Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Hilbert program

A matematika ellentmondásmentességének problémája

és megoldásának folyamata

Szakdolgozat

Vajda Gergely

Matematika BSc, Matematikai elemző szakirány

Témavezető:

Szabó Csaba

Egyetemi tanár

Algebra és Számelmélet tanszék

Budapest

2012

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Játszótér

A Matematika: a görög *μάθημα* (mathéma) szóból származik, amely a „tudomány, tudás, tanulás” jelentésekkel bír.

A μαθηματικός (mathématikosz) jelentése: „tanulni szerető”.

Akár embereket, akár állatokat figyelünk, hamarosan szembetűnik, hogy a tanulás igénye mélységesen beleivódott létezésünkbe. Kiváncsiságunk megismerésre sarkall, s próbára tesszük elgondolásainkat. Észre vehetjük ezt egy játszó medve bocs és a gyermekek kedvenc időtöltéseiben egyaránt. Megismerni lehetőségeinket és képességeinket egy adott környezetben, nem csak érdekes, hanem élvezetes elfoglaltság. Mondhatni Élet. Az élet játéka. Minden lény gyarapítja ismereteit abban a környezetben, ahol találja magát és lehetőségeinek korlátain belül maximumra törekszik. A matematika azonban tovább ment. Fejlődése során kitágította a természetes megismerés határait. Megalkotta a valódi absztrakciót. Ezzel létrehozva egy új teret, egy igazi játszóteret, ahol a felfedezés, megismerés, kipróbálás játéka megtalálta ideális helyét.

Kezdetben volt a matematika, aztán jött csak az írásosság

A szám foglma a matematika alapköve, mégis egyre tágabb, nagyobb, teljesebb. Helyesebb tehát, nem épülethez hasonlitani a matematikát, inkább élőlényhez, minek tagjai, termete és képessége egyre nő.

Kezdetben (empirikus matematikában: kőkorszak) a szám fogalom a mennyiség megfogalmazására szorítkozott, de ez nem pusztán tárgyak vagy állatok megszámlálását jelentette, hiszen olyan rajzokat, találhatunk melyek csillagok mozgásán alapuló időmérésre utalnak. A paleontológusok találtak i. e. 70 000 körüli okkerkövekre vésett geometriai alakzatokat, egy dél-afrikai barlangban. Továbbá történelem előtti tárgyakat találtak Kr. e. 35 000 és Kr. e. 20 000 közöttről Franciaországban is, melyek az idő számszerű mérésére utalnak.

A monolitikus építmények (Kr. e. 3000-6000) látványosan igazolják, hogy a természetes számok ismerete (1, 2, 3 …) régebbi mint bármely fennmaradt szöveg. Már a korai civilizációkban (Mezopotámia, Egyiptom, India és Kína) is ismerték az aritmetikát. India nagyon szeretett játszani: a védikus matematika a korai vaskorban indult fejlődésnek és az első fennmaradt írásban a Satapatha-bráhmana (Kr. e. 9. század körül), 2 tizedesjegy pontossággal megközelítik a π értékét.

Az ókor új találmánya a számrendszeres vagy helyiértékes számábrázolás, és a számírás. Ez elkerülhetetlen volt, mert az emberi memória korlátai miatt, a matematika elmélyült művelése, írást igényel. Pontos geometriai ábrákat rajzolni a homokba, kényelmetlen, néha lehetetlen: íróeszközök kellenek. Arról nem is beszélve, hogy a gazdasági számításokat, legalábbis egy ideig meg kell őrizni. A csillagászati feljegyzéseket hosszú távon kell vezetni, hogy induktív értékkel bírjanak. Már ebben a szakaszban is megfigyelhető az a törekvés, hogy a különböző helyen élő matematikusok törekszenek egy közös nyelvre: az arab számokban egyeznek meg.

A görögök előtti időkből (Kr. e. 550 – i. sz. 300 megelőzően) fennmaradt matematikai emlékekben mindenütt az induktív érvelés módszerét használták, azaz ismételt megfigyelések alapján állították fel szabályaikat. A görög matematikusok ezzel szemben a deduktív érvelés módszerét használták. A görögök a logika segítségével vezették le a következtetéseket a definíciókból és az axiómákból.

Indiában pedig: 499-ben Árjabhata bevezette a sinus versus függvényt és elkészítette az első szinusztáblázatokat. Ezen kívül fejlesztette az algebrai algoritmusokat, az infinitezimális számításokat, a differenciálegyenleteket és egész számú megoldásokat talált elsőfokú egyenletekre a ma is használt módszerrel, valamint napközpontú gravitációs rendszeren alapuló pontos csillagászati számításokat végzett.

Később a középkori Europa is beszáll újra a játékba, élén Fibonaccival. A 17. században robbanásszerü fejlődésnek indul itt a matematika. Keplernek sikerült matematikai képletekkel kifejezni a bolygók mozgását, René Descartes (1596-1650) kifejlesztette az analitikus geometriát melynek segítségével fel tudta rajzolni a bolygók pályáját, a Descartes-féle koordináta-rendszerben. Az angol Isaac Newton felfedezte azokat a fizikai törvényeket, melyekkel meg tudta magyarázni Kepler törvényeit, és összefoglalta a differenciál- és integrálszámítás alapelveit. Tőle függetelenül Gottfried Wilhelm Leibniz, Németországban kifejlesztette a differenciálés az integrálszámítást melyben ma is az ő jelölésmódját használjuk. Egyszóval pezsgett az élet! Tanulmányozták az új számokat abból a célból, hogy a régebbi számokkal végzett aritmetikai műveletekre választ adjanak. A történelem előtti időkben a tört számokkal tudtak választ adni erre a kérdésre: melyik számot kell 3-mal szorozni, hogy eredményül 1-et kapjunk. Indiában és Kínában, majd jóval később Németországban bevezették a negatív számokat, hogy válaszolni tudjanak a kérdésre: mit kapunk, ha egy kisebb számból kivonunk egy nagyobbat. A nulla bevezetéséhez is hasonló kérdés vezethetett: mit kapunk, ha kivonunk egy számot önmagából?

És kérdés: milyen szám a 2 négyzetgyöke? Már a görögök is tudták hogy ez nem egy tört. A tizedestörtek bevezetése után, (John Napier 1550 – 1617) még jobb megoldás született: a tizedesek és egy olyan fogalom használatával, amely a határérték elődjének tekinthető, egy másik állandó, melyet Leonhard Euler (1707 – 1783) *e*-nek nevezett el (irracionális és tanszcendens szám).

Eulernek nagy hatása volt a matematikai fogalmak és jelölésmódok egységesítésére. A -1 négyzetgyökét az *i* szimbólummal jelölte. Ő terjesztette el a görög π betű használatát is a körök kerület-átmérő arányának jelölésére. Ő vezette le a matematika egyik legjelentősebb azonosságát is:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Miért fontos a matematikai fogalmak és jelölésmódok egységesítése?

Mert a játszótéren csak akkor nincs káosz, ha mindenki tisztában van a játék szabályaival, elemeivel és a játék céljával. Így hát az újkor, új rendet szeretett volna.

A 19. századtól a matematika egyre absztraktabbá válik. Ebben a században a nem-Euklideszi geometria két formája is létrejött, melyekben az euklideszi geometria párhuzamossági posztulátuma nem érvényes. Az euklideszi geometriában egy adott egyeneshez egy rajta kívüleső ponton keresztül egy és csakis egy párhuzamos húzható. Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij orosz matematikus és a magyar Bolyai János egymástól függetlenül alkották meg a hiperbolikus geometriát, ahol a párhuzamossági posztulátum nem érvényesül. Ebben a rendszerben a háromszög belső szögeinek összege kevesebb mint 180°. Az elliptikus geometriát később fedezte fel Bernhard Riemann német matematikus. Az ő rendszerében nincsenek párhuzamosok és a háromszög belső szögeinek összege nagyobb mint 180°. Riemann fejlesztette ki a Riemanni geometriát is, amely egyesíti és jelentősen általánosítja a három geometria-típust és ő definiálta a sokaság fogalmát is, amely a görbék és a felületek fogalmának általánosítása. Ezek a fogalmak fontos szerepet jászottak később Albert Einstein relativitáselméletében. A geometria ilyen radikális átalakulása, szükségszerűen maga után vonta a matematika struktúrájának teljes átalakulását.

A játék neve: tudomány

„Tudomány: A tudomány a bennünket körülvevő világ megismerésére irányuló tevékenység és az ezen tevékenység során szerzett ismeretek összessége. A tevékenységnek bárki által megismételhetőnek kell lennie és végeredményben azonos eredményre kell vezetnie ahhoz, hogy az eredményt tudományos eredménynek nevezhessük. A tudomány eredménye egyetemes érvényű.“ (Értelmező szótár)

A matematika tehát a tudomány igényével akart érvelni: ellentmondás mentesen, egyetemes érveléssel. Ehhez elkerülhetetlen az egységesítés. Ez az igény szülte a formalizmust is. A matematika, a valóság leképezése egy új környezetben. Ennek a környezetnek az objektumait, azok elhelyezkedését hivatott meghatározni az axiómák új rendszere és a műveletek számának növekedése.

