

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Az egydimenziós konvekciós-diffúziós feladat numerikus megoldása

BSc Szakdolgozat

Ádám Johanna
Matematika BSc
Matematikai elemző szakirány

Témavezető: Dr. Faragó István
tanszékvezető egyetemi tanár,
ELTE Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék



2013
Budapest

Köszönetnyilvánítás

Hálásan köszönöm témavezetőmnek, Faragó Istvánnak bátorítását és figyelmes észrevételeit, valamint a szakterülete iránti lelkesedését, amely engem is ösztönzött ezen téma behatóbb tanulmányozására és megértésére.

Külön köszönöm férjemnek, Bertók Zoltánnak a sok türelmet és támogatást.

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás	2
Bevezetés	5
1. Közöséges differenciálegyenletek peremérték-problémái	6
1.1. Peremérték-problémák	6
1.2. Bevezető fogalmak	7
1.2.1. $L^p(\Omega)$ terek	7
1.2.2. Szoboljev-terek	7
1.2.3. Hilbert-terek	8
1.2.4. $H^m(\Omega)$ terek	8
1.3. Egydimenziós peremérték-feladatok megoldása	9
1.3.1. Klasszikus megoldás	9
1.3.2. Gyenge megoldás	9
2. A Galjorkin-módszer	12
2.1. A Galjorkin-módszer	12
2.1.1. Gyenge alak	12
2.1.2. A variációs feladat vizsgálata	13
2.1.3. A peremérték-probléma és a variációs feladat összefüggése	15
2.1.4. A közelítés konstrukciója	15

3. A konvekciós-diffúziós egyenletekről	18
3.1. A kis ε problémája	18
3.2. Szinguláris perturbáció	18
3.3. A határréteg megjelenése	19
3.4. Rácsáló-konstrukció	20
3.4.1. Háló-konstrukciók	20
3.4.2. Bakhvalov-háló	21
3.4.3. Shishkin-háló	22
4. Az egydimenziós konvekciós-diffúziós feladat numerikus megoldásának különös tulajdonsága	23
4.1. A probléma és az oszcillációs jelenség	23
4.1.1. A jelenség bemutatása egy példán	24
4.2. Elméleti magyarázat	28
4.2.1. Konvergenciavizsgálat	32
4.3. Numerikus eredmények	32
4.3.1. Hibaszámítás a példafeladaton	33
Irodalomjegyzék	34
Nyilatkozat	36

Bevezetés

A konvekciós-diffúziós egyenlet a természetben előforduló légnemű, ill. cseppfolyós halmazállapotú anyagok áramlását írja le. Ahhoz, hogy egy-egy ilyen jelenség kimenetelét megjósolhassuk, a feladatot matematikai objektumokkal, matematikai módszerekkel kell vizsgálnunk. A konvekciós-diffúziós feladat egy szingulárisan perturbált peremérték-probléma, amelynek a numerikus (közelítő) megoldását a Galjorkin-módszerrel fogjuk kiszámítani. Jelen dolgozat célja részletes áttekintést nyújtani a konvekciós-diffúziós egyenlet egydimenziós változatáról.

Az első fejezetben megnézzük, mik azok a peremérték-feladatok, és megvizsgáljuk ezen feladatok megoldhatóságát, illetve a megoldhatóság feltételeit, majd bevezetjük a konvekciós-diffúziós feladat kitűzésére és megoldására vonatkozó fogalmakat.

A második fejezetben részletesen leírjuk a Galjorkin-módszert, illetve annak alkalmazását, valamint kifejtjük a gyenge megoldás és a variációs feladat jelentőségét. A fejezet végén felírjuk a konvekciós-diffúziós feladat pontos megoldásának közelítésére a Galjorkin-módszer konstrukcióját.

A harmadik fejezetben áttekintjük a konvekciós-diffúziós feladat tulajdonságait, a pontos megoldás viselkedését, és említést teszünk a feladat vizsgálata során felbukkanó témakörökről: a szingulárisan perturbált feladatokról, a kis ε problémájáról, és a határréteg megjelenéséről. Szót ejtünk a szingulárisan perturbált feladatokhoz konstruálható különféle rácshálókról.

A negyedik fejezetben megvizsgáljuk a Galjorkin-módszerrel kiszámított numerikus megoldást, amely egy különös tulajdonsággal rendelkezik. Megmutatjuk a hamis oszcilláció jelenségét és a numerikus megoldások viszonyát a pontos megoldáshoz. Az elméleti leírásen túl egy példa megoldásával is illusztráljuk az egydimenziós konvekciós-diffúziós egyenlet pontos, illetve numerikus megoldásainak viselkedését.

Ez a problémakör számos matematikus kutatásait inspirálta, és a mai napig is aktív mozgatója különböző típusú szingulárisan perturbált feladatok vizsgálatának [1, 6, 10, 15, 16]. A probléma elemzése indította el a rétegre illeszkedő rácsok kutatását, és a már korábban bevezetett hálók továbbfejlesztését is [2, 13, 17].

1. fejezet

Közönséges differenciálegyenletek peremérték-problémái

Ebben a fejezetben megismerkedünk a közönséges differenciálegyenletek peremérték-problémáinak felépítésével. A megértéshez fontos fogalmak bevezetése után megvizsgáljuk a peremérték-problémák megoldhatóságát és a megoldhatóság feltételeit.

1.1. Peremérték-problémák

Tekintjük a következő másodrendű differenciálegyenletet:

$$u'' = f(t, u, u'). \quad (1.1.1)$$

Egy ilyen differenciálegyenlet egyértelmű megoldásának megtalálásához szükségünk van kiegészítő feltételekre. Az

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u'_0 \quad (1.1.2)$$

kezdeti feltételekkel például egyértelmű megoldást kapunk az (1.1.1) egyenletre. Gyakran azonban a jelenséget egy korlátos $I = [a, b]$ idő- vagy térintervallumon vizsgáljuk, és ismerjük a megoldást az intervallum két végpontjában, vagyis adott egy ún. *peremfeltétel*. Ilyen esetben az intervallum végpontjaiban ismert megoldás lesz a kiegészítő feltétel:

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta. \quad (1.1.3)$$

1.1.1. Definíció. Az $u = u(t) \in C^2[a, b]$ ismeretlen függvényre kitűzött

$$u'' = f(t, u, u'), \quad t \in (a, b)$$

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta$$

feladatot *kétpontos peremérték-feladatnak* nevezzük.

1.2. Bevezető fogalmak

Ebben a részben bevezetünk néhány olyan fogalmat, amelyre a későbbiekben támaszkodunk. Definiáljuk az $L^p(\Omega)$ és Szoboljev-tereket, a Hilbert-tereket, valamint a Szoboljev-terek egy fontos részhalmazát, amelyek Hilbert-teret alkotnak.

1.2.1. $L^p(\Omega)$ terek

1.2.1. Definíció. Legyen μ mérték, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ adott mérhető halmaz. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvény. Ha $1 \leq p < \infty$, akkor legyen

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\infty^{\frac{1}{p}} = \infty)$$

és legyen

$$\|f\|_{\infty} = \inf\{a : a \geq 0, \mu\{|f| > a\} = 0\}.$$

Az $L^p(\Omega)$ tér tehát definíció szerint azon mérhető f függvényekből áll, amelyeknek p -normája véges.

1.2.2. Szoboljev-terek

1.2.2. Definíció. Legyen $\Omega = [a, b]$ korlátos, zárt intervallum, és $0 \leq p \leq \infty$ adott szám. Ekkor

$$W^{1,p}(\Omega) := \{f \mid f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ és } f' \in L^p(\Omega)\}, \quad (1.2.1)$$

ahol f abszolút folytonos függvény. $W^{1,p}(\Omega)$ -t elsőrendű Szoboljev-térnek nevezzük.

1.2.3. Megjegyzés. Egy $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt akkor nevezünk abszolút folytonosnak, ha igaz rá az alábbi három feltétel:

- f differenciálható majdnem mindenütt,
- $f' \in L^1(\Omega)$,
- f integrálfüggvénye f' -nek.

A $W^{1,p}(\Omega)$ tér teljes normált tér, vagyis Banach-tér a következő normák egyikével:

$$\|f\|_* := \|f\|_{\max} + \|f'\|_{L^p}, \quad (1.2.2)$$

$$\|f\|_{W^{1,p}} := \|f\|_{L^p} + \|f'\|_{L^p}, \quad (1.2.3)$$

Belátható [12], hogy a két norma ekvivalens.

1.2.4. Megjegyzés. A folytonosan differenciálható függvények $C^1(\Omega)$ terét a $W^{1,p}(\Omega)$ tér általánosítja, ugyanis ilyenkor csak majdnem mindenütt deriválhatóságot követelünk meg.

1.2.3. Hilbert-terek

1.2.5. Definíció. Ha H lineáris tér \mathbb{K} felett és adott egy $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ leképezése $H \times H$ -nak \mathbb{K} -ba úgy, hogy minden $x, y, z \in H$ -ra és $\alpha \in \mathbb{K}$ -ra

1. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
2. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$,
3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
4. ha $\langle x, x \rangle = 0$, akkor $x = 0$,

akkor H -t *belső szorzat térnek* nevezzük \mathbb{K} felett.

