

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK KÖZELÍTÉSE POLINOMOKKAL

Szakdolgozat

Készítette: Bámer Teodóra

Matematika BSc, matematikai elemző szakirány

Témavezető: Mezei István

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék



Budapest, 2013

Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
1. Interpoláció	2
1.1. Az interpolációs polinom Lagrange-féle előállítás	2
1.2. Hibabecslés	4
1.3. Interpoláció Csebisev-alappontokon	5
1.4. Példák	8
2. Weierstrass approximációs tétele	11
3. Taylor-polinomok és Taylor-sorok	15
3.1. Taylor-polinomok	15
3.2. Taylor-sorok	17
3.3. Példák	18
4. Ortogonális polinomok és Fourier-sorok	21
4.1. Ortogonális polinomok	21
4.2. Fourier-sorok	25
4.3. Példák	27
Köszönetnyilvánítás	32
Irodalomjegyzék	33

Bevezetés

A szakdolgozatom témája függvények közelítő értékének meghatározása különböző módszerekkel.

Az első fejezetben az interpolációt ismertetem, azaz olyan közelítő módszert, mely során adott pontokban ismert függvényértékek alapján próbálunk következtetni a pontok közötti függvényértékekre egy közelítő függvény segítségével. A közelítő függvényt a polinomok között keresem, mivel számos szép tulajdonsággal rendelkeznek: könnyen kiértékelhetők, mindenütt folytonosak, könnyű őket deriválni és integrálni. Utóbbi tulajdonságaik miatt a numerikus differenciálás és integrálás során is fontos szerepük van.

Majd a második fejezetben kiderül, hogy miért van alapja a polinomokkal való közelítésnek: Weierstrass approximációs tételére mutatok egy konstruktív bizonyítást. A tétel azt mondja ki, hogy korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvények tetszőleges pontossággal megközelíthetők polinomokkal.

A harmadik fejezetben a Taylor-polinomokat és Taylor-sorokat mutatom be. A Taylor-polinomok egy választott pont közelében (*lokálisan*) minden esetben jól közelítik a függvényt (feltéve, hogy az elég sokszor differenciálható), a Taylor-sorok pedig egyes esetekben előállítják magát a függvényt. A fejezet végén természetesen példákkal illusztrálom a leírtakat.

Végül a negyedik fejezetben bemutatok néhány nevezetes ortogonális polinom rendszert, melyek segítségével felírhatók olyan függvénysorok (Fourier-sorok), amelyek előállítják a közelítendő függvényt.

Az ábrák elkészítéséhez a MATLAB program R2012a verzióját használtam.

1. fejezet

Interpoláció

A fejezethez felhasznált irodalom: [1], [2].

1.1. Az interpolációs polinom Lagrange-féle előállítása

Tekintsük az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt és az $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ alappon-
tokat. Tegyük fel, hogy ismerjük az f függvény értékeit az x_i ($i = 0, 1, \dots, n$)
helyeken: $f(x_i) = y_i$. Célunk olyan $L_n \in P_n$ (P_n jelöli a legfeljebb n -ed fokú polino-
mok vektorterét) meghatározása, melyre $x_i \in [a, b]$ és $L_n(x_i) = y_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$).
A feladatot úgy is megfogalmazhatjuk, hogy keressük az $(x_i; y_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$)
pontokon átmenő legfeljebb n -ed fokú polinomot.

1.1.1 Tétel. Minden rögzített $n+1$ darab alapponthoz egyértelműen létezik $L_n \in P_n$,
melyre $L_n(x_i) = y_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$).

Bizonyítás. Először a létezést látjuk be:

Legyenek

$$l_i(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

az ún. Lagrange-féle alappolinomok, melyekre igaz, hogy

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{ha } i \neq j \\ 1 & \text{ha } i = j \end{cases}$$

$$L_n(x) := \sum_{j=0}^n l_j(x) \cdot y_j$$

$L_n \in P_n$ és

$$L_n(x_i) = \sum_{j=0}^n l_j(x_i) \cdot y_j = y_i$$

Egyértelműség:

Tegyük fel, hogy van még egy legfeljebb n -ed fokú polinom, melyre $L_n^*(x_i) = y_i$ teljesül. Ekkor $L_n(x) - L_n^*(x)$ n -ed fokú polinomnak legalább $n+1$ gyöke van, ebből az következik, hogy $L_n(x) - L_n^*(x) = 0$, vagyis $L_n(x) = L_n^*(x)$. \square

Vezessük be a következő $n+1$ -ed fokú polinomot:

$$\omega_{n+1}(x) := (x - x_0)(x - x_1) \dots$$

$$\dots (x - x_{k-1})(x - x_k)(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

Ennek segítségével $L_n(x)$, illetve $l_j(x)$ a következő alakban is írható:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_j)\omega'_{n+1}(x_j)}$$

$$l_j(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_j)\omega'_{n+1}(x_j)}$$

Ugyanis:

$$\begin{aligned} \omega'_{n+1}(x) &= (x - x_1) \dots (x - x_n) + (x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n) + \dots + \\ &+ \dots + (x - x_0) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n) + \dots + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

ezért

$$\omega'_{n+1}(x_j) = (x_j - x_0) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)$$

1.1.2 Tétel. *Ha az f függvény $n+1$ -szer folytonosan differenciálható az alappontokat tartalmazó $[a, b]$ intervallumban, akkor minden $\tilde{x} \in [a, b]$ -re teljesül a következő egyenlőség*

$$f(\tilde{x}) = L_n(\tilde{x}) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(\tilde{x}) \quad (1.1)$$

ahol ξ egy (a, b) -beli pont.

A tétel bizonyítása a *Rolle-tételen* alapul, amely kimondja, hogy ha a g függvény folytonos az $[a, x]$ intervallumban és differenciálható az intervallum belső pontjában, valamint $g(a) = g(x)$, akkor van olyan $\xi \in (a, x)$ szám, melyre $g'(\xi) = 0$. (Ez geometriailag azt jelenti, hogy g grafikonjának a $(\xi; g(\xi))$ pontban vett érintője vízszintes.)

Bizonyítás. Ha $\tilde{x} = x_i$, akkor ξ tetszőleges lehet, mert $\omega_{n+1}(x_i) = 0$ és az alappontokban $f(x_i) = L_n(x_i)$. Ha \tilde{x} nem alappont, akkor tekintsük az alábbi $n + 1$ -szer differenciálható függvényt:

$$g(z) = f(z) - L_n(z) - \frac{f(\tilde{x}) - L_n(\tilde{x})}{\omega_{n+1}(\tilde{x})} \omega_{n+1}(z)$$

Nyilván $g(\tilde{x}) = 0$. Az $L_n(x_i) = f(x_i)$ feltételek miatt $g(x_0) = g(x_1) = \dots = g(x_n) = 0$. Tehát $g(z) = 0$ a $z \in \{x_0, x_1, \dots, x_n, \tilde{x}\}$ $n + 2$ db pontban. A Rolle-tétel miatt $g'(z) = 0$ valamilyen $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ pontokban, $g''(z) = 0$ valamilyen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ n db pontban, és így tovább, végül

$$g^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - \frac{f(\tilde{x}) - L_n(\tilde{x})}{\omega_{n+1}(\tilde{x})} (n + 1)! = 0$$

valamilyen $[a, b]$ -beli ξ pontban, vagyis

$$g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(\tilde{x}) - L_n(\tilde{x})}{\omega_{n+1}(\tilde{x})} (n + 1)! = 0.$$

Ezt átrendezve a bizonyítani kívánt egyenlőséget kapjuk. \square

1.2. Hibabecslés

Jelölje $C[a, b]$ az $[a, b]$ korlátos és zárt intervallumban folytonos függvények terét.

