Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Differenciálegyenletek

BSc Szakdolgozat

Dávid László

Matematika BSc

Elemző szakirány

Témavezető:

Mezei István

Adjunktus

ELTE Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2012

Tartalomjegyzék

Bevezető

A szakdolgozatomban a differenciálegyenletek főbb típusaival, alkalmazásukkal és velük kapcsolatos problémákkal fogok foglalkozni. A differenciálegyenletek alapvető fontosságúak például a fizika különböző területein, a közgazdaságtanban, a mérnöki tudományokban és még számos tudományban.
A differenciálegyenletekkel egy mennyiség és annak megváltozásának kapcsolatát modellezhetjük, egy másik mennyiség (például az idő) függvényében. Emellett nem csak folytonos, hanem diszkrét folyamatok esetében is alkalmazhatóak, amennyiben a folyamat meghatározó paramétereinek folytonosként való kezelése, "nagy" méretekben, kielégítő helyességgel írja le a folyamatot.
A továbbiakban megismerkedünk a differenciálegyenletek egyes típusainak definíciójával, megoldási módszerével, végül a fizika különböző területeiről vett egy-egy példán bemutatjuk az alkalmazásukat. A dolgozat végén pedig részletesebben megvizsgáljuk a Tacoma híd katasztrófájának hátterét.
De mik is a differenciálegyenletek?
Olyan függvényegyenletek, melyekben az ismeretlen függvény deriváltjai is megjelennek.
Közönséges differenciálegyenleteknek (továbbiakban **KDE**) nevezzük őket, ha az ismeretlen függvény egy-változós (pontos definíciót később adunk).
Néhány kapcsolódó fogalom:
Egy differenciálegyenlet **rendjének** nevezzük az ismeretlen függvénynek az egyenletben előforduló legmagasabb rendű deriváltjának rendjét.
Egy differenciálegyenlet **megoldásán** azt az ismeretlen függvényt értjük, mely ,a deriváltjaival együtt, azonosan kielégíti a differenciálegyenletet.
n**-edrendű differenciálegyenlet általános megoldásán** azt az ismeretlen függvényt értjük, mely ,a deriváltjaival együtt, azonosan kielégíti a differenciálegyenletet és pontosan n darab szabad paramétert tartalmaz.
n**-edrendű differenciálegyenlet partikuláris megoldásán** azt az ismeretlen függ-

vényt értjük, mely ,a deriváltjaival együtt, azonosan kielégíti a differenciálegyenletet és legfeljebb $(n-1)$ darab szabad paramétert tartalmaz.

1. fejezet

Általános KDE

Ebben a fejezetben precízen bevezetjük a KDE fogalmát, kimondjuk a fontos kapcsolódó tételeket, majd egy optikai problémát fogunk vizsgálni.

1.0.1. Definíció. *(KDE és megoldása)*
$D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *összefüggő nyílt halmaz (tartomány)*
$f : D \to \mathbb{R}^n$ *folytonos függvény*
$(t_0, p_0) \in D$
Ha $I \subset \mathbb{R}$ *nyílt intervallumra és* $x : I \to \mathbb{R}^n$ *differenciálható függvényre teljesül, hogy:*

- $(t, x(t)) \in D \qquad \forall t \in I$
- $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$
- $x(t_0) = p_0 \qquad$ *(Kezdeti feltétel),*

akkor x *az* I *intervallumon az* f *jobboldalú explicit elsőrendű KDE megoldása az* $x(t_0) = p_0$ *kezdeti feltétel mellett.*

Egy differenciálegyenlet megadása egyenértékű az $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény megadásával.
A differenciálegyenlet megoldásának megadása pedig a fenti x függvény *és* I intervallum megadásával.

1.0.1. Tétel. *KDE megoldásának létezése és egyértelműsége (egzisztencia és unicitás): Tfh: $\exists L > 0$ szám és $\forall (t, p_1), (t, p_2) \in D$ pontpárra:*

$$|f(t, p_1) - f(t, p_2)| \leq L \cdot |p_1 - p_2| \text{ teljesül.}$$

(Azaz f a második változójára nézve Lipschitz-folytonos.)