1.2.6. Definíció. Egy *belső szorzat* teret *Hilbert-térnek* nevezünk, ha teljes.

1.2.7. Példa. \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n , $L^2(\Omega)$ és $W^{1,p}(\Omega)$ Hilbert-terek a következő skalárszorzatokkal:

\mathbb{R}^n Hilbert-tér az $\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ skalárszorzattal

\mathbb{C}^n Hilbert-tér a $\langle z, w \rangle_{\mathbb{C}^n} = \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i$ skalárszorzattal

$L^2(\Omega)$ Hilbert-tér az $\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{\Omega} f \bar{g} \, d\mu$ skalárszorzattal.

Bővebb leírás [12]-ban található.

1.2.4. $H^m(\Omega)$ terek

Az előzőekben tárgyalt Szoboljev-terek között vannak olyanok, amelyek Hilbert-teret alkotnak. Ezeket jelöljük $H^m(\Omega)$ -val.

1.2.8. Definíció. Legyen $\Omega = [a, b]$.

$$H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega) = \{u \in C^{m-1}\Omega : u^{(m-1)} \text{ abszolút folytonos, } u^{(m)} \in L^2(\Omega)\} \quad (1.2.4)$$

A speciális $m = 1$ esetben $H^1(\Omega)$ azon $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ abszolút folytonos függvények tere, amelyekre igaz, hogy $u' \in L^2(\Omega)$ -beli.

Számunkra legfontosabb a $H_0^1(\Omega)$ tér, amely olyan $u \in H^1(\Omega)$ függvények halmaza, amelyekre $u(a) = u(b) = 0$.

A $H^m(\Omega)$ terekről, és tulajdonságaikról bővebben [11] ad leírást.

1.3. Egydimenziós peremérték-feladatok megoldása

Legyen $\Omega = (0, 1)$, és tekintsük a következő másodrendű differenciálegyenletre kitűzött két-pontos peremérték-feladatot:

$$Lu \equiv -(pu')' + qu = f \quad (1.3.1)$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$

ahol $p \in C^1(\Omega)$, $q, f \in C(\Omega)$, és tegyük fel, hogy $p(x) \geq p_0 > 0$; $q(x) \geq 0$ és $0 \leq x \leq 1$.

1.3.1. Klasszikus megoldás

Legyen H valós Hilbert-tér és $L : H \rightarrow H$ operátor. A fenti (1.3.1) peremérték-feladat *klasszikus megoldásának* azt az $u \in \text{dom } L$ elemet nevezzük, amelyet az L operátor az $f \in \text{im } L$ -be képez le.

Amennyiben $p \in C^1(\Omega)$ és q, f folytonos függvények az Ω intervallumon, akkor létezik $u \in C^2(\Omega)$ megoldás. Gyakori azonban, hogy a feladatnak nem létezik klasszikus megoldása, mert q és p nem megfelelően sima függvények.

Tekintsük (1.3.1)-et a $q = 0$ esetben. Megfigyelhetjük, hogy ha $p \in C^1(\Omega)$, de f nem folytonos, akkor nem létezik a feladatnak klasszikus megoldása, ugyanis, ha $u \in C^2(\Omega)$ volna, akkor $pu' \in C^1(\Omega)$ lenne, és ebből következik, hogy $-(pu')' = f$ -nek folytonosnak kellene lennie.

Lehet azonban a feladatnak $u \in H^2(\Omega)$ megoldása, ami azt jelenti, hogy $u \in C^1(\Omega)$, és u' abszolút folytonos, u'' pedig $L^2(\Omega)$ -beli.

Tekintsük újra a $q = 0$ esetet, és legyen most $f \in C(\Omega)$, p pedig szakaszonként konstans. Ekkor még $u \in H^2(\Omega)$ megoldás sem létezik a feladatra, ugyanis f folytonossága miatt $-(pu')'$ -nek is folytonosnak kellene lennie, vagyis $pu' \in C^1(\Omega)$ kell, hogy teljesüljön. Ha u' folytonos, akkor f miatt pu' is szakadós, tehát nem $C^1(\Omega)$ -beli, ha pedig u' nem folytonos, akkor $u \notin H^2(\Omega)$.

További elemzések [11]-ben találhatóak.

Látható, hogy a fent tárgyalt megoldásfogalmak meglehetősen szerteágazóak, ezért egy új megoldásfogalmat vezetünk be, amely a peremérték-feladatok gyenge megoldása.

1.3.2. Gyenge megoldás

Legyen adott az

$$Lu \equiv -(pu')' + qu' + ru = f \quad (1.3.2)$$

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (1.3.3)$$

peremérték-feladat az $\Omega = (0, 1)$ -en. Tegyük fel, hogy p, q és r megfelelően sima függvények. Szorozzuk meg az (1.3.2) differenciálegyenletet egy $v \in V$ tesztfüggvénnyel (ahol $V \subset H_0^1(\Omega)$ sűrű altér), és integráljuk az egyenletet a $(0, 1)$ intervallumon.

$$\int_0^1 (-(pu')' + qu' + ru)v \, dx = \int_0^1 fv \, dx \quad (1.3.4)$$

$$\int_0^1 -(pu')'v + qu'v + ruv \, dx = \int_0^1 fv \, dx \quad (1.3.5)$$

Parciálisan integráljuk a fenti egyenletet:

$$[-pu'v]_0^1 + \int_0^1 (pu'v' + qu'v + ruv) \, dx = \int_0^1 fv \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (1.3.6)$$

Mivel $v \in H_0^1(\Omega)$, tudjuk, hogy v az Ω intervallum két végpontjában 0 értéket vesz fel, vagyis $v(0) = v(1) = 0$, az első tag kiesik:

$$\int_0^1 (pu'v' + qu'v + ruv) \, dx = \int_0^1 fv \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (1.3.7)$$

Legyen

$$a(u, v) := \int_0^1 (pu'v' + qu'v + ruv) \, dx \quad (1.3.8)$$

és

$$\Phi(v) := \int_0^1 fv \, dx. \quad (1.3.9)$$

Ebből kapjuk, hogy

$$a(u, v) = \Phi(v), \quad (1.3.10)$$

amely az ún. *variációs feladat*.

1.3.1. Definíció. Azt az $u \in H_0^1[0, 1]$ elemet, amelyre

$$a(u, v) = \Phi(v) \quad (1.3.11)$$

fennáll $\forall v \in V$ esetén, az (1.3.2) egyenlet *gyenge vagy általánosított megoldásának* nevezzük.

1.3.2. Definíció. Az (1.3.2) peremérték-feladatnak létezik *klasszikus megoldása*, ha van olyan $u \in C^2[0, 1]$, amelyre (1.3.2)-(1.3.3) teljesül.

A (1.3.2) peremérték-feladatnak létezik *gyenge megoldása*, ha van olyan $u \in H_0^1[0, 1]$, amelyre (1.3.10) teljesül.

A következő fejezetben részletesen megvizsgáljuk, mi a kapcsolat a peremérték-feladat és a variációs feladat között, és ezen variációs feladat numerikus megoldására alkalmazzuk a Galjorkin-módszert.

2. fejezet

A Galjorkin-módszer

2.1. A Galjorkin-módszer

Ebben a fejezetben egy egydimenziós modellfeladaton mutatjuk be a Galjorkin-módszert, amely egy végtelen dimenziós térben felírt operátoregyenlet megoldásának közelítésére alkalmazható numerikus eljárás. Alapötlete, hogy a $H_0^1(0, 1)$ alaptér helyett annak valamely véges dimenziós alterére vetítjük az eredeti egyenletet. Így egy algebrai egyenletrendszert nyerünk, amely véges dimenziós, s így a numerikus analízis szokásos módszereivel már megoldható.

2.1.1. Gyenge alak

Tekintsük az alábbi

$$-(p(x)u')' + q(x)u = f(x) \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (2.1.1)$$

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (2.1.2)$$

peremérték-feladatot. A p, q és f legyenek folytonos függvények, amelyekre $p_1 \geq p(x) \geq p_0 > 0$, $q_1 \geq q(x) \geq 0$. Legyen $V = H_0^1(0, 1)$. Hajtsuk végre ugyanazokat a lépéseket, amelyeket az előző fejezetben bemutatunk. Vagyis, szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát egy, a $[0, 1]$ intervallumon folytonosan differenciálható tetszőleges $v \in V$ tesztfüggvénnyel, amely kielégíti a peremfeltételeket, és integráljunk a $[0, 1]$ -en:

$$\int_0^1 (-(pu')'v + quv) \, dx = \int_0^1 fv \, dx. \quad (2.1.3)$$

Az első tagot parciálisan integrálva és kihasználva, hogy $v(0) = v(1) = 0$, kapjuk a következő egyenletet:

$$\int_0^1 (pu'v' + quv) \, dx = \int_0^1 fv \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(0, 1). \quad (2.1.4)$$

A fenti integrálok már abban az esetben is értelmesek, ha p és q korlátosak és szakaszonként folytonosak, és $f \in L^2(0, 1)$, illetve ha u és $v \in H_0^1(0, 1)$ elemei. Ugyanis az ilyen függvények deriváltjai nem kell, hogy mindenütt definiáltak legyenek. Éppen ezt a tulajdonságot fogjuk felhasználni a későbbiekben.

Vezessük be az $a(u, v)$, $a : H_0^1 \times H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}$ bilineáris funkcionált a következő módon:

$$a(u, v) := \int_0^1 (pu'v' + quv) \, dx, \quad (2.1.5)$$

valamint

$$\Phi(v) := \int_0^1 fv \, dx. \quad (2.1.6)$$

Ekkor megfogalmazhatjuk a következőt:

Keresett olyan $u \in H_0^1(0, 1)$ függvény, amellyel

$$a(u, v) = \Phi(v) \quad (2.1.7)$$

minden $v \in V$ -re. A (2.1.7) egyenletet *variációs feladatnak* nevezzük.