1.2.1 Definíció. Ha $f \in C[a, b]$, akkor $|f(x)|$ legnagyobb $[a, b]$ -beli értékét az f függvény $[a, b]$ -beli normájának nevezzük és így jelöljük:

$$\|f\| := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

1.2.2 Definíció. Azt mondjuk, hogy az L_n interpolációs polinom sorozat egyenletesen konvergál $[a, b]$ -ben f -hez, ha $\|f - L_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Vajon mitől függ, hogy az interpolációs polinom sorozat egyenletesen konvergense? Erre a kérdésre az a válasz, hogy függ az alappontok megválasztásától és az f függvény simaságától is. Ezzel kapcsolatban mutatok néhány érdekes tételt (bizonyítás nélkül).

1.2.3 Tétel. (Marcinkiewicz) Minden $f \in C[a, b]$ függvényhez található az alappontoknak olyan $\Omega_n \subset [a, b]$ ($n \rightarrow \infty$) sorozata, hogy a hozzájuk tartozó interpolációs polinomok sorozata egyenletesen konvergál f -hez $[a, b]$ -n.

1.2.4 Tétel. (Faber) Minden $\Omega_n \subset [a, b]$ ($n \rightarrow \infty$) alappont sorozathoz létezik $f \in C[a, b]$ függvény, melyre az interpolációs polinomok sorozata nem konvergál egyenletesen f -hez $[a, b]$ -n.

Az 1.1.2-es tételben feltettük, hogy $f^{(n+1)}$ folytonos $[a, b]$ -ben, ezért (1.1)-ből adódik:

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)!} \cdot |\omega_{n+1}(x)|. \quad (1.2)$$

Ezt a képletet felhasználhatjuk a függvény és az interpolációs polinom eltérésének meghatározására, azaz $|f(x) - L_n(x)|$ becslésére. Ha az f függvényt az egész $[a, b]$ intervallumon szeretnénk közelíteni az L_n polinommal, akkor eltérésüket az $\|f - L_n\|$ mennyiséggel jellemezhetjük. (1.2)-ből következik, hogy

$$\|f - L_n\| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)!} \cdot \|\omega_{n+1}\|. \quad (1.3)$$

Felvetődik a kérdés, hogy hogyan lehetne az interpoláció hibáját csökkenteni az x_i alappontok alkalmas megválasztásával. (1.3) alapján megállapítható, hogy érdemes úgy választani az alappontokat, hogy

$$\|\omega_{n+1}\| = \max_{x \in [a, b]} |\omega_{n+1}(x)|$$

minimális legyen. A következő alfejezetben kiderül, hogy melyek lesznek az optimális alappontok.

1.3. Interpoláció Csebisev-alappontokon

1.3.1 Állítás. Az n -ed fokú, 1 főegyütthatójú polinomoknak a $[-1, 1]$ intervallumon a nullától való eltérése nem lehet $\frac{1}{2^{n-1}}$ -nél kisebb, és $\frac{1}{2^{n-1}}$ -nel egyenlő a $\tilde{T}_n(x) =$

$\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ polinomnál, ahol $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$, $x \in [-1, 1]$ az n -ed fokú Csebisev-polinom.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy az így definiált $T_n(x)$ valóban n -ed fokú polinom, és a főegyütthatója minden $n \in \mathbb{N}$ esetén 2^{n-1} .

$$T_0(x) = \cos(0 \cdot \arccos x) = \cos 0 = 1 \quad (1.4)$$

$$T_1(x) = \cos(\arccos x) = x \quad (1.5)$$

Mivel

$$\cos((n+1)t) = \cos nt \cos t - \sin nt \sin t$$

és

$$\cos((n-1)t) = \cos nt \cos t + \sin nt \sin t,$$

ezért

$$\cos((n+1)t) = 2 \cos nt \cos t - \cos((n-1)t).$$

Innen $t = \arccos x$ helyettesítéssel a következő rekurziót kapjuk:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.6)$$

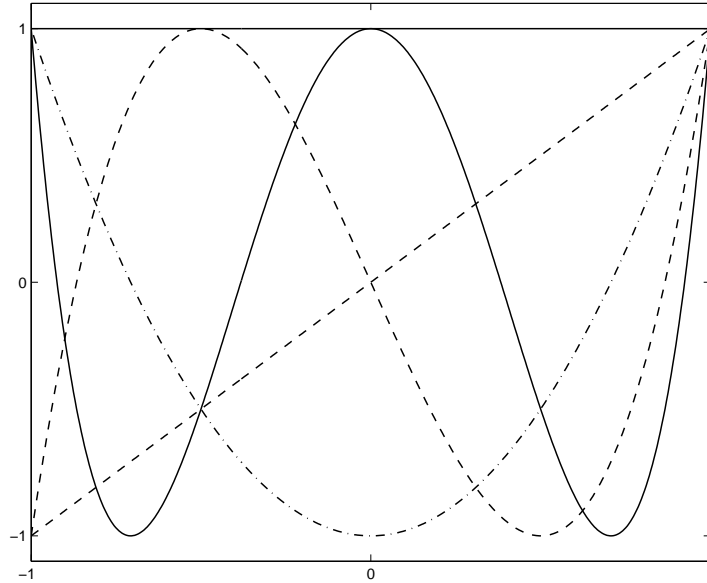
Az (1.4), (1.5) és (1.6)-ból teljes indukcióval adódik, hogy T_n n -ed fokú polinom 2^{n-1} főegyütthatóval. Az első öt Csebisev-polinom az 1.1-es ábrán látható. Keressük meg $T_n(x)$ gyökeket, vagyis a $T_n(x) = 0$ egyenlet megoldásait:

$$\begin{aligned} \cos(n \cdot \arccos x) &= 0 \\ n \cdot \arccos x &= \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \arccos x &= \frac{2k+1}{2n}\pi \\ x_k &= \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right), \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \end{aligned}$$

Nyilvánvaló, hogy $\tilde{T}_n(x)$ 1 főegyütthatójú polinomoknak is ezek a gyökei.

Most határozzuk meg $T_n(x)$ extrémális helyeit, ahol $|\cos(n \cdot \arccos x)| = 1$.

$$\begin{aligned} n \cdot \arccos x &= i \cdot \pi \\ \arccos x &= \frac{i \cdot \pi}{n} \\ x_i &= \cos\left(\frac{i \cdot \pi}{n}\right), \quad (i = 0, 1, \dots, n) \end{aligned}$$



1.1. ábra. Az első öt Csebisev-polinom

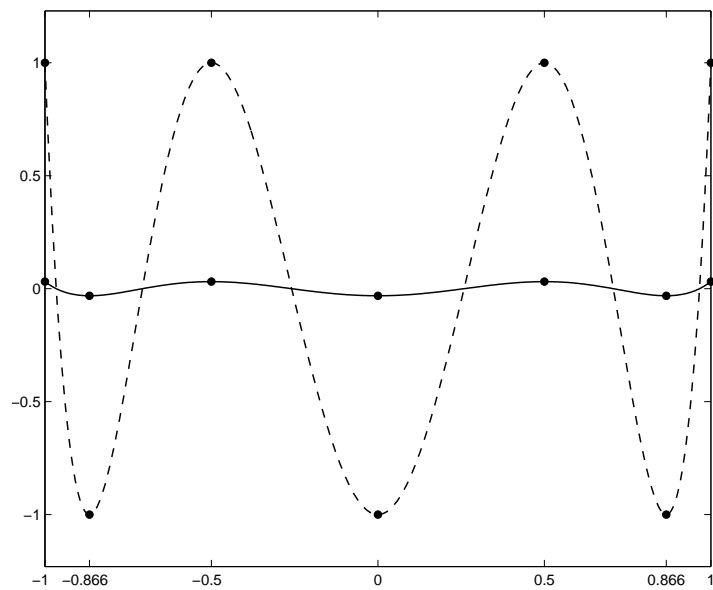
Ezekben a pontokban $T_n(x_i) = (-1)^i$. \tilde{T}_n extrémális értékei pedig

$$\tilde{T}_n(x_i) = \frac{(-1)^i}{2^{n-1}}.$$

Tehát

$$\max_{x \in [-1, 1]} |\tilde{T}_n(x)| = \|\tilde{T}_n(x)\| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Az 1.2-es ábrán $T_6(x)$ (szaggatott vonallal) és $\tilde{T}_6(x)$ grafikonja látható, extrémális



1.2. ábra. T_6 és \tilde{T}_6 extrémális helyei

helyeik ponttal jelölve.