A matematika megingása

A 19. században elkerülhetetlenné vált, hogy a matematika ellentmondásmentességét egyszer s mindenkorra igazolják. Ezt az tette szükségessé, hogy az Eukleidesz óta alkalmazott geometria alapú szemlélet és bizonyításrendszer létjogosultsága megkérdőjeleződött. A problémát először a Bolyai János által felfedezett nemeuklideszi geometriák okozták. Egészen addig az euklideszi geometrián kívül más geometria nem létezett, az euklideszi geometriában használt fogalmak és objektumok mindenki számára objektíven adottak voltak, tulajdonságaik abszolúte és függetlenül léteztek, ebből származott a geometria mindenki által elismert bizonyító ereje. Más geometriák eltérő szabályaiból más tételek bizonyíthatóak, például, a gömbi geometriában a háromszög belső szögeinek összege mindig nagyobb, mint 180°. Ezenkívül a legnagyobb problémát az analízis fejlődése jelentette, mert pl. a térkitöltő görbék és a mindenhol folytonos, de sehol sem differenciálható függvények (melyeknek minden pontja töréspont) felfedezése túllépett a geometriai szemléleten. Mivel a matematikai bizonyítások addig az euklideszi geometrián alapultak, ezek a felismerések nemcsak a geometriára voltak hatással, hanem a matematikai bizonyosságot is kétségessé tették, mert a matematika ellenmondásmentessége immár nem volt biztosított. A geometriai bizonyosság elvesztése tehát filozófiailag megengedhetetlen volt, hiszen ebből az következett, hogy elveszett minden bizonyosság az emberi tudásra vonatkozóan. A probléma megoldásában több neves matematikus is részt vett. Például Dedekind és Weierstrass, akik a geometria helyett az aritmetikát szándékozták kidolgozni úgy, hogy alkalmas legyen a matematika alapjának. Valamint Russell, Whitehead, Cantor és Frege, akik a halmazelméletre épülő logikát tartották a probléma megoldásának, egészen addig, amíg fel nem fedezték a halmazelmélet paradoxonjait, ami meghiúsította terveiket.

Ez a probléma, az adott kor egyik legtekintélyesebb matematikusa, David Hilbert számára is kiemelkedő fontosságú volt. 1900-ban a Nemzetközi Matematikai Kongresszuson tartott beszédében ismertette azt a 23 problémát, amivel a XX. századi matematikai kutatások irányát akarta meghatározni. Ezek között a második helyre került az aritmetika megalapozása, amelynek kidolgozásán maga is dolgozott. Hilbert ebben a programban tűzi ki célul a matematika formalizálását axiomatikus formában, valamint annak bizonyítását, hogy a matematikának ez az axiomatizálása ellentmondásmentes. Ez a hosszú időn át tökéletesített terv, ami Hilbert programként vált ismertté, ugyan később kivitelezhetetlennek bizonyult, mégis jelentős szerepet játszott a probléma megoldásában, mert amellett, hogy nagy mértékben hozzájárult a modern logika kialakulásához, ez a program jelentette azt a kihívást, amire Kurt Gödel az azt megcáfoló nemteljességi tételkör kidogolzásával válaszolt, és a problémát később megoldó Gerhard Gentzennek is Hilbert programja nyújtott inspirációt.

Hilbert így ír törekvéseiről:

“Elméletem célja az, hogy egyszer s mindenkorra biztos alapra helyezzem a matematikai módszereket. … A dolgok jelenlegi állása, ahol paradoxonokba ütközünk, elfogadhatatlan. Gondoljuk csak el: azok a definíciók és deduktív módszerek, amelyeket mindenki tanul, tanít, és használ a matematikában, az igazság és bizonyosság eszményi világában, abszurdumokra vezetnek! Ha a matematikai gondolkodás tökéletlen, akkor hol találjunk igazságot és bizonyosságot?” (Hilbert, On the infinite).

Magának a konzisztenciának a bizonyítása abból állt, amit Hilbert csak "finit módszer"-nek hívott. Szerinte a finit érvelés különleges ismeretelméleti jellegéből adódóan megadhatja a klasszikus matematika szükséges igazolását.

A kezdeti megoldási kísérletek közül Hilbert programja volt, ami a leginkább hozzá járult a probléma megoldásához, és ami a legnagyobb hatást gyakorolta a mai matematikára, mind módszertani értelemben az axiomatikus nézőpont tökéletesítésével, mint technikai szempontból, hiszen a ma is - nemzetközileg - használt formalizmust Hilbert hatására terjesztették ki az egész matematikára.

Dolgozatom célja, a matematika megalapozásának folyamatát bemutassam Hilbert programján keresztül, ismetetve az ő és a vele együtt dolgozók munkáját, valamint az amögött levő gondolati hátteret.

Bár Hilbert a programot végső formájában csak 1921-ben terjesztette elő, az alapvetően az 1900 tájékán elkezdett megalapozó munkáiból gyökerezik, amikor rámutatott arra, hogy az analízis ellentmondásmentességét bizonyítani kell. A programon végzett munka az 1920-as években haladt előre jelentősen, olyan logikusok hozzájárulásával, mint Paul Bernays, Wilhelm Ackermann, Neumann János, és Jacques Herbrand.

2. A Hilbert-program időrendi fejlődése

2.1 A megalapozáson végzett korai munkák

Hilbertnek a matematika megalapozásán végzett munkája a geometria területén elért eredményeiből gyökerezik, aminek kiteljesedése a Geometria alapjai (1899) című műve. Hilbert úgy gondolta, hogy bármilyen területen végzett tudományos kutatás egyetlen megfelelő módja az axiomatikus megközelítés. Az axiomatikus eljárás feltételezi, hogy egy elmélet kidolgozása független az intuíciótól, és ez elősegíti az alapvető fogalmak és az axiómák közötti logikai kapcsolatok elemzését. Az axiómák konzisztenciája és függetlensége alapvető fontosságú az axiomatikus szemléletben, így Hilbert munkájában is ezek kaptak kaptak központi szerepet. A geometria axiómái esetében a konzisztenciát bizonyíthatja az, hogy értelmezünk egy axiómarendszert a valós síkon, és így, a geometria konzisztenciája az analízis konzisztenciájára redukálható. Az analízis megalapozása, persze önmagában szükségessé teszi az axiomatizálást és a konzisztencia bizonyítását. Hilbert gondoskodott ugyan az analízis axiomatizálásáról is (Über den Zahlbegriff, 1900), de nagyon gyorsan világossá vált, hogy az analízis konzisztenciájának igazolása komoly nehézségekbe ütközik. Különösen azért, mert az analízis megalapozásának általánosan elfogadott módja Dedekind munkája volt, ami ahhoz hasonló kétséges feltételezésekre épít, mint a halmazelmélet paradoxonjai (például a Russell-paradoxon Frege aritmetikai megalapozásában – lásd később).

Hilbert rájött, hogy szükséges az analízis konzisztenciájának közvetlen bizonyítása, azaz olyan bizonyítás, ami nem egy másik elméletre épít. Az analízis konzisztenciájának bizonyításához az első lépés az aritmetika ellentmondásmentességének bizonyítása, ezért ő maga is benyújtott egy bizonyítási vázlatot erre 1905-ben. Számos tényező késleltette Hilbert megalapozó programjának további fejlődését. Az egyik talán Poincare kritikája (Revue de métaphysique et de morale, 1906), amit Hilbert vázlatos konzisztenciabizonyításáról írt, különösen az általa benne talált, körkörösen használt indukciókról.

Azt Hilbert is felismerte, hogy az axiomatikus vizsgálat jól bevált logikai formalizmust igényel. Abban az időben, mikor első bizonyításán dolgozott, Hilbert egy olyan logikai felfogásra támaszkodott, ami algebrai hagyományokra épült, különösen Schröder munkájára, de ez nem volt alkalmas a matematika axiomatizálásának formalizálására (Peckhaus, Hilbertprogramm und Kritische Philosophie,1990).

2.2 A Principia Mathemathica hatása

Bertrand Russell és Alfred North Whitehead publikációja, a Principia Mathematica (három kötet, 1910, 1912, 1913) tartalmazta a szükséges logikai alapot a megalapozás témájában való előrelépéshez. Ehhez kiinduló pontot adott a Cantor által kifejlesztett halmazelmélet, ugyanis a halmaz – különböző objektumok tetszőleges összessége – olyan egyszerű és alapvető fogalom, amely alkalmasnak tűnt arra, hogy olyan alapul szolgáljon, amire a matematika felépíthető. Azáltal, hogy Frege megmutatta, miként lehet a természetes számokat felépíteni a semmiből (vagyis az üres halmazból) a halmazelmélet segítségével, az aritmetikát átminősítették fundamentális struktúrából másodlagos struktúrává. A Principia alapötlete az volt, hogy a halmazelmélet ekvivalens a logikával, például a halmazelméleti tartalmazás relációja újraírható a logika implikáció relációjaként. Ezen a ponton úgy látszott, hogy a halmazelmélet-logika az egész matematika alapjául szolgálhat.

Annak megmutatása, hogy az egész matematika csak a logika törvényeinek alkalmazása, a platonizmust igazolta volna, minthogy a matematika többi részét magára a logikára vezette volna vissza. Ez volt a “logicista program”. A drámai fordulatot az jelentette, amikor ellentmondásokat fedeztek fel a halmazelméletben, a leghíresebb példát éppen maga Russell.

A Russel által talált paradoxon a következő volt:

Már a naiv halmazelméletben (a Cantor által kidolgozott kezdeti halmazelméletben) is a tartalmazás relációja egyértelmű tény volt, azaz $H \in G$ vagy $H \notin G$ közül csak egyik lehet igaz. Definiáljuk az R halmazt úgy, hogy egy tetsztőleges S halmaz akkor eleme, ha S nem eleme önmagának, azaz $R = \{S \mid S \notin S\}$. Formulával: $\forall S\ (S \in R \Leftrightarrow S \notin S)$.

A kérdés az, hogy R eleme-e saját magának?

Tegyük fel először, hogy $R \in R$. Ekkor R nem lehet olyan halmaz, ami tartalmazza saját magát, tehát $R \notin R$, ellentmondásra jutunk.

