a_1 = \int_0^{r_1} \frac{-2\lambda}{1+\lambda r} = [-2\, ln(1+\lambda r)]_{r=0}^{r_1} = -2\, ln(1+\lambda r_1) - 2ln1 = ln(1+\lambda r_1)^{-2} + ln1^{-2}$$

$$z(t) = e^{\ln(1+\lambda r_1)^{-2} + \ln 1^{-2}} \left(\xi + \int_0^{r_1} \frac{-2\lambda}{1+\lambda r} e^{-\left(\ln(1+\lambda r_1)^{-2} + \ln 1^{-2}\right)} \right) \tag{3.18}$$

$$e^{\ln(1+\lambda r_1)^{-2} + \ln 1^{-2}} = e^{\ln(1+\lambda r_1)^{-2}} \cdot e^{\ln 1^{-2}} = e^{\ln(1+\lambda r_1)^{-2}} = (1+\lambda r_1)^{-2} \tag{3.19}$$

(3.19)-et használjuk a (3.18)-as egyenletben.

$$\begin{aligned} z(r) &= (1+\lambda r_1)^{-2} \left(\xi + \int_0^{r_1} \frac{-2\lambda}{1+\lambda r} e^{-\left(\ln(1+\lambda r_1)^{-2} + \ln 1^{-2}\right)} \right) = \\ &= (1+\lambda r_1)^{-2} \left(\xi + \int_0^{r_1} \frac{-2\lambda}{1+\lambda r} (1+\lambda r_1)^2 \right). \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{r_1} \frac{-2\lambda}{1+\lambda r}(1+\lambda r)^2 = \int_0^{r_1} -2\lambda(1+\lambda r) = -2 \int_0^{r_1} \lambda(1+\lambda r) = \\ = -2 \left[\frac{(1+\lambda r)^2}{2} \right]_{r=0}^{r_1} = -(1+\lambda r_1)^2 + 1. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Írjuk be (3.20)-ba a (3.21)-ben kapott eredményünket.

$$z(\bar{r}) = \frac{1}{(1+\lambda r_1)^2}\left(\xi + 1 - (1+\lambda r_1)^2\right) = \frac{\xi}{(1+\lambda r_1)^2} + \frac{1}{(1+\lambda r_1)^2} - \frac{(1+\lambda r_1)^2}{(1+\lambda r_1)^2} =$$
$$= \frac{\xi+1}{(1+\lambda r_1)^2} - 1 \tag{3.22}$$

$D := \xi + 1$, ahol $D \in \mathbb{R}$ állandó és $r_1 = r(t)$. Mivel $z = y^2$ és $y(r(t)) = \dot{r}(t)$, így

$$\dot{r}(t) = \sqrt{\frac{D}{(1+\lambda r(t))^2} - 1}$$

$$\frac{\dot{r}(t)}{\sqrt{\frac{D}{(1+\lambda r(t))^2} - 1}} = 1 \tag{3.23}$$

A megoldási módszer a következő: integráljuk mindkét oldalt a változó szerint.
A jobb oldal:

$$\int_{t_0}^{t} 1 \mathrm{d}t = [t]_{t=t_0}^{t} = t - t_0.$$

A bal oldal

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{r}(t)}{\sqrt{\frac{D}{(1+\lambda r(t))^2} - 1}} = \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{r}(t)(1+\lambda r(t))}{\sqrt{D-(1+\lambda r(t))^2}} \mathrm{d}t.$$

Ekkor a primitív függvény nem más, mint $\sqrt{D-(1+\lambda r(t))^2}$, mert

$$\left(\sqrt{D-(1+\lambda r(t))^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{D-(1+\lambda r(t))^2}}(-2)(1+\lambda r(t))\lambda \dot{r}(t) = \frac{-\lambda \dot{r}(t)(1+\lambda r(t))}{\sqrt{D-(1+\lambda r(t))^2}}.$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{r}(t)(1+\lambda r(t))}{\sqrt{D-(1+\lambda r(t))^2}} \mathrm{d}t = -\frac{1}{\lambda}\left[\sqrt{D-(1+\lambda r(t))^2}\right]_{t=t_0}^{t} =$$
$$= -\frac{1}{\lambda}\sqrt{D-(1+\lambda r(t))^2} + \frac{1}{\lambda}\sqrt{D-(1+\lambda r(t_0))^2} \tag{3.24}$$