Most már csak azt kell belátni, hogy nincs olyan 1 főegyütthatójú n -ed fokú polinom, melynek $[-1, 1]$ -beli normája kisebb, mint $\frac{1}{2^{n-1}}$. Indirekt tegyük fel, hogy van olyan $P_n(x)$ 1 főegyütthatójú n -ed fokú polinom, melyre $\|P_n(x)\| < \frac{1}{2^{n-1}}$. Tekintsük az $R(x) = \tilde{T}_n(x) - P_n(x)$ polinomot. Mivel $\tilde{T}_n(x)$ és $P_n(x)$ polinomok főegyütthatója 1, így $R(x)$ fokszáma legfeljebb $n-1$, ami azt jelenti, hogy legfeljebb $n-1$ darab gyöke lehet a $[-1, 1]$ intervallumban. Nézzük meg $R(x)$ értékeit $\tilde{T}_n(x)$ extrémális helyein: $R(x_i) = \tilde{T}_n(x_i) - P_n(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Mivel $\tilde{T}_n(x_i) = \frac{(-1)^i}{2^{n-1}}$ és $|P_n(x_i)| < \frac{1}{2^{n-1}}$, ezért R az x_i pontokban felváltva vesz fel pozitív és negatív értékeket. Ebből az következik, hogy az R legfeljebb $n-1$ -ed fokú polinomnak legalább n gyöke van, ami ellentmondás. \square

A $[-1, 1]$ intervallumon értelmezett 1 főegyütthatójú Csebisev-polinomot a $z = \frac{2x-b-a}{b-a}$ lineáris transzformációval átvihetjük tetszőleges $[a, b]$ intervallumra. Így a

$$\tilde{T}_n(z) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \cdot \arccos z), \quad z \in [-1, 1]$$

1 főegyütthatójú n -ed fokú Csebisev-polinom $[a, b]$ intervallumra való transzformáltja:

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos\left(n \cdot \arccos\left(\frac{2x-b-a}{b-a}\right)\right), \quad x \in [a, b].$$

Ez azonban nem 1 főegyütthatójú, ezért le kell osztani x^n együtthatójával. Az így kapott

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} \cos\left(n \cdot \arccos\left(\frac{2x-b-a}{b-a}\right)\right), \quad x \in [a, b]$$

az 1 főegyütthatójú n -ed fokú Csebisev-polinom az $[a, b]$ intervallumon, melynek gyökei:

$$x_k = \frac{b-a}{2} \cdot \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) + \frac{b+a}{2}, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (1.7)$$

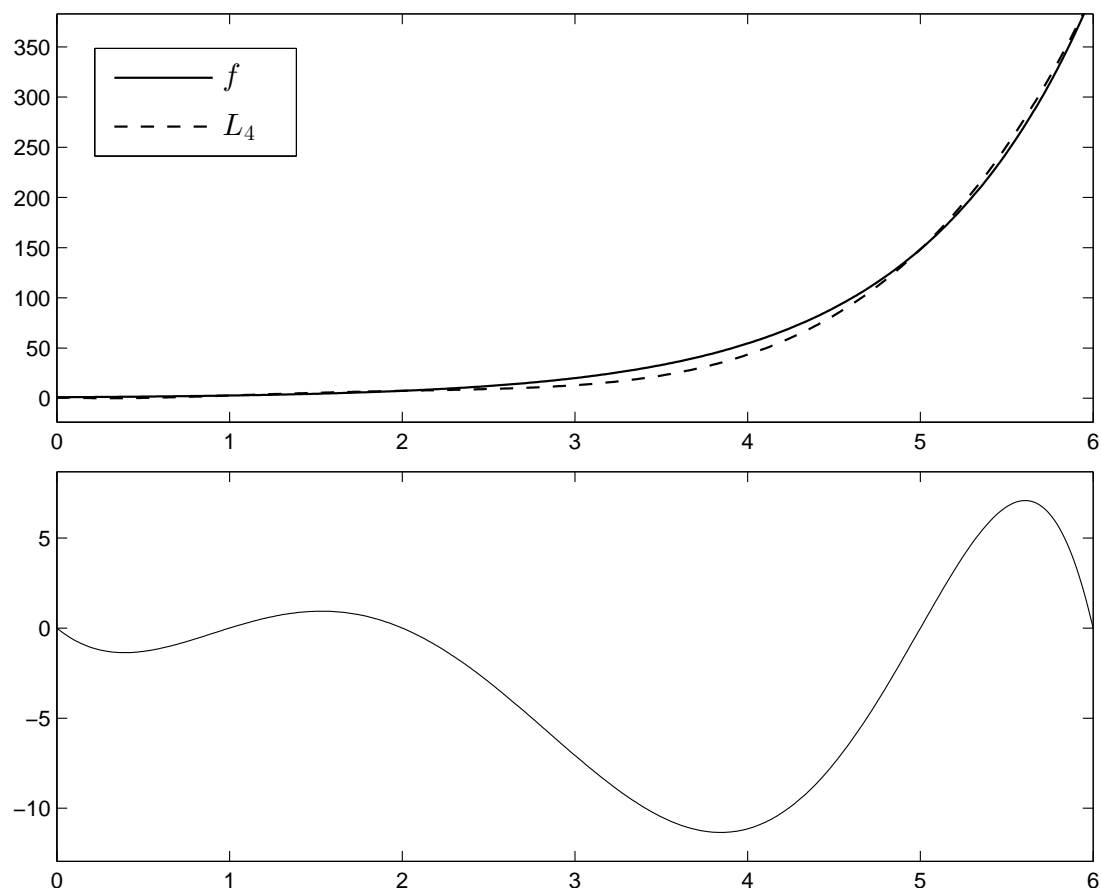
$\tilde{T}_n(x)$ $[a, b]$ -beli normája pedig

$$\left\|\tilde{T}_n(x)\right\| = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}. \quad (1.8)$$

1.4. Példák

Először az interpolációs polinom Lagrange-féle előállítására mutatok egy példát.

1.4.1 Példa. Adottak az $f(x) = e^x$ függvény értékei a következő helyeken: $f(0) = 1$; $f(1) = 2,718$; $f(2) = 7,389$; $f(5) = 148,413$; $f(6) = 403,429$. Illesszünk rájuk interpolációs polinomot!



1.3. ábra.

Először írjuk fel a megfelelő alappolinomokat:

$$l_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-5)(x-6)}{(0-1)(0-2)(0-5)(0-6)} = \frac{x^4 - 14x^3 + 65x^2 - 112x + 60}{60}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-5)(x-6)}{(1-0)(1-2)(1-5)(1-6)} = \frac{x^4 - 13x^3 + 52x^2 - 60x}{-20}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-5)(x-6)}{(2-0)(2-1)(2-5)(2-6)} = \frac{x^4 - 12x^3 + 41x^2 - 30x}{24}$$

$$l_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-6)}{(5-0)(5-1)(5-2)(5-6)} = \frac{x^4 - 9x^3 + 20x^2 - 12x}{-60}$$

$$l_4(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-5)}{(6-0)(6-1)(6-2)(6-5)} = \frac{x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 10x}{120}$$

Az interpolációs polinom pedig a következő:

$$\begin{aligned} L_4(x) &= 1 \cdot l_0(x) + 2,718 \cdot l_1(x) + 7,389 \cdot l_2(x) + 148,413 \cdot l_3(x) + 403,429 \cdot l_4(x) = \\ &= 1,077x^4 - 6,794x^3 + 14,32x^2 + 6,885x + 1. \end{aligned}$$

Az 1.3-as ábra felső részében látható a függvény és a közelítő polinom, alatta pedig a hibafüggvény, vagyis $L_4 - f$. Az ábrán az is látszik, hogy ahol ritkábbak az alappontok, ott kevésbé simul hozzá L_4 f -hez. A Lagrange-féle előállítás előnye, hogy ha az alappontokban egy másik függvényt szeretnénk interpolálni, akkor az alappolinomokat nem kell újra meghatározni. Hátránya viszont, hogy ha egy újabb alappontot veszünk hozzá az eddigiekhez, akkor az alappolinomok kiszámítását előlőről kell kezdeni. (Erre a problémára nyújt megoldást a *Newton-féle* előállítás, mely megtalálható többek között [2]-ben.)