Tegyük fel most, hogy $R \notin R$, tehát nem tartalmazza saját magát. Ekkor definíció szerint eleme R-nek, tehát $R \in R$, így a következő ellentmondást kapjuk:

$$R \in R \Leftrightarrow R \notin R$$

Russell felfedezése alapjaiban rengette meg a matematikát, ugyanis bebizonyítható az, hogy egy olyan elméletben, amiben logikai eszközökkel levezethető ellentmondás, minden logikai eszközökkel levezethető tétel tagadása is levezethető. A Russell paradoxon és más antiómák rámutattak, hogy a logika semmivel sem biztonságosabb, mint a klasszikus matematika, sőt az aritmetikában vagy geometriában sosem fordultak elő ellentmondások, így megoldás helyett, csak mélyítették a krízist. Frege és Russell ezután a halmazelmélet olyan átdolgozására törekedtek, amellyel kiküszöbölhetők a paradoxonok, hogy megmenthessék tervüket, miszerint a matematikát a logika alapjára építsék. Ez a szándék azonban nem sikerült, mert mire a halmazelméletet kijavították, addigra olyan bonyolult struktúra vált belőle, hogy már nem lehetett vele azonosítani a filozófiai értelemben vett logikát, ami az érvelés helyes szabályait jelentette.

Hilbert tanítványai 1914-től kezdve tanulmányozták a *Principia* rendszerét, köztük Heinrich Behmann (lásd Mancosu 1999 on Behmann's role in Hilbert's school), de Hilbert maga csak 1917-ben tért vissza a megalapozás kérdéséhez. Levelet intézett a svájci Mathematical Society-hez, “Axiomatic Thought” címmel (1917 szeptember), melyben ismét hangsúlyozza az axiomatikus rendszerek ellentmondásmentesség-igazolásának követelményét:

"A fő követelmények tekintetében az axiómák elméletében messzebbre kell menni (pusztán az ismert paradoxonok elkerülésénél), azaz meg kell mutatni, hogy minden szakterületen belül az annak alapjául szolgáló axióma-rendszerbeli ellentdmonások létezése *teljesen lehetetlen.*"

Ez az első közzétett munkája 1905 óta, amivel hozzájárul a matematika alapjainak meghatározásához. Újra felvetette, hogy az aritmetika (és a halmazelmélet) konzisztenciájának bizonyítása a leglényegesebb nyitott probléma. Mindkét esetben, úgy tűnik, hogy nincs más elérhető alap, amelyre a konzisztencia visszavezethető lenne, mint a logika maga, amiről Hilbert akkor úgy gondolta, hogy a problémát Russell már lényegében megoldotta a *Principia*-ban. Mindazonáltal, az axiómákat érintő más alapvető problémák továbbra is fennállnak, beleértve "a matematikai kérdések eldönthetőségének" problémáját. Ezek, az axiomatika megoldatlan problémái arra késztették Hilbertet, hogy a következő években kiemelkedő erőfeszítést szenteljen a logika területén végzett munkára. Paul Bernays asszisztensként csatlakozott hozzá Göttingenben, 1917-ben. Egy kurzussorozat során 1917-1921 között Hilbert, Bernays és Behmann segítségével, jelentős, új hozzájárulást tett a formális logika területéhez. A kurzus, különösen az elsőrendű logika kifinomult fejlesztését foglalta magába, és alapját képezte Hilbert és Ackermann tankönyvének, a *Principles of Theoretical Logic*-nak (1928). (lásd Sieg 1999 és Zach 1999)

2.3 A konstruktivista irányzat

Ugyanebben az időben nyert teret L. E. J. Brouwer konstruktivista elmélete. Brouwer a természetes számokból indult ki, amik nézete szerint alapvető intuíció révén adottak, és így a matematika kiindulópontjai lehetnek. Ennek a hozzáállásnak, miszerint a természetes számok eleve adottak, és létük igazolásra nem szorul, Kronecker volt legfőbb szószólója, aki szerint: „*Isten teremtette az egész számokat, minden egyéb az ember műve*”. Ez szöges ellentétben állt Hilbert nézetével, aki szerint a természetes számokat nem tekinthetjük eleve adottnak, hanem azokat axiomatikus módszerrel szükséges felépíteni. Brouwer elképzelése az volt, hogy a matematikát a természetes számokból építsék fel „konstruktívan”. Álláspontja szerint a matematikai objektumokat nem lehet értelmesnek tekinteni, azaz nem is léteznek mindaddig, amíg nincsenek megkonstruálva véges sok lépésben a természetes számokból kiindulva, továbbá nem elegendő megmutatni azt, hogy nemlétezésük feltételezése ellentmondásra vezet. A konstruktivisták szerint, a klasszikus matematika sok alapvető bizonyítása érvénytelen, mivel elutasítják például az indirekt (egzisztencia-) és diagonalizációval készült (önreferencia) bizonyításokat. Bizonyos esetekben lehetséges konstruktivista bizonyítás megadása, más esetekben azonban megmutatható, hogy nem lehetséges konstruktivista bizonyítást adni. Így vannak olyan tételek, amiket a klasszikus matematika jól megalapozottnak tekint, de konstruktivista szempontból hamisnak számítanak.

Hilbert korábbi tanítványa, Hermann Weyl is a konstruktivizmus híve lett. Weyl cikket írt "The new foundational crisis in mathematics" címmel 1921-ben, amire Hilbert három beszélgetés során válaszolt Hamburgban, 1921 nyarán. Hilbert nem volt elragadtatva a konstruktivizmustól, ugyanis szerinte "amit Weyl és Brouwer tesz, az nem más, mint követni Kroenecker lábnyomait! Arra törekszenek, hogy oly módon mentsék meg a matematikát, miszerint mindent kidobnak, ami csak bajt okozhat (…) Felaprítanák és összekaszabolnák a tudományt. Ha olyan reformot követnénk, amilyet ők javasolnak, akkor azt kockáztatnánk, hogy legértékesebb kincseink nagy részét elveszítjük!".

2.4 Finitizmus, és a konzisztencia bizonyítására való törekvés

Az elkövetkező néhány évben Hilbert hozzáállása fordulatot vett, és elutasíttotta Russell logicista megoldását az aritmetika konzisztenciájának problémájára és előadta saját javaslatát a matematika megalapozás-problémájának megoldására. Ez a javaslat egyesítette Hilbert 1904 óta született ötleteit a konzisztencia direkt bizonyítását illetően, koncepcióját az axiomatikus rendszerekről, valamint az axiomatizálás technikáiban történt azon fejlődéseket, amik Russell, a saját, és más munkatársak munkái során születtek. Az az új irányzat, amivel Hilbert a megalapozási tervezetében megadta a választ Brouwer és Weyl kritikájára, a finitista látásmód volt.

Hilbert szerint a matematikának van kiváltságos része: az elemi számelmélet, ami csupán "konkrét jelek tisztán intuitív alapjára" támaszkodik. Míg az absztrakt fogalmakkal való műveleteket "helytelennek és bizonytalannak" tartotta, azt vallotta, hogy "van az extra-logikus diszkrét objektumoknak egy olyan területe, amelyek közvetlen tapasztalás révén intuitívan léteznek a gondolat előtt. Ha a logikus következtetés bizonyos, akkor ezeknek az objektumoknak minden részükben alkalmasaknak kell lenniük a vizsgálatra, az eltéréseiknek, következményeiknek (mint maguknak az objektumoknak önmaguknak), közvetlenül, intuitíven kell létezniük számunkra olyasvalamiként, amiket nem lehet visszavezetni valami másra”. (Hilbert 1922, “Neubegründung der Mathematik: Erste Mitteilung”, Abhandlungen aus dem Seminar der Hamburgischen Universität).

Ezek az objektumok a *jelek* voltak. A véges számok - azaz egységek sorozatai - tartalmazzák a számelmélet tartományát. Ezeknek nincs értelme, azaz nem jelképeznek absztrakt fogalmakat, természetük pusztán formális jellegű, de lehet velük műveletet végezni (pl. kompozíció) és össze lehet őket hasonlítani. Tulajdonságaik és relációik ismerete intuitív, és közvetlenül adódik logikai következtetésből. A számelmélet felépítése ezen az úton biztonságos volt Hilbert szerint, ugyanis nem merülhettek fel ellentmondások egyszerűen amiatt, mert nem volt logikai struktúrája az elemi számelmélet tételeinek.

A jelekből álló formulákon végzett intuitív műveletek formálták az alapját Hilbert matematikájának, amelyet ő metamatematikának nevezett. Ahogy a számelméletben műveleteket végzünk egységek sorozatával, úgy a metamatematikában műveleteket végzünk szimbólumok sorozatával (formulák, bizonyítások). A formulák és bizonyítások szintaktikailag manipulálhatók, és a formulák és bizonyítások tulajdonságai és relációi a szimbólumokhoz hasonlóan egy logikamentes intuitív képességen alapulnak. Ez garantálja annak bizonyosságát, hogy más formulákat és bizonyításokat kaphassunk ilyen szintaktikai műveletekkel. Mindamellett a matematika maga absztrakt fogalmakkal végez műveleteket, mint kvantorok, halmazok, függvények; és logikai következtetéseket használ, amik matematikai elveken alapulnak, mint például az indukció.

