

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

---

# SZTOCHASZTIKUS MÁTRIXOK ÉS MARKOV-LÁNCOK

BSc Szakdolgozat

Készítette: Bőjthy Barbara Adrienn  
Matematika BSc, Matematikai elemző szakirány

Témavezető: Fialowski Alice  
egyetemi docens, Algebra és Számelmélet tanszék



2013

Budapest



# Tartalomjegyzék

<b>Bevezető</b>	<b>4</b>
<b>1. A Markov-lánc intuitív bemutatása</b>	<b>7</b>
1.1. A modell . . . . .	7
1.2. A modelltől levonható következtetések . . . . .	11
1.3. A modell statisztikai becslése . . . . .	12
<b>2. A modell matematikai háttere</b>	<b>14</b>
2.1. Röviden a sztochasztikus folyamatokról . . . . .	14
2.2. A Markov-lánccok tulajdonságai . . . . .	15
<b>3. Alkalmazások</b>	<b>26</b>
3.1. Demográfiai alkalmazás . . . . .	26
3.2. Pénzügyi alkalmazások . . . . .	27
3.2.1. Hatékony piacok hipotézisének tesztelése . . . . .	27
<b>4. Érdekességek</b>	<b>32</b>
4.1. Egy fizikai paradoxon Markov-lánccra . . . . .	32
4.2. Feladat . . . . .	33

# Bevezető

A matematikában a Markov-lánc olyan diszkrét sztochasztikus folyamatot jelent, amely Markov-tulajdonságú. A Markov-tulajdonság azt jelenti, hogy adott jelenbeli állapot mellett, a rendszer jövőbeli állapota nem függ a múltbeliektől. Másképp fogalmazva ez azt jelenti, hogy a jelen leírása teljesen magába foglalja az összes olyan információt, ami befolyásolhatja a folyamat jövőbeli helyzetét. Tehát adott jelen mellett a jövő feltételesen független a múlttól. Semmi, ami a múltban történt, nem hat, nem ad előrejelzést a jövőre nézve. Pl.: érmedobás esetén van egy érménk fejjel és írással, és semmi más nem befolyásolja a jövőbeni dobás alakulását.

Alkalmazásuk igen széleskörű. Használhatjuk statisztikai folyamatokban, internethez (pl. Google is használja), a gazdaságban, matematikai biológiában, a tanulás folyamatának elméletében, szerencsejáték modellezésben, algoritmikus zenében, vagy akár baseball analízisben.

Szakedolgozatomban a Markov-láncokról írok. Az elején bemutatom a Markov-modellt. A következő fejezetben néhány példa segítségével bevezetem a Markov-lánc matematikai fogalmát. Végezetül pedig néhány, számomra érdekesnek vélt alkalmazásáról írok.

## Akiről a Markov-láncok a nevét kapta



Andrei Andreyevich Markov orosz tudós, 1856-ban született, és 1922-ig élt. A Szentpétervári Egyetemen tanult, és 1886-tól tanított is ott. A matematikának sok területével foglalkozott, például számelmélettel, integrálok határértékével és sorozatok konvergenciájával is. Viszont ma a Markov-lánc modell jut eszünkbe, amit róla neveztek el. Munkásságának köszönhetjük a sztochasztikus folyamatok elméletének kidolgozását, amelyben más matematikusok is jeleskedtek, pl. Norbert Wiener és Andrei Kolmogorov. A matematika mellett még az irodalom érdekelte igazán. A Markov-láncok modelljének megalkotásához innen kapott ihletet, hiszen azt figyelte, hogy az orosz regényekben milyen valószínűséggel következnek egymás után a magán- és mássalhangzók. 1903-ban született fia, aki az Andrei nevet kapta, szintén apja munkásságát folytatta a matematikai kutatások területén. Első elméleti eredményei ezen folyamatok tekintetében 1906-ban születtek. A megszámlálhatóan végtelen állapothalmazra való általánosítást Kolmogorov végezte el 1936-ban.

A.A. Markov első ilyen témájú cikke 1907-ben a Pétervári Akadémián jelent meg. Az Anyegint vizsgálta nyelvészeti szempontból, hogy a betűk milyen valószínűséggel követik egymást benne.

"Véges (vagy megszámlálhatóan végtelen) sok értéket felvevő  $X_1, X_2, \dots, X_t, \dots$  va-

lősínúségi változók sorozata definíció szerint akkor alkot Markov-láncot, ha bármilyen  $t$  kezdőpillanat esetén a sorozat  $t$  utáni "viselkedése" csak a  $t$  időpontbeli  $X_t$  értéken keresztül függ a múltbeli "viselkedéstől", pontosabban ha

$$P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t, X_{t-1} = i_{t-1}, \dots) = \\ P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t),$$

teljesül az  $X_{t+1}, X_t, \dots$  valószínűségi változók minden lehetséges  $i_{t+1}, i_t, \dots$  értékére, más szóval minden lehetséges állapot esetén." ([5] Székely J. Gábor *Paradoxonok a véletlen matematikájában*)

Ez a tulajdonság elég sok területen érvényes, például fizikában, ahol a rendszerek jövőbeli viselkedése egyértelműen meghatározódik a jelenbeli állapotukból, és teljesen független attól, hogy milyen állapotban voltak korábban. Ha a  $P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t)$  átmenet-valószínűségek nem függenek  $t$ -től, akkor a Markov-lánc homogén. Ezeket az átmenet-valószínűségeket mátrixba rendezhetjük.

$$A = (p_{ij}),$$

ahol

$$p_{ij} = P(X_{t+1} = j | X_t = i).$$

Ennek az  $n$ -edik hatványa:

$$A^n = (p_{ij}^{(n)}),$$

ahol

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_{t+n} = j | X_t = i).$$

Ez a kapcsolat teszi lehetővé, hogy a Markov-láncok vizsgálatára felhasználjuk a mátrix-elméletet.

# 1. fejezet

## A Markov-lánc intuitív bemutatása

A Markov-láncok modelljét a *mozgás* és a *sokasági eloszlás* fogalmakkal lehet összegezni.

Azért mozgás, mert valamilyen átalakulást, dinamikát vizsgál. Az elemzések során mindig több, különböző időpontra vonatkozó adatot használunk. Nemcsak összehasonlításra törekszünk, hanem arra is, hogy a megfigyelt jelenségekből tudjunk következtetni a következő időpontban bekövetkezőre. A mozgás azért is kulcsfogalom, mert az elemzés során szabályokat, törvényszerűségeket keresünk, amelyek megmagyarázzák a változást.

A modellben a különböző időpontokban megfigyelt sokasági eloszlást vizsgáljuk. Ez azt írja le, hogy a vizsgált sokaság hogyan oszlik meg egy időpontban a különböző szempontok szerint. Ezeket különböző kategóriákba soroljuk, amiknek az általános neve: *állapot*.

### 1.1. A modell

Ahhoz, hogy a modellről többet megtudjunk, először néhány alapfogalmat kell meghatározni. A lehetséges állapotok halmazát *állapottér*nek hívjuk. A vizsgált problémától függően meg kell határozni, hogy hány kategóriába lehet sorolni a problémát, és definiálni kell azokat. Az állapotok számát  $n$ -nel jelöljük, és az egyes állapotokat 1-től  $n$ -ig terjedő természetes számokkal. *A modell alkalmazásának fontos feltétele, hogy véges kategóriát*

kell meghatároznunk.

A sokasági eloszlást vektorokkal írjuk le, amelyek az egyes kategóriákhoz tartozó valószínűségek. Ezért minden egyes állapothoz tartozik egy 0 és 1 közötti szám, ami azt mutatja meg, hogy egy elem milyen valószínűséggel tartozik az adott állapotba.  $p_i$ -vel jelöljük az  $i$ -edik állapotba tartozás valószínűségét. A  $p_i$  valószínűségeket vektorba rendezhetjük, ez a vektor jelenti a sokasági eloszlást, és így néz ki:  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ . A vizsgálati tartományt az egyes kategóriáknak átfedésmentesen és egyértelműen kell felosztaniuk, ezért

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

A sztochasztikus mátrix olyan négyzetes nemnegatív mátrix, amelynek soraiban szereplő elemek összege 1. Ha  $A$  sztochasztikus mátrix, akkor  $a_{ij}$  az  $A$  mátrix  $i$ -edik sorában és  $j$ -edik oszlopában található elem, ekkor minden  $i$ -re igaz, hogy

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1.$$

Ebből látszik, hogy a sztochasztikus mátrixok sorai is eloszlások, és eloszlásvektorként értelmezhetők.

Fontos tulajdonságuk az, hogy a sztochasztikus mátrixok szorzata is sztochasztikus mátrix.