1.4.2 Példa. *A közelítendő függvény legyen $f(x) = e^x$, $x \in [0, 1]$, és az alappontok legyenek az ötödfokú 1 főegyütthatójú Csebisev-polinom, azaz $\tilde{T}_5(x)$, $x \in [0, 1]$ gyökei. Határozzuk meg, hogy ebben az esetben legfeljebb mekkora az interpolációs hiba!*

(1.3) és (1.8) alapján felírható, hogy

$$\|f - L_n\| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)!} \cdot \|\tilde{T}_{n+1}(x)\| = \frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)!} \cdot \frac{(b-a)^{(n+1)}}{2^{2n+1}},$$

melybe a feladat adatait behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\|f - L_4\| \leq \frac{\|f^{(V)}\|}{5!} \cdot \frac{1^5}{2^9}.$$

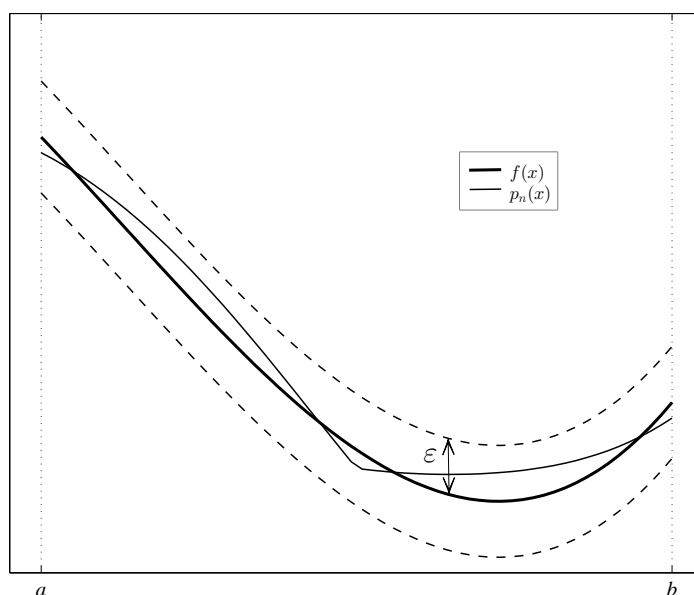
$f^{(V)} = e^x$ és $[0, 1]$ -ben $\|e^x\| \leq e$, ezért

$$\|f - L_4\| \leq \frac{e}{5!} \cdot \frac{1}{512} = 4,4 \cdot 10^{-5}.$$

2. fejezet

Weierstrass approximációs tétele

Az alábbi tétel szerint ahhoz, hogy egy f függvényt tetszőleges pontossággal közelíthessünk polinomokkal egy korlátos és zárt intervallumban, elegendő, hogy a függvény ott folytonos legyen. Másképp megfogalmazva, egy korlátos és zárt intervallumban folytonos függvény grafikonja köré megadható tetszőlegesen kicsi szélességű sáv, melyen belül marad a közelítő polinom grafikonja. Ezt szemlélteti a 2.1-es ábra.



2.1. ábra.

2.0.3 Tétel. (Weierstrass approximációs tétele) Ha $f(x)$ folytonos egy $[a, b]$ korlátos zárt intervallumban, akkor minden $\epsilon > 0$ -hoz létezik n_0 (ϵ -tól függő küszöb-index) és olyan $p_n(x) \in P_n$ polinom, hogy $n > n_0$ esetén $|f(x) - p_n(x)| < \epsilon$ minden $x \in [a, b]$ -re.

Bizonyítás. ([3] és [6] alapján) A tétel többféleképpen bizonyítható, az alábbi bizonyítás Bernsteintől (1912) származik. A bizonyítás során megadjuk polinomoknak olyan sorozatát, mely egyenletesen konvergál f -hez. Feltehetjük, hogy $a = 0$ és $b = 1$, mivel minden korlátos és zárt $[a, b]$ intervallum a $z = \frac{x-a}{b-a}$ transzformáció segítségével a $[0, 1]$ intervallumba vihető át. A $[0, 1]$ intervallumon az f függvényhez tartozó, n -ed fokú Bernstein-polinomokat a következő képlettel definiáljuk:

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

(A Bernstein-polinom tulajdonképpen az $f\left(\frac{k}{n}\right)$ értékek súlyozott összege.)

Megmutatjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f, x) = f(x),$$

és ez a konvergencia egyenletes a $[0, 1]$ intervallumban. Ehhez felhasználjuk a következő egyenlőségeket:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1 \quad (2.1)$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x \quad (2.2)$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x^2 + \frac{x-x^2}{n} \quad (2.3)$$

Mindhárom könnyen igazolható a

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (2.4)$$

binomiális tétel segítségével. (2.1)-et egyszerűen $p+q=1$ helyettesítéssel kapjuk, (2.2) és (2.3) pedig úgy igazolható, hogy (2.4)-et p szerint egyszer, illetve kétszer differenciáljuk, majd $p+q$ helyébe 1-et helyettesítünk.

Tekintsük a

$$f(x) - B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (2.5)$$

egyenlőséget, melyet úgy kapunk, hogy (2.1)-et megszorozzuk f -fel és levonjuk belőle $B_n(f, x)$ -et. Mivel f a $[0, 1]$ intervallumon folytonos, Weierstrass 1. tétele ([3] 9.52. Tétel) szerint korlátos is, tehát létezik olyan $M > 0$ szám, amelyre

$$|f(x)| < M \quad (2.6)$$

minden $x \in [0, 1]$ esetén. Heine tétele ([3] 9.61. Tétel) szerint pedig f egyenletesen folytonos is, tehát létezik olyan $\delta > 0$ (ε -tól függő) szám, hogy bármely $x_1, x_2 \in [0, 1]$ esetén, ha $|x_1 - x_2| < \delta$, akkor

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon/2, \quad (2.7)$$

ahol ε a tétel állítása szerinti, előre rögzített szám.

Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $x \in [0, 1]$ rögzített. Soroljuk a k/n pontokat ($k = 0, 1, \dots, n$) két osztályba, I -be és J -be a következőképpen:

$$k/n \in I, \text{ ha } |x - k/n| < \delta$$

$$k/n \in J, \text{ ha } |x - k/n| \geq \delta.$$

Ha $k/n \in I$, akkor δ definíciója alapján $|f(x) - f(\frac{k}{n})| < \varepsilon/2$, ezért (2.5) jobb oldalán a $k/n \in I$ indexeknek megfelelő tagok összege kicsi:

Tehát ha $|x - k/n| < \delta$, akkor

$$\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

ezért

$$\begin{aligned} \sum_{\frac{k}{n} \in I} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &< \sum_{\frac{k}{n} \in I} \frac{\varepsilon}{2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

A $k/n \in J$ indexű tagok esetén pedig belátjuk, hogy ezek összege az $f \equiv 1$ függvény esetében szintén kicsi, és tetszőleges f függvény az összeget legfeljebb M -szeresére növelheti: A

$$\sum_{\frac{k}{n} \in J} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

összeg becsléséhez a (2.2) és (2.3) egyenlőségeket használjuk fel, melyekből a

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n} \quad (2.9)$$

azonosság adódik, ha (2.3)-ból kivonjuk (2.2) $2x$ -szeresét, majd ehhez hozzáadjuk (2.1) x^2 -szeresét.