Ezek a fogalomképzések és érvelési módok heves kritikát váltottak ki Brouwer-ből és másokból is egyrészt filozófiai síkon, mert ez a szemlélet adottnak tételezte fel a matematikai objektumok teljes végtelen mindenségét, másrészt pedig azért, mert ez a látásmód semmitmondó definíciókat von maga után. További nehézségeket láttak abban is, hogy a program csak azután léphet működésbe, miután a matematikát átkódoltuk egy formális nyelvre úgy, hogy a bizonyításokat egy gép is ellenőrizhesse, viszont ami a szimbólumok jelentését illeti, az valami matematikán kívülivé válik. Hilbert szándéka ellenben az volt, hogy igazolja elméletének hasznosságát. Evégett rámutatott, hogy a jelekből álló formulákon végzett intuitív műveletek formalizálhatók axiómarendszerekben (mint ahogy azt a Principiában is tették, és azon módszerekkel is, amit saját maga fejlesztett ki), és a matematikai tételek és bizonyítások így olyan formulákká válnak, amik a matematikai axiómákból keletkeznek a származtatás szigorúan meghatározott szabályai szerint. A matematika ezáltal bizonyítandó formulák gyűjteményévé válna. Ezután a Hilbert program célja egy matematikai bizonyítás volt arra, hogy nem vezethető le ellentmondás, azaz nem lehet egyszerre levezetni egy A formula, és annak tagadása, a $\neg A$ formula helyességét.

A program céljainak körvonalazása kitöltötte Hilbert és munkatársainak következő tíz évét. Fogalmi síkon a finit álláspont és a konzisztenciabizonyítás kidolgozásában Hilbert és Paul Bernays vállalt meghatározó szerepet számos publikáció kiadásával, de emellett más munkatársaik is részt vettek a program technikai kidolgozásában. A fent említett publikációk közül Hilbert cikke, az "On the infinite" (1926) rendelkezik a finitista álláspont legrészletesebb kidolgozásával.

3. A finitista látásmód

Hilbert matematikai filozófiájának sarokköve, és gondolkozásának alapvetően új aspektusa 1922-től abban állt, amit ő finit matematikának nevezett. Ahogy arra a nevében is utalást tesz, a módszernek a véges jellege áll a középpontban. Ez a módszertani szempont abból áll, hogy azokra a fogalmakra korlátozzuk a matematikai gondolkodást, amelyek Hilbert megfogalmazásában "intuitívan adódnak, mint minden gondolatot megelőző elsődleges tapasztalat". Továbbá azokkal a műveletekkel és érvelési módszerekkel foglalkozik, amik nem teszik szükségessé absztrakt fogalmak bevezetését, különösen a végtelen mennyiségek fogalmát. (Hilbert 1922, Neubegründung der Mathematik: Erste Mitteilung)

Ugyan Hilbert sosem definiálta egzakt módon, hogy mit ért pontosan finitizmus alatt, az általa adott aritmetikai példákon, valamint különböző írásain keresztül betekintést nyerhetünk matematikai gondolkozásmódjába.

Hilbert finitista álláspontjával kapcsolatban több alapvető és egymással is összefüggő kérdést kell megválaszolni:

1. Mik a tárgyai a finit érvelésnek?
2. Mik a jelentős problémák a finit módszer területén?
3. Melyek az elfogadható módszerei a finit érvelésnek?

3.1 Finit objektumok és finitista ismeretelmélet

Hilbert egy jól ismert lapban jellemzést írt a finit érvelésről, amely írásnak nagyjából egyező volt a nyelvezete más 20-as évekbeli filozofikus írásaival:

"Mint a logikai következtetések használatának, és a logikai műveletek véghezvitelének feltételeként, valamilyen formában adva kell lennie a reprezentáció képességének, egyfajta extralogikus egyértelmű fogalmaknak, amik intuitívan adódnak, mint minden gondolatot megelőző elsődleges tapasztalat. Ha a logikai következtetések megbízhatóak, akkor minden valószínűség szerint lehetséges eme fogalmak minden részletre kiterjedő teljes áttekintése, és a tény hogy ezek különböznek egymástól, egymásból következnek vagy egymásnak ellentmondanak, közvetlenül adódnak intuitívan a fogalmakkal együtt, mint valami, amit sem nem lehet visszavezetni más fogalmakra, sem nem igényelnek magyarázatot. Ez az alap filozófiai helyzet, amit a matematika és általában minden tudományos gondolkodás, megértés és kommunikáció feltételének tartok." (Hilbert, On the infinite, 1926)

Ezeket a fogalmakat Hilbert jeleknek nevezte. A klasszikus számelmélet esetében a szóban forgó jelek számok, mint 1, 11, 111, 1111…

Arra a kérdésre, hogy Hilbert pontosan hogyan gondolt a számokra, nehéz válaszolni. Ezek szerinte nem fizikai objektumok (például valódi írásjelek a papíron), mivel mindig fennáll a lehetősége annak, hogy megnövelünk egy számot egy további egységgel. Ám a végtelen fogalmának használatát kerüli Hilbert, mint ahogy azt az "On the infinite" című írásában is kifejti, azt is kétségesnek tartja, hogy maga a fizikai univerzum végtelen. Hilbert szerint a "számok alakja lehet általánosan és feltétlenül elismert általunk – függetlenül tértől és időtől, a jelek produkálásának speciális feltételeitől, és a végeredményben levő inszignifikáns eltérésektől". A számok nem szellemi termékek, mivel a tulajdonságaik objektívek, mégis létezésük ösztönös érzékeléstől függ. Egyértelmű minden esetben az, hogy logikailag primitívek, vagyis sem nem képzetek (ahogy a Frege számok azok), sem nem halmazok. Ami fontos itt, az nem elsősorban a metafizikai állapot (értve ezalatt, hogy absztrakt vagy konkrét), hanem az, hogy nem alkotnak logikai kapcsolatot, például nem lehetnek semminek a kijelentései.

Bernays előadásaiban, a finitizmus fogalmai formális fogalmakként vannak jellemezve, amelyeket rekurzívan generálnak az ismétlés folyamata által. A leírt szimbólumok a konkrét reprezentációi ezeknek a formális fogalmaknak.

A kérdés, hogy mit értett Hilbert a finitizmus fogalmainak ismeretelméleti státuszán, hasonlóképpen összetett. Annak érdekében, hogy végrehajthassák a teljes matematika egy biztos megalapozásának igazolását, a finit fogalmakhoz való hozzáférésnek közvetlennek és biztosnak kell lennie. Hilbert filozófiai háttere kanti eredetű volt, ahogy Bernays-é is, aki szoros kapcsolatban állt Leonard Nelson neokantiánus iskolájával Göttingenben. Hilbert a finitizmusról való értelmezésében gyakran hivatkozik kanti intuícióra, és a finitizmus fogalmaira, mint magától adódó fogalmakra. Csakugyan, Kant ismeretelméletében a közvetlenség meghatározó jellemzője az ösztönös tudásnak. A kérdés az, hogy milyen fajta intuíció játszik itt szerepet. Mancosu 1998-ban felfedett egy különbözést ebben a tekintetben. Azzal érvel, hogy Hilbert korai írásaiban az intuíció, mint észlelési intuíció szerepel, Bernays későbbi írásaiban pedig úgy van meghatározva, mint a kanti intuíció egy formája, azaz az a priori ismeret és a jelen szintézise (pl. Bernays "Zusatz zu Hilberts Vortrag über "Die Grundlagen der Mathematik" 1928). Ugyanakkor nagyjából azonos időben Hilbert ("Die Grundlagen der Mathematik" 1928) az intuíciót továbbra is észlelési szerepben azonosítja.

Hilbert a finit gondolkodásmódról úgy ír, mint a tudás egy független forrása az apriori tudás és a tiszta intuíció és érvelés mellett, azt állítva, hogy ő "felismerte és definiálta a tudás harmadik formáját, ami a tapasztalat és logika kísérője" (Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre, 1931). Bernays és Hilbert együtt igazolták a finit ismeretet nagyjából kanti kifejezésekkel (habár olyan messze nem mentek el, hogy transzcendentális következtetéseket vonjanak le), úgy jellemezve a finit érvelést, mint az érvelés olyan módját, ami minden matematikai gondolkodást megalapoz, és tulajdonképpen a tudományos gondolkodást magát is, amely nélkül az ilyen tevékenység lehetetlen lenne.

3.2 Finit tételek és finitista érvelés

A legalapvetőbb kérdés a véges számokat illetően, az egyenlőség vagy nemegyenlőség. Ezen túlmenően a finit álláspont lehetővé tesz egyéb műveleteket véges objektumokon, melyek közül alapvető az összefűzés. Az 11 és 111 számok összefűzésesének jelentése “2+3”, és az állítás, hogy 11 és 111 összefűzése ugyanazt az eredményt adja, mint 111 és 11 összefűzése, “2+3 = 3+2” miatt adódik. A tényleges bizonyításelméleti gyakorlatban, valamint kifejezetten Hilbert és Bernays 1930-1934 közötti munkájában ezeket a műveleteket rekurzióval definiált műveletként általánosítják, jellemzően primitív rekurziót használva, mint például a szorzás és hatványozás. A primitív rekurzív függvények az alap függvények, és a belőlük tetszőleges számú kompozícióval és rekurzióval származtatott függvények.

Hasonlóképpen a finit eldöntési problémák nem korlátozódnak az egyenlőség-nemegyenlóség eldöntésére, hanem vannak egyéb alapvető eldönthető tulajdonságok, mint például “prím-e.” A finit módszer használata elfogadható mindaddig, amíg a jellemző tevékenység tárgya nem a végesség maga. Például az a műveletet, ami egy számot 1-be transzformál, ha prím, egyébként 11-be, definiálható primitív rekurzióval, ennél fogva véges műveletnek tekinthető. Ilyen véges feladatok kombinálhatók a szokásos logikai műveletekkel, mint konjunkció, diszjunkció, negáció, de szintén csak korlátozott számban. Hilbert azt a tételt hozta fel példaként, hogy “létezik prímszám p+1 és p!+1 között”, ahol p elég nagy prím. Ez az állítás a finit nézet szerint elfogadható, mivel “csupán a feladat lerövidítését szolgálja” annak, hogy valamely szám a p+1, vagy p+2, vagy … vagy p!+1 közül prím.