2.1.2. A variációs feladat vizsgálata

A következőkben néhány kifejezés elemzését írjuk le, megvizsgáljuk az imént bevezetett $a(u, v)$ és $\Phi(v)$ funkcionálokat, majd pedig megmutatjuk a (2.1.1)-(2.1.2) peremérték-probléma és a (2.1.7) variációs feladat összefüggését. Mindezt [8] alapján tesszük meg.

Az előző fejezetben definiált H_0^1 tér Hilbert-tér a

$$\langle u, v \rangle_1 = \int_0^1 u'(x)v'(x) \, dx \quad u, v \in H_0^1 \quad (2.1.8)$$

skalárszorzzattal. Jelöljük $|u|_1$ -gyel a skalárszorzzathoz tartozó félnormát.

2.1.1. Megjegyzés. A H^1 térben a skaláris szorzat az alábbi módon írható fel:

$$\langle u, v \rangle_1 = \int_0^1 u(x)v(x) + u'(x)v'(x)dx, \quad (2.1.9)$$

ez pedig indukálja a

$$\|\omega\|_1^2 := \int_0^1 (\omega^2 + \omega'^2)dx = |\omega|_1^2 + \|\omega\|_0^2 \quad (2.1.10)$$

H^1 -beli normát.

A H^1 tér a $\|\omega\|_1^2 := |\omega|_1^2 + \|\omega\|_0^2$ normával Hilbert-tér.

Az $a(u, v)$ kifejezés egy bilineáris funkcionál, ugyanis mindkét változójában additív és homogén:

$$a(u + \lambda v, w) = a(u, w) + \lambda a(v, w), \quad (2.1.11)$$

$$a(u, v + \lambda w) = a(u, v) + \lambda a(u, w) \quad (2.1.12)$$

minden $\lambda \in \mathbb{R}$ és minden $u, v, w \in H_0^1$ esetén, valamint $a(u, v)$ korlátos.

Továbbá a szimmetrikus, vagyis

$$a(u, v) = a(v, u). \quad (2.1.13)$$

Mivel

$$a(u, u) = \int_0^1 [p(x)(u'(x))^2 + q(x)u^2(x)]dx \geq \int_0^1 (p_0(u'(x))^2 + q_0u^2(x))dx \geq \quad (2.1.14)$$

$$\geq \min\{p_0, q_0\} \int_0^1 (u'(x)^2 + u^2(x))dx = \min\{p_0, q_0\} \|u\|_1^2, \quad (2.1.15)$$

ezért a szigorúan pozitív definit.

Most tegyük fel, hogy $f \in L^2(0, 1)$. Ekkor a $\Phi(v)$ funkcionál additív és homogén, vagyis

$$\Phi(v + \lambda u) = \Phi(v) + \lambda \Phi(u) \quad (2.1.16)$$

minden $v, u \in V$ -re és $\lambda \in \mathbb{R}$ -re. $\Phi(v)$ korlátos is.

Az $a(u, v)$ bilineáris funkcionál szigorúan pozitív definitéséből és a $\Phi(v)$ funkcionál korlátosságából következik, hogy a (2.1.7) variációs feladatnak létezik megoldása H_0^1 -ben.

2.1.3. A peremérték-probléma és a variációs feladat összefüggése

Vizsgáljuk most meg a (2.1.1)-(2.1.2) peremérték-feladat és a (2.1.7) variációs feladat összefüggését!

2.1.2. Definíció. Azt az $u \in C^2(0, 1)$ függvényt, amely eleget tesz (2.1.1)-(2.1.2) egyenleteknek, a peremérték-feladat *klasszikus megoldásának* nevezzük.

Azt mondjuk, hogy a (2.1.1)-(2.1.2) peremérték-feladatnak létezik *gyenge vagy általánosított megoldása*, ha létezik olyan $u \in H_0^1$ függvény, amely eleget tesz a (2.1.7) variációs feladatnak.

2.1.3. Lemma. Legyenek $p, q \in L^\infty(0, 1)$ és $f \in L^2(0, 1)$. Ha a (2.1.1)-(2.1.2) peremérték-feladatnak van $u \in C^2[0, 1]$ klasszikus megoldása, akkor az egyben (2.1.7) variációs feladat megoldása $H_0^1(0, 1)$ -ben, tehát általánosított megoldása a (2.1.1)-(2.1.2) peremérték-feladatnak.

Ha a (2.1.7) variációs feladatnak van gyenge megoldása, és az kétszeresen folytonosan differenciálható, akkor az klasszikus megoldása a (2.1.1)-(2.1.2) peremérték-feladatnak.

Bizonyítás. Legyen u a peremérték-feladatunk klasszikus megoldása. Ekkor a megoldás simasága miatt, a fent bemutatott módon, parciális integrálással eljutunk a variációs feladathoz, vagyis u a variációs feladatnak is megoldása.

Ha a variációs feladatnak u gyenge megoldása, akkor az nem feltétlenül megoldása a peremérték-feladatnak, hiszen nem biztos, hogy u -nak van folytonos második deriváltja. A következő beágyazási tétel miatt azonban annyit biztosan tudunk, hogy u folytonos függvény.

2.1.4. Tétel. ($H_0^1(\Omega)$ beágyazása az $L^2(\Omega)$ térbe) Tetszőleges $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány esetén ($n \geq 1$) $H_0^1(\Omega)$ beágyazása az $L^2(\Omega)$ térbe teljesen folytonos operátor.

Emellett, ha u rendelkezik folytonos második deriválttal is, akkor (mivel u H_0^1 -beli) kielégíti a peremfeltételeket, és így a parciális integrálás megfordításával eljutunk az eredeti

$$\int_0^1 -(pu')'v + quv \, dx = \int_0^1 fv \, dx \quad (2.1.17)$$

egyenlethez, vagyis u megoldása a peremérték-feladatnak. \square

2.1.4. A közelítés konstrukciója

A (2.1.1)-(2.1.2) peremérték-problémának általános esetben nem lehetséges előállítani a pontos megoldását. Ezért a Galjorkin-módszer közelítő megoldások sorozatával approximálja a pontos megoldást az alábbi diszkretizáció segítségével:

2.1.5. Definíció. Legyen $E_n \subset H_0^1$ ($n \in \mathbb{N}^+$, ahol \mathbb{N}^+ a természetes számok halmazát jelöli) és $\dim E_n = n$. Azt mondjuk, hogy az $(E_n) \subset H_0^1$ sorozat *sűrű* H_0^1 -ben, ha $\forall \varepsilon > 0$ és $\forall u \in H_0^1$ esetén létezik olyan $N = N(\varepsilon, u) \in \mathbb{N}^+$, hogy

$$\min_{v_n \in E_n} \|u - v_n\| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N, \quad (2.1.18)$$

vagyis az E_n sorozat a dimenzió növelésével mintegy kitölti a H_0^1 teret.

Ennek megfelelően válasszunk meg két sorozatot: V_n legyen sűrű V -ben, és S_n legyen sűrű H_0^1 -ben. V_n sorozatot a *tesztelő függvények terének*, míg S_n sorozatot a *próbafüggvények terének* nevezik.

Legyen a V_n tesztelő függvények terének bázisa $\{\phi_j\}_{j=1}^n$, amely a Galjorkin-módszer esetén megegyezik a próbafüggvények terének bázisával, vagyis $V_n = S_n = \text{span}\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n\}$. Ekkor az $u_n \in V_n$ közelíthető az

$$\bar{u}_n = \sum_{j=1}^n y_j \phi_j \quad y_j \in \mathbb{R} \quad (2.1.19)$$

alakban. Vagyis a feladatunk mindössze az y_j együtthatók meghatározása.

Ezek után megfogalmazható (2.1.7) variációs feladat helyett a következő:

Keresett olyan $u_n \in V_n$ függvény, amellyel

$$a(u_n, v_n) = \Phi(v_n) \quad (2.1.20)$$

minden $v_n \in V_n$ -re.

A Galjorkin-módszertől úgy juthatunk el a végeelem módszerhez, ha V_n bázisának speciálisan szakaszonként lineáris függvényeket választunk meg. Először definiáljunk egy ekvidisz-táns rácshálót a $(0, 1)$ intervallumon a következőképpen:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = 1,$$

vagyis $x_i := ih$ és $h := \frac{1}{N}$. A $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ bázisfüggvények legyenek olyan kompakt tartójú függvények, amelyek teljesítik a

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq n$$

feltételeket, és

$$\phi_i(x) := \begin{cases} 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}], \\ 1 - \left| \frac{x-x_i}{h} \right|, & x \in [x_{i-1}, x_{i+1}], \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.1.21)$$

Ezeket a szakaszonként lineáris függvényeket *kalapfüggvényeknek* is hívják. Ezek alkotják a lineáris spline-ok bázisát.

A δ_{ij} függvényeket ún. *Kronecker-delta*¹ függvényeknek nevezik, amelyre

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{ha } i \neq j. \end{cases} \quad (2.1.22)$$

¹A függvényt Leopold Kronecker (1823-1891) német matematikusról nevezték el.

3. fejezet

A konvekciós-diffúziós egyenletekről

3.1. A kis ε problémája

A dolgozat utolsó fejezeteiben az egydimenziós

$$Au := -\varepsilon u'' + au' + bu = f \quad u(0) = u(1) = 0 \quad (3.1.1)$$

konvekciós-diffúziós feladatot fogjuk vizsgálni, ahol $0 < \varepsilon \ll 1$, és $A : H_0^1 \rightarrow H_0^1$. Az a, b és f legyenek folytonos függvények, amelyekre $a_1 \geq a(x) \geq a_0 > 0$ és $b_1 \geq b(x) > 0$.