Ha $|x - k/n| \geq \delta$, azaz $k/n \in J$, akkor

$$\begin{aligned} \sum_{\frac{k}{n} \in J} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &< \frac{1}{\delta^2} \sum_{\frac{k}{n} \in J} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} < \\ &< \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Itt az utolsó egyenlőtlenség abból következik, hogy $0 \leq x(1-x) \leq 1/4$, ha $x \in [0, 1]$. Mivel $|f(x)| < M$ minden $x \in [0, 1]$ -re, ezért $|f(x) - f(\frac{k}{n})| < 2M$, így (2.10) alapján

$$\sum_{\frac{k}{n} \in J} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} < \frac{2M}{4n\delta^2} = \frac{M}{2n\delta^2}. \quad (2.11)$$

Most már csak az van hátra, hogy (2.5)-öt felírjuk (2.8) és (2.11) segítségével:

$$|f(x) - B_n(f, x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\delta^2}$$

Mivel $x \in [0, 1]$ tetszőleges volt, így $n > n_0 = \frac{M}{\varepsilon\delta^2}$ választása esetén

$$|f(x) - B_n(f, x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

minden $x \in [0, 1]$ -re.

□

3. fejezet

Taylor-polinomok és Taylor-sorok

A fejezet [3] és [4] felhasználásával készült.

3.1. Taylor-polinomok

3.1.1 Definíció. Legyen f függvény az $a \in D(f)$ pontban n -szer differenciálható.

A

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

polinomot az f függvény a ponthoz tartozó n -edik Taylor-polinomjának nevezzük,

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x)$$

pedig az n -edik maradéktag.

Olyan függvények esetében, amelyek elég sokszor deriválhatóak, a különböző közelítő polinomok közül a legegyszerűbb a megfelelő Taylor-polinomot meghatározni. Könnyen belátható, hogy $T_n(x)$ az az egyértelműen meghatározott n -ed fokú polinom, amelynek minden $k = 0, 1, \dots, n$ esetén a k -adik deriváltja az a pontban megegyezik az f függvény k -adik deriváltjával, azaz

$$T_n(a) = f(a), \quad T_n'(a) = f'(a), \quad \dots, \quad T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a). \quad (3.1)$$

A következő tétel segítségével meg lehet becsülni, hogy az n -ed fokú Taylor-polinom az a hely közelében mennyire jól közelíti a függvényt.

3.1.2 Tétel. $T_n(x)$ -re teljesül, hogy

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

Bizonyítás. Az $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ függvényre igaz, hogy

$$R_n(a) = 0, \quad R'_n(a) = 0, \quad \dots, \quad R_n^{(n)}(a) = 0.$$

Legyen $h(x) = (x - a)^n$. Ekkor $h^{(i)}(x) = n(n - 1) \dots (n - i + 1)(x - a)^{n-i}$ minden $i < n$ esetén, ebből következik, hogy

$$h(a) = h'(a) = \dots = h^{(n-1)}(a) = 0 \text{ és } h^{(n-1)}(a) = n!(x - a).$$

Ha $n - 1$ -szer alkalmazzuk L'Hospital-szabályt, akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R'_n(x)}{h'(x)} = \dots = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{h^{(n-1)}(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x - a)}$$

adódik. Mivel

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{(x - a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n^{(n-1)}(x) - R_n^{(n-1)}(a)}{(x - a)} = R_n^{(n)}(a) = 0,$$

ezért

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x - a)} = 0,$$

ezzel az állítást beláttuk. \square

Tehát T_n az a legfeljebb n -ed fokú polinom, amely f -et az a pontban lokálisan jól közelíti abban az értelemben, hogy $x \rightarrow a$ esetén $f(x) - T_n(x)$ gyorsan tart nullához.

3.1.3 Tétel. (Taylor-formula Lagrange-féle maradéktaggal) Legyen f az $[a, x]$ intervallumban $n+1$ -szer differenciálható. Ekkor létezik olyan $\xi \in (a, x)$ szám, melyre

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}.$$

Bizonyítás. A tétel hasonlóan igazolható, mint az 1.1.2-es tétel. Legyen

$$g(z) = \overbrace{f(z) - T_n(z)}^{R_n(z)} - \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - a)^{n+1}} (z - a)^{n+1}.$$

Ez $n + 1$ -szer differenciálható (a, x) -ben, és

$$g^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - a)^{n+1}} (n + 1)!. \quad (3.2)$$

Nyilvánvaló, hogy $g(x) = 0$. (3.1)-ből következik, hogy $g(a) = g'(a) = \dots = g^{(n)}(a) = 0$, tehát teljesülnek a Rolle-tétel feltételei, ezért egy $\xi_1 \in (a, x)$ pontban $g'(\xi_1) = 0$, egy $\xi_2 \in (a, \xi_1)$ pontban $g''(\xi_2) = 0$ és így tovább, egy $\xi \in (a, \xi_n)$ pontban $g^{(n+1)}(\xi) = 0$. (3.2)-t felhasználva azt kapjuk, hogy

$$g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^{n+1}}(n+1)! = 0$$

\Downarrow

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

□

3.2. Taylor-sorok

Ha f akárhányszor differenciálható az a pont egy környezetében, akkor a Taylor-polinomok a

$$\sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}$$

végtelen sor részletösszegei. Ezt a végtelen sort Taylor-sornak nevezzük, ha $a = 0$, akkor szokás MacLaurin-sornak is nevezni.

Legyen adott egy f függvény, amely a egy környezetében akárhányszor differenciálható. Ekkor felírhatjuk a

$$\sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}$$

Taylor-sort, de általános esetben nem biztos, hogy ez a sor konvergens, és ha konvergens, akkor sem állítja elő feltétlenül az adott függvényt. Ismert példa erre az

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény, amely az $x = 0$ pontban akárhányszor differenciálható, és ebben a pontban valamennyi deriváltja 0, így a 0 körüli Taylor-sora $\sum_{k=0}^{\infty} 0 \cdot \frac{x^k}{k!}$, ez mindenütt konvergens, de az összege 0. A következő tétel elégséges feltételt ad arra vonatkozóan, hogy adott intervallumon egy függvényt mikor állít elő a Taylor-sora.

3.2.1 Tétel. (Taylor-kifejtés) Ha az f függvény az $(a - R, a + R)$ intervallumban akárhányszor differenciálható, és az intervallum bármely x pontjában $|f^{(n)}(x)| \leq K$, $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}, \text{ ha } |x-a| < R,$$

azaz f az $(a - R, a + R)$ intervallumban előáll hatványsor összegeként.

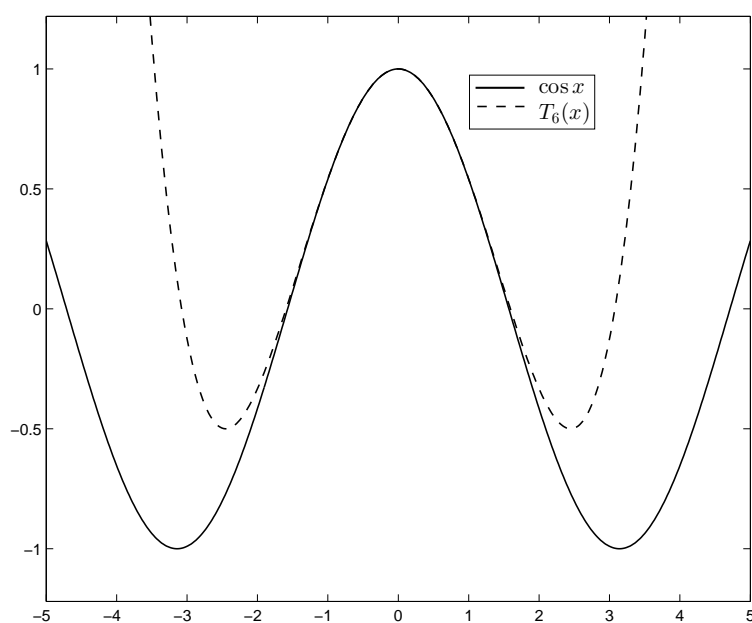
Bizonyítás. A Taylor-sor n -edik részletösszege az f függvény a körüli n -edik Taylor-polinomja. Legyen $r \in (0, R)$ rögzített és $|x - a| \leq r$. A Taylor-formula Lagrange-féle maradéktagját felhasználva

$$|f(x) - T_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \right| \leq \frac{K \cdot r^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty,$$

amiből következik az állítás. \square

3.3. Példák

3.3.1 Példa. Írjuk fel az $f(x) = \cos x$ függvény $a = 0$ ponthoz tartozó hatodik Taylor-polinomját és a hatodik maradéktagot, majd ennek segítségével határozzuk meg, hogy az $x = 0,2$ helyen milyen pontosan közelíti T_n f -et!