*Ekkor a következő kezdeti érték problémának létezik (**egzisztencia**) megoldása:*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$
$$x(t_0) = p_0$$

*És ha tekintünk két függvényt: $x, y : I \to \mathbb{R}$, melyekre $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = p_0$ és $\dot{y}(t) = f(t, x(t))$, $y(t_0) = p_0$ teljesül $\forall t \in I$ esetén, akkor $\forall t \in I$ -re $x(t) = y(t)$. (**unicitás**)*

Formailag csak az elsőrendű differenciálegyenlet fogalmát határoztuk meg, azonban egy $g : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény által meghatározott explicit n-edrendű egyenlet elsőrendűvé transzformálható a következő módon:

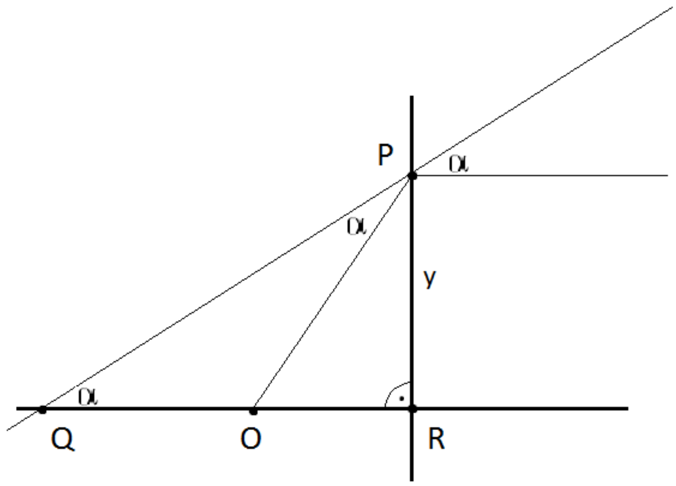
1.0.2. Tétel. *Az n-edrendű egyenlet: $x^{(n)}(t) = g\left(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\right)$. A transzformáció:*

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = x_3(t)$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n(t) = g(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$$

1.1. Egy optikai probléma

A feladat: Helyezzünk fényforrást az origóba (O). Milyen alakú tükröt válasszunk, hogy a visszavert fénysugarak párhuzamosak legyenek a vízszintes (Ox) tengellyel?

Megoldás: Tekintsük a tükör felületének és az xOy síknak a metszeteként adódó görbét! Vegyünk ezen a görbén egy $P(x, y)$ pontot!



Mivel tudjuk, hogy a beesési és visszaverődési szögek egyenlők, ezért jelöltük a P pontnál ezt a két szöget α-val. Könnyen látszik, hogy ekkor az OQP szög is α. Tehát az OQP háromszög egyenlő szárú, azaz $|\overline{OQ}| = |\overline{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
A görbénk szimetrikus, tehát elég az $y > 0$ esetet vizsgálnunk.
Ekkor:
$\dot{y}(x) = \tan\alpha$, hiszen a Q és P pontjaink az $y(x)$ görbe P pontbeli érintőjén helyezkednek el, melynek az Ox tengellyel bezért szöge α.

$$\tan\alpha = \frac{|\overline{PR}|}{|\overline{QR}|} = \frac{y}{|\overline{OQ}| + x} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$$

A nevezőt gyöktelenítve és y-nal egyszerűsítve:

$$\dot{y}(x) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y}$$

$$\frac{y \cdot \dot{y} + x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1$$

Észrevesszük, hogy a bal oldalon lévő tört éppen a nevező x szerinti deriváltja, azaz:

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)' = 1 \qquad\qquad \int dx$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + c, \text{ ahol } c \in \mathbb{R}$$

$$y^2 = 2cx + c^2$$

$$y^2 = 2c\left(x + \tfrac{c}{2}\right)$$

Ez egy Ox tengelyű parabola. Legyen a tükrünk középpontja S ! Ekkor: $|\overline{OS}| := a$ (ahol $a \in \mathbb{R}$)
Ebből látszik a kezdeti feltételünk: $y\left(-a\right) = 0$

$$y\left(-a\right) = 0 = 2c\left(\tfrac{c}{2} - a\right)$$
$$c = 2a \qquad\qquad (c \neq 0)$$

Azaz a parabolánk egyenlete:

$$y^2 = 4a\left(x + a\right)$$

Egy O tengelypontú parabola egyenlete:

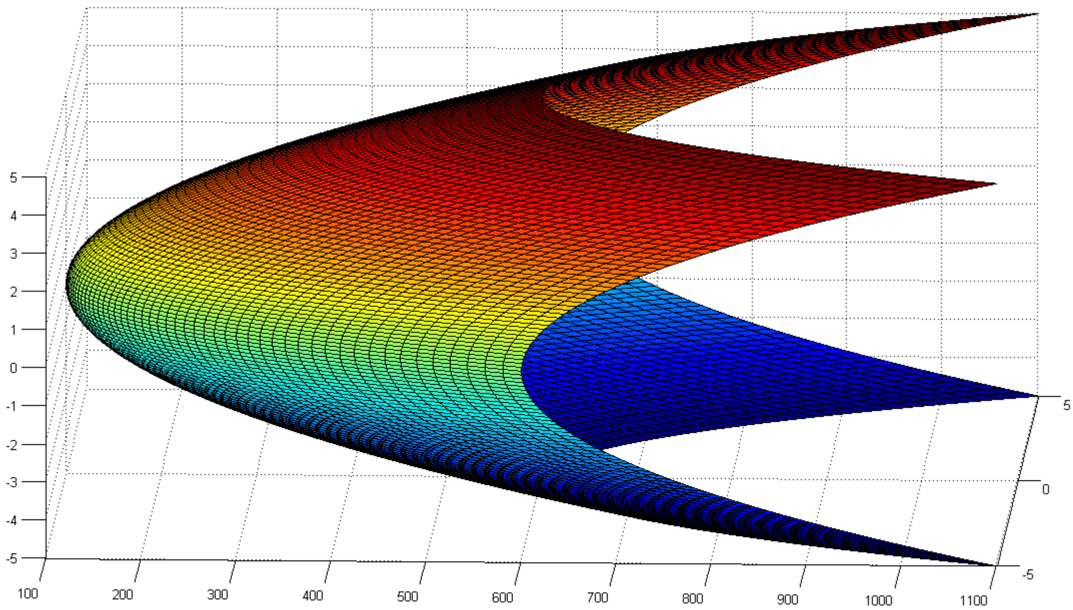
$$x = \frac{1}{2p} \cdot y^2$$

Esetünkben $p = 2a$, azaz a fókusztávolság:

$$\frac{p}{2} = a$$

Tehát a fényforrás a fókuszban van.
Az xOy síkot az Ox tengely körül forgatva a parabola egyenlete nem változik.

A tükrünk egy forgásparaboloid: ($a = 5$ paraméterérték mellett)



2. fejezet

Szeparábilis DE

Ebben a fejezetben megismerkedünk a *szétválasztható változójú*, más néven a **szeparábilis** differenciálegyenlet fogalmával, általános megoldási módszerével, végül egy érdekes kapcsolódó feladattal. Az elnevezés abból ered, hogy az ilyen típusú differenciálegyenletek átrendezhetőek úgy, hogy a változónk (t) csak az egyik, míg a tőle függő ismeretlen kifejezés ($x(t)$ ill. $h(x(t))$) csak a másik oldalon forduljon elő.

2.0.1. Definíció. *(Szeparábilis DE és megoldása)*
Ha g és h ismert, egyváltozós függvények, a DE a következő általános alakra hozható:

$$x'(t) = g(t) \cdot h(x(t))$$

Rendezzük át a fentebb említett alakra:

$$\frac{x'(t)}{h(x(t))} = g(t)$$

Legyen: $H' = \dfrac{1}{h}$ és $G' = g$. Ekkor az eredeti egyenlet megoldása a következő alakban áll elő:

$$H(x(t)) = G(t) + c \text{ , ahol } c \in \mathbb{R}$$

Bizonyítás:

$$G(t) = \int g(t)\, dt.$$

Másrészt tekintsük a következő kifejezést:

$$(H(x(t)))' = H'(x(t)) \cdot x'(t) = \frac{1}{h(x(t))} \cdot x'(t)$$

$$\text{Azaz, egy adott } I \text{ intervallumon: } (H(x(t)))' = G'(t).$$
$$\text{Tehát } \exists c \in \mathbb{R}, melyre : H(x(t)) = G(t) + c.$$

□

Most lássuk ennek a gyakorlati hátterét:

Bizonyítás:

$$x'(t) = \frac{\partial x}{\partial t} = g(t) \cdot h(x(t))$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt $\frac{\partial t}{h(x(t))}$-vel! (feltesszük, hogy $h(x(t)) \neq 0$)

$$\frac{\partial x}{h(x(t))} = g(t)\,\partial t$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$\int \frac{\partial x}{h(x(t))} = \int g(t)\,\partial t$$

Azaz

$$H(x(t)) = \int g(t)\,\partial t = G(t) + c$$

$\Rightarrow$

$$\exists H^{-1}, \text{ melyre: } x(t) = H^{-1}(G(t) + c)$$

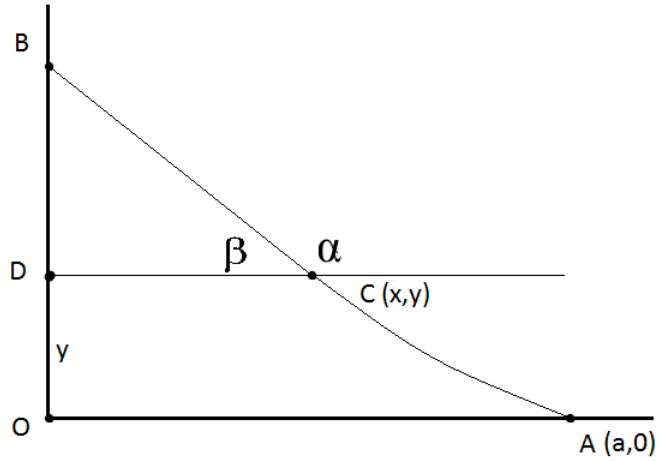
Ez tehát az oka annak, hogy az integrálszámításban a matematika "magával cipeli" a ∂t kifejezést. □