Az ε paraméter mutatja, hogy ebben az esetben a konvekció dominál a diffúzió felett, és ennek több érdekes következménye is van, amelyekre a továbbiakban kitérünk.

3.2. Szinguláris perturbáció

A matematikában gyakoriak az olyan problémák, ahol nem tudjuk kiszámítani a pontos megoldást, mert a feladat nem oldható meg egzakt módon. Ha mégis megkapható a pontos megoldás, akkor ez az eredmény tipikusan csak nagyon bonyolult módon érhető el. Ilyen esetekben igyekszünk a pontos megoldás helyett közelítő megoldást találni.

A *perturbációelmélet* olyan módszerek vizsgálatával foglalkozik, amelyek segítségével az egzakt módon nem megoldható problémákra közelítő megoldást tudunk adni az $au' + bu = f$ megoldható probléma pontos megoldásából kiindulva.

A perturbációelmélet során egy olyan kifejezést kapunk a keresett megoldásra, amely a kis ε paraméter hatványsorának (az ún. perturbációsorozat) tagjaiból áll. A hatványsor első tagja a megoldható probléma megoldása, míg a többi tag leírja az első tag eltérését a megoldástól. Tehát az A operátor közelítése felírható

$$A = A_0 + A_1\varepsilon + \dots + A_n\varepsilon^n + \dots$$

alakban, ahol A_0 a megoldható feladat operátora, $A_1, A_2 \dots$ pedig a magasabb rendű tagokat reprezentálják, amelyek iteratív módon határozhatók meg. Kis ε érték esetén a sorozat magasabb rendű tagjai nagyon kicsik, ezért általában elhagyhatjuk őket.

A közelítő perturbációs megoldást a hatványsor első két tagjából szokásos meghatározni, így a közelítés felírható

$$A \approx A_0 + \varepsilon A_1$$

alakban.

A perturbációelméleten belül *reguláris perturbációnak* nevezzük azt, amikor a kis ε paraméter hatása kicsi, vagyis a feladat egy közelítő megoldását megkaphatjuk az ε paraméter nullára állításával. Ezzel szemben a *szingulárisan perturbált* feladatok esetén ezt nem tehetjük meg, azaz a megoldás $\varepsilon \rightarrow 0$ esetén nem közelíthető aszimptotikus sorbafejtéssel.

3.3. A határréteg megjelenése

Tekintsük újra a (3.1.1)

$$-\varepsilon u'' + au' + bu = f, \quad 0 < x < 1$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

peremérték-feladatot.

Tegyük fel, hogy $0 < \varepsilon \ll 1$, és vizsgáljuk meg az $a \neq 0$ esetet. Ilyenkor a megoldásnak ún. *határrétege* van az $x = 0$ vagy az $x = 1$ pontban attól függően, hogy ε értéke pozitív vagy negatív. Az $a = 0$ esetben a feladat megoldásának az $x = 0$ és az $x = 1$ pontban is határrétege van.

A határréteg kialakulásának oka a kis ε paraméter hatása, ugyanis ebben az esetben a $-\varepsilon u''$ tag olyan kicsi, hogy majdhogynem eltűnik. Ekkor a feladat a megadott feltételekkel már túldefiniált, és a két peremfeltételnek eleget téve alakul ki a megoldásban a határréteg. Az $u(0) = 0$ és $u(1) = 0$ peremfeltételek esetén figyeljük meg, hogy a megoldásnak az $x = 0$ és az $x = 1$ pontban is nulla értéket kell felvennie. A megoldás tehát a nullából indulva monoton nő mindaddig, amíg az intervallum végére érve a másik feltételnek is eleget kell tennie, így a pontos megoldás az $u(1) = 0$ peremfeltétel hatására az $x = 1$ pontban visszatér a nullába (lásd 4. fejezet 3. ábra).

3.4. Rácsháló-konstrukció

Az utóbbi időben egyre nagyobb figyelem övezi az olyan határréteget tartalmazó feladatok, mint a

$$\begin{aligned} -\varepsilon u'' + au' + bu &= f, & 0 < x < 1 \\ u(0) &= 0, & u(1) &= 0 \end{aligned}$$

konvekciós-diffúziós feladat megoldásához történő rácsháló megkonstruálását és elemzését. Az ilyen típusú egyenleteket úgy is tekinthetjük, mint a Navier–Stokes-egyenletek¹ linearizált alakját.

Navier és Stokes adtak a fluid mozgásokat leíró egyenletek konvergenciájára egy struktúrát, amely jellemzően

$$\|u - \hat{u}\|_\infty \leq Ch^k \tag{3.4.1}$$

alakban írható fel, ahol a C konstans függ u bizonyos deriváltjaitól, és végtelenhez tart, ha a kis ε perturbációs paraméterrel nullához tartunk. Ezért szükségünk van olyan numerikusan stabil módszerekre, amelyek esetén a numerikus költségek függetlenek az ε perturbációs paramétertől.

3.4.1. Definíció. (Stabil konvergencia) Legyen u_ε a szingulárisan perturbált feladat pontos megoldása, \hat{u}_ε pedig egy N szabadságfokú numerikus módszerrel kiszámított közelítő megoldás. Azt mondjuk, hogy a módszer stabilan konvergens a $\|\cdot\|_\infty$ normában, ha

$$\|u_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon\|_\infty \leq \vartheta(N) \quad N \geq N_0 - r\varepsilon,$$

ahol a ϑ függvény és az $N_0 > 0$ küszöbérték függetlenek ε -tól, és

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \vartheta(N) = 0.$$

3.4.1. Háló-konstrukciók

A szingulárisan perturbált peremérték-feladatok megoldásához alkalmazható hálók használatára először Bakhvalov tett javaslatot 1969-ben egy reakciós-diffúziós egyenlet kapcsán [2]. Az 1970-es évek végén és az 1980-as évek elején többen is vizsgáltak a konvekciós-diffúziós egyenletekre alkalmazható speciális hálókat. A cél az egyenletes konvergencia biztosítása

¹Claude Louis Navier (1785-1836) francia mérnök és fizikus olyan mechanikai problémák matematikai leírásával foglalkozott mint például a rugalmasság elmélete. Sir George Gabriel Stokes (1819-1903) ír matematikus, fizikus, politikus és teológus egész karrierjét a Cambridge-i egyetemen töltötte mint matematika-professzor. A Navier–Stokes-egyenletek olyan fluid anyagok mozgását modellezik, mint a víz áramlása egy csőben, a levegő mozgása a repülőgép szárnya körül, vagy az óceáni áramlatok.

volt. A terület kutatása akkor élénkült fel, amikor Shishkin megkonstruálta a speciális, szakaszonként ekvidisztáns hálót. Egyszerű struktúrájának köszönhetően a Shishkin-hálót jóval könnyebb vizsgálni mint más rácshálókat, jóllehet gyengébb numerikus megoldással szolgál, mint más hálók.

A rétegre illeszkedő hálókról az itt leírtaknál [13] jóval bővebb leírást ad.

A következőkben megnézzük, hogyan konstruálható meg a Bakhvalov-, illetve a Shishkin-háló.

3.4.2. Definíció. Legyen $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ szigorúan monoton függvény, és legyen ξ ekvidisztáns felosztású rácsháló. A φ függvényt *hálógeneráló függvénynek* nevezzük, ha a ξ ekvidisztáns hálót ún. rétegre illeszkedő ráccsá alakítja az x -tengelyen úgy, hogy $x = \varphi(\xi)$ minden x -re.

3.4.2. Bakhvalov-háló

Legyen ξ ekvidisztáns felosztású rács, és $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ hálógeneráló függvény. Illesszük az y tengelyre a ξ rácsot, és vetítsük a rácspontokat a $\varphi(\xi)$ függvény segítségével az x -tengelyre. Ekkor az $x = 0$ közelében található x_i rácspontok meghatározhatók a

$$q \left(1 - \exp \left(-\frac{b_1 x_i}{\sigma \varepsilon} \right) \right) = \xi_i = \frac{i}{N} \quad i = 1, 2, \dots$$

képlettel, ahol $q \in (0, 1)$ egy arányparaméter, $\sigma > 0$ pedig adott hálóparaméter.