3.1. ábra. $T_6(x)$ és $\cos x$

Először meghatározzuk T_6 együtthatóit:

$$\begin{aligned} f(0) &= \cos 0 = 1, \\ f'(0) &= -\sin 0 = 0, \\ f''(0) &= -\cos 0 = -1, \\ f'''(0) &= \sin 0 = 0, \\ f^{(IV)}(0) &= \cos 0 = 1, \\ f^{(V)}(0) &= -\sin 0 = 0, \\ f^{(VI)}(0) &= -\cos 0 = -1. \end{aligned}$$

Ezért

$$T_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}.$$

A (3.2)-as tétel alapján

$$R_6(x) = f(x) - T_6(x) = \frac{f^{(VII)}(\xi)}{7!} x^7,$$

ezért

$$R_6(0,2) = f(0,2) - T_6(0,2) = \frac{\sin \xi}{7!} (0,2)^7.$$

Mivel $f^{(VII)}(\xi) = \sin \xi \leq 1$, így

$$R_6(0,2) \leq \frac{(0,2)^7}{7!} \approx 2,54 \cdot 10^{-9}.$$

Tehát T_6 9 tizedesjegy pontossággal adja meg $\cos 0,2$ értékét, melyet akár ki is számolhatunk: $T_6(0,2) = 1 - \frac{1}{50} + \frac{1}{15000} - \frac{1}{11250000} = 0,980066577\dots$ A (3.1)-es ábra alapján megállapítható, hogy $T_6(x)$ nagyjából $|x| < 1,2$ esetén ad jó közelítést $\cos x$ -re.

3.3.2 Példa. Írjuk fel az $f(x) = \arctan x$ függvény $a = 0$ ponthoz tartozó Taylor-sorát!

Tudjuk, hogy a $1 + q + q^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ mértani sor $|q| < 1$ esetén konvergens, és összege $\frac{1}{1-q}$. Ezek szerint

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k},$$

és

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 \pm \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}.$$

Tehát ismerjük az $f'(x) = (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ függvény sorfejtését. Ebből tagonkénti integrálással kapjuk, hogy

$$\arctan x = \int 1 - x^2 + x^4 - x^6 \pm \dots dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \dots + C$$

Mivel $\arctan 0 = 0$, ezért $C = 0$. Így $|x| < 1$ esetén

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

4. fejezet

Ortogonalis polinomok és Fourier-sorok

4.1. Ortogonalis polinomok

4.1.1 Definíció. Legyen w az (a, b) véges vagy végtelen intervallumon pozitív és integrálható függvény, melyet súlyfüggvénynek nevezünk. Azt mondjuk, hogy az $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ függvények az (a, b) intervallumban a w súlyfüggvényre nézve ortogonálisak, ha

$$(f_i, f_j) = \int_a^b f_i(x)f_j(x)w(x) dx = 0 \quad (i \neq j),$$

a fenti integrált pedig az f_i és f_j függvények skalárszorzatának nevezzük.

Ha emellett $(f_i, f_i) = 1$, $i = 1, 2, \dots$ is teljesül, akkor a függvényrendszert ortonormálnak nevezük.

4.1.2 Definíció. Mostantól értelmezzük az f függvény normáját a következőképpen:

$$\|f\|^2 = (f, f) = \int_a^b f^2(x)w(x) dx.$$

Az $\|f - g\|$ kifejezést az f és g függvények távolságának nevezzük.

Megjegyzés: A távolság ilyen értelmezésének egyik előnye, hogy könnyen meghatározható az a legfeljebb n -ed fokú p_n polinom, melyre $\|f - p_n\|$ a lehető legkisebb.

Lineáris algebrából ismerjük a vektortér fogalmát. Az olyan R vektortereket, amelyekben értelmezve van egy skalárszorzat, *euklideszi tereknek* nevezzük. Az olyan euklideszi tereket, amelyeknek van megszámlálható, mindenütt sűrű részhalmazuk, *szeparábilis euklideszi tereknek* nevezzük. Tekintsük a legfeljebb n -ed fokú polinomok vektorterét a fent definiált skalárszorzattal. A következő tétel ([7] 152.o) szerint a lineárisan független $1, x, x^2, \dots$ rendszerből előállítható olyan p_0, p_1, p_2, \dots polinom rendszer, melynek tagjai ortonormáltak a fenti skalárszorzat értelmében. (A tételből az is következik, hogy szeparábilis euklideszi térnek van ortonormált bázisa.)

4.1.3 Tétel. (Schmidt-féle ortogonalizáló eljárás) *Legyen*

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots \quad (4.1)$$

lineárisan független rendszer az R euklideszi térben. Ekkor az R térben létezik olyan

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots \quad (4.2)$$

elemrendszer, amelyre teljesül, hogy

1. (4.2) ortonormált rendszer;
2. minden φ_n elem az f_1, f_2, \dots, f_n elemek lineáris kombinációja, ahol $a_{nn} \neq 0$:

$$\varphi_n = a_{n1}f_1 + \dots + a_{nn}f_n$$

3. minden f_n elem felírható a következő alakban, ahol $b_{nn} \neq 0$:

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + \dots + b_{nn}\varphi_n$$

Nézzünk most néhány nevezetes ortogonális polinom rendszert:

4.1.4 Példa. *A $(-1, 1)$ intervallumon a $w(x) \equiv 1$ súlyfüggvényre nézve a*

$$p_n(x) = \frac{1}{n!2^n}[(x^2 - 1)^n]^{(n)} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

ún. Legendre-polinomok ortogonális rendszert alkotnak, azaz

$$(p_i, p_j) = \int_{-1}^1 p_i(x)p_j(x) dx = 0, \quad \text{ha } i \neq j.$$

Belátjuk, hogy a Legendre-polinomok valóban ortogonálisak. A parciális integrálás általános képlete szerint [8]

$$\int_{-1}^1 uv^{(n)} dx = [uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + \dots + (-1)^{n-1}u^{(n-1)}v]_{-1}^1 + (-1)^n \int_{-1}^1 u^{(n)}v dx \quad (4.3)$$

Látszik, hogy a $v = (x^2 - 1)^n = (x - 1)^n(x + 1)^n$ függvény az 1 és a -1 helyeken az első $(n - 1)$ deriváltjával együtt nulla, az $u = x^i$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$ függvényekre pedig igaz, hogy $u^{(n)} = 0$. Ezért (4.3) alapján

$$\int_{-1}^1 x^i [(x^2 - 1)^n]^{(n)} dx = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (4.4)$$

Mivel $[(x^2 - 1)^n]^{(n)}$ n -ed fokú polinom, (4.4)-ből következik, hogy az

$$1, (x^2 - 1)', [(x^2 - 1)^2]'', \dots, [(x^2 - 1)^n]^{(n)}, \dots \quad (4.5)$$

polinomokra

$$\int_{-1}^1 [(x^2 - 1)^i]^{(i)} [(x^2 - 1)^j]^{(j)} dx = 0, \quad \text{ha } i \neq j \quad i, j = 0, 1, \dots$$

tehát ezek a polinomok a $(-1, 1)$ intervallumon (a $w(x) \equiv 1$ súlyfüggvényre nézve) ortogonális rendszert alkotnak. Ha a (4.5) rendszer tagjait elosztjuk egy-egy számmal, konkrétan $(i! \cdot 2^i)$ -nel ($i = 0, 1, \dots$), akkor a rendszer ortogonális marad, és megegyezik a Legendre-polinomokkal.