Tehát a (3.23) egyenletből az integrálás után eddigi eredményeink felhasználásával a következő egyenletet kapjuk

$$t - t_0 = -\frac{1}{\lambda}\sqrt{D-(1+\lambda r(t))^2} + \frac{1}{\lambda}\sqrt{D-(1+\lambda r(t_0))^2}.$$

Szorozzuk ezt be λ-val:

$$\lambda t - \lambda t_0 = -\sqrt{D - (1 + \lambda r(t))^2} + \sqrt{D - (1 + \lambda r(t_0))^2}. \tag{3.25}$$

Válasszuk $r(t_0)$-t úgy, hogy $\sqrt{D - (1 + \lambda r(t_0))^2} = 0$ legyen. Ekkor a (3.25) egyenlet a következőképp alakul:

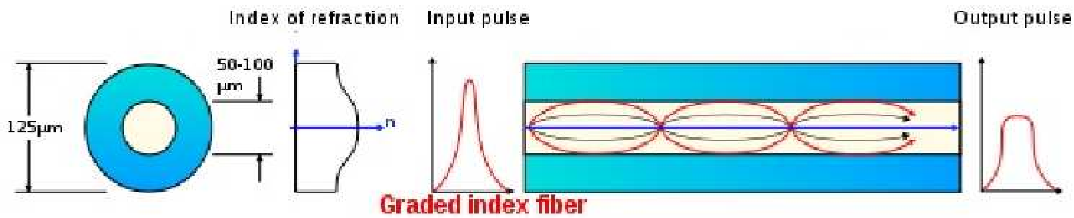
$$\lambda t - \lambda t_0 = -\sqrt{D - (1 + \lambda r(t))^2},$$

$$(\lambda t - \lambda t_0)^2 = D - (1 + \lambda r(t))^2.$$

Innen

$$D = (1 + \lambda r(t))^2 + (\lambda t - \lambda t_0)^2$$

összefüggést kapjuk D-re. Mivel ez egy körsereg egyenlete, azt kaptuk, hogy a fény egy ilyen köríven halad. Amikor eléri a tengelyt a körsereg egy másik köríven halad tovább.



4. fejezet

Összefoglalás

Dolgozatom célja az volt, hogy bemutassak a variációszámítás témaköréből egy jelentős alkalmazást. A 2. fejezetben az Euler–Lagrange-féle differenciálegyenletről szóló tételt ismertettem és annak pontos bizonyítását. Ezután a 3. fejezetben a Fermat-elvről volt szó, vagyis a „legkisebb idő" elvről. Az itt kapott eredmények alapján mehatároztam az optikai szálban terjedő fény pályáját.

5. fejezet

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Keleti Tamásnak, hogy segített témám kiválasztásában. Külön köszönet a konzultációkon tanusított türelméért, hasznos tanácsa–iért, útmutatásaiért.
Köszönet családomnak és barátaimnak türelmükért és támogatásukért.

Nyilatkozat

A szakdolgozat szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgo–zatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Irodalomjegyzék

[1] Tóth János, Simon L. Péter: Differenciálegyenletek, *297–323*, *Typotex*, 2005

[2] I.N. Bronstejn, K.A. Szemengyajev, G. Musiol, H. Mühlig: Matematikai kézikönyv, *Typotex*, 2000

[3] Simonovits András: Válogatott fejezetek a matematika történetéből, *77–85*, *Typotex*, 2009

[4] http://hu.wikipedia.org/wiki/Optikai_ szál