2.1. A dohánycsempész menekülése

Egy csempészhajó indul az O pontból állandó sebességgel egyenesen észak felé a titkos búvóhelyére. Azonban a partiőrség lefülelte az illegális hajót kifutáskor, és riasztott egy gyors naszádot, mely kétszeres sebességgel indult utána az $A(a, 0)$ állomásról.
Írjuk le a naszád által befutott görbét! Állapítsuk meg, mennyi a legrövidebb idő, mely alatt elkaphatja a csempészhajót!

Megoldás:

t időpillanatban a naszád koordinátái: $C(x, y)$. A naszád mindig a csempész irányába fordulva halad.



A csempész ugyanekkor a B pontban van, melyre: $|\overline{OB}| = v \cdot t$, ahol v a csempészek sebessége. A $\overline{CB}$ szakaszra fektetett egyenes a naszád által befutott görbe érintője a C pontban, tehát:

$$y'(x) = \tan\alpha = -\tan(180° - \alpha) = -\tan\beta = -\frac{|\overline{DB}|}{|\overline{DC}|}$$

Mivel $|\overline{DB}| = vt - y$ és $|\overline{DC}| = x$, következik, hogy:

$$y'(x) = \frac{y(x) - vt}{x} \tag{2.1}$$

Másrészt legyen az AC ív hossza l. A t időpontban $l = 2vt$, hiszen a naszád ennyi utat tesz meg $2 \cdot v$ sebességgel t idő alatt. Viszont l a keresett $y(x)$ görbe ívhossza, tehát:

$$l = 2vt = \int_x^a \sqrt{1 + (y'(s))^2}ds$$

$$vt = \frac{1}{2}\int_x^a \sqrt{1 + (y'(s))^2}ds$$

Ezt visszahelyettesítve a (2.1) egyenletbe:

$$y'(x) = \frac{y(x) - \frac{1}{2}\int_x^a \sqrt{1 + (y'(s))^2}ds}{x}$$

Átrendezve:

$$xy'(x) - y(x) = \frac{1}{2}\int\limits_a^x \sqrt{1 + (y'(s))^2}ds$$

(Hiszen $\int\limits_a^b f(s)\,ds = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int\limits_b^a f(s)\,ds$, ahol $F' = f$.)

Deriváljuk mindkét oldalt x szerint, mert így az integrál "eltűnik" a következő módon:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_a^x g(s)\,ds = \frac{\partial}{\partial x}[G(s)]_a^x = \frac{\partial}{\partial x}(G(x) - G(a)) = g(x)$$

(Mivel $G(a)$ x szerinti deriváltja 0.)
Visszetérve a feladathoz, a deriválás után kapjuk:

$$xy''(x) + y'(x) - y'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1 + (y'(x))^2}$$

$$\frac{y''(x)}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}} = \frac{1}{2x}$$

Kiintegrálva mindkét oldalt:

$$\ln(y'(x) + \sqrt{1 + (y'(x))^2}) = \frac{1}{2}\ln x + c_1$$

,ahol $c_1 \in \mathbb{R}$. Felírhatunk kezdeti feltételeket: $t = 0$, $x = a$ és $y' = 0$.
Ekkor a bal oldal 0, tehát:

$$0 = \frac{1}{2}\ln a + c_1$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}\ln a$$

Tehát:

$$\ln(y'(x) + \sqrt{1 + (y'(x))^2}) = \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{2}\ln a = \ln\sqrt{\frac{x}{a}}$$

Ebből:

$$y'(x) + \sqrt{1 + (y'(x))^2} = \sqrt{\frac{x}{a}} \tag{2.2}$$

Mindkét oldal reciprokát véve, majd a baloldali nevezőt gyöktelenítve:

$$\frac{y'(x) - \sqrt{1 + (y'(x))^2}}{(y'(x))^2 - 1 - (y'(x))^2} = \sqrt{\frac{a}{x}}$$

$$y'(x) - \sqrt{1 + (y'(x))^2} = -\sqrt{\frac{a}{x}} \tag{2.3}$$

(2.2) + (2.3) $\Rightarrow$

$$y'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{a}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}}$$