Az első fejezetben láttuk, hogy a Csebisev-polinomokra teljesül a

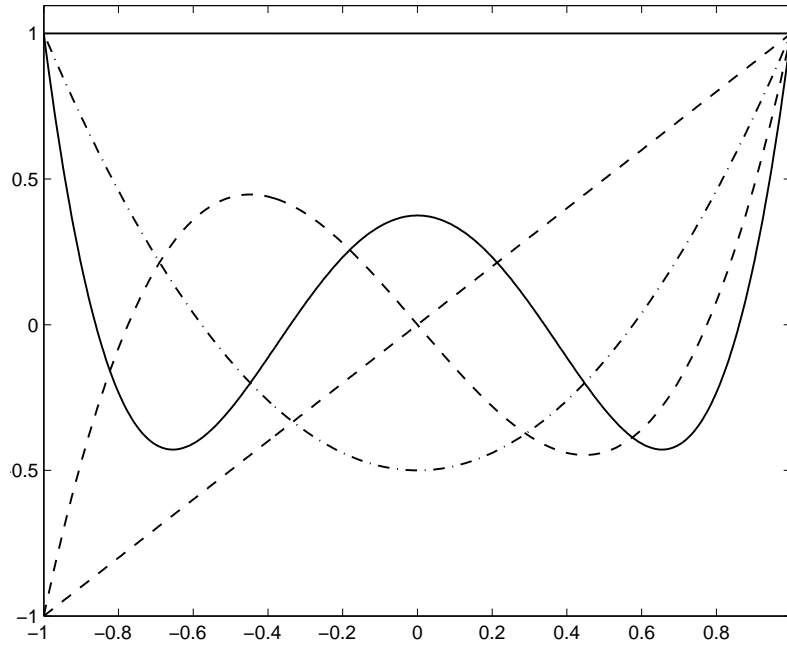
$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x,$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

rekurzió. Belátható, hogy az ortogonális polinomok eleget tesznek egy háromtagú rekurzióknak (lásd [5]-ben). A Legendre-polinomok esetében ez a következő:

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x,$$

$$p_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xp_n(x) - \frac{n}{n+1}p_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$



4.1. ábra. Az első öt Legendre-polinom

Ennek segítségével könnyebben felírható a Legendre-polinomok explicit alakja, mint a definíció alapján. Az első öt Legendre-polinom, melyek képe a 4.1-es ábrán látható:

$$p_0(x) = 1$$

$$p_1(x) = x$$

$$p_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2},$$

$$p_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x,$$

$$p_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}.$$

4.1.5 Példa. A $(-1, 1)$ intervallumon a $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ súlyfüggvényre nézve a

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

Csebisev-polinomok ortogonális rendszert alkotnak.

A Csebisev-polinomok ortogonalitása is könnyen igazolható. Az $x = \cos t$ helyettesítéssel (ekkor $\sqrt{1-x^2} = \sin t$ és $dx = -\sin t dt$), valamint a $2 \cos x \cos y =$

$\cos(x + y) + \cos(x - y)$ azonosságot felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{T_i(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_{\pi}^0 \frac{\cos(it)\cos(jt)}{\sin t} (-\sin t) dt = \int_0^{\pi} \cos(it)\cos(jt) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos((i+j)t) + \cos((i-j)t)] dt = \begin{cases} 0 & \text{ha } i \neq j \\ \pi & \text{ha } i = j = 0 \\ \pi/2 & \text{ha } i = j > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

4.2. Fourier-sorok

Ebben az alfejezetben először a *Fourier-sorokra* adok egy általános definíciót, majd különböző ortogonális polinom rendszerek szerinti sorfejtéseket mutatok be.

Legyen

$$e_0, e_1, \dots, e_n, \dots \quad (4.6)$$

az R euklideszi tér egy ortonormált rendszere, $f \in R$ tetszőleges.

4.2.1 Definíció. A

$$c_k = (f, e_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

számokat az f elem $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ rendszer szerinti *Fourier-féle együtthatóinak* nevezzük,

a

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k e_k \quad (4.8)$$

(egyelőre formális) sor az f elem $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ rendszer szerinti *Fourier-sora*, az

$$s_n = \sum_{k=0}^n c_k e_k$$

pedig a *Fourier-sor n -edik részletösszege*.

4.2.2 Állítás. $\|f - s_n\|$ akkor a legkisebb, ha $s_n = \sum_{k=0}^n (f, e_k) e_k = \sum_{k=0}^n c_k e_k$.

Bizonyítás. Legyen n rögzített. Határozzuk meg úgy az α_k ($k = 0, 1, \dots, n$) együtthatókat, hogy f és

$$S_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k e_k \quad (4.9)$$

távolsága minimális legyen. Számoljuk ki ezt a távolságot:

$$\begin{aligned}\|f - S_n\|^2 &= \left(f - \sum_{k=0}^n \alpha_k e_k, f - \sum_{k=0}^n \alpha_k e_k \right) = \\ &= (f, f) - 2 \left(f, \sum_{k=0}^n \alpha_k e_k \right) + \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k e_k, \sum_{k=0}^n \alpha_k e_k \right)\end{aligned}$$

Mivel a (4.6) rendszer ortonormált, ezért

$$\left(\sum_{k=0}^n \alpha_k e_k, \sum_{k=0}^n \alpha_k e_k \right) = \sum_{k=0}^n \alpha_k^2 (e_k, e_k) = \sum_{k=0}^n \alpha_k^2.$$

Így

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - 2 \sum_{k=0}^n \alpha_k c_k + \sum_{k=0}^n \alpha_k^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n c_k^2 + \sum_{k=0}^n (\alpha_k - c_k)^2.$$

Nyilvánvaló, hogy ez a kifejezés akkor és csak akkor minimális, ha $(\alpha_k - c_k)^2 = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n$), azaz amikor

$$\alpha_k = c_k \quad (k = 0, 1, \dots, n). \quad (4.10)$$

Beláttuk tehát, hogy n -et rögzítve a (4.9) alakú összegek közül az f elemnek az n -edik Fourier-féle részletösszetől való távolsága a legkisebb. \square

Ennek az a geometriai jelentése, hogy az $f - s_n$ elem akkor és csak akkor ortogonális az e_0, e_1, \dots, e_n elemek által kifeszített altérre, amikor s_n az n -edik Fourier-féle részletösszeg. Ez általánosítása annak, hogy valamely pontot egy egyenes, illetve sík pontjaival összekötő szakaszok közül az egyenesre, ill. a síkra merőleges szakasz a legrövidebb.

A bizonyítás során a következő egyenlőség adódott:

$$\|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n c_k^2. \quad (4.11)$$

Mivel az $\|f - S_n\|^2 \geq 0$, ezért (4.11)-ből következik, hogy

$$\sum_{k=0}^n c_k^2 \leq \|f\|^2.$$

Mivel n -et tetszőlegesen választottuk, a jobb oldal pedig nem függ n -től, így a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2$ sor konvergens, és

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \leq \|f\|^2. \quad (4.12)$$

Ezt az összefüggést *Bessel-féle egyenlőtlenségnek* nevezzük.

4.2.3 Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ortonormált rendszer zárt, ha minden $f \in R$ elemre teljesül az ún. Parseval-féle egyenlőség:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2. \quad (4.13)$$

(4.11) alapján ha egy rendszer zárt, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2 - \|f\|^2 = 0,$$

ami azt jelenti, hogy tetszőleges f esetén a Fourier-sor részletösszegeinek sorozata az f elemhez tart.

Eddig csak ortonormált rendszerekkel foglalkoztunk, de ortogonális rendszerekre is definiálhatóak az előbbi fogalmak. Legyen most $\{\tilde{e}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ az R euklideszi tér egy ortogonális rendszere, f pedig az R tér tetszőleges eleme. Ebből könnyen adódik az $e_k = \tilde{e}_k / \|\tilde{e}_k\|$ ($k = 0, 1, \dots$) ortonormált rendszer. Ekkor

$$c_k = (f, e_k) = \frac{1}{\|\tilde{e}_k\|} (f, \tilde{e}_k)$$

és

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k e_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\|\tilde{e}_k\|} \tilde{e}_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \tilde{e}_k,$$

ahol az

$$a_k = \frac{c_k}{\|\tilde{e}_k\|} \quad (4.14)$$

számokat nevezzük az f elem $\{\tilde{e}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ortogonális rendszer szerinti Fourier-féle együtthatóinak. (4.14)-ből következően $c_k = a_k \|\tilde{e}_k\|$, ezt (4.12)-be helyettesítve a Bessel-féle egyenlőtlenség ortogonális rendszerekre így írható fel:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \|\tilde{e}_k\|^2 \leq \|f\|^2. \quad (4.15)$$

4.3. Példák

4.3.1 Példa. Írjuk fel egy $[-1, 1]$ intervallumon értelmezett f függvény Csebisev-polinomok szerinti Fourier-sorát és a Fourier-féle együtthatóit!