### Állítás

Legyen az  $A$  mátrix  $n \times n$ -es sztochasztikus mátrix és ennek  $i$ -edik sorában és  $j$ -edik oszlopában található eleme  $a_{ij}$ . Az  $A$  mátrixot a Markov-lánc átmenet-valószínűségi mátrixának hívjuk, ha az  $a_{ij}$  elem azt mutatja meg, hogy mekkora annak a feltételes valószínűsége, hogy a jelenlegi időpontban az  $i$  állapotban található elem a következő időpontban a  $j$  állapotban lesz. Ezáltal az átmenet-valószínűségi mátrix elnevezés arra utal, hogy a mátrixban az átmenetek valószínűségei vannak meghatározva.



Fontos tulajdonságai:

- A főátlóban szereplő értékek, pl.  $a_{ii}$  azt mutatja meg, hogy milyen valószínűséggel lesz egy elem az  $i$  állapotban, feltéve, hogy most az  $i$  állapotban van. Tehát ezek az értékek a helybenmaradás valószínűségét adják meg.
- Eloszlást adnak meg, mivel ezek sztochasztikus mátrixok.

Az átmenet-valószínűségi mátrix egy sorának értelmezése: Az  $a_{i1}$  állapot azt mutatja meg, hogy milyen valószínűséggel megyünk át az  $i$  állapotból az 1-be. Eszerint az  $a_{i2}$  azt, hogy milyen valószínűséggel az  $i$ -ből a 2-esbe. Általánosan az  $a_{ij}$  azt jelenti, hogy milyen valószínűséggel jutunk át az  $i$  állapotból a  $j$  állapotba. Az  $a_{in}$  pedig az  $i$ -ből  $n$ -be jutás átmenet-valószínűségét adja meg. Tehát az  $i$ -edik sorban azt láthatjuk, hogy az  $i$  állapotból a következő lépésben milyen valószínűséggel juthatunk el a többi állapotba, de ebben benne van a helybenmaradás is. Így a mátrix egy sora tényleg eloszlást fejez ki.

### Nézzünk egy példát!

A példában  $n = 2$ , azaz az állapottér 2 elemű. Az egyik állapot az átlag alatti, a másik pedig az átlag feletti jövedelmet jelenti. A mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

A főátlóban szereplő elemek értéke  $\frac{3}{4}$ , és ez az jelenti, hogy valaki, aki átlagon aluli keresettel rendelkezik, a jövőben 75% eséllyel fog átlagon aluli fizetést kapni kézhez, viszont annak a valószínűsége, hogy jobb pozícióba kerül csak 25%. Az átmenet-valószínűségi mátrix értékei hasonlóan magyarázhatóak a magasabb jövedelemmel rendelkezők esetében is.

Az átmenet-valószínűségi mátrix elemeit elemezve, a jelen állapotot ismerve a következő állapotok bekövetkezésének valószínűségét meg tudjuk mondani, viszont van olyan, hogy a jelen állapotot nem ismerjük, és szeretnénk tudni, hogy a következő időszakban mi a valószínűsége annak, hogy egy elem a  $j$  állapotban lesz. Ehhez nem elég az átmenet-valószínűségi mátrix ismerete. Általában a  $j$ -edik állaptba több állapotból is eljuthatunk, és ezért jó, ha ismerjük a jelen állapotok eloszlásait.

<i>jelen eloszlás</i>		1	2	...	<i>j</i>	...	<i>n</i>		<i>várható eloszlás</i>
$p_1$	1						$a_{1j}$	➡	$p_1 a_{1j}$
$p_2$	2						$a_{2j}$	➡	$p_2 a_{2j}$
$\vdots$	$\vdots$						$\vdots$		
$p_i$	$i$						$a_{ij}$	➡	$p_i a_{ij}$
$\vdots$	$\vdots$						$\vdots$		
$p_n$	$n$						$a_{nj}$	➡	$p_n a_{nj}$
									$\underline{\hspace{1cm}}$ $\Sigma$

Nézzük meg, hogy mikből juthatunk el  $j$ -be. Az 1 állapotból  $j$ -be  $a_{1j}$  valószínűséggel juthatunk el, az 1 állapotban  $p_1$  valószínűséggel vannak az elemek, ezért a teljes valószínűsége az 1-ből  $j$ -be kerülésnek  $p_1 a_{1j}$ . Hasonlóan működik ez a többi állapot esetében is. Minden állapotra elvégezve a számításokat, azt kapjuk, hogy egy elem milyen valószínűséggel lesz a  $j$  állapotban a következő időszakban. Ezt jelöljük  $p'_j$ -vel.

$$p'_j = \sum_l p_l a_{lj} = [p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n] \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

Ez az átmenet-valószínűségi mátrix  $j$ -edik oszlopának és a kiinduló időpont eloszlásvektorának skalárszorzatával egyenlő.

Tetszőleges állapotokra kiszámolhatjuk így, hogy mennyi a valószínűsége az adott állapotba kerülésnek úgy, hogy az  $A$  átmenet-valószínűségi mátrix minden oszlopát megszorozzuk a jelen időpontbeli eloszlásvektorral. A jelölése a következő:  $p_{t+1} = p_t A$  ( $t$  az időpont). Ez az egyenlet a Markov-láncok alapegyenlete. Ezt használva készíthetünk előrejelzéseket a jövőre, a jelen ismeretében.

## 1.2. A modellből levonható következtetések

Alkalmazzuk az 1.1 fejezetben szereplő összefüggést az egymást követő időpontok egész szorzatára. Mivel két időpontbeli eloszlás egymásból adódik, ezért rekurzívan meg lehet adni az egész sokaságra. A kezdeti időpontot jelöljük 0-val, így a kezdeti időponthoz tartozó eloszlás  $p_0$  lesz. Ekkor  $p_1$  állapotra (amely időben a következő) vonatkozó eloszlás a következő lesz:

$$p_1 = p_0 A$$

( $A$  az átmenet-valószínűségi mátrix). Így a 2. időpontban a várható eloszlás:

$$p_2 = p_1 A = p_0 A^2,$$

ahol  $A^2$  az  $A$  átmenet-valószínűségi mátrix négyzete. Ezt ismételve azt kapjuk, hogy a  $t$  állapotba kerülésnek

$$p_t = p_0 A^t$$

lesz a valószínűsége, ahol  $p_0$  a kezdeti állapotbeli eloszlás,  $A^t$  pedig az  $A$  átmenet-valószínűségi mátrix  $t$ -edik hatványa.

Mivel  $A$  sztochasztikus mátrix, ezért a hatványai is sztochasztikus mátrixok. Az  $A$  átmenet-valószínűségi mátrix  $a_{ij}$  eleme azt jelenti, hogy a jelenleg  $i$  állapotban tartózkodó elem milyen valószínűséggel kerül át  $j$ -be a következő lépésben: ezt egy lépéses átmeneti valószínűségnek hívjuk.

Az  $A$  átmenet-valószínűségi mátrix ismeretében ki akarjuk számolni az  $A^2$  mátrix  $a_{ij}^{(2)}$  elemét, ami az  $i$ -edik sor  $j$ -edik eleme. Ez a következő lesz:

$$a_{ij}^{(2)} = a_{i1} \cdot a_{1j} + a_{i2} \cdot a_{2j} + \dots + a_{il} \cdot a_{lj} + \dots + a_{in} \cdot a_{nj}$$

Az összeg azt mutatja meg, hogyan lehet két időszak alatt két lépésben eljutni  $i$ -ből  $j$ -be az  $l$  (közbülső) állapoton keresztül. Ha az összes  $l$  állapotra összegezzük a valószínűségeket, akkor a lehetséges  $l$  állapotoktól teljesen független értéket kapunk. Ezt az alábbi három paraméter jellemzi:

- az  $i$  kezdeti állapot,

- a  $j$  célállapot,
- a szükséges lépések száma: kettő.

Tehát  $A^2$  kétlépéses átmenet-valószínűségi mátrix, mivel az elemei a két periódus alatti átmenet-valószínűségek. Ebből az következik, hogy az  $A^t$  mátrix  $t$ -lépéses átmenet-valószínűségi mátrix.

Arra is kíváncsiak vagyunk, hogy vajon van-e nyugvópontja a rendszernek, azaz amikor a kialakult eloszlás már nem változik tovább. Ezt nevezzük stacionárius vagy invariáns eloszlásnak, a jele legyen  $p^*$ . Erre az igaz, hogy  $p^* = p^*A$ . Ha a Markov-lánc átmenet-valószínűségi mátrixa reguláris, akkor a  $p_{t+1} = p_tA$  egyenletet rekurzívan ismételve az eloszlásvektor sorozat tart az invariáns eloszláshoz.

Az viszont csak az alkalmazás közben derül ki, hogy mennyire gyorsan tart az invariáns eloszláshoz. Ha az  $A, A^2, A^3, \dots$  sorozatot vizsgáljuk, akkor azt mondhatjuk, hogy a sorozat "tart" egy  $Q$  mátrixhoz, ha  $A$  reguláris. Ez végtelen időszakra előre megmutatja, hogy az egyes állapotokba kerülésnek mik a valószínűségei.