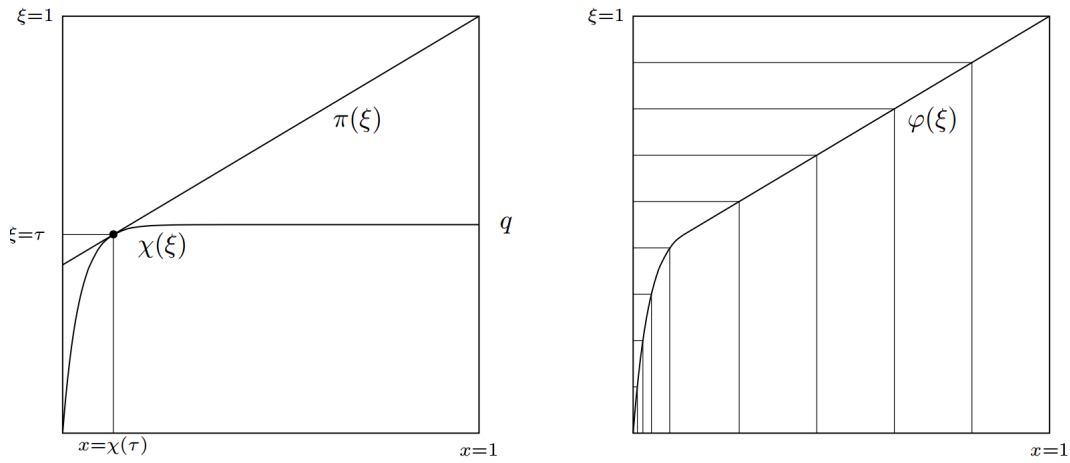
Az $x = 0$ ponttól távolabb egy ún. τ *hálóátmeneti pontot* használunk, amelynek segítségével a hálógeneráló függvény folytonos lesz, és

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \chi(\xi) := -\frac{\sigma \varepsilon}{b_1} \ln \left(1 - \frac{\xi}{q} \right), & \text{ha } \xi \in [0, \tau], \\ \pi(\xi) := \chi(\tau) + \chi'(\tau)(\xi - \tau), & \text{ha } \xi \in [\tau, 1], \end{cases} \quad (3.4.2)$$

ahol a τ pontra teljesül, hogy

$$\chi'(\tau) = \frac{1 - \chi(\tau)}{1 - \tau}.$$

A Bakhvalov-háló generáló függvényét, és az elkészült Bakhvalov-hálót ábrázolja az 1. ábra.



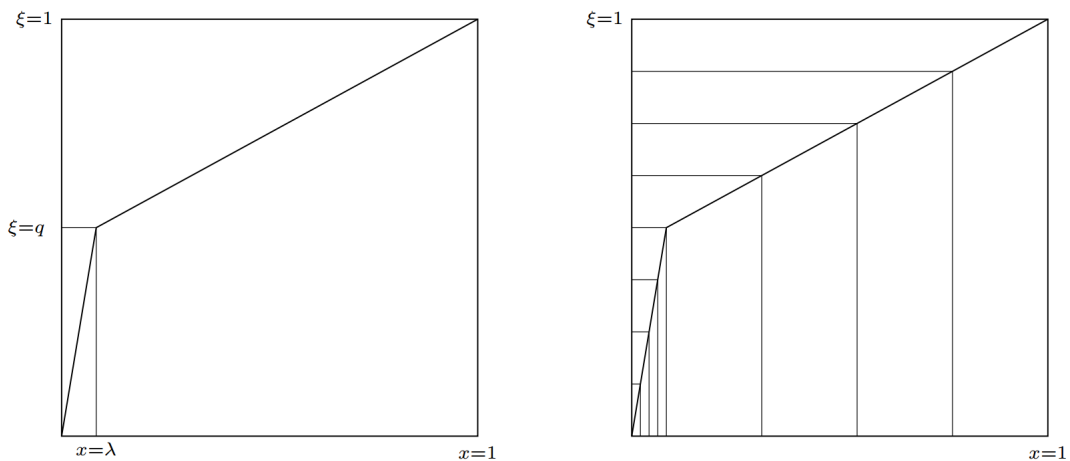
1. ábra: a hálógeneráló függvény (balra), és a megkonstruált Bakhvalov-háló (jobbra)

3.4.3. Shishkin-háló

Egy másik nagyon elterjedt hálótípus a Shishkin-háló, amely szakaszonként ekvidisztáns. Konstruáljunk meg egy Shishkin-hálót a (3.1.1) peremérték-feladathoz a következőképpen. Legyenek $q \in (0, 1)$ és $\sigma > 0$ adott hálóparaméterek, és legyen λ az a hálóátmeneti pont, amelyre

$$\lambda = \min \left\{ q, \frac{\sigma \varepsilon}{b_1} \ln N \right\}.$$

Ezután a $[0, \lambda]$ és $[\lambda, 1]$ intervallumokat osszuk fel qN illetve $(1-q)N$ darab részintervallumra (lásd 2. ábra).



2. ábra: a Shishkin-háló: a hálógeneráló függvény (balra), és a megkonstruált háló (jobbra)

4. fejezet

Az egydimenziós konvekciós-diffúziós feladat numerikus megoldásának különös tulajdonsága

Jelen fejezet Niall Madden és Martin Stynes dolgozatát hivatott bemutatni [14]. Q. S. Song, G. Yin és Z. Zhang [16]-ben írnak az egydimenziós konvekciós-diffúziós feladatok numerikus megoldásának egy figyelemre méltó tulajdonságáról. Ebben a fejezetben mi is bemutatjuk a jelenséget néhány ábrával illusztrálva, majd a cikk segítségével megmutatjuk a tulajdonság egy egyszerű, elemi úton történő bizonyítását.

4.1. A probléma és az oszcillációs jelenség

Tekintsük a következő kétpontos peremérték-problémát a $(0, 1)$ intervallumon:

$$-\varepsilon u'' + au' + bu = f \quad u(0) = u(1) = 0, \quad (4.1.1)$$

ahol az ε paraméterre igaz, hogy $0 < \varepsilon \ll 1$, míg $a, b \in C[0, 1]$, és $a > 0$, $b \geq 0$. Az ilyen feladatok megoldására jellemző, hogy az $x = 1$ ponttól távol jól viselkedik, de az $x = 1$ közelében gyorsan változik, és a megoldásnak határrétege van az $x = 1$ pontban.

Szorozzuk meg a (4.1.1) egyenletet egy tetszőleges $v \in H_0^1(0, 1)$ tesztfüggvénnyel, és írjuk át az alábbi gyenge alakba:

$$\int_0^1 [\varepsilon u'(x)v'(x) + a(x)u'(x)v(x) + b(x)u(x)v(x)]dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \quad (4.1.2)$$

ahol $u \in H_0^1(0, 1)$, és (4.1.2) igaz $\forall v \in H_0^1(0, 1)$ esetén.

Vezessünk be egy $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = 1$ ekvidisztáns felosztású rácshálót, ahol $x_i := ih$ és $h := \frac{1}{N}$, valamint a $\phi_i \in H_0^1(0, 1)$ ($i = 1, 2, \dots, N - 1$) szakaszonként lineáris kalapfüggvényeket, amelyekre a $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ feltételek teljesülnek, és

$$\phi_i(x) := \begin{cases} 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}], \\ 1 - \left| \frac{x-x_i}{h} \right|, & x \in [x_{i-1}, x_{i+1}], \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (4.1.3)$$

Legyen $V_h \subset H_0^1$ a tesztelő függvények tere, és legyen $V_h = \text{span}\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_{N-1}\}$, ugyanis a homogén peremfeltétel miatt az $x_0 = 0$ és az $x_N = 1$ pontokhoz tartozó bázisfüggvények elhagyhatók. Ekkor az $u_h \in V_h$ közelítő megoldás felírható az alábbi ($i = 1, 2, \dots, N - 1$) diszkrétizációval:

$$\int_0^1 [\varepsilon u_h'(x) \phi_i'(x) + a_i u_h'(x) \phi_i(x) + b_i u_h(x) \phi_i(x)] dx = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx. \quad (4.1.4)$$

Legyen $N \ll \varepsilon^{-1}$; megoldva a peremérték-problémát a fent bevezetett rácshálón, eredményül egy pontatlan, oszcilláló megoldást kapunk. Ez a hamis oszcilláció mutatja, mi történik, ha durva felosztású rácshálón alkalmazzuk a Galjorkin-módszert egy konvekciós-diffúziós probléma megoldására.

[16] szerzői módosították ezt a rácsot egy önkényesen megválasztott rácspont hozzávételével, amelyet abban az intervallumban helyeztek el, ahol a határréteg található. Újra alkalmazva a Galjorkin-módszert, több új, módosított rácsháló esetén is elvégezték a számítást. Ezekben az esetekben az oszcilláció ugyan csökkent, de az új közelítő megoldások nem voltak szignifikánsan jobbak az eredeti rácshálón kiszámított megoldásnál. Ezért egy új ötletet alkalmaztak: egymásra illesztették az összes közelítő megoldást.

Észrevették, hogy bár a rezgések nagyban eltérnek, a különböző megoldások minden egyes $(h, 2h), (2h, 3h), \dots, (1 - 2h, 1 - h)$ intervallumban metszik egymást egy-egy közös pontban. További numerikus kísérletek megerősítik ezt a tényt: amikor új rácspontot veszünk hozzá a $(1 - h, 1)$ intervallumhoz, akkor minden közelítő megoldás átmegy ugyanazokon a metszéspontokon minden egyes intervallumban h és $1 - h$ között.

Ha megváltoztatjuk N -t vagy ε -t ($N \ll \varepsilon^{-1}$ továbbra is teljesül) és egy másik tesztfeladaton tekintjük a (4.1.1) alakot, a közelítő megoldások oszcilláló viselkedése minden egyes esetben változatlanul megismétlődik.

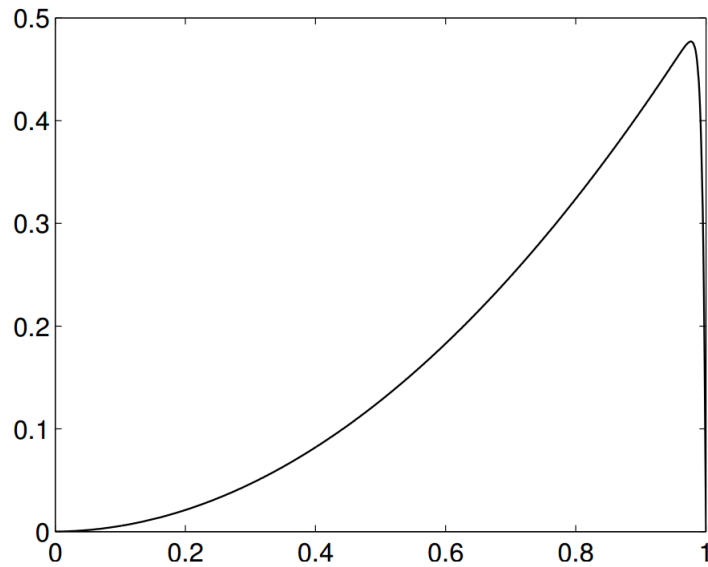
4.1.1. A jelenség bemutatása egy példán

Vizsgáljuk meg ezt a hamis oszcillációt a következő, [14] dolgozatban is ismertetett példán keresztül.