A problémás finit tételek azok, amelyek általános tényeket fejeznek ki számokkal kapcsolatban, mint például hogy egy adott n számra 1+n = n+1. A problémát az rejti, hogy Hilbert szerint, “ezt a finit álláspont szerint képtelenség tagadni”. Ezt úgy értette, hogy az az ellentmondó állítás, hogy létezik olyan n szám, melyre 1+n ≠ n+1, finit módon nem értelmezhető, ugyanis “Nem lehet tudni, elvégre ki kellenne próbálni az összes számot” (Hilbert 1928, Die Grundlagen der Mathematik). Ugyanebből az okból egy általános finit tételt nem lehet értelmezni a végtelennel összefüggésben, “kizárólag, mint egy hipotetikus igazolás, ami kijelent valamit egy előre adott számról”. Az általános finit módszert követő megállapítások problematikusak ebben az értelemben. Ennek ellenére különösen fontosak Hilbert bizonyításelméletében, hiszen annak az állításnak, hogy egy S formális rendszer konzisztens, általánosan a következőképpen fogalmazható meg: minden adott P formula sorozatra, P nem vezet ellentmondásra S-ben.

3.3 Finit műveletek és finit bizonyítás

Döntő fontosságú annak megértése, hogy mind a finitizmusban, mind Hilbert bizonyításelméletében milyen műveletek és milyen bizonyítási elvek megengedettek a finitista szempontból. Erre az általános válasz világosan kitűnik Hilbert bizonyításelméletének követelményeiből. Az nem várható el, hogy adott legyen a matematikának egy formális rendszere (vagy akár egy egyszerű formulasorozat), amiről “látható”, hogy ellentmondásmentes azon a módon, ahogyan mi képesek vagyunk látni, mint például azt hogy $11+111=111+11$. Ami Hilbert szerint szükséges egy konzisztenciabizonyításhoz, az a következő eljárás:

1. Vezessünk be formális nyelvet és formális következtetési szabályokat oly módon, hogy azok elegendőek legyenek ahhoz, hogy minden klasszikus tétel „helyes bizonyítását” egy olyan formális levezetéssel lehessen reprezentálni, amely axiómákból indul ki és minden lépése mechanikusan ellenőrizhető.
2. Tekintsük ezt a nyelvet egy véges jelkészletnek, amely elemeiből véges sorozatok, formulák képezhetők, és ezek átrendezhetők a következtetési szabályok szerint, amelyek itt formulaalakítási szabályoknak tekintendők. Fejlesszünk ki ennek a formalizált nyelvnek kombinatorikai tulajdonságaira egy elméletet. Ezt az elméletet nevezték el „metamatematikának”.
3. Bizonyítsuk be tisztán véges érvelésekkel, hogy ebben a rendszerben nem lehet ellentmondást levezetni, például azt, hogy $1 = 0$.

Hilbert sosem tért ki arra, hogy milyen a finitista szempontból elfogadható műveletek és bizonyítási eljárások általános alakja, kizárólag a klasszikus számelméletből vett példákon keresztül beszélt arról, hogy mit fogad el végesnek. A klasszikus indukció használatát elfogadta a finit elméleti állításokban. 1923-ban azt mondta, hogy az intuitív gondolkodás „tartalmazza a rekurzió és az intuitív indukció használatát véges entitásokon", majd exponenciális példát hozott fel. 1930-ban Bernays kifejtette, hogyan lehet a hatványozásról belátni, hogy az a számokkal való véges művelet (Bernays, Paul, 1930, Die Philosophie der Mathematik und die Hilbertsche Beweistheorie). Hilbert és Bernays a véges számelméletről adott egyetlen általános beszámolójuk szerint, a primitív rekurzióval definiált műveletek és indukciót használó bizonyítások számítanak a finit álláspont szerint elfogadhatónak (Hilbert, David and Bernays, Paul, 1934, *Grundlagen der Mathematik*, vol. 1). Ezen módszerek mindegyike formalizálható egy rendszerben, amit primitív rekurzív aritmetikaként ismerünk, amely lehetővé teszi függvények primitív rekurzióval való definiálását, és a kvantort nélkülöző képleteken alkalmazott indukciót. Azonban sem Hilbert sem Bernays nem állította soha azt, hogy kizárólag primitív rekurzió számít végesnek, és ők valójában nem csak primitív, hanem „valódi" rekurziót is használtak egyébként finitnek szánt konzisztenciabizonyításaikban. Azaz a bizonyítás definíciójában utaltak magára a bizonyításra, ami viszont nem állja meg a helyét Gödel 1930-ban publikált nemteljességi tételeivel szemben – lásd lentebb - (Tait, W.W., 2002, "Remarks on finitism", in Reflections on the Foundations of Mathematic).

Mivel nem teljesen világos, hogy Hilbert finit álláspontja mit tartalmazott, van némi mozgástér a megszorítások felállításában, hogy ismeretelméletileg a finit műveleteket és bizonyításokat elemezhessük. Hilbert úgy jellemezte a véges számelmélet fogalmait, hogy azok „intuitív módon adottak" és „minden részükben vizsgálhatók", és elmondása szerint alapvető tulajdonságaiknak „intuitívan létező"-nek kell lenniük számunkra. Bernays állítása szerint a finit matematikában csak „egyszerű intuitív gondolatok játszanak szerepet", a finitizmussal kapcsolatban ő az „intuitívan egyértelmű" kifejezést használja (Bernays, Paul, 1922, Über Hilberts Gedanken zur Grundlegung der Arithmetik). A finitizmusnak ez az elsődlegesen intuícióként és intuitív tudásként való jellemzése különösen nagy hangsúlyt kapott Parsons által, aki szerint, ami finit eljárásnak számít ebben az ételemben, az nem más, mint azok az aritmetikai műveletek, amiket az összeadásból és szorzásból képezhetünk véges rekurzió segítségével. Parsons szerint a hatványozás és az általános primitív rekurzió nem fogadható el végesnek (Parsons, Charles, 1998, Finitism and intuitive knowledge).

Tait 1981-ben közzétette széles körben elfogadott tézisét, miszerint „a finit matematika nem más, mint primitív rekurzív aritmetika”. Parsons-al szemben Tait elutasítja azt a nézetet, hogy a végességet a finitizmus intuitív mivolta szavatolná, ellenben a finit érvelést úgy tekinti, mint “minden számokkal kapcsolatos nem triviális matematikai okfejtések által feltételezett minimális érvelés”, és a finit műveleteket és finit bizonyítási módszereket úgy elemzi, hogy maguktól adódnak számok véges jelsorozatként való elképzelése által. Ezt az elemzést alátámasztja Hilbert azon állítása, miszerint a finit érvelés a logikai, matematikai, sőt bármilyen tudományos gondolkodásnak előfeltétele. Mivel a finit érvelés azon része a matematikának, ami előfeltétele minden számokkal kapcsolatos nemtriviális matematikai okfejtésnek, tehát Tait szerint “kétségbevonhatatlan” a karteziánus értelemben, és ez a kétségbevonhatatlanság az, ami szükséges eleme a finit érvelésnek ahhoz, hogy biztosítsa a matematika ismeretelméleti megalapozását, aminek Hilbert szánta.

Egy másik érdekes elemzését a finit módszernek Kreisel (1960) adta elő, ez azonban nem rendelkezik részletes filozófiai igazolással. Kreisel elemzése arra a következtetésre jutott, hogy pontosan azok a módszerek végesek, amelyek teljessége bizonyítható az elsőrendű Peano-aritmetikában. Kreisel egy másik elemzést is elvégzett, aminek a középpontjában az állt, hogy mi az, ami “megjeleníthető”. Az eredmény ugyanaz: a véges bizonyíthatóságról kiderül, hogy egybeesik az elsőrendű (Peano) aritmetikában való bizonyíthatósággal.

4. Az ε-kalkulus

Az 1922-23-ban tartott előadások során Hilbert és Bernays bevezette az ε-kalkulust, mint az aritmetika és analízis axiómarendszerének végleges formalizmusát. Ezen felül Hilbert az előadások során bemutatta az úgynevezett ε-helyettesítéses eljárást, mint a konzisztencia bizonyításának módszerét. Ackermann 1924-ben megkísérelte kiegészíteni az ötletet az analízis egy axiómarendszerévé, de a bizonyítása hibás volt. Majd Neumann János 1925-ös Göttingeni látogatása során egy javított konzisztenciabizonyítást adott az ε-formalizmus rendszerére (habár az nem tartalmazta az indukció axiómáját, 1927-ben jelent meg). Neumann munkájára építve, Ackermann később kidolgozott egy új ε-helyettesítéses eljárást.

Hilbert előadást tartott "Problems of the grounding of mathematics" címmel a Nemzetközi Matematikai Kongresszuson 1928-ban Bolognában, aminek során optimistán azt állította, hogy Ackermann és Neumann munkája igazolja a számelmélet konzisztenciáját, és hogy az analízishez való bizonyítást Ackermann már végrehajtotta "olyan mértékben, hogy az egyetlen megmaradt feladat az ún. elemi végesség tételének bizonyításából áll, ami tisztán aritmetikus jellegű".

4.1 Áttekintés

Az ε-kalkulus egy Hilbert által kifejlesztett logikai formalizmus, ami a matematikai programjának alapját alkotta. Az ε operátor egy logikai kifejezés-képző operátor, ami határozókat helyettesít az általános predikátumlogikában.