### 1.3. A modell statisztikai becslése

A Markov-láncok modelljében az átmenet-valószínűségi mátrix statisztikai becsléséhez maximum likelihood becslést lehet alkalmazni, amit a relatív gyakoriságok adnak meg. A minta elemszáma legyen  $d$ , az egylépéses átmeneteket  $i$  és  $j$  között  $d_{ij}$  jelöli, a  $p_{ij}$ -k pedig a becsülni kívánt valószínűségek.

Azt keressük, hogy milyen paraméterek mellett lenne a minta bekövetkezésének valószínűsége maximális. Így a maximum likelihood logaritmus a következő:

$$\max_{p_{ij}} \log L = \sum_D d_{ij} \log p_{ij},$$

ahol

$$\sum_j p_{ij} = 1.$$

Itt  $D$  azon  $(i, j)$  párok halmaza, ahol  $p_{ij} > 0$ . Ennek a megoldását a Lagrange függvény segítségével kaphatjuk meg:

$$\hat{p}_{ij} = \frac{d_{ij}}{\sum_j d_{ij}}.$$

Tehát a becslőfüggvény a tényleges állapotok relatív gyakorisága az  $i$  és  $j$  állapotok között.

## 2. fejezet

# A modell matematikai háttere

### 2.1. Röviden a sztochasztikus folyamatokról

Legyen  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  valószínűségi mező.  $\Omega$  az elemi események halmaza.

**2.1.1. Definíció.** *(Valós, és vektor értékű valószínűségi változók)* Valós illetve  $n$ -dimenziós vektor értékű valószínűségi változón egy  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  valószínűségi mezőn definiált  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ , illetve  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$  értékű mérhető függvényt értünk, ahol  $\mathbb{R}$  a valós számok halmazát,  $\mathbb{R}^n$  pedig az  $n$ -dimenziós Euklideszi teret jelöli. Továbbá  $\mathcal{B}$  a Borel mérhető halmazok  $\sigma$ -algebrája az  $\mathbb{R}$  téren,  $\mathcal{B}^n$  pedig a Borel mérhető halmazok  $\sigma$ -algebrája az  $\mathbb{R}^n$  téren. (A Borel  $\sigma$ -algebra a nyílt halmazokat tartalmazó legszűkebb  $\sigma$ -algebra.)

A sztochasztikus folyamat kétváltozós függvény:  $X(t, \omega)$  rögzített  $t$  paraméter esetén az  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  téren értelmezett valószínűségi változó. Ha  $T = 0, 1, 2, \dots$ , akkor diszkrét idejű folyamatnak, vagy idősornak, ha  $T = [0, \infty)$ , akkor folytonos idejűnek nevezzük.

**2.1.2. Definíció.** *Valamely  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  mezőn és  $\Theta$  időhalmazon értelmezett sztochasztikus folyamaton olyan  $\Theta \times \Omega$  halmazon értelmezett kétváltozós függvényt értünk, amely a második koordinátájában az  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  mezőn értelmezett mérhető valós függvény.*

**2.1.3. Definíció.** *Ha az  $\omega \in \Omega$  kimenetet rögzítjük, akkor a  $t \rightarrow X(t, \omega)$  hozzárendeléssel definiált  $X(t, \omega) : \Theta \rightarrow \mathcal{R}$  függvényt az  $X$  sztochasztikus folyamat  $\omega$  kimenetel melletti realizációjának, vagy trajektóriájának nevezzük.*

## 2.2. A Markov-láncok tulajdonságai

**2.2.1. Definíció.** (*Markov-tulajdonság*) Legyen adott az  $\{X_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  folyamat, ahol  $X_n : \Omega \rightarrow I$  valószínűségi változók az  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  valószínűségi mezőn,  $I$  pedig megszámlálható halmaz. A folyamatot diszkrét paraméterű homogén Markov-láncnak nevezzük, ha

- A folyamat Markov-tulajdonságú, azaz  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$  jelöléssel minden  $B \subseteq I$  és minden  $m \geq n$  esetén  $P(X_m \in B | \mathcal{F}_n) = P(X_m \in B | X_n)$ .
- A Markov-folyamat stacionárius (vagy homogén) átmenetvalószínűségű, azaz minden  $i, j \in I$  esetén minden olyan  $n$ -re, melyre  $P(X_n = i) > 0$ ,

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}$$

$n$ -től függetlenül.

A Markov-folyamat sztochasztikus folyamat. A sztochasztikus folyamat nem más, mint valamilyen rendszer időben egymást követő állapotait leíró valószínűségi változók összessége. Megkülönböztetünk folytonos és diszkrét idejű sztochasztikus folyamatokat, annak megfelelően, hogy az idő kontinuumában vagy csak időközönként figyeljük meg.

A következő állapot, amibe kerülhetünk nem függ a fejlődési folyamattól, csak attól, hogy előtte milyen állapotban volt. Például a változás valószínűsége hasonló lehet-e  $i$ -től  $j$ -ig, amikor a kísérletek száma 2 és 3, illetve 814 és 815.

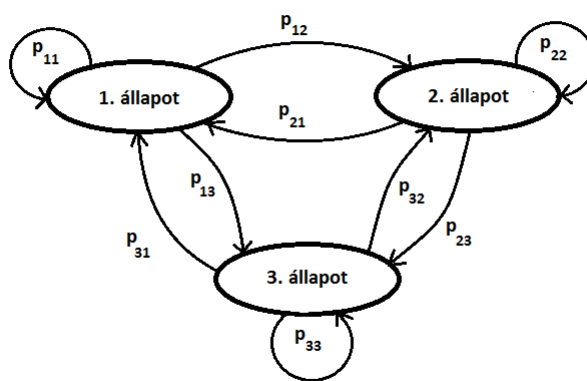
Nézzünk egy példát! Vegyünk egy dobozt, amiben 100 golyó van, 50 piros, és 50 kék. Végezzünk 100 próbát. Minden húzásnál állapotítsuk meg, hogy milyen színű golyót húztunk ki a dobozból. Annak a valószínűsége, hogy mely színű golyót húztunk, függ az előző próbától. Ezért ez a folyamat nem Markov-folyamat. A Markov-folyamatot kétféleképpen lehet ábrázolni, egy átmenet-valószínűségi gráffal, vagy egy átmenet-valószínűségi mátrixsal.

**2.2.2. Definíció.** Feltesszük, hogy a Markov-folyamat leírja a fejlődési rendszert, amelyben a  $p_{ij}$  az átmenet valószínűsége  $i$ -ből  $j$ -be, és összesen  $n$  állapot van. Ekkor a Markov-

folyamat átmenet-valószínűségi mátrixa:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

és az átmenet-valószínűségi gráfja:



Az átmenet-valószínűségi gráf nagy segítség, mert lehetővé teszi, hogy leképezzük a folyamatot, viszont az átmenet-valószínűségi mátrix fontosabb, mert lehetővé teszi a mennyiségi becsléseket a lineáris algebrában alkalmazott mátrix számítások segítségével.

### Pl.: Szerencsejáték

Van két játékos,  $A$  és  $B$ , és fejenként  $a$ ,  $b$  pénzzel rendelkeznek. Minden egymást követő játékban  $A$  nyer pénzt  $B$ -től, vagy fordítva.  $p$  annak a valószínűsége, hogy  $A$  nyer az adott körben, ezért  $q := 1 - p$  annak lesz a valószínűsége, hogy  $B$  nyer. Például ha vesszük a roulette-t, akkor  $A$  fogad a feketére vagy a pirosra, és  $B$  a bank. Van 18 piros és 18 fekete szám, plusz a 0. Ekkor annak a valószínűsége, hogy  $A$  nyer a bankkal szemben  $p = \frac{18}{37}$ . Ezért annak, hogy a bank nyer,  $q = \frac{19}{37}$  a valószínűsége, feltéve, hogy 0 esetén automatikusan a banké lesz a győzelem.

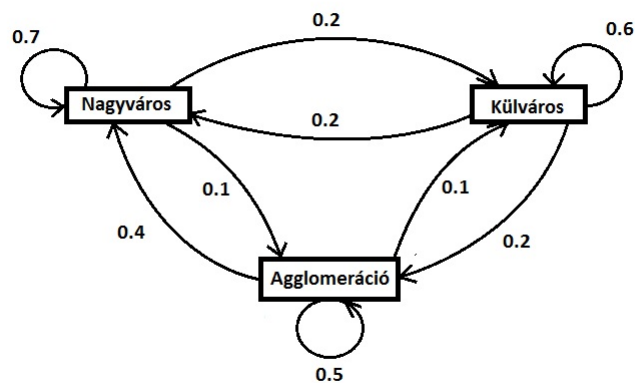
Tehát ennek az átmenet-valószínűség mátrixa:



$$P = \begin{pmatrix} \frac{18}{37} & 0 \\ 0 & \frac{19}{37} \end{pmatrix}$$

### Pl.: Migráció

Tegyük fel, hogy az évenkénti költözés a nagyváros, a külváros és az agglomeráció között megadható az alábbi gráffal:



A nagyvárosi emberek 70%-a nem költözik el, 20% költözik át a külvárosba, és 10% az agglomerációs körzetbe. Ennek a költözési folyamatnak az átmenet-valószínűségi mátrixa a következő:

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

**2.2.3. Definíció.** Jelöljön  $\xi_t (t \in \mathbb{N} \equiv \{0, 1, 2, \dots\})$  egy, a  $t$ -edik időpontban vizsgált valószínűségi változót, amely egy rendszernek valamely,  $t$ -edik időpontban megfigyelt jellemzőjére vonatkozik. Ekkor a  $\{\xi_t\}_{t=0}^{\infty}$  valószínűségi változókból álló sorozatot **diszkrét idejű sztochasztikus folyamatnak** nevezzük.