Tagonként integrálva x szerint: $(c_2 \in \mathbb{R})$

$$y(x) = \frac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{a}} - \sqrt{ax} + c_2$$

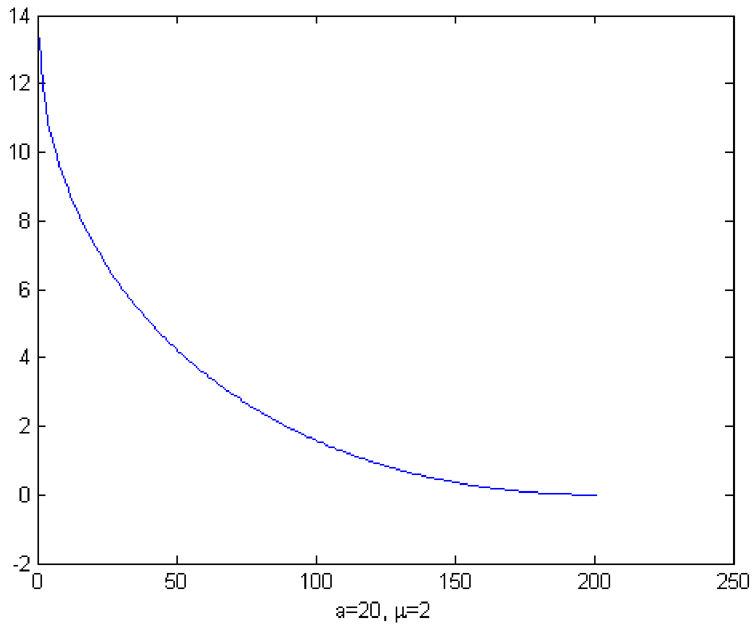
Mivel az $A(a,0)$ pont illeszkedik az $y(x)$ görbére, a koordinátáit behelyettesítve az előző formulába: $c_2 = \frac{2a}{3}$. Tehát a keresett görbe:

$$y(x) = \frac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{a}} - \sqrt{ax} + \frac{2a}{3}$$

A naszád az $x = 0$ első koordinátájú pontban tudja utolérni a csempészeket, ekkor a csempészhajó $y = \frac{2a}{3}$ utat tesz meg (vagy eléri a szigetet ekkorra). Ezeket felhasználva kapjuk az $y = v \cdot t$ formulából, hogy a keresett idő:

$$t = \frac{2a}{3v}$$

A grafikonon ábrázoltuk a rendőrnaszád útját leíró görbét $a = 20$ paraméterérték mellett.



Az eredményeket a feladat általánosabb megoldása után fejtjük ki.

2.2. A feladat általánosítása

Továbbra is a dohánycsempész-feladatról beszélünk, azzal a különbséggel, hogy a rendőrnaszád μ-szörös sebességgel veszi üldözőbe a csempészeket.

Megoldás:

Az előző feladat alapján: $y'(x) = \dfrac{y(x) - vt}{x}$ és $l = \mu vt$.

Azaz:

$$y'(x) = \frac{y(x) - \dfrac{l}{\mu}}{x}$$

Szintén az előző feladat ötletét felhasználva, szorozzunk át x-szel, majd deriváljuk mindkét oldalt:

$$xy''(x) = -\frac{1}{\mu} l'(x) \qquad \text{, ahol } l'(x) = \sqrt{1 + (y'(x))^2}.$$

Analóg módon: $(d_1 \in \mathbb{R})$

$$\ln\left(y'(x) + \sqrt{1 + (y'(x))^2}\right) = \frac{1}{\mu} \ln x + d_1$$

Ugyanazokat a kezdeti feltételeket felírva: $d_1 = -\dfrac{1}{\mu} \ln a$. Azaz:

$$\ln\left(y'(x) + \sqrt{1 + (y'(x))^2}\right) = \frac{1}{\mu} \ln x - \frac{1}{\mu} \ln a = \ln \sqrt[\mu]{\frac{x}{a}}$$

Ebből:

$$y'(x) + \sqrt{1 + (y'(x))^2} = \sqrt[\mu]{\frac{x}{a}} \tag{2.4}$$

Mindkét oldal reciprokát véve, majd a baloldali nevezőt gyöktelenítve:

$$y'(x) - \sqrt{1 + (y'(x))^2} = -\sqrt[\mu]{\frac{a}{x}} \tag{2.5}$$

(2.4) + (2.5) $\Rightarrow$

$$y'(x) = \frac{1}{2} \sqrt[\mu]{\frac{x}{a}} - \frac{1}{2} \sqrt[\mu]{\frac{a}{x}}$$

Tagonként integrálva x szerint: $(d_2 \in \mathbb{R})$

$$y(x) = \frac{\mu x^{1+\frac{1}{\mu}}}{2\sqrt[\mu]{a}\,(\mu + 1)} - \frac{\mu \sqrt[\mu]{a}\, x^{1-\frac{1}{\mu}}}{2(\mu - 1)} + d_2$$

Mivel az $A(a,0)$ pont illeszkedik az $y\,(x)$ görbére, a koordinátáit behelyettesítve az előző formulába: $d_2 = \dfrac{\mu a}{\mu^2-1}$.