Definíció: Logikai kalkuluson olyan adott nyelv formuláihoz tartozó formális rendszert, szabályrendszert értünk, amely pusztán szintaktikailag, szemantika nélkül ad meg egy következményrelációt.

Megjegyzés: A logikai kalkulus tehát egy axiómarendszer, amely magában a logikai tautológiákat állítja elő, adott formulákat ideiglenesen hozzávéve (premissza) pedig más formulákra (konklúzió) lehet jutni (következtetni) vele.

Az epszilon kalkulusban, az $\varepsilon x\ A$ kifejezés jelöli azokat az x-eket, amik kielégítik az $A(x)$ állítást, ha léteznek ilyenek. Konkrétan:

Definíció: Bármely L formális nyelv kiegészithető az epszilon operátorral, ami újrafogalmazza a következő definíciókat:

$$(\exists x)A(x) \equiv A(\varepsilon x\ A)$$

$$(\forall x)A(x) \equiv A(\varepsilon x\ (\neg A))$$

A Hilbert programban az epszilon kifejezés játssza az ideális elem szerepét, vagyis azon elemekét, amik definíciója transzfinit elemeket tartalmaz.

Definíció: Transzfinitnek nevezzük azt a definíciót, amelyben olyan kvantifikáció szerepel, amelynek tárgyalási univerzumában a definiálandó objektumok is benne vannak, azaz olyan kötött változók szerepelnek, amelyek lehetséges értékei között a definiendum is előfordulhat.

Megjegyzés: Ilyen például a természetes számok halmazának hagyományos definíciója.

Hilbert finitista konzisztenciabizonyításának célja, hogy olyan eljárást adjon, ami eltávolítja az ilyen kifejezéseket a formális bizonyításokból. Az eljárások, amelyek által ez véghez vihető, Hilbert ε-helyettesítéses eljárásán alapulnak. Az ε-kalkulusnak azonban más területeken is vannak felhasználásai. Az ε-kalkulus első általános alkalmazása Hilbert ún. ε-tételeiben volt, de újabban az ε operátor variánsait a nyelvészetben is alkalmazzák a visszaható névmásokkal kapcsolatban.

Az ε-kalkulus saját alapformájában az elsőrendű predikátumlogika kiterjesztése egy bármilyen egzisztenciális formulát helyettesítő megkülönböztetett “ε” operátorral. A kiterjesztés konzervatív abban az értelemben, hogy nem hoz új elsőrendű következményt. Viszont fordítva, a kvantorok definiálhatóak ε-t tartalmazó kifejezésekkel, tehát az elsőrendű logika tekinthető úgy, mint egy ε operátort tartalmazó kvantormentes érvelés.

Definíció: F(x,y,...) kvantormentes formula: az x, y, ... változójelek és konstansjelekbõl kifejezéseket építünk, majd reláció jelekkel atomi formulákat gyártunk és ezeket az ítéletkalkulus szabálya szerint kombináljuk. Zárt F kvantormentes formula azt jelenti, hogy F az 'azonosan igaz' vagy az 'azonosan hamis' logikai formula.

Ez az utóbbi funkció az, ami megfelelővé teszi az ε-kalkulust a konzisztencia bizonyítására az által, hogy kivonhatóvá teszi a transzfinit elemeket a levezetésekből. Az ε-kalkulus alkalmas kiterjesztései alkalmassá teszik a kalkulust arra, hogy a számok és halmazok erős, kvantormentes elméletévé épüljön. Hilbert azt gondolta, hogy a konzisztencia megmutatható ezeknek a kiterjesztéseknek a segítségével.

1917-18 közötti írásaiban már közzé tette azon álláspontját, miszerint csak annak segítségével bizonyítható az ítéletkalkulus konzisztenciája, ha bevezetünk ítéletlogikai változókat és formulákat a 0 és 1 igazságértéken túl, és értelmezzük a logikai kapcsolatokat és a megfelelő műveleteket. Hasonlóan, egyvalami bizonyíthatja a predikátumlogika – és a tiszta ε-kalkulus – konzisztenciáját, ha azokra az interpretációkra szorítkozunk, ahol a tárgyalás környezetének egyetlen objektuma van.

Ezek a megfontolások a következő általános programot sugallják a konzisztencia bizonyítására:

- Az ε -kalkulus kiterjesztése oly módon, hogy a matematika nagyobb részét reprezentálja
- Finit módszerekkel megmutatni azt, hogy ebben a kiterjesztett rendszerben minden bizonyításnak van konzisztens interpretációja.

4.2 Elsőrendű eset

Tekintsük az aritmetika nyelvét a *0, 1, +, -, x,* < szimbólumokkal. Az alapszimbólumokkal és az *εx A(*x*)* epszilon kifejezésekkel együtt megadhatók kvantormentes axiómák. Példa a következő axióma, ami kiválasztja a legkisebb A-t kielégítő értéket, ha létezik olyan:

$$(*)\ A(x) \rightarrow A(\varepsilon x\, A(x)) \wedge \varepsilon x\, A(x) \leq x$$

Az eredmény egy olyan rendszer, ami elég erős ahhoz, hogy interpretálja az első rendű (Peano) aritmetikát. Tekintsük példaként a következő alternatív epszilon szimbólumot, ami kielégíti a következő axiómát:

$$A(y) \rightarrow A(\varepsilon x\, A(x)) \wedge \varepsilon x\, A(x) \neq y + 1.$$

Más szóval, ha van olyan y, ami kielégíti *A(y)*-t, az epszilon kifejezés visszaadja azt az értéket, aminek elődje nem rendelkezik ugyanazzal a tulajdonsággal. Világos, hogy a (*) módon leírt epszilon kifejezés kielégíti az alternatív axiómát. Ellenkező esetben igazolható, hogy egy adott A-ra az εx egy értéke ($\exists z \leq x\ A(x)$), ami kielégíti az alternatív axiómát, megfelelően interpretálja $\varepsilon x\, A(x)$-t (*)-ben.

Tovább tisztázza az ε kifejezés jelentését a következő axióma:

$$\varepsilon x\, A(x) \neq 0 \rightarrow A(\varepsilon x\, A(x))$$

ami előírja, hogy ha nincs olyan *x* ami kielégíti A-t, akkor az epszilon kifejés értéke 0 legyen.

Tegyük fel, hogy meg szeretnénk mutatni, hogy a fenti rendszer konzisztens, más szóval, szeretnénk megmutatni, hogy nem bizonyítható például a $0 = 1$ formula. Ha minden axiómát epszilon kifejezéssel helyettesítünk, és a szabad változókat kicseréljük a konstans 0-ra, az elégséges annak levezetéséhez, hogy nem létezik olyan bizonyítása a $0 = 1$ állításnak, ami axiómák egy véges zárt halmazán alapul. Ehhez elegendő megmutatni, hogy van olyan adott véges, zárt axiómahalmaz, amiben a kifejezésekhez numerikus értékek rendelhetőek úgy, hogy az összes axióma teljesüljön az adott interpretációban. Mivel a + és x műveletek értelmezhetők a szokásos módon, az egyetlen nehézség abban áll, hogy találni kell az epszilon kifejezésekhez alkalmas hozzárendelt értékeket.

Hilbert epszilon helyettesítéses módszere tehát röviden a következőképpen írható le:

- Adott az axiómák egy véges zárt halmaza, kezdetben minden epszilon kifejezéshez 0-t rendelünk.
- Keressünk egy olyan (*) axiómát, ami nem teljesül a fenti értelmezésben. Ez csak úgy lehetséges, ha van olyan t kifejezés, amire $A(t)$ igaz, és vagy $A(\varepsilon x\, A(x))$ hamis, vagy t értéke kisebb, mint $\varepsilon x\, A(x)$ értéke.
- Javítsuk a rendszert úgy, hogy hozzárendeljük $\varepsilon x\, A(x)$-hez t értékét, majd ismételjük az eljárást.

Finitista konzisztenciabizonyítást kapunk, ha finitista szemszögből elfogadható módon belátható, hogy a sikeres javítások véges sok lépésben leállnak. Ha ez megtörténik, akkor minden kritikus formula igaz lesz az epszilon formulák nélkül is. Ez az alapötlet ("Hilbertsche Ansatz") először Hilberttől hangzott el 1922-ben egy beszélgetés során, és az 1922-23 során tartott előadásokon kerültek kidolgozásra. Az első példák is ekkor születtek, azonban csak olyan bizonyításokkal kapcsolatban, amelyeknél minden esetben a transzfinit axiómának feleltettek meg egy egyszerű $\varepsilon x\, A(x)$ kifejezést. A kihívás a módszer kiterjesztése volt úgy, hogy alkalmazható legyen egynél több epszilon kifejezésre, beágyazott epszilon kifejezésekre, és végül másodrendű epszilon kifejezésekre (annak érdekében, hogy a konzisztencia bizonyítása érvényes legyen ne csak az aritmetikára, hanem az analízisre is, ami az elsőrendű aritmetikával azonos sémájú, kiterjesztve azt tetszőleges másodrendű formulával).

A beágyazott epszilon kifejezésekkel fennálló nehézség a következőképpen fogalmazható meg. Tegyük fel, hogy a bizonyításban az egyik axióma a transzfinit axióma:

$$B(y) \rightarrow B(\varepsilon y\, B(y))$$

A $\varepsilon y\ B(y)$ kifejezés természetesen előfordulhat a bizonyítás más formulájában is, különösen más transzfinit axiómákban, például:

$$A(x, \varepsilon y\, B(y)) \rightarrow A(\varepsilon x\, A(x, \varepsilon y\, B(y)), \varepsilon y\, B(y))$$

Tehát itt először is szükséges találni egy megfelelő interpretációt $\varepsilon y\, B(y)$ kifejezésre mielőtt keresnénk $\varepsilon x\, A(x, \varepsilon y\, B(y))$ kifejezéshez.