A véletlen bolyongás jó példa diszkrét idejű sztochasztikus folyamatra, mert a kezdeti állapotnak megfelelő érték egy előre megadott konstans, és a további értékeket rekurzívan tudjuk kiszámolni.

**2.2.4. Definíció.** Tegyük fel, hogy a  $\xi_t$  ( $t \in \mathbb{N}$ ) valószínűségi változó az  $S_t \equiv \{k_t^{(1)}, k_t^{(2)}, \dots, k_t^{(s_t)}\}$  halmaz valamelyik elemét veheti fel. Ekkor az  $S_t$  halmazt a sztochasztikus folyamathoz tartozó  $\xi_t$  változó **állapotterének**, a halmaz elemeit pedig **állapotoknak** nevezzük.

**2.2.5. Definíció.** Egy  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ -es mátrixot sztochasztikus mátrixnak hívunk, ha minden  $P_{ij}$  érték nagyobb 0, és ha  $P$  minden sorának az összege egyenlő 1. Az a tény, hogy a sorösszeg egyenlő 1, azt jelenti, hogy  $Pe = e$ , ahol  $e := (1, \dots, 1)^T$ , tehát  $P$  sajátértéke 1. Továbbá az  $x \in \mathbb{R}^n$  vektort valószínűségi vektornak hívjuk, ha  $x \geq 0$  és ha  $\sum_i x_i = 1$ .

Természetesen nemcsak az érdekel minket, hogy mennyi a változás valószínűsége az  $i$  állapotból a  $j$ -be egy próba alatt, hanem az is, hogy hogyan alakul a többi próbában. A következő probléma azt fogja megmutatni, hogy ezeket a valószínűségeket megkaphatjuk az átmenet-valószínűségi mátrixból.

### Probléma

Legyen  $P$  a Markov-folyamat átmenet-valószínűségi mátrixa.

(a) Legyen  $p_{ij}(m)$  annak a valószínűsége, hogy az  $m$ -edik próbában a kezdeti  $ij$  állapotban a rendszer hogyan változik meg. Ekkor

$$p_{ij}(m) = (P^m)_{ij}$$

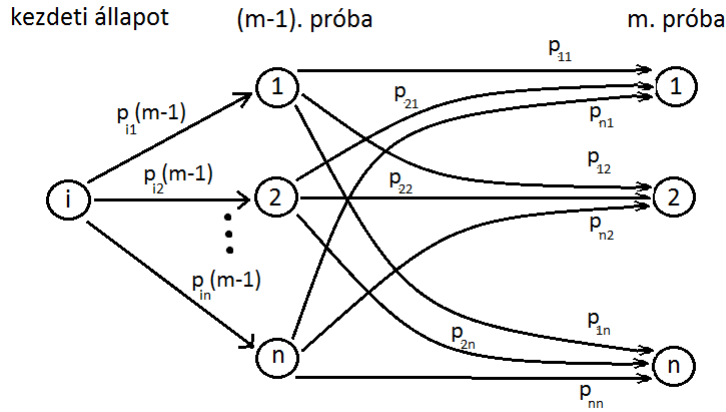
ahol  $P^m$  a  $P$  mátrix  $m$ -edik hatványa.

(b) Jelöljük  $x_i(m)$ -mel azt a valószínűséget, hogy a rendszer az  $i$ -edik állapotban van  $m$  lépés után ( $1 \leq i \leq n$ -re). Vegyük figyelembe azokat az adatokat, amelyek az  $x(m)$  valószínűségi vektor komponensei. Ekkor

$$x(m+1) = P^T x(m).$$

### Bizonyítás

(a) Figyelembe veszünk minden lehetséges utat, amin eljuthatunk az  $i$  állapotból a  $j$ -be az  $m$ -edik próbában, és jelezzük minden egyes pozíciónál az ábrán a valószínűségeket.



Ekkor

$$p_{ij}(m) = \sum_{k=1}^n p_{ik}(m-1)p_{kj} = \sum_{k=1}^n (P^{m-1})_{ik}(P)_{kj} = (P^m)_{ij}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \rightarrow P^T X = \begin{bmatrix} p_{11}x_1 + p_{21}x_2 + \cdots + p_{n1}x_n \\ p_{12}x_1 + p_{22}x_2 + \cdots + p_{n2}x_n \\ \vdots \\ p_{1n}x_1 + p_{2n}x_2 + \cdots + p_{nn}x_n \end{bmatrix}$$

Ha a kezdeti állapot  $i$ , akkor  $x(0) = e_i$  az  $i$ -dik egységvektor, és a vektorok valószínűsége  $x(m)$ ; ezeket  $m \geq 1$ -től ki lehet számolni a fenti formulával. Ezeket a vektorokat értelmezve, el tudjuk képzelni az adott Markov-láncok független másolatainak nagy számát. Ekkor azt tartjuk valószínűnek, hogy  $x_i(m)$  azoknak a másolatoknak a valószínűsége, amikor  $m$  lépés után az  $i$ -dik állapotban vagyunk. Így láthatjuk a hosszútávú Markov-folyamat viselkedését: a  $P$  átmenet-valószínűségi mátrix  $P^m$  hatványait vizsgáljuk.  $\square$

### 2.2.6. Definíció. Nézzük a Markov-folyamatot!

(a) Azt mondjuk, hogy az  $i$  és a  $j$  állapot csatlakozó, ha  $i$  elérhető  $j$ -ből néhány lépésben, és fordítva. Ez azt jelenti, hogy  $p_{ij}(m) > 0$  és  $p_{ji}(m') > 0$ , ha  $m, m' > 0$ . Könnyű igazolni, hogy ez ekvivalencia reláció. Az ekvivalencia osztályokat csatlakozó osztályoknak hívjuk.

(b) egy  $C$  csatlakozó osztályt zártnak, vagy nyelőnek hívunk, ha nincs lehetséges út  $C$ -ből a külső állapotba. Azaz, ha  $p_{ij} = 0$  minden  $i \in C$ ,  $j \notin C$ . Máskülönben  $C$ -t átmenetinek hívjuk.

(c) Egy Markov-folyamatot irreducibilisnek hívunk, ha minden állapot csatlakozik egy másikhoz, azaz van legalább egy csatlakozó osztály. Máskülönben a folyamat redukálható.

### 2.2.7. Definíció. A $P$ mátrix

- sztochasztikus, ha  $p_{ij} \geq 0$  és minden sor összege 1,
- duplán sztochasztikus, ha sztochasztikus, és minden oszlop összege 1,
- szubsztochasticus, ha  $p_{ij} \geq 0$  és minden sor összege legfeljebb 1.

**2.2.8. Tétel.** Tetszőleges  $I$  állapotterén adott  $p$  eloszláshoz és  $|I| \times |I|$  méretű  $P$  sztochasztikus mátrixhoz létezik  $I$  állapotterű Markov-lánc, melynek kezdeti eloszlása  $p$ , átmenet-valószínűségi mátrixa  $P$ .

#### Állítás

Legyenek  $p_{ij}^{(n)} = P(X_{n+m} = j | X_m = i)$  az  $n$ -edrendű átmenet-valószínűségek (feltesszük, hogy  $P(X_m = i) > 0$ ), ezekre teljesül a Chapman-Kolmogorov egyenlőség :

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_k p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$$

. Ez azt jelenti, hogy a  $p_{ij}^{(n)}$  mennyiségek éppen a  $P_n$  mátrix megfelelő elemei.

#### Bizonyítás

$$\begin{aligned} P(X_{n+m} = j | X_0 = i) &= \sum_k P(X_{n+m} = j, X_n = k | X_0 = i) = \\ &= \sum_k P(X_{n+m} = j | X_n = k, X_0 = i) P(X_n = k | X_0 = i) = \\ &= \sum_k p_{kj}^m p_{ik}^n. \end{aligned}$$

□

- 2.2.9. Definíció.** 1. Azt mondjuk, hogy az  $i$  állapotból elérhető  $j$ , ( $i \rightarrow j$ ), ha van olyan  $n \geq 0$ , hogy  $p_{ij}^{(n)} > 0$ . Ez reflexív ( $p_{ii}^{(0)} = 1$ ) és tranzitív (Chapman-Kolmogorov) reláció.
2. Azt mondjuk, hogy  $i$  és  $j$  kapcsolódnak, ha  $i \rightarrow j$  és  $j \rightarrow i$ . Ez ekvivalenciareláció, tehát osztályokra bontja az állapotteret (csak az átmenet-valószínűségi mátrixtól függ). A Markov-lánc irreducibilis, ha egyetlen osztályból áll.
3. Az  $i$  állapot lényeges, ha  $i \rightarrow j$  esetén  $j \rightarrow i$  is teljesül.