Legyen $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$, és oldjuk meg a $(0, 1)$ intervallumon a

$$-\varepsilon u'' + u' = x \quad u(0) = u(1) = 0, \quad (4.1.5)$$

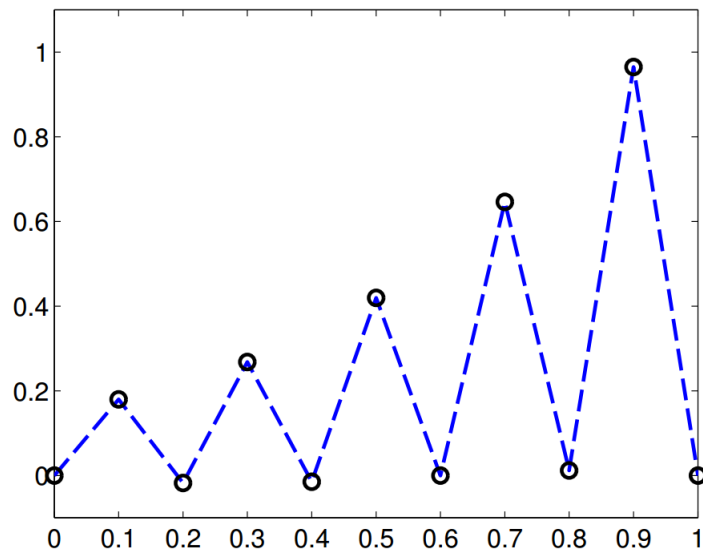
peremérték-feladatot. A (4.1.5) példafeladat pontos megoldását a 3. ábra illusztrálja.



3. ábra

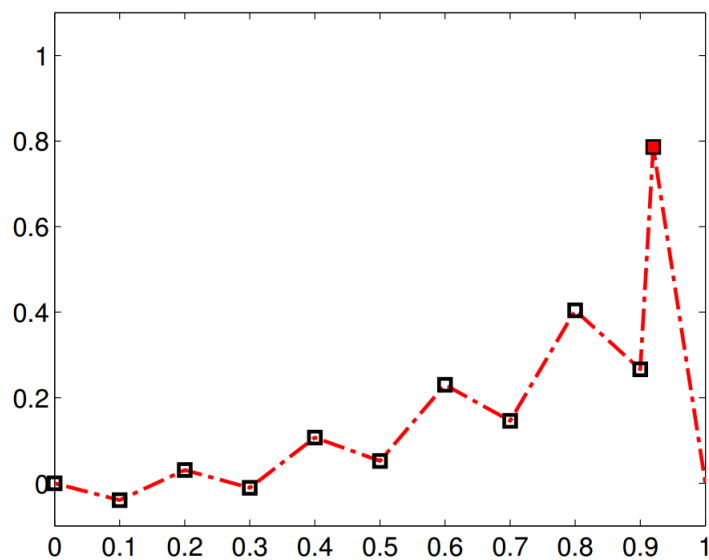
Látható, hogy a megoldásnak az $x = 1$ -ben határrétege van.

Osszuk fel a $(0, 1)$ intervallumot ekvidisztánsan tíz részintervallumra, legyen $h = 0.1$. Ekkor a Galjorkin-módszerrel kiszámított numerikus megoldás viselkedése a 4. ábrán jól látható: megjelenik a hamis oszcilláció.



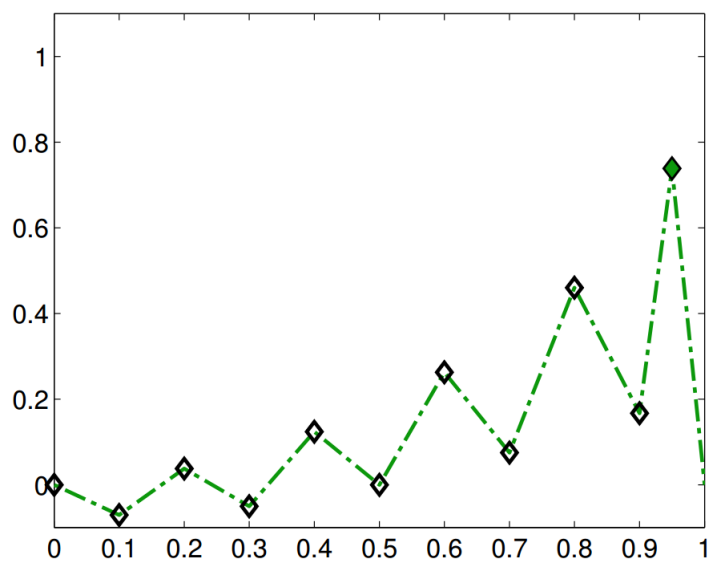
4. ábra

Most vegyük hozzá a $(0.9, 1)$ részintervallumhoz a 0.92 tetszőlegesen megválasztott rácspontot, és számítsuk ki a (4.1.5) feladat Galjorkin-megoldását ezen az új rácson.



5. ábra

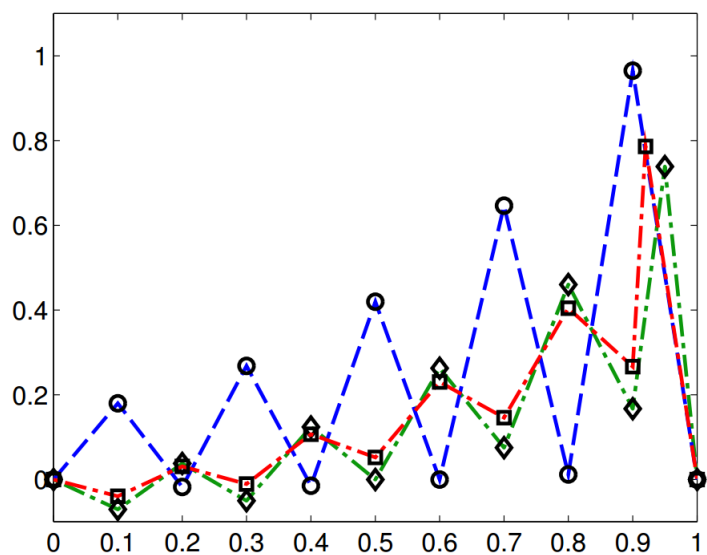
Az előző lépéshez hasonlóan, illesszük be önkényesen a 0.95 rácspontot a $(0.9, 1)$ részintervallumba.



6. ábra

Az oszcilláció ugyan csillapodott, de a két új numerikus megoldás nem lett sokkal pontosabb az elsőnél.

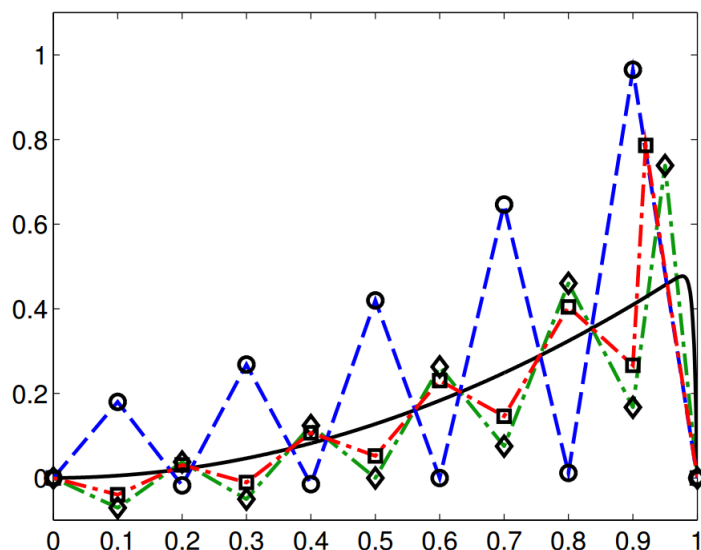
Q. S. Song, G. Yin és Z. Zhang ötletét felhasználva illesszük egymásra az eddig megkapott Galjorkin-megoldásokat.



7. ábra

A különböző numerikus megoldások esetén az oszcillációk megehetősen különböznek, ennek ellenére mindegyik megoldás áthalad azokon a fixpontokon, amelyek minden egyes

$(0.1, 0.2), (0.2, 0.3), \dots, (0.8, 0.9)$ intervallumban megjelennek. Ha ehhez még hozzávesszük a pontos megoldást is, akkor a következőt kapjuk:



8. ábra

A 8. ábrán egyértelműen látszik, hogy a numerikus megoldások metszéspontjai igen jól közelítik a (4.1.5) egyenlet pontos megoldását.

A kérdés most már csak az : miért történik ez?

4.2. Elméleti magyarázat

[16]-ben egy teljes elméleti magyarázat található, amely a konstans a és $b \equiv 0$ speciális esettel foglalkozik (ennek ellenére a bizonyítás vonatkoztható az általános (4.1.1) esetre is). A szerzők a bizonyításban értelmezik a közös metszéspontok megjelenését, és ezen metszéspontoknak a valódi megoldáshoz való viszonyát.