A 4.1.5 Példa alapján

$$\int_{-1}^1 \frac{T_i(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & \text{ha } i \neq j \\ \pi & \text{ha } i = j = 0 \\ \pi/2 & \text{ha } i = j > 0 \end{cases}$$

A rendszer tehát ortogonális, így a Fourier-sor $\sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k$ alakban írható fel, ahol:

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(x)T_0(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(x)T_k(x) dx \quad k = 1, 2, \dots$$

A gyakorlatban legtöbbször az ún. trigonometrikus rendszert alkalmazzák Fourier-sorok előállításához (az így kapott sort szokás trigonometrikus Fourier-sornak is nevezni), mellyel periodikus függvényeket lehet jól közelíteni. A trigonometrikus rendszer a következő (az $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$ skalárszorzattal, tehát a súlyfüggvény $w(x) \equiv 1$):

$$\cos 0x = 1, \quad \cos kx, \quad \sin kx \quad (k = 1, 2, \dots; \quad x \in [-\pi, \pi]).$$

Egyszerű integrálással belátható, hogy a rendszer ortogonális:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos ix \sin jx dx = 0, \quad \text{ha } i \neq j,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos ix \cos jx dx = 0, \quad \text{ha } i \neq j,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin ix \sin jx dx = 0, \quad \text{ha } i \neq j.$$

Szintén integrálással győződhetünk meg arról, hogy a rendszer ortonormált-e:

$$\|\cos ix\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 ix dx = \pi \Rightarrow \|\cos ix\| = \sqrt{\pi},$$

$$\|\sin ix\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 ix \, dx = \pi \Rightarrow \|\sin ix\| = \sqrt{\pi},$$

$$\|\cos 0x\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = 2\pi \Rightarrow \|1\| = \sqrt{2\pi}.$$

Látjuk, hogy nem, ezért leosztva az egyes elemek normájával, a következő ortonormált rendszert kapjuk:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \quad (k = 1, 2, \dots; \quad x \in [-\pi, \pi]). \quad (4.16)$$

4.3.2 Példa. Írjuk fel a $[-\pi, \pi]$ intervallumon értelmezett $f(x) = x^2$ függvény (4.16) rendszer szerinti Fourier-sorát és a Fourier-féle együtthatóit! Ábrázoljuk a függvényt és a sor harmadik, negyedik, ötödik, és hatodik részletösszegét!

Tetszőleges f esetén a Fourier-sor a következő:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

ahol a_0 , a_k , és b_k , ($k = 1, 2, \dots$) az együtthatók szokásos jelölése, és

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

Ezek szerint az $f(x) = x^2$ ($x \in [-\pi, \pi]$) függvény Fourier-féle együtthatói:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \frac{\pi^2}{3},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx \, dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin kx \, dx = 0.$$

Tehát

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx \, dx \right) \cos kx.$$

A részletösszegek:

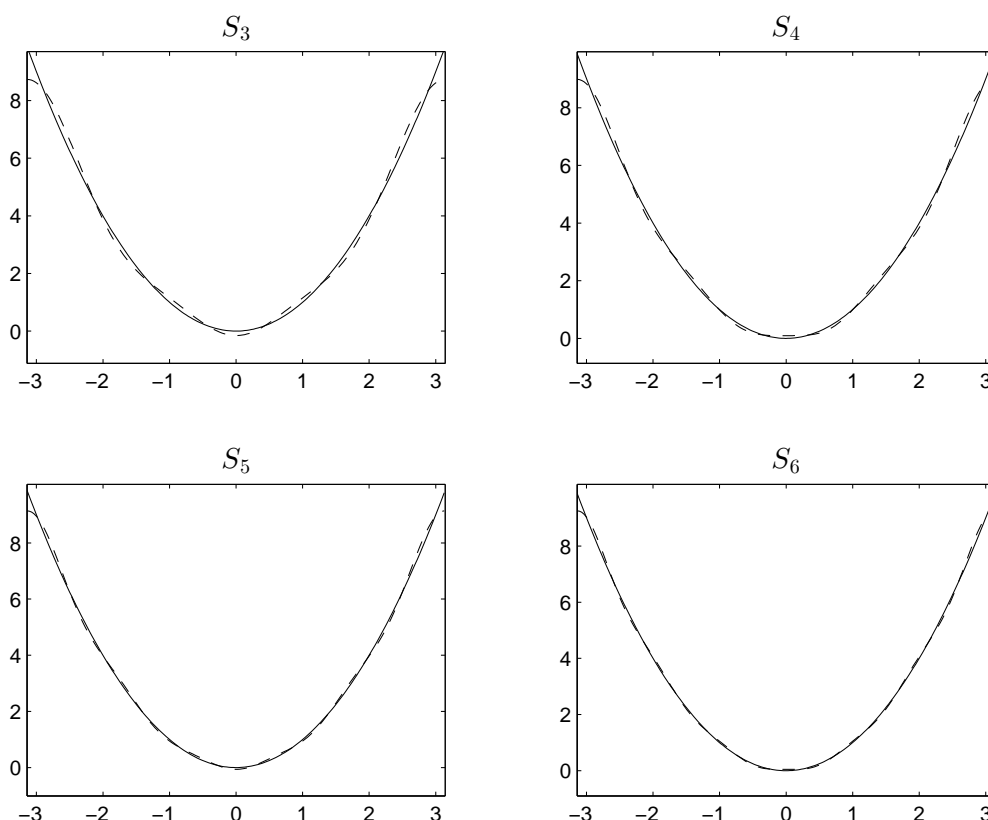
$$s_3 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^3 \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx \, dx \right) \cos kx = \frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{\pi} \left(-4\pi \cos x + \pi \cos 2x - \frac{4\pi}{9} \cos 3x \right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos x + \cos 2x - \frac{4}{9} \cos 3x$$

⋮

$$s_6 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^6 \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx \, dx \right) \cos kx =$$

$$= \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos x + \cos 2x - \frac{4}{9} \cos 3x + \frac{1}{4} \cos 4x - \frac{4}{25} \cos 5x + \frac{1}{9} \cos 6x$$



4.2. ábra.

A (4.2)-es ábra részábráin f folyamatos vonallal, az egyes részletösszegek pedig szaggatott vonallal vannak megrajzolva.

A fejezet az alábbi irodalmak alapján készült: [1], [5], [7] és [8].

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni Mezei Istvánnak, témavezetőmnek a dolgozat megírása során nyújtott segítségét, türelmét, és hasznos észrevételeit, melyekkel hozzájárult a dolgozat jobbá tételéhez. Köszönönnel tartozom még családomnak, amiért nyugodt háttérrel biztosítottak számomra egyetemi éveim alatt.

Irodalomjegyzék

- [1] Kis Ottó, Kovács Margit: *Numerikus módszerek*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1973
- [2] Sövegjártó András: *Numerikus Analízis II.*, Egyetemi jegyzet, 2004
<http://progmatt.uw.hu/oktseg/numanal/numanal2/numanal2.pdf>
- [3] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera: *Valós analízis I.*, Typotex, 2012
- [4] Pertuska György: *Alalízis I. kötet*, Egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, 1998
- [5] Stoyan Gisbert, Takó Galina: *Numerikus módszerek I.*, Typotex Kiadó, Budapest 2002
- [6] A. Ralston: *Bevezetés a numerikus analízisbe*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1969
- [7] A. N. Kolmogorov, Sz. V. Fomin: *A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1981
- [8] Szász Pál: *A differenciál- és integrálszámítás elemei II. kötet*, Typotex Kiadó, 2001