Az állapotokra értelmezett valamely tulajdonság osztálytulajdonság, egy osztálynak vagy minden eleme ilyen tulajdonságú, vagy egy sem. Láthatjuk, hogy a lényegesség osztálytulajdonság, ezért vannak lényeges és lényegtelen osztályok.

**2.2.10. Definíció.** Az  $\{n > 0 : p_{ii}^{(n)}\}$  halmaz legnagyobb közös osztója az  $i$  periódusa, jelölése  $d(i)$ . Ha a halmaz üres, akkor a periódust nem értelmezzük. Ha  $d(i) = 1$ , akkor az állapot aperiodikus.

### Állítás

Egy osztály minden állapotának ugyanannyi a periódusa.

**2.2.11. Definíció.** Egy  $X_0, X_1, \dots$  Markov-láncot (erősen) stacionárius folyamatnak nevezünk, ha minden  $n \geq 1$ ,  $m \geq 1$  és  $i_0, i_1, \dots, i_n \in \mathcal{S}$  állapot sorozat esetén

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = P(X_m = i_0, X_{m+1} = i_1, \dots, X_{m+n} = i_n).$$

Ez azt jelenti, hogy egy véges trajektória  $(i_0, i_1, \dots, i_n)$  valószínűsége minden időben ugyanaz.

**2.2.12. Tétel.** Ha egy Markov-lánc irreducibilis, aperiodikus és létezik stacionárius eloszlása, akkor  $X_n$  eloszlása  $n$  növekedésével konvergál a stacionárius eloszláshoz függetlenül attól, hogy mi a kezdeti eloszlás. Pontosabban,

$$P_{\underline{a}}(X_n = j) \rightarrow \pi_j, n \rightarrow \infty,$$

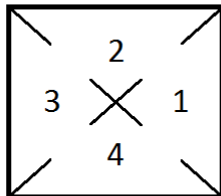
vagy mátrixokkal

$$\underline{a}P^n \rightarrow \underline{\pi}, n \rightarrow \infty,$$

ahol a sorvektorok konvergenciája azt jelenti, hogy minden koordinátában konvergál.

### Példa

Figyeljünk meg egy egeret, amit az alábbi felvázolt 4 cella egyikében elengedtek.



Tegyük fel, hogy az egér a szomszédos cellába az óramutató járásával ellentétes irányba  $p$  valószínűséggel, a másik cellába az óramutató járásával megegyező irányba  $q = 1 - p$  valószínűséggel megy be. Az egér mozgását tekinthetjük Markov-folyamatnak, aminek az átmenet-valószínűségi mátrixa:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 & p \\ p & 0 & q & 0 \\ 0 & p & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 \end{pmatrix}$$

Könnyű ellenőrizni, hogy  $0 < p < 1$  és

$$P^{2k-1} = \begin{pmatrix} 0 & * & * & p \\ * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * \\ * & 0 & * & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{2k} = \begin{pmatrix} * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * \\ * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * \end{pmatrix}, (k \in \mathbb{N})$$

ahol  $* \neq 0$ .

Az egérnek a cellák közti mozgása ergodikus, de nem szabályos. Néhány cellát csak páros számú lépésben érhet el, néhányat meg csak páratlan számúban.

**2.2.13. Definíció.** *Egy  $i$  állapotra azt mondjuk, hogy ergodikus, ha aperiodikus és pozitív. Ha pedig egy Markov-láncon minden állapot ergodikus, akkor magát a láncot is ergodikusnak nevezzük.*

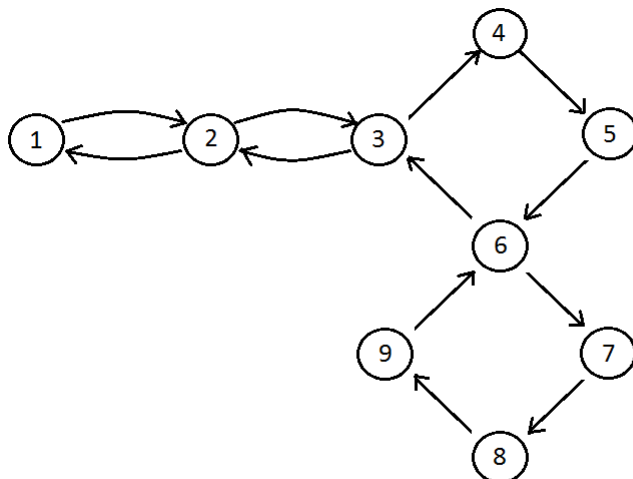
**2.2.14. Definíció.** *Legyenek  $i$  és  $j$  egy ergodikus Markov-folyamat állapotai. Egy állapotnak ez az  $(i, j)$  párja megadja a következő halmast:*

$$N_{ij} := \{n \geq 1 \mid j \text{ állapot elérhető } i\text{-ből } n \text{ lépésben}\}$$

Egyértelműen minden  $N_{ij}$  halmaz nemüres, mert minden állapot kapcsolatban van egymással.

### Példa

Az alábbi gráfban a nyilak azt mutatják, ahol a valószínűségek a megfelelő állapotok között nem nullák



Ekkor a példa kedvéért ezek lesznek a halmazok:

$$N_{11} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}, \quad N_{36} = \{3, 5, 7, 9, \dots\}$$

$$N_{59} = \{4, 8, 10, 12, 14, \dots\} \text{ és } N_{88} = \{4, 8, 10, 12, 14, \dots\}$$

**2.2.15. Lemma.** Tegyük fel, hogy az  $A \subset \mathcal{N}$  halmaz zárt az összeadásra. Legyen  $d$  az elemek legnagyobb közös osztója. Ekkor  $\lambda \cdot d \in A$  minden elég nagy  $\lambda$ -ra.

### Bizonyítás

Az általánosság megsértése nélkül feltételezhetjük, hogy  $d = 1$ . Ekkor van véges sok  $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$  szám, amelyeknek a legnagyobb közös osztója 1. A legnagyobb közös osztó lineáris ábrázolása által találunk  $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ -t úgy, hogy  $k_1 a_1 + \dots + k_n a_n = 1$ . Ekkor

$$m := \sum_{k_i > 0} k_i a_i \in A$$

és

$$n := \sum_{k_i < 0} (-k_i) a_i \in A,$$

ahol  $A$  zárt az összeadásra, és  $m - n = 1$ . Most legyen  $\lambda \geq n(n - 1)$ . Ekkor

$$\lambda = \alpha n + \beta,$$

ahol  $\alpha \geq n - 1$  és  $0 \leq \beta \leq n - 1$ . De

$$\lambda = (\alpha - \beta)n + \beta m \in A.$$

□

A következő tétel ennek a számelméleti eredményét mutatja meg az  $\mathcal{N}_{ij}$  halmazokra.

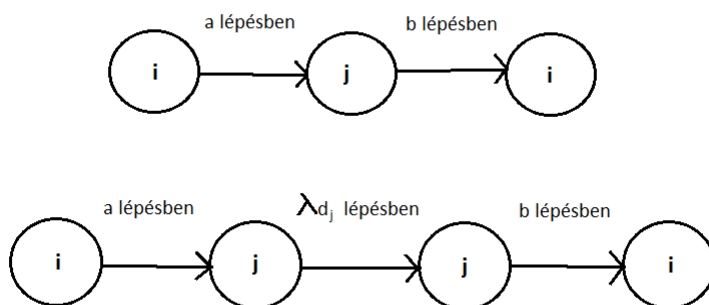
**2.2.16. Tétel.** *Tekintsünk egy ergodikus Markov-folyamatot  $1, \dots, n$  állapotokkal.*

- (a)  $\mathbb{N}_{ij} + \mathbb{N}_{jk} \in \mathbb{N}_{ik}$ ; speciálisan az  $\mathbb{N}_{ii}$  halmazok zártak az összeadásra.
- (b) Legyen  $d_i$  az  $\mathbb{N}_{ii}$  elemeinek a legnagyobb közös osztója. Ekkor  $d_1 = d_2 = \dots = d_n := d$ .
- (c) az  $\mathbb{N}_{ij}$  halmaz összes eleme kongruens modulo  $d$ ;  $d$ -vel osztva  $r_{ij}$  maradékot adnak.
- (d)  $r_{ij} + \lambda \cdot d \in \mathbb{N}_{ij}$  minden elég nagy  $\lambda$ -ra.
- (e) minden  $i, j, k$ -ra  $r_{ii} = 0$  és  $r_{ij} + r_{jk} \equiv r_{ik} \pmod{m}$ .