Mi ehelyett megnézzünk egy sokkal egyszerűbb és rövidebb bizonyítást, ami magyarázatot ad az 7. és 8. ábrára általános $a, b \in C[0, 1]$ esetben, és megmutatja azt az alapvető okot, ami miatt az ábrákon látható jelenség felbukkan.

Oldjuk meg a (4.1.1) egyenletet egy N részintervallumból álló ekvidisztáns ($h = \frac{1}{N}$) rácshálón a szakaszonként lineáris Galjorkin-módszerrel, és legyen $N \ll \varepsilon^{-1}$. Jelöljük a Galjorkin-módszerrel kiszámított megoldást $u_h \in C[0, 1]$ -val. Ekkor $N \ll \varepsilon^{-1}$ miatt a határréteg az u valódi megoldás esetén az $(1 - h, 1)$ intervallumon belül van. Ezután vezessünk be egy

(vagy több) új, önkényesen választott rácspontot az $(1 - h, 1)$ intervallumban. Jelölje \hat{u}_h a Galjorkin-módszerrel kiszámított megoldást ezen a módosított rácshálón.

Az elemzés kulcsötlete, hogy mivel u_h és \hat{u}_h megoldások ugyanazon a rácshálón lettek kiszámolva a $[0, 1 - h]$ -n, elég csak a $[0, 1 - h]$ -n összehasonlítani őket, és nem kell az egész $[0, 1]$ intervallumon.

Figyeljük meg, hogy az u_h megoldás a

$$-\varepsilon v'' + av' + bv = f \quad v(0) = v(1 - h) = u_h(1 - h),$$

kétpontos peremérték-probléma Galjorkin-módszerrel kiszámított megoldása a $(0, 1 - h)$ intervallumon, az \hat{u}_h megoldás pedig a

$$-\varepsilon w'' + aw' + bw = f \quad w(0) = w(1 - h) = \hat{u}_h(1 - h),$$

kétpontos peremérték-probléma Galjorkin-módszerrel kiszámított megoldása a $(0, 1 - h)$ intervallumon.

Következésképpen az $u_h - \hat{u}_h$ különbség a

$$-\varepsilon z'' + az' + bz = 0 \quad z(0) = z(1 - h) = u_h(1 - h) - \hat{u}_h(1 - h), \quad (4.2.1)$$

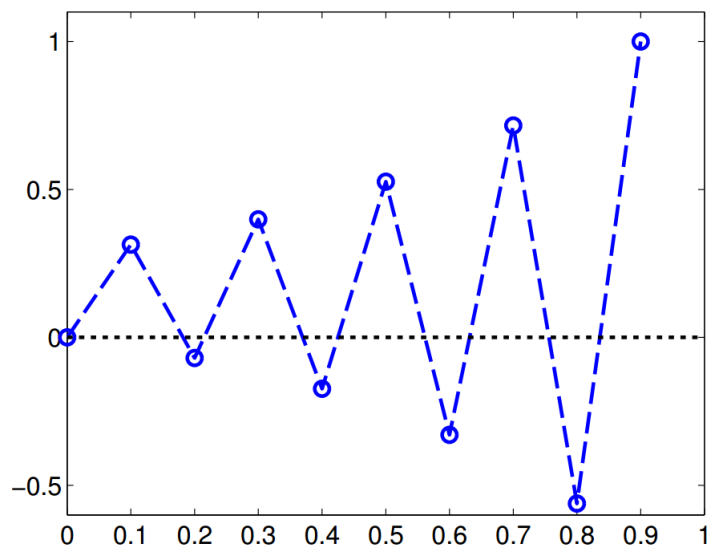
kétpontos peremérték-probléma Galjorkin-módszerrel kiszámított megoldása a $(0, 1 - h)$ intervallumon.

A 4.2.2 Lemma segítségével belátjuk, hogy a

$$-\varepsilon \zeta'' + a\zeta' + b\zeta = 0 \quad \zeta(0) = 0, \quad \zeta(1 - h) = 1 \quad (4.2.2)$$

kétpontos peremérték-probléma $(0, 1 - h)$ -n vett Galjorkin-megoldása a nulla körül oszcillál, ha a feladatot h -hosszú intervallumokra felosztott ekvidisztáns rácshálón oldjuk meg.

Azt tapasztaljuk, hogy a kiszámított megoldás minden egyes $(h, 2h), (2h, 3h), \dots, (1 - 2h, 1 - h)$ intervallumban pontosan egy pontban egyenlő nullával, a többi $(0, 1 - h]$ -n vett pontban pedig nullától különböző. Ez a jelenség látható a 9. ábrán.



9. ábra

Jelölje $\zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_{N-1}$ a (4.2.2) egyenlet Galjorkin-módszerrel kiszámított megoldásának zérushelyeit, ahol $(j-1)h < \zeta_j < jh$ minden j -re.

4.2.1. Megjegyzés. A (4.2.1) egyenlet Galjorkin-megoldása konstansszoros a (4.2.2) egyenlet Galjorkin-megoldásának, mégpedig $[u_h(1-h) - \hat{u}_h(1-h)]$ -szerese.

Vagyis a (4.2.1) egyenlet Galjorkin-megoldása a $\zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_{N-1}$ pontokban szintén zérus. Azaz minden j -re $u_h(\zeta_j) = \hat{u}_h(\zeta_j)$, ami azt jelenti, hogy mind a (4.2.1) egyenlet Galjorkin-megoldása, mind a (4.2.2) egyenlet Galjorkin-megoldása átmegy minden egyes ζ_j -n; és mivel ζ_j -k a (4.2.2) egyenlet zérushelyei, így függetlenek attól, hogy az $(1-h, 1)$ intervallumban felveszünk-e új rácspontokat, vagy sem.

Tehát, ha az $x_0 = 0, x_1 = h, x_2 = 2h, \dots, x_N = 1$ ekvidisztáns rácshálót több esetben módosítjuk a $(1-h, 1)$ intervallumba való új pont vagy pontok felvételével, és kiszámítjuk ezen rácson a Galjorkin-megoldásokat, azt fogjuk tapasztalni, hogy a (4.1.1) egyenlet minden Galjorkin-megoldása keresztülmegy a ζ_j fixpontokon (minden $j = 2, 3, \dots, N-1$ -re). Így a 7. ábra jelenségét beláttuk.

4.2.2. Lemma. Tekintsük a (4.2.2) kétpontos peremérték-problémát. Bontsuk fel a $[0, 1-h]$ intervallumot h szélességű részintervallumokra, és tegyük fel, hogy

$$\min_{h \in [0,1]} \left(\frac{a}{2} - \left| \frac{hb}{6} - \frac{\varepsilon}{h} \right| \right) > 0. \quad (4.2.3)$$

Ekkor a (4.2.2) egyenlet Galjorkin-megoldása a nulla körül oszcillál olyan értelemben, hogy a kiszámított megoldás minden egyes $(h, 2h), (2h, 3h), \dots, (1-2h, 1-h)$ intervallumban

pontosan egy pontban egyenlő nullával, különben pedig nullától különböző értéket vesz fel a $(0, 1 - h]$ intervallumon.

Bizonyítás. Jelölje $g \in C[0, 1 - h]$ a (4.2.2) egyenlet Galjorkin-megoldását a megadott rácshálón. A (4.1.4) végeelem-diszkretizációból következik, hogy a $(0, 1 - h]$ intervallum h -széles alintervallumokra való felosztása után a következő differenciaséma definiálja a g megoldás csomóponti értékeit:

$$-\frac{\varepsilon}{h^2}(g_{i+1} - 2g_i + g_{i-1}) + \frac{a_i(g_{i+1} - g_{i-1})}{2h} + \frac{b_i}{6}(g_{i+1} + 4g_i + g_{i-1}) = 0, \quad (4.2.4)$$

ahol $i = 1, \dots, N - 2$; $g_0 = 0$, $g_{N-1} = 1$, és $g_j := g(jh)$ minden j -re.

Ezt a sémát átírhatjuk a következő alakba:

$$\left(\frac{a_i}{2h} + \frac{b_i}{6} - \frac{\varepsilon}{h^2}\right)g_{i+1} + \left(\frac{4b_i}{6} + \frac{2\varepsilon}{h^2}\right)g_i + \left(-\frac{a_i}{2h} - \frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{b_i}{6}\right)g_{i-1} = 0 \quad (4.2.5)$$

minden $i = 1, \dots, N - 2$ -re. A 4.2.2 Lemma biztosítja, hogy g_{i+1} és g_i pozitívak, g_{i-1} pedig negatív.

Figyeljük meg először is, hogy a differenciaséma megoldásában g_1 nem lehet nulla, ugyanis a (4.2.5) differenciasémába $i = 1$ -et beírva kapjuk $g_2 = 0$ -t, és ezt továbbgondolva oda jutunk, hogy $g_{N-1} = 0$, ami hamis. Vagyis $g_1 \neq 0$ kell, hogy legyen.