Vannak azonban bonyolultabb példák epszilon kifejezést tartalmazó bizonyításra. Egyik eset, amikor az axióma szerepet játszik az $\varepsilon y\, B(y)$ kifejezés helyes értelmezésében, a következő lehet:

$$B(\varepsilon x\, A(x, \varepsilon y\, B(y))) \rightarrow B(\varepsilon y\, B(y))$$

Itt az első körben az eljárás a $\varepsilon y\, B(y)$ kifejezést a 0-ként értelmezi. Tegyük fel, hogy $B(0)$ hamis. Egy későbbi hozzárendelésben $\varepsilon x\, A(x, 0)$ értékét 0-ról mondjuk n-re változtatjuk, aminek eredményeként ebben az értelmezésben például

$$B(n) \rightarrow B(0)$$

következik ami hamis lesz, amennyiben $B(n)$ igaz. Tehát $\varepsilon y\, B(y)$ értelmezését korrigálni kell n-re, aminek az lehet az eredménye, hogy az $\varepsilon x\, A(x, \varepsilon y\, B(y))$ formula nem igaz többé.

Ez csak vázlatos bemutatása annak, hogy milyen nehézségek merülhetnek fel Hilbert általános ötletének kiterjesztése közben. Ackermann 1924-ben biztosított egy olyan általánosítást, ami „visszaköveti“ az értékeket, amikor egy adott szinten javítandó új interpretációt már megtaláltuk egy korábbi szinten.

4.3 Másodrendű eset

Ackermann eljárása alkalmazható másodrendű aritmetika rendszerekre, de csak úgy, ha korlátozzuk a másodrendű kifejezéseket annak érdekében, hogy kizárhassuk a „keresztbe kötött“ epszilonokat. Ez nagyjából azt eredményezi, hogy az aritmetikai felfogás a halmazelmélet elveire korlátozódik (lásd lejjebb).

Ackermann az $\varepsilon f\, A(f)$ másodrendű epszilon kifejezéseket használta, ahol f egy függvényváltozó. Az elsőrendű esettel analóg módon, $\varepsilon f\, A(f)$ egy függvény, amire $A(f)$ igaz, például: $\varepsilon f\,(x + f(x) = 2x)$ az identikus függvény $f(x) = x$. Ismét az elsőrendű eset analógiájára, a másodrendű epszilon kifejezések használhatóak a másodrendű kvantorok interpretálására. Például bármely $A(x)$ formulához található olyan $t(x)$, melyre

$$A(x) \leftrightarrow t(x) = 1$$

levezethető a kalkulusban (az A formulának lehetnek más szabad változói is, de ebben az esetben a t is szerepel köztük). Ez a tény felhasználható az elvek megértésében. Egy függvény-szimbólumokat tartalmazó nyelvben ezt az alábbi formában írhatjuk le:

$$\exists f\, \forall x\, (A(x) \leftrightarrow f(x) = 1)$$

egy tetszőleges $A(x)$ formulára. Ez halmazváltozók segítségével a következőképpen néz ki:

$$\exists Y\, \forall x\, (A(x) \leftrightarrow x \in Y),$$

ami azt a jelentést hordozza, hogy minden másodrendű paraméteres formula definiál egy halmazt.

További problémák is felszínre jöttek a másodrendű epszilonokkal kapcsolatban, és gyorsan nyilvánvalóvá vált, hogy amit konzisztencia bizonyításnak szántak, akkori formájában téves volt. Azonban Hilbert iskolájában senki sem ismerte fel a tévedés mértékét 1930-ig, amikor Gödel bemutatta nemteljességi eredményeit. Addig azt hitték, hogy a bizonyítás (legalábbis az Ackermann által bemutatott, majd Neumann ötletei alapján módosított (1927) ε-helyettesítéses módszer) helytálló, legalább az elsőrendű részt illetőleg.

5. A Gödel nemteljességi tételek hatása

Gödel nemteljességi tételei megmutatták, hogy Hilbert korai optimizmusa indokolatlan volt. 1930-ban Kurt Gödel bejelentette első nemteljességi tételét egy Königsbergi konferencián, ami a következő állítást mondja ki:

Tétel: Gödel első nemteljességi tétele: Minden ellentmondásmentes, a természetes számok elméletét tartalmazó, formális-axiomatikus elméletben megfogalmazható olyan mondat, amely se nem bizonyítható, se nem cáfolható.

Neumann, aki a közönségben ült, azonnal felismerte Gödel munkájának jelentőségét Hilbert programjára nézve. Röviddel a konferencia után levelet intézett Gödelhez, amelyben megírta, hogy megtalálta eredményének a konzisztencia bizonyításokra vonatkozó következményét, melynek bizonyítását is mellékelte. Gödel már önállóan eljutott erre az eredményre: amit ma második nemteljességi tételként ismerünk, és a következőt mondja ki:

Tétel: Gödel második nemteljességi tétele: Minden elsőrendű *T* elméletben eldönthetetlen *T* konzisztenciája, feltéve, hogy

- *T* konzisztens,
- *T* tartalmazza a Peano-axiómarendszert.

Ez azt állítja, hogy például a kiindulásnak használt Principia rendszere nem igazolja annak az állításnak formalizációját, hogy a Principia rendszere ellentmondásmentes (feltéve, hogy az). Azonban addig azt hitték, hogy a finitista érvelés összes módszere, amit a konzisztencia bizonyításban felhasználtak, formalizálhatók a Principia rendszerében. Ezen felül, ha a Principia rendszerének konzisztenciája az Ackermann bizonyításában használt módszerek által igazolható, akkor ez formalizálható lenne a Principia rendszerében, de ez az, amit a második nemteljességi tétel lehetetlenné tesz.

Bernays szintén felismerte Gödel eredményeinek fontosságát, miután tanulmányozta írását 1931-ben, és megírta Gödelnek, hogy - azzal a feltevéssel, hogy a finit érvelés formalizálható a Principia rendszerében - a nemteljességi tételek megmutatják, hogy a Principia rendszerének finitista konzisztencia bizonyítása lehetetlen. Röviddel ezután Neumann megmutatta, hogy Ackermann aritmetikára vonatkozó konzisztencia bizonyítása hibás, és adott egy ellenpéldát a javasolt ε-helyettesítéses eljárásra.

6. Gentzen konzisztencia bizonyítása

Gerhard Gentzen (1909-1945), Paul Bernays tanítványa volt a Göttingeni Egyetemen. Miután Bernayst 1933-ban kirúgták "nem árja" mivoltára hivatkozva, 1935-39 között közvetlenül Hilbert asszisztenseként dolgozott Göttingenben, többek között a megalapozás problémáján. Gentzen kezdeti szándéka az volt, hogy a bizonyítást Hilbert programjának szellemében adja meg, de mivel Gödel megmutatta, hogy kell egy olyan módszer, ami nem formalizálható magában a Peano aritmetikában, túl kellett lépnie Hilbert programjának keretein. Végül sikeresen bizonyította az elsőrendű Peano-aritmetika axiómáinak konzisztenciáját, ami egy 1936-ban közölt írásában jelent meg, majd Habilitatiosschrift című 1939-ben befejezett munkájában meghatározta a Peano-aritmetika bizonyításelméleti erősségét. A teljes bizonyítás 1943-ban került kiadásra.

Gentzen bizonyítása sokkal többet mutatott meg annál, hogy az elsőrendű aritmetika konzisztens. Gentzen azt mutatta meg, hogy a konzisztencia bizonyítható. A bizonyítás alapja a primitív rekurzív aritmetika volt, hozzávéve a kvantormentes transzfinit indukció elvét az ε_0 rendszámig.

6.1 A bizonyítás vázlata

A transzfinit indukció a teljes indukció általánosítása megszámlálható számosságoknál nagyobb végtelen számosságok esetére is. A transzfinit indukció tétele:

Tétel: Legyen $T(\alpha)$ tetszőleges matematikai állítás az α rendszámról. Tegyük fel, hogy teljesül a következő állítás: ha egy α rendszámra igaz, hogy minden $\beta < \alpha$ rendszámra $T(\beta)$ igaz, akkor $T(\alpha)$ igaz. Ekkor $T(\alpha)$ minden α rendszámra teljesül.

Ahhoz, hogy az aritmetika nyelvén kifejezzük a rendszámokat, szükséges egy rendszám-jelölés, azaz egy módszer, hogy természetes számokhoz ε_0-nál kisebb rendszámokat rendeljünk. Ez többféleképpen véghez vihető, példa rá Cantor normálforma tétele.

Tétel: Cantor normálforma tétel: minden α rendszám egyértelműen felírható

$$\alpha = \omega^{\beta_1}c_1+\omega^{\beta_2}c_2+\ldots+\omega^{\beta_k}c_k$$

formában, ahol k természetes szám, $c_1, c_2, \ldots, c_k$ pozitív egészek, és a $\beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_k$ számok rendszámok, ahol megengedjük a $\beta_k = 0$-t

Megjegyzés: A fenti felírást α Cantor normálformájának nevezzük, és tekinthetjük úgy, mint a ω alapú természetes számrendszert.

Megjegyzés : A fenti felírás garantálja a rendszámok jólrendezettségét, azaz hogy a rendszámok bármely nemüres halmazának van legkisebb eleme.