### Bizonyítás

(a) Legyen  $a \in \mathbb{N}_{ij}$  és  $b \in \mathbb{N}_{jk}$ . Az  $i$ -ből  $j$ -be  $a$  lépésben lehet eljutni, és  $j$ -ből  $k$ -ba  $b$  lépésben. Következésképpen  $i$ -ből  $k$ -ba  $a + b$  lépésben lehet eljutni. Ez azt jelenti, hogy  $a + b \in \mathbb{N}_{ik}$ .

(b) Válasszuk  $a \in \mathbb{N}_{ij}$ -t és  $b \in \mathbb{N}_{ji}$ -t. Ekkor  $\lambda \cdot d_j \in \mathbb{N}_{ij}$  minden elég nagy  $\lambda$ -ra. Válasszunk egy ilyen  $\lambda$  számot, ami relatív prím  $d_i$ -vel. Ekkor az alábbi átvitelek lehetségesek:





Következésképpen az  $a + b$  és  $a + \lambda \cdot d_j + b$  számok benne vannak  $\mathbb{N}_{ii}$ -ben, így oszthatók  $d_i$ -vel. De ekkor a  $\lambda \cdot d_j$  különbség is osztható  $d_i$ -vel. Ekkor  $d_i$  osztható  $d_j$ -vel a  $\lambda$  választás függvényében. Az  $i$  és  $j$  szerepe felcserélhető, amiből következik, hogy  $d_i$  is osztható  $d_j$ -vel. Tehát  $d_i = d_j$ .

(c) Legyen  $a, b \in \mathbb{N}_{ij}$ . Válasszunk egy  $c \in \mathbb{N}_{ji}$ -t. Ekkor (a) szerint  $a + c$  és  $b + c$  is benne van  $\mathbb{N}_{ii}$ -ben, ezért osztható  $d$ -vel. De ekkor az  $a - b$  különbség is osztható  $d$ -vel, és ez az, amit meg akartunk mutatni.

(d) Vegyünk egy elemet  $\mathbb{N}_{ij}$ -ből, ennek  $r_{ij} + \lambda_0 d$  alakúnak kell lenni valamilyen  $\lambda_0$ -ra.

Létezik olyan  $\lambda_1$ , olyan módon, hogy  $\lambda d \in \mathbb{N}_{jj}$  minden  $\lambda \geq \lambda_1$ -re. De ekkor  $r_{ij} + \lambda_0 d + \lambda d \in \mathbb{N}_{ij} + \mathbb{N}_{jj} \in \mathbb{N}_{ij}$  minden  $\lambda \geq \lambda_1$ -re, így  $r_{ij} + \lambda d \in \mathbb{N}_{ij}$  minden  $\lambda \geq \lambda_0 + \lambda_1$ -re.

(e) Ez azonnal következik (a)-ból és (c)-ből.  $\square$

**2.2.17. Tétel.** *Ha a Markov-folyamat minden állapota az elsőből  $m$  lépésben elérhető, akkor  $m + 1$  lépésben is.*

### Bizonyítás

Legyen  $j$  egy tetszőleges állapot. Vegyünk egy  $k$  állapotot, ami olyan, hogy  $j$ -t eléri egy lépésben. A feltételezés szerint van egy  $m$  lépéses út  $i$ -ből  $k$ -ba. Ehhez hozzávéve egy  $k$ -ból  $j$ -be vezető utat kapunk, ami megadja az  $i$  elérésének kívánt módját az elsőből  $m + 1$  lépésben.  $\square$

## 3. fejezet

# Alkalmazások

### 3.1. Demográfiai alkalmazás

A migráció vizsgálatára jól használhatók a Markov-láncok, ahogy ezt egy korábbi példában is bemutattam, ezért ebben a fejezetben szeretnék róla kicsit bővebben is írni. A modell az állandó lakóhely megváltoztatását vizsgálja, ami lehet országon belüli, vagy országok közötti is.

A vizsgálat során az a kérdés, hogy milyen területekről vándorolnak el, és hova költöznek be. Egy ország népességét például aszerint lehet csoportosítani, hogy fővárosiak, városiak vagy egyéb településen laknak. De lehet akár az egyes országok megyéi közötti vándorlást is vizsgálni. Regionálisan vizsgálva a Markov-modell állapotait az egyes régiók fogják alkotni.

A modellezés az alábbi sémát követheti: a  $p_t$  vektor jelölje a népesség  $t$  időpontbeli területi megoszlását. Ekkor léteznie kell az  $M$  átmenet-valószínűségi mátrixnak (ez kell ahhoz, hogy Markov-láncokkal tudjuk modellezni), amely segítségével az alábbi módon kiszámíthatjuk a népesség megoszlását a következő időszakra

$$p_{t+1} = p_t M.$$

Az  $M$  mátrix egyes elemei azt mutatják, hogy az egyes régiók közötti lakosság vándorlásnak mik a valószínűségei. Az  $m_{ij}$  azt a valószínűséget jelenti, hogy egy ember milyen

valószínűséggel költözik át az  $i$  régióból a  $j$ -be egy időszak alatt. Ebből az következik, hogy azok az elemek, amelyek az  $M$  mátrix főátlójában vannak - vagyis  $m_{ii}$  - azt mutatja, hogy a lakosság hány százaléka marad meg a saját régiójában. Az első ilyenről Tarver és Gurley írt 1965-ben, ahol azt nézték, hogy az Egyesült Államok népszámlálási körzeteiben milyen arányban élnek a fehér és nem fehér lakosok.

A modell megoldását adó invariáns eloszlás a népesség megoszlását mutatja a stacionárius állapotban, azaz akkor, amikor minden egyes régióban azonos mértékű a be- és kivándorlás, ezáltal az egyes régiók népességszáma állandó. Ez a migrációs modell a biológiában is jól alkalmazható, amikor egyes állatok populációinak vándorlásait szeretnénk vizsgálni.

## 3.2. Pénzügyi alkalmazások

A Markov-láncokat a pénzügyek világában technikai elemzésekhez használják. Akkor kerül előtérbe, amikor a múltban realizálódott idősorokból szeretnénk a jövőre nézve értékes információval szolgálni.

Az alábbi területeken szokták alkalmazni pénzügyek tekintetében:

- Hatékony piacok tesztelése;
- Bankközi kamatok modellezése;
- Hitelkockázat modellezése.

### 3.2.1. Hatékony piacok hipotézisének tesztelése

Ez a pénzügyek világában azt jelenti, hogy az értékpapírok árfolyamai minden ismert információt tükröznek. Ehhez a következőknek kell teljesülniük:

- az értékpapír kereskedelemnek nincsenek tranzakciós költségei;
- a piaci szereplők számára minden létező információ elérhető;

- a jelenleg hozzáférhető információk alapján a piaci szereplők egyetértenek a jelenlegi árfolyamszintben, és az árfolyam jövőbeli várható eloszlásában.

Ha ezek a feltételek teljesülnek, akkor az árfolyam minden információt magába foglal. Ha a hatékony piacok hipotéziséből indulunk ki, akkor az árfolyamok véletlen bolyongást követnek.

Például: Véletlen bolyongás

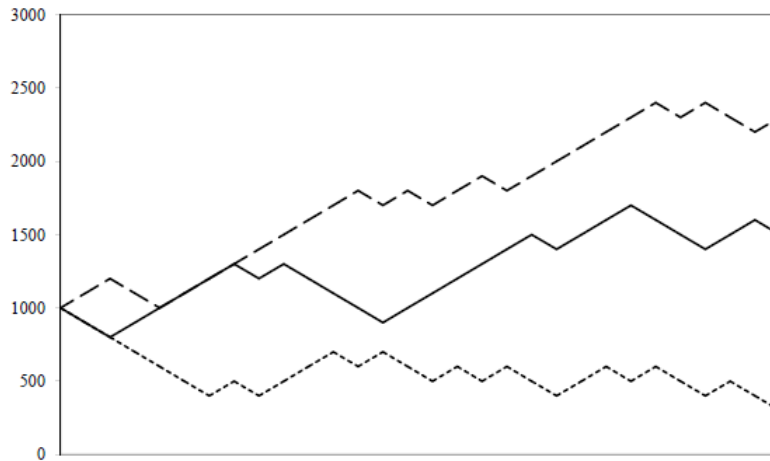
- Van egy egyenes;
- Itt lépkedünk előre vagy hátra (diszkrét lépéseket);
- minden lépésünk független az előzőtől;
- $P(\text{előre}) = p, P(\text{hátra}) = q$ ;
- Ez véletlen folyamatokra tipikus viselkedés, pl. részecske mozgása (véletlen ütközések, impulzusok), folyadék/légnemű anyag esetén a diffúzió.

### Példa

A következő egyszerű játék véletlen bolyongást mutat.

Van két játékos,  $A$  és  $B$ . Fej vagy írást játszanak. Feldobnak egy érmét, és ha fej, akkor  $A$  fizet  $B$ -nek 100 Ft-ot, ha írás, akkor  $B$  fizet  $A$ -nak ugyanennyit. Ekkor mindkét játékosnál lévő pénz mennyisége véletlen bolyongást fog követni.