Tehát a keresett görbe:

$$y\,(x) = \frac{\mu x^{1+\frac{1}{\mu}}}{2\sqrt[\mu]{a}\,(\mu+1)} - \frac{\mu\sqrt[\mu]{a}x^{1-\frac{1}{\mu}}}{2\,(\mu-1)} + \frac{\mu a}{\mu^2-1}$$

A naszád az $x = 0$ első koordinátájú pontban tudja utolérni a csempészeket, ekkor a csempészhajó $y = \dfrac{\mu a}{\mu^2-1}$ utat tesz meg. Ezeket felhasználva kapjuk az $y = v \cdot t$ formulából, hogy a keresett idő:

$$t = \frac{\mu a}{(\mu^2-1)\,v}$$

Látható, hogy megoldásunk helyes, hiszen a $\mu = 2$ esetet vizsgálva, éppen az előző feladatot és az ott kapott eredményeket nyerjük.

Az eredmények értelmezése:

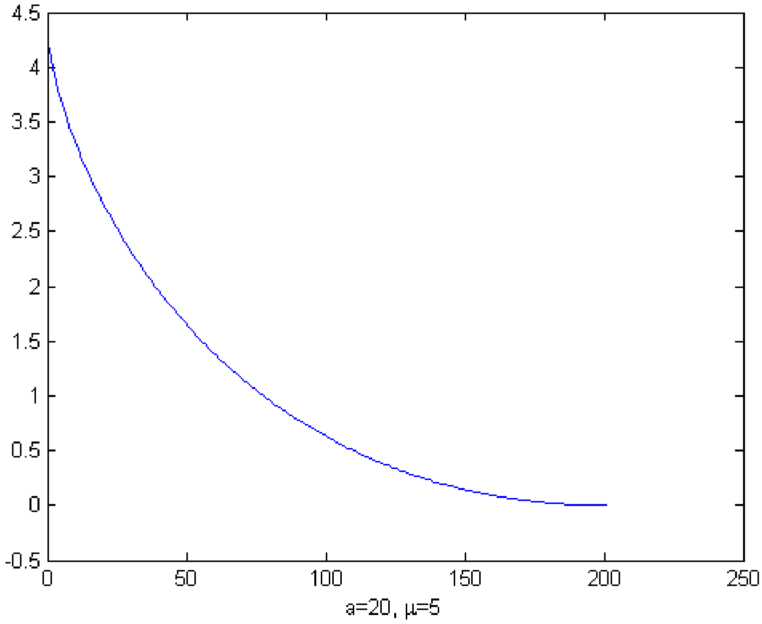
Tekintsük a $\mu = 1$ esetet! Ekkor természetesen, feltéve, hogy $a \neq 0$, a rendőr nem kaphatja el a csempészhajót, ez látható a grafikonokon is:
Ha $\mu = 1$, az $y\,(x)$ görbe tetszőlesen "megközelíti" az $\overline{OB}$ szakaszra fektetett egyenest, de soha nem éri el. Ezért nincs értelmezve az eredményünk ebben az esetben.
Bármely más esetben azonban attól függ a probléma kimenetele, hogy a csempészek búvóhelye (az északi sziget) milyen távol helyezkedik el az O ponttól:

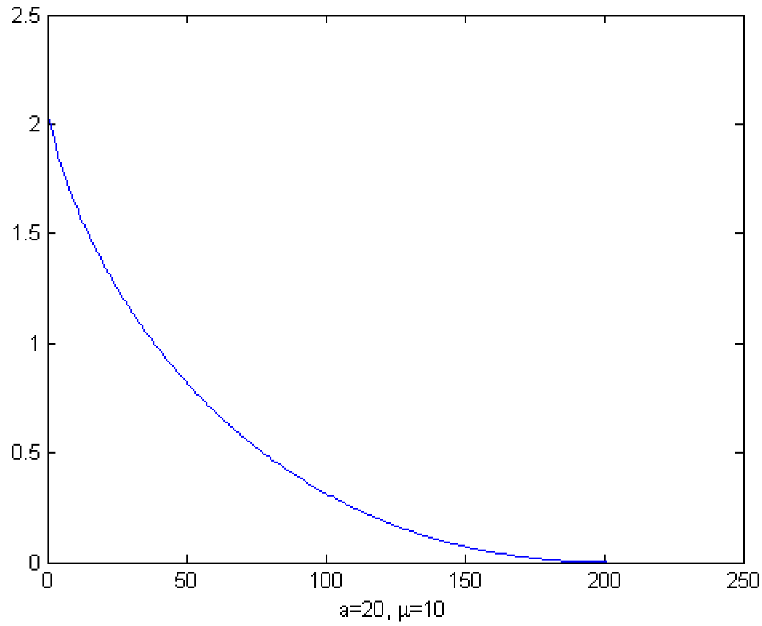
- Ha $\dfrac{\mu a}{\mu^2-1}$ (mondjuk "km"-nél) messzebb van (adott paraméterek mellett), akkor börtönbe, vagy hullámsírba kerülnek.