Az epszilonnal jelölt rendszámok a transzfinit számok egy gyűjteménye, amiket az a tulajdonság határoz meg, hogy a fixpontjai egy exponenciális leképezésnek, azaz kielégítik az

$$\omega^{\varepsilon} = \varepsilon$$

egyenlőséget. Következésképpen nem elérhetők a 0-ból a hatványozásnál gyengébb műveletek (mint a szorzás és összeadás) véges sokszori használatával. Más szóval nincs véges aritmetika kifejezésük.

Az ε_0 a legkisebb rendszám amire teljesülnek a fenti tulajdonságok. Az ε_0 a következő sorozat-határértékként írható fel:

$$\varepsilon_0 = \sup\{\, 0,\ 1 = \omega^0,\ \omega = \omega^1,\ \omega^{\omega},\ \omega^{\omega^{\omega}},\ \ldots \}$$

A kvantor mentes transzfinit indukció elve az ε_0 rendszámig azt jelenti, hogy bármely *A(x)* formulára, amelyben nincs kötött változó, a transzfinit indukció az ε_0-ig tart.

Gentzen az ε_0-nál kisebb rendszámokhoz elsőrendű aritmetika bizonyításokat rendelt, és megmutatta, hogy ha a bizonyítások között ellentmondás szerepel, akkor létezik az ε_0-nál kisebb rendszámok között egy végtelen csökkenő sorozat, ami előállítható a bizonyításokból egy primitív rekurziót használó kvantor mentes formula által. Ugyanakkor a rendszámok jólrendezettsége miatt ilyen sorozat nem létezhet, tehát a véges módszerekkel hozzárendelt állításokban nem lehetnek ellentmondások.

6.2 Gentzen és Gödel elméletének viszonya

Gentzen bizonyítása rávilágít Gödel második nemteljességi tételének egy gyakran figyelmen kívül hagyott aspektusára. Ezt néha úgy fogalmazzák meg, hogy egy rendszer konzisztenciája csak egy erősebb rendszerben vezethető le. Viszont a kvantormentes transzfinit rekurzióval kiegészített primitív rekurzív aritmetika rendszerében bizonyítható az elsőrendű aritmetika konzisztenciája, de nem erősebb annál. Például nem igazolja a teljes indukciót az összes formulára, míg ez elsőrendű aritmetika igen (axiómasémaként szerepel benne). A fent leírt rendszer nem is gyengébb mint az elsőrendű aritmetika, mivel bizonyítani tudja annak konzisztenciáját, amire az elsőrendű aritmetika nem képes. A két elmélet összehasonlíthatatlan.

7. A Gödel utáni Hilbert program

Ackermann 1940-ben alkalmazkodva Gentzen elgondolásához, megadta a korrekt konzisztencia bizonyítását az elsőrendű aritmetikának az ε-helyettesítéses módszert használva, majd az analízis konzisztenciájának bizonytását tűzte ki célul. Ugyan Ackermann a másodrendű aritmetika konzisztenciájának bizonyítására tett későbbi próbálkozásai sikertelenek voltak, de azok tisztább megértését biztosították a másodrendű epszilon kifejezéseknek a matematika formalizálásában.

7.1 Módosított Hilbert programok

Még ha nem is adható finitista konzisztencia bizonyítás az aritmetikára, mindazonáltal konziszencia bizonyítások keresésének kérdése továbbra is lényeges: azon bizonyításokban használt módszerek ugyan túlmennek Hilbert eredeti finitista értelmezésén, mégis betekintést engednek az aritmetika és más, erősebb elméletek belső szerkezetébe. Amit Gödel eredményei megmutattak, az a következő volt: nem adható meg egy abszolút konzisztencia bizonyítása a teljes matematikának, ezért a Gödel utáni bizonyításelméleti munka a konzisztensnek bizonyult rendszerek és a bizonyításhoz használt módszerek viszonyára koncentrált.

A reduktív bizonyításelmélet ebben az értelemben két hagyományt követ: az elsőt főként Gentzen és Schütte nyomdokán járó logikusok vitték tovább, folytatva az ún. ordinális analízist, amelynek példája Gentzen első kozisztencia bizonyítása ε_0 renddel. Az ordinális analízis nem számol végtelen nagy rendszámokkal, inkább rendszámokkal jelölnek rendszereket, amik maguk formalizálhatóak nagyon gyenge (lényegében finit) rendszerekben.

Filozófiailag jóval kielégítőbb folytatása Hilbert programjának Kreisel és Feferman bizonyításelméleti rendszere. Az ő munkájuk szorosan követi azt a koncepciót, hogy a matematika ideális elemeinek létjogosultságát korlátozott eszközökkel igazolja (Kreisel, Georg, A survey of proof theory, 1968; Kreisel, Georg, Hilbert's programme, 1983; Feferman, Solomon, Hilbert's Program relativized: Proof-theoretial and fondational reductions, 1988; Feferman, Solomon, What rests on what?

The proof-theoretic analysis of mathematics, 1993). Ebben a felfogásban Hilbert bizonyításelméletének célja annak megmutatása, hogy az ideális elemek nem haladják meg a "valódi" matematika határait, legalábbis a tételek egy bizonyos osztályának tekintetében. A terv alapelvét, melynek meg kellett volna oldania a feladatot, még Hilbert dolgozta ki: ha ideális matematikai eszközök segítségével bizonyítható egy valódi tétel, akkor ezek a tételek bizonyíthatóak valódi (értsd: finit) módszerekkel is.

Hilbert programjának egy másik folytatása az ún. fordított matematika, amit Milton Friedman és Stephen Simpson képviselt. Szembesülve Gödel azon eredményeivel, miszerint a klasszikus matematika egésze nem redukálható a finitista szempontnak megfelelően, arra a kérdésre keresték a választ, hogy a klasszikus matematika mekkora része redukálható. A fordított matematika annak vizsgálatával igyekszik megadni a pontos választ a kérdésre, hogy a klasszikus matematika mely tételei bizonyíthatóak az analízis olyan gyenge alrendszereiben, amelyek redukálhatóak finit matematikává – abban az értelemben, ahogy az előző bekezdésben szó volt róla – (Simpson, Stephen G., Partial realizations of Hilbert's program, 1988; Simpson, Stephen G., *Subsystems of Seond Order Arithmetic*, 1999). A módszer egy tipikus eredménye a funkcionálanalízis terén a Hahn-Banach tétel, ami bizonyítható az ún. WKL_0 rendszerben (gyenge König lemma), a másodrendű Peano-aritmetika egy alrendszerében. Más szavakkal a feladat az, hogy az ideális matematikát valódi matematikává redukáljuk.

8. Összefoglalás

A megalapozási kísérletek Gödel óta kikerültek a matematika érdeklődésenek homlokteréből. Ha Gödel tétele csak azon az áron hatástalanítható, hogy a rekurzív függvények hatásos eszközét nem engedjük alkalmazni, akkor ez valójában visszalépés. A matematika történetében sosem váltak uralkodóvá olyan ideológiák, amelyek korlátozták az emberi gondolat szabadságát, mint például az intuicionisták, az anticantoriánusok és a releváns logika hívei (William W. Tait, Finitizmus, 1980).

Neumann János, így foglalja össze a matematika új korszakát: *„Elvesztvén a reményt a klasszikus matematika igazolására – Hilbert, vagy Brouwer és Weyl értelmezésében, – a legtöbb matematikus elhatározta, hogy akárhogyan is, ezt a rendszert fogja használni. Végülis, a klasszikus matematika eredményei egyaránt elegánsak és hasznosak, habár soha többé nem bízhatnak meg benne teljesen, olyan szilárd alapja legalábbis van, mint például az elektron létezésének. Ezért, ha valaki hajlandó elfogadni a tudományokat, éppúgy elfogadhatja a matematika klasszikus rendszerét is. Ezek a nézetek elfogadhatónak mutatkoztak sokak számára, még az intuicionista rendszer eredeti szószólói küzül is. Ma az „alapok“ vitája bizonyára nem lezárt, de nagyon valószínűtlennek látszik, hogy a klasszikus rendszert e csekély kisebbség kivételével bárki elvesse.“* (Neumann János válogatott írásai, Typotex, 2010)

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm Sági Gábornak, a logika docensének útmutatását, mellyel munkámat segítette.

Köszönöm Szabó Csabának, hogy emberségével és szaktudásával megmutatta, hogy a matematika nem válik el az élet játékától, hanem inspirálja és színesíti azt. Könnyedsége és lendülete új tereket nyitott számomra, melyben szabadon mozoghatok.

Köszönöm, hogy türelmével lehetőséget adott, hogy megtaláljam a matematikában az önfeledtséget.

Irodalomjegyzék:

[1] Pohlers, Wolfram: Proof Theory – An introduction, Springer-Verlag 1989

[2] Raymond M. Smullyan - Gödel's Incompleteness Theorems, Oxford University Press 1992

[3] Davis, Philip J. and Hersh, Reuben: A matematika élménye/The Mathematical Experience, Houghton Mifflin 1981

[4] Ian Stewart: A végtelen megszelidítése/Taming the infinite,Quercus 2008

[5] Péter Rózsa: Játék a végtelennel, Dante 1945

[6] Sain Márton: Nincs királyi út!, Gondolat 1986

[7] Hilbert, David: On the infinite (Über das Unendliche), *Mathematische Annalen*, 95: 161-90. Lecture given Münster 1925

[8] Hilbert, David: A Geometria alapja (Grundlagen der Geometrie), Teubner 1899

Internet:

[9] Stanford Encyclopedia of Philosophy

http://plato.stanford.edu/

[10] Molnár Zoltán: A deskripciók algebrai elmélete

www.math.bme.hu/~mozow/arxiv_A_des_alg_elm.pdf

[11] Wikipedia