Az alábbi ábrán látható az egyik játékosnál lévő pénz mennyiségének alakulása a játék során. Kezdetben 1000 Ft volt náluk.



*Példák véletlen bolyongásra a játék 30-szori ismétlésével.*

Az ábráról látszik, hogy a játék alakulását nem lehet előrejelezni a korábban kapott értékek alapján, hiszen ez teljes mértékben a véletlentől függ. Ebből például az következik, hogy egy hatékonyan működő tőzsdén jegyzett vállalat részvénye véletlen bolyongást mutat. Ezért a részvény árfolyamát nem lehet előrejelezni a korábbi értékek alapján. A közgazdászok azt szokták vizsgálni, hogy az árfolyamok véletlen bolyongást követnek-e. Ha az árfolyam nem követ véletlen bolyongást, akkor a feltevéseink megkérdőjelezhetőek, és meg kell vizsgálni, hogy a megfigyelt tulajdonságú idősorokhoz melyik feltevést kell módosítani.

A véletlen bolyongás tesztelésére sok módszer van, amely megbecsüli annak a valószínűségét, hogy az árfolyam véletlen bolyongást folytat-e, vagy nem. Ha igen, akkor a hozamok között semmilyen kapcsolatot nem fogunk találni, de ha a hozamok között mégis találunk kapcsolatot, akkor a hipotézisünk kérdéses.

A hozamok közötti kapcsolat vizsgálatára a legegyszerűbb módszer az autokorrelációs együtthatók kiszámítása. Ezt úgy tudjuk kiszámolni, hogy az idősorokat egy tetszőleges késleltetésszámmal "eltoljuk", és utána a késleltetett és az eredeti idősor közötti korrelációs együtthatót számoljuk ki. A Markov-láncok használata azért szerencsésebb, mert alkalmazásával nem kell a fenti korlátozó feltételezésekkel élnünk. Az átmenet-valószínűségek az állapottér szerint vannak meghatározva, ezért nincs kizárva a nemline-

aritás lehetősége sem. Ugyancsak nincs szükség feltételezésekre a hozamok eloszlásának tekintetében.

Az egyetlen feltevés, hogy Markov-láncokat tudjunk alkalmazni, az átmenet-valószínűségek stacionaritása. Először definiálnunk kell az állapotteret. Két állapotot különböztetünk meg: a várakozáshoz képest alacsony, és magas hozamú időszakot.

Jelölje  $\bar{R}_t$  a  $t$ -edik időszakban várt hozamot, és  $R_t$  a  $t$ -edik időszak hozamát. Ekkor  $I_t$  a  $t$ -edik időszaki állapot:

$$I_t = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } R_t \leq \bar{R}_t \\ 1 & , \text{ ha } R_t > \bar{R}_t \end{cases}$$

Az alábbi táblázat az éves hozamok melletti átmenetek gyakoriságát mutatja, és az ezekből becsült átmenet-valószínűségeket. Ez egy másodrendű Markov-lánc.

Átmeneti gyakoriságok			Becsült átmeneti valószínűségek		
múlt	jelen		múlt	jelen	
	0	1		0	1
00	2	6	00	0,25	0,75
01	2	9	01	0,18	0,82
10	5	5	10	0,50	0,50
11	9	1	11	0,90	0,10

A táblázatból az látszik, hogy a korábbi években elért hozamok hatással vannak a bekövetkezőkre. Például két "rossz" év után 75% annak a valószínűsége, hogy a hozamok felülmúlják a várakozásokat, míg két "jó" évet követve ugyanennek csak 10% az esélye. Ez azt mutatja, hogy hosszú távon nem teljesül a hatékony piacok hipotézise.

Viszont ha heteket tekintünk, akkor egy gyengébb hetet nagyobb valószínűséggel fog gyengébb hét követni, és fordítva. Ez látszik az alábbi ábrán is.

Átmeneti gyakoriságok			Becsült átmeneti valószínűségek		
jelen			jelen		
múlt	0	1	múlt	0	1
00	190	140	00	0,576	0,424
01	86	157	01	0,354	0,646
10	140	103	10	0,576	0,424
11	157	355	11	0,307	0,693

A hipotézist likelihood valószínűség-hányados teszttel tudjuk vizsgálni. Legyen  $p_{ij}$  annak a valószínűsége, hogy  $i = I_{t-2} = I_{t-1}$  állapotok után az alacsonyabb hozamú állapotba ( $I_t = 0$ ) kerültünk.

$$L = \sum_{ij=00}^{11} (N_{ij}p_{ij} + M_{ij}(1 - p_{ij})),$$

ahol  $N_{ij}$  jelöli az alacsony hozamú átmenetek gyakoriságát,  $M_{ij}$  pedig a magasakét.

A Markov-láncok a szegmentált munkaerőpiac vizsgálatára is használatosak; például a különböző szempontok alapján besorolt dolgozó-csoportok munkahelyváltás gyakoriságainak meghatározására.

## 4. fejezet

# Érdekességek

### 4.1. Egy fizikai paradoxon Markov-láncre

A **paradoxon** a következő: reverzibilitás-irreverzibilitás a klasszikus mechanikában és a termodinamikában. A klasszikus mechanika törvényei reverzibilisek, ezért nem adnak választ arra, hogy a kávéba ejtett kockacukor miért bomlik fel, és hogy ennek az ellenkezője miért nem következik be. Pedig a klasszikus mechanikában az oldódás, és annak ellenkezője is megengedett. A termodinamika második főtétele viszont irreverzibilitást fejez ki, mert a spontán folyamatok irányát szabja meg.

Kelvin-Planck-féle megfogalmazás (1851., 1903.): A természetben nincs olyan folyamat, amelynek során egy test hőt veszít, és ez a hő munkává alakulna át. Szemléletesen egy hajó lehetne ilyen, amelyik a tenger vizéből hőenergiát von el és a kivont hőenergiával hajtja magát. Ez nem mond ellent az energiamegmaradásnak, mégsem kivitelezhető.

#### A paradoxon

$N$  molekula viselkedését figyeljük meg olyan esetben, amikor azt tudjuk, hogy minden molekula két energiaszinten lehet. Ha a  $t$  időpontban az elsőn van, akkor  $p$  valószínűséggel kerül át a második energiaszintre, és  $(1-p)$  valószínűséggel marad az elsőn a  $(t+1)$ -dik időpontban. Ha pedig a  $t$ -edik időpontban a második energiaszinten volt, akkor  $q$  valószínűséggel kerül át az első energiaszintre a  $(t+1)$ -dik időpontban, és  $(1-q)$  valószínűséggel



marad a második energiaszinten. Mivel a molekulák két energiaszinten lehetnek, ezért  $N$  molekula  $2^N$ -féle állapotban lehet összesen.

Ha viszont a molekulákat egyformának tekintjük, akkor a lehetséges állapotok száma csak  $N + 1$ : ezek a lehetséges állapotok azt mutatják meg, hogy mennyi molekula van pl. az első szinten.  $X_t$  jelölje azoknak a molekuláknak a számát, amelyek a  $t$ -edik időpillanatban az első energiaszinten vannak. Ekkor  $X_1, X_2, X_3, \dots$  egy Markov-lánc, amely az  $N$  molekulából álló rendszer időbeli változásáról ad leírást.

### A paradoxon magyarázata

Ha  $|1-p-q| < 1$ , akkor a  $P(X_t = j, X_{t+s} = k)$  eloszlás generátorfüggvényének határértéke:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} E(z^{X_t} w^{X_{t+s}}) &= \\ &= \left[ \frac{(p + qz)(p + qw) + pq(1 - p - q)^s(1 - z)(1 - w)}{(p + q)^2} \right]^N, \end{aligned}$$

itt  $z$  és  $w$  felcserélésekor semmi sem változik, mert ez  $z$ -nek és  $w$ -nek szimmetrikus függvénye, ezért az egyensúlyi állapotban

$$P(X_t = j, X_{t+s} = k) = P(X_t = k, X_{t+s} = j).$$

Ez a folyamat múltja és jövője közti szimmetria, pedig általában

$$P(X_t = k | X_{t+s} = j) \neq P(X_t = j | X_{t+s} = k),$$

ami irreverzibilitást jelent. Ha  $p = q = \frac{1}{2}$ , akkor

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(X_t = j) = \binom{N}{j} 2^{-N},$$

így nagyobb valószínűséggel tart a Markov-lánc  $\frac{N}{2}$  felé, mint ahogy távolodik.