- Ha közelebb helyezkedik el, akkor gazdagon kalózkodhatnak életük hátralévő részében, hiszen kevesebb ideig menekültek, mint $t = \dfrac{\mu a}{(\mu^2-1)\,v}$, azaz hamarabb elérték a szigetet, mint a rendőrnaszád utolérte volna őket.

Az alábbi grafikonokon látható, hogy a μ értékét növelve valóban jóval hamarabb utoléri őket a rendőrség, hiszen

$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{\mu a}{\mu^2-1} = 0$$


4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
50
100
150
200
250
a=20, μ=5


2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
50
100
150
200
250
a=20, μ=10

3. fejezet

Lineáris elsőrendű DE

3.0.1. Definíció. *$A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ és $b : I \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvények,*

$$\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + b(t)$$

alakú egyenleteket lineáris elsőrendű differenciálegyenleteknek *nevezzük.*
Az egyenlet homogén*, ha $b(t) = \underline{0}$.*
Állandó együtthatós*, ha $A(t) = B$, ahol $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.*

3.0.1. Tétel. *$x(t_0) = p_0$ kezdeti feltétel mellett $\forall t_0 \in I$ és $p_0 \in \mathbb{R}^n$ esetén $\exists!$ megoldás, mely az egész I intervallumon értelmezve van.*

Általános megoldási módszer:
Először megoldjuk az egyenletet, mint homogén egyenletet: ($A' := a, c \in \mathbb{R}$)

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = a(t)$$

$$x(t) = e^{A(t)} \cdot c$$

Ez után az inhomogén egyenlet megoldását keressük $x(t) = e^{A(t)} \cdot c(t)$ alakban. Ebből:

$$\dot{x}(t) = a(t) \cdot e^{A(t)} \cdot c(t) + e^{A(t)} \cdot \dot{c}(t) \tag{3.1}$$

Másrészt (az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve):

$$\dot{x}(t) = a(t) \cdot e^{A(t)} \cdot c(t) + b(t) \tag{3.2}$$

(3.1) = (3.2) $\Rightarrow$

$$e^{A(t)} \cdot \dot{c}(t) = b(t)$$

Azaz: ($d \in \mathbb{R}$)

$$c(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} \cdot b(s)\, ds + d$$

Visszaírva a keresett alakba $c(t)$-t:

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t)-A(s)} \cdot b(s)\, ds + d \cdot e^{A(t)}$$

3.1. RL körök

Egy elektromos áramkörben sorba kapcsolunk egy L önindukciós tényezőjű tekercset és egy R ellenállást. A körben E egyenfeszültségű áramforrás van bekapcsolva. Határozzuk meg a körben folyó áramerősséget az idő függvényében, az $I(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett!

Megoldás:

3.1.1. Tétel. *Kirchoff II. törvénye (Huroktörvény)*
Sorosan kapcsolt áramköri elemekre, bármely zárt áramhurokban a részfeszültségek előjeles összege zérus.

Tehát esetünkben:

$$L \cdot \frac{\partial I}{\partial t} + U = E$$

Erre Ohm törvényét alkalmazva ($I = \frac{U}{R}$):

$$L \cdot \frac{\partial I}{\partial t} + R \cdot I(t) = E$$

A homogén rész megoldása: ($c \in \mathbb{R}$)

$$L \cdot I'(t) + R \cdot I(t) = 0$$

$$\frac{I'(t)}{I(t)} = -\frac{R}{L}$$

$$I(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \cdot c$$

Az inhomogén rész megoldása:

$$I'(t) = c'(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} - c(t) \cdot \frac{R}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \tag{3.3}$$

Az eredeti egyenletből pedig:

$$I'(t) = \frac{E}{L} - \frac{R}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \cdot c(t) \tag{3.4}$$