Amennyiben $g_1 > 0$, legyen $i = 1$ a (4.2.5) egyenletben. Az együtthatókat figyelembe véve, és g_0 -t nullára beállítva láthatjuk, hogy $g_2 < 0$. Hasonlóan, a $g_1 < 0$ eset következménye az lesz, hogy $g_2 > 0$. Ilyen módon minden esetben $g_1 g_2 < 0$ -t kapunk. Ezek után folytathatjuk az indukciót, felhasználva a (4.2.5) egyenletet az $i = 1, 2, \dots, N - 2$ esetekre. Így kapjuk, hogy $g_i g_{i+1} < 0$ minden i -re. Vagyis a g megoldás valóban a nulla körül oszcillál, mégpedig úgy, hogy minden $(h, 2h), (2h, 3h), \dots, (1 - 2h, 1 - h)$ intervallumban pontosan egy pontban egyenlő nullával.

□

4.2.3. Megjegyzés. A 4.2.2 Lemma egyenlőtlenség mindössze azt állítja, hogy h elég kicsi (vagyis $\frac{a}{2}$ jóval nagyobb, mint $\frac{hb}{6}$) és hogy ε relatíve kicsi h -hoz képest. Emiatt a 4.2.2 Lemma egyenlőtlenség a gyakorlatban csak egy nagyon gyenge megszorítás a rácshálóra.

Ezzel tehát igazoltuk a különböző megoldások pontosságát a metsző fixpontokban (a jelenléget lásd a 8. ábrán).

4.2.1. Konvergenciavizsgálat

4.2.4. Tétel. *Osszuk fel újra a $[0, 1]$ intervallumot h -hosszú intervallumokra ekvidisztánsan. Tegyük fel, hogy $h \geq \varepsilon |\ln \varepsilon|$ és ez kielégíti a 4.2.2 Lemma egyenlőtlenségét. Ekkor az (4.1.1) peremérték-feladat u_h -val jelölt szakaszonként lineáris Galjorkin-megoldása kielégíti a következőt:*

$$|u(\zeta_i) - u_h(\zeta_i)| \leq Ch^2 \quad i = 2, 3, \dots, N-1, \quad (4.2.6)$$

ahol a C konstans független ε -tól és h -tól.

Bizonyítás. Mivel $h \geq \varepsilon |\ln \varepsilon|$, beszúrhatunk extra rácspontokat az $(1-h, 1)$ intervallumba annak érdekében, hogy egy Bakhvalov-hálót konstruáljunk az (4.1.1) egyenlethez. Bizonyos leírásokban megtalálható a $b \equiv 0$ eset bizonyítása, és megmutatható, hogy az eredmények kiterjeszthetők a $b \geq 0$ esetre is. Ezekben a dokumentumokban a szakaszonként folytonos, u_B -vel jelölt Galjorkin-megoldás, amelyet egy a Bakhvalov-rácsnál számítottak ki, kielégíti a $\max_{[0,1]} |u(x) - u_B(x)| \leq Ch^2$ egyenlőtlenséget valamely C konstansra. Vagyis ez azt jelenti, hogy $|u(\zeta_i) - u_B(\zeta_i)| \leq Ch^2$ minden i -re (mivel a (4.2.3) egyenlőtlenség igaz, a 4.2.2 Lemma érvényes, ebben az esetben pedig a ζ_i -k jól definiáltak). És mivel korábban már láttuk, hogy $u(\zeta_i) = u_B(\zeta_i)$ minden i -re, így készen vagyunk. \square

4.3. Numerikus eredmények

Niall Madden és Martin Stynes elkészítettek egy algoritmust a (4.1.1) egyenlet megoldásának egy pontos közelítésének megtalálására, amelyhez az oszcilláló Galjorkin-megoldásokat használták fel.

Az algoritmus a következő.

1. lépés: Számítsuk ki a (4.1.4) egyenlet Galjorkin-megoldását egy ekvidisztáns rácshálón, ami N intervallumot tartalmaz, és az intervallumok hossza $h = \frac{1}{N}$. Jelöljük ezt a megoldást u_h -val.

2. lépés: Számítsuk ki a (4.2.2) egyenlet Galjorkin-megoldását, amelyet jelöljünk ζ_h -val.

3. lépés: Legyenek $\zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_{N-1}$ a $\zeta_h(x)$ Galjorkin-megoldás zérushelyei a $(h, 1-h)$ intervallumban. Minden ζ_i -re felírható, hogy

$$\zeta_i = \frac{x_{i-1}\zeta(x_i) - x_i\zeta(x_{i-1})}{\zeta(x_i) - \zeta(x_{i-1})} \quad i = 2, 3, \dots, N-1. \quad (4.3.1)$$

Az algoritmus visszatérési értéke:

$$\{u_h(0), u_h(\zeta_2), u_h(\zeta_3), \dots, u_h(\zeta_{N-1}), u_h(1)\}. \quad (4.3.2)$$

4.3.1. Hibaszámítás a példafeladaton

Tekintsük újra a

$$-\varepsilon u'' + u' = x \quad u(0) = u(1) = 0, \quad (4.3.3)$$

peremérték-feladatot, ahol $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$.

Alkalmazzuk a fenti algoritmust erre a tesztproblémára. Látni fogjuk, hogy az eredményként kapott megoldás erősen tekintetbe veszi ε -t, valamint konvergens, ahogyan azt a (4.2.4) Tétel kimondta. Valójában ekkor nem csak a kiszámított megoldás pontos másodrendben a ζ_i pontokban, hanem a hozzá tartozó szakaszonként lineáris interpolációs \tilde{u}_h polinom is pontonként másodrendben pontos (minden ζ_i -ben) a $[0, \zeta_{N-1}]$ intervallumon.

Az alábbi táblázat mutatja a

$$\varepsilon_N := \|u - \tilde{u}_h\|_{L^\infty[0,1-\zeta_{N-1}]} \quad (4.3.4)$$

hiba mértékét különböző ε és N értékek esetén.

A táblázat csak kis ε -ok esetén vizsgált hibákat tüntet fel, mivel abban az esetben, ha ε nagy, a numerikus megoldás nem oszcillál, következésképpen nem lehetne alkalmazni a fent leírt algoritmust.

Látható, hogy a módszer másodrendben konvergens.

ε	$N = 2^5$	$N = 2^6$	$N = 2^7$	$N = 2^8$	$N = 2^9$	$N = 2^{10}$
10^{-6}	4.88e-04	1.22e-04	3.05e-05	7.62e-06	1.90e-06	4.74e-07
10^{-7}	4.88e-04	1.22e-04	3.05e-05	7.63e-06	1.91e-06	4.77e-07
10^{-8}	4.88e-04	1.22e-04	3.05e-05	7.63e-06	1.91e-06	4.77e-07
10^{-9}	4.88e-04	1.22e-04	3.05e-05	7.63e-06	1.91e-06	4.77e-07
10^{-10}	4.88e-04	1.22e-04	3.05e-05	7.63e-06	1.91e-06	4.77e-07

Irodalomjegyzék

- [1] Slimane Adjerid, Mohammed Aiffa, Joseph E. Flaherty: *Computational Methods for Singularly Perturbed Systems*, Computational Research Center Rensselaer Polytechnic Institute, Troy
- [2] N.S.Bakhvalov: *Towards optimization of methods for solving boundary value problems in the presence of boundary layers* (1969)
- [3] Faragó István: *Véges elemek módszere elliptikus típusú feladatok megoldására*, Akadémiai Kiadó, Alkalmazott Matematikai Lapok (1982)
- [4] Faragó István: *Véges elemek módszere lineáris, parabolikus típusú feladatok megoldására*, Akadémiai Kiadó, Alkalmazott Matematikai Lapok (1985)
- [5] Faragó István, Horváth Róbert: *Numerikus módszerek*, Typotex kiadó (2011)
- [6] André Fortin, José M. Urquiza, Richard Bois: *A mesh adaptation method for 1d-boundary layer problems*, International Journal of Numerical Analysis and Modeling, Vol 3, No.4 (2012), pp. 408–428.
- [7] Stoyan Gisbert, Takó Galina: *Numerikus módszerek I.*, Typotex kiadó (1995)
- [8] Stoyan Gisbert, Takó Galina: *Numerikus módszerek II.*, Typotex kiadó (1993)
- [9] Járai Antal: *Modern alkalmazott analízis*, Typotex kiadó (2007)
- [10] Mohan K. Kadalbajoo, Puneet Arora: *Fitted collocation method for convection-diffusion problems with two small parameters*, Indian Institute of Technology, Departement of Mathematics & Statistic (2012)
- [11] Karátson János: *Numerikus funkcionálanalízis*, ELTE, Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék, Egyetemi jegyzet (2010)
- [12] Kurics Tamás: *Bevezetés a funkcionálanalízisbe (Karátson János előadásai alapján)*, ELTE, Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék, Egyetemi jegyzet

- [13] Torsten Linss: *Layer-adapted meshes for convection-diffusion problems*, Institut für Numerische Mathematik, Technische Universität Dresden, habilitáció (2007)
- [14] Niall Madden, Martin Stynes: *A curious property of oscillatory FEM solutions of one-dimensional convection-diffusion problems*, Conference Applications of Mathematics (2012) Prague
- [15] Jens M. Melenk: *Hp-finite element methods for singular perturbations*, Springer kiadó (2002)
- [16] Q. S. Song, G. Yin, and Z. Zhang: *An ε -uniform finite element method for singularly perturbed two-point boundary value problems*, International Journal of Numerical Analysis and Modeling, Vol 4, No.1 (2007), pp. 127–140.
- [17] Jin Zhang: *A note of pointwise estimates on Shishkin meshes* (2012)

Nyilatkozat

Név: Ádám Johanna

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

ETR azonosító: ADJPAAT.ELTE

Szakdolgozat címe:

Az egydimenziós konvekciós-diffúziós egyenlet numerikus megoldása

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2013. május 26.

.....
a *hallgató aláírása*