## 4.2. Feladat

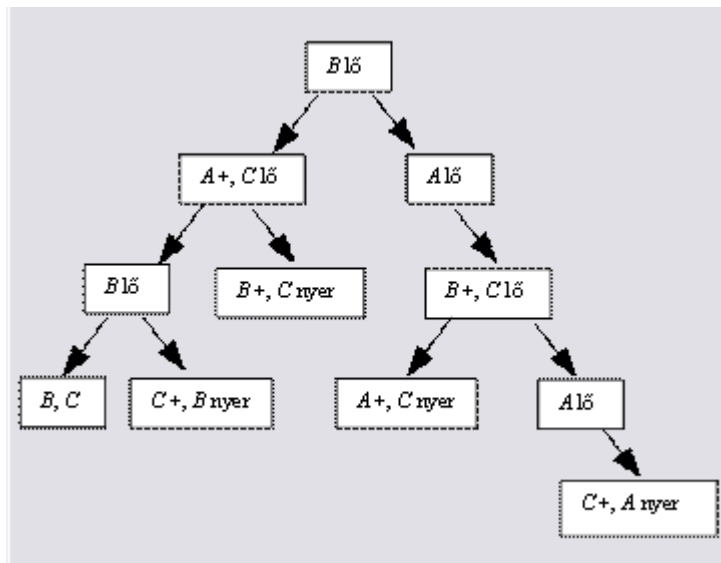
Három herceg,  $A$ ,  $B$  és  $C$  szerelmesek a bergengóciai király lányába. Mivel nem tudják, hogy a királylány kit szeret, ezért elhatározzák, hogy pisztolypárbaajjal döntenek el, hogy

melyikük legyen a kérő. Azt tudják, hogy ha  $A$  lő, akkor annak 1 a valószínűsége, hogy talál, ha  $B$  lő, annak 0.8, ha pedig  $C$ , akkor annak 0.5. Ezért a következő lövés sorrendet állítják föl: először  $C$  lő, utána (ha életben van)  $B$  következik, végezetül pedig  $A$ . Ha nincs vége a párbajnak, akkor még egy kört lőnek. A királylány ezt meghallotta, és ezért a párbaj előtti este  $C$  pisztolyában kicserélte az első golyót vaktöltényre.

Kibe szerelmes a királylány?

**1. eset:**

Amikor kicseréli  $C$  első töltényét vaktöltényre. Ekkor  $C$  az első lövésből nem talál. Ezután  $B$  következik, ekkor  $B$  természetesen  $A$ -ra lő, mivel  $C$ -vel szemben jobbak az esélyei. Ha  $C$ -re lőne először, és eltalálja, akkor  $A$  következik, és lelövi  $B$ -t, és akkor  $A$  nyer. Ha  $B$  eltalálja  $A$ -t, akkor ketten maradnak  $C$ -vel. Ha nem találja el, akkor  $A$  következik, aki  $B$ -re lő, mert a két ellenfele közül ő a veszélyesebb, ekkor  $A$  és  $C$  marad a végére.



Mekkora valószínűséggel győzhetnek a hercegek?

$$P(A \text{ nyer}) = a_1 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$

$$P(B \text{ nyer}) = b_1 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{25}$$

$B$  élve marad plusz  $\frac{2}{25}$  eséllyel, ekkor  $B - C$  párbaj döntetlen volt.

$$P(C \text{ nyer}) = c_1 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

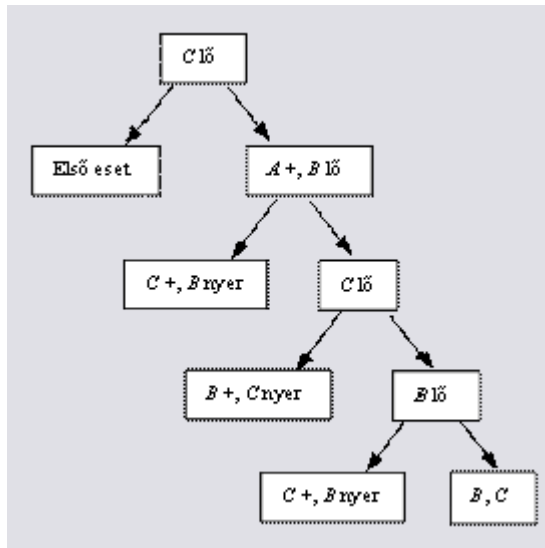
Ekkor  $C$  élve marad további  $\frac{2}{25}$  eséllyel, a döntetlen miatt.

## 2. eset:

Mi a helyzet akkor, ha  $C$  első töténye nem vaktötény?

Elsőre  $C$  egyértelműen  $A$ -ra lő, ha nyer, akkor marad  $B$  és  $C$ . Ez igazán előnyös  $B$ -nek, mert neki még 2 töténye van, és ezáltal nagyobb lett a nyerési esélye.

Ekkor a folyamatábra a következő:



$$P(A \text{ nyer}) = a_2 = \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{20}$$

$$P(B \text{ nyer}) = b_2 = \frac{1}{2} b_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$$

$$P(C \text{ nyer}) = c_2 = \frac{1}{2} c_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

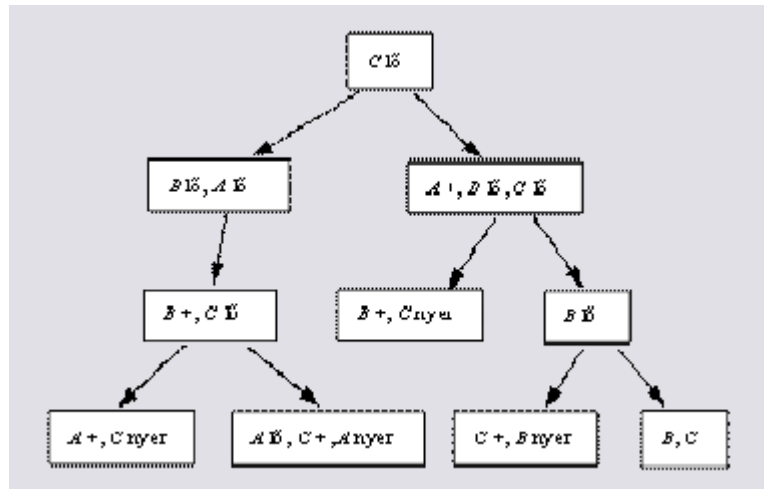
De a döntetlen lehetősége miatt  $B$  és  $C$

$$P(\text{döntetlen } B \text{ és } C \text{ között}) = d_2 = \frac{1}{2} d_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

eséllyel életben marad.

Az eredmények alapján a királyné  $C$ -be szerelmes, mert megnőtték a nyerési esélyei. De az is lehet, hogy  $A$ -ba, mert neki viszont megduplázódott az esélye a párbaj megnyerésére.

Nézzük meg azt az esetet, amikor  $B$  első golyóját cseréli ki a királyné! Ebből megtudhatjuk, hogy  $A$  vagy  $C$  nyerési esélyei nőnek-e meg jobban. Ekkor ilyen lesz a folyamatábra:



$$P(A \text{ nyer}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(B \text{ nyer}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$P(\text{döntetlen } B \text{ és } C \text{ között}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

$$P(C \text{ nyer}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Táblázatba foglalva:

Az egyes játékosok ( $a = 1, b = 0,8, c = 0,5$ )	Győzelmi valószínűségek $C$ vaktöltényével	Győzelmi valószínűségek $B$ vaktöltényével	Győzelmi valószínűségek éles töltényekkel
$A$	10 %	25 %	5 %
$B$	32 %	20 %	60 %
$C$	50 %	50 %	30 %
döntetlen $B$ és $C$ között	8 %	5 %	5 %

Ezek alapján az eredmények alapján biztosak lehetünk abban, hogy a királyné  $C$ -be szerelmes.

# Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Fialowski Alice-nak, a kiváló témáért és, hogy folytonos tanácsaival és ötleteivel elengedhetetlen segítséget nyújtott a szakdolgozatom elkészítéséhez. Továbbá köszönettel tartozom családomnak, akik az egyetemi éveim alatt végig támogattak, és segítettek abban, hogy a tanulmányaim végére érjek.

# Irodalomjegyzék

- [1] D. Frey Tamás *Sztochasztikus folyamatok* Tankönyvkiadó, 1970.
- [2] Karlheinz Spindler *Abstract algebra with applications* Marcel Dekker, 1994.
- [3] <http://hu.wikipedia.org/wiki/Markov-lánc>
- [4] Major Klára *Markov-modellek: Elmélet, becslés és társadalomtudományi alkalmazások* BCE Makroökonómiai Tanszék – ELTE Regionális Tudományi Tanszék, 2008.
- [5] Székely J. Gábor *Paradoxonok a véletlen matematikájában* Typotex, 2004.
- [6] Dr. Márkus László *Idősorok és többdimenziós statisztikai módszerek órai jegyzet*
- [7] <http://www.cs.elte.hu/villo/ml/ML.pdf>
- [8] <http://hu.wikipedia.org/wiki/Termodinamika>
- [9] [http://www.math.bme.hu/szbalazs/oktatas/sztoch\\_info/het\\_4\\_Markov.pdf](http://www.math.bme.hu/szbalazs/oktatas/sztoch_info/het_4_Markov.pdf)
- [10] [matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Orosz\\_Gyula/Mar/markov2.html#erdekesegek,\\_paradoxonok](http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Orosz_Gyula/Mar/markov2.html#erdekesegek,_paradoxonok)