(3.3) = (3.4) $\Rightarrow$

$$c'(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{L}$$

$$c'(t) = \frac{E}{L} \cdot e^{\frac{R}{L}t}$$

Integálás után kapjuk: ($k \in \mathbb{R}$)

$$c(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{\frac{R}{L}t} + k$$

Tehát az általános megoldásunk:

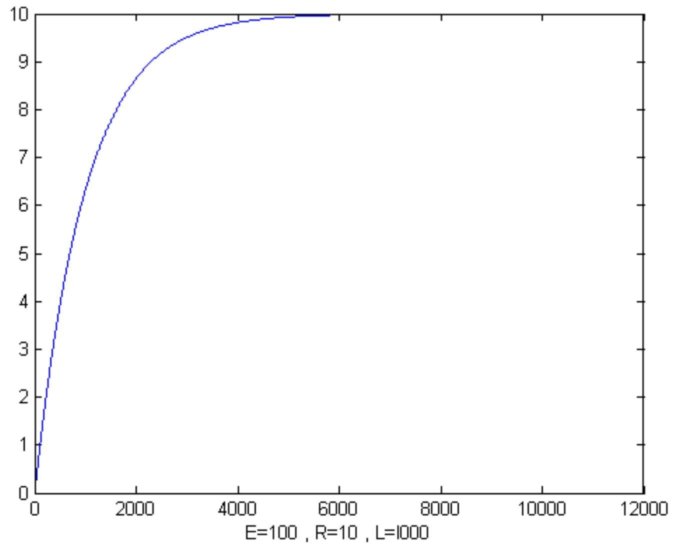
$$I(t) = \frac{E}{R} + k \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

Az $I(0) = 0$ feltételt felhasználva: $k = -\frac{E}{R}$.
$\Rightarrow$

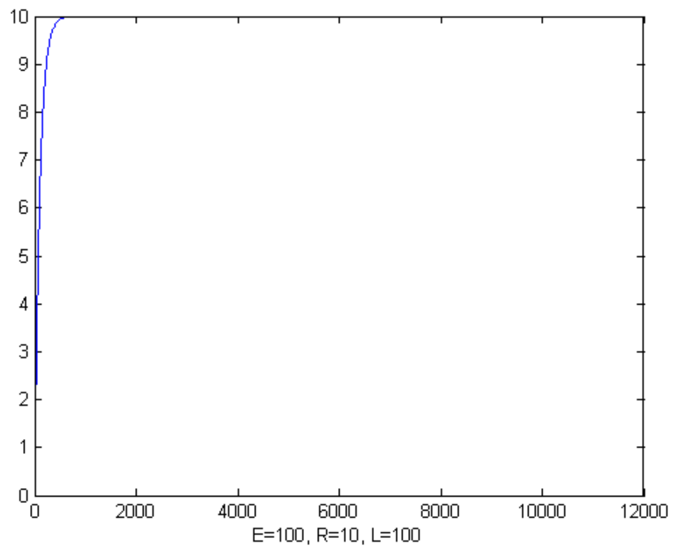
$$I(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Mivel tudjuk, hogy $t \to \infty$, látható, hogy az áramerősség ($I(t)$) egy konstans értékhez tart, soha nem éri el, de tetszőlegesen megközelíti, azaz:

$$\lim_{t \to \infty} I(t) = \frac{E}{R}$$



A fenti grafikonon ábrázoltunk egy megoldásgörbét, ahol $\frac{E}{R} = 10$ és a konvergencia sebességét meghatározó $\frac{R}{L}$ hányados 0.01.
Látható, hogy ugyanezen E és R paraméterek esetén, az $\frac{R}{L}$ hányadost 0.1-re növelve, a görbénk meredeksége nőtt (lásd: az alsó ábrán).
Ennél nagyobb növelés esetében a grafikus ábrázolás során a görbe teljesen hozzásimul a függőleges tengelyhez, majd "megtörik" az $\frac{E}{R}$ pontban, és hozzásimul az $y(x) = \frac{E}{R}$ egyeneshez.



4. fejezet

Másodrendű lineáris DE

4.0.1. Definíció. *(Differenciáloperátoros felírás)*
$I \subset \mathbb{R}$, $p \in C^1(I)$ pozitív, $q \in C(I)$ tetszőleges függvény.
L másodrendű differenciáloperátor:$L : C^2(I) \to C(I)$, melyre:

$$Lx := (px')' + qx$$

Ekkor a differenciálegyenlet:

$$Lx = f$$

4.0.1. Állítás. *Az előző felírás ekvivalens a következővel:*
$g_1, g_2, h : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, melyekre:

$$x''(t) + g_1(t)\,x'(t) + g_2(t)\,x(t) = h(t)$$

Bizonyítás:
Legyen $G' = g_1$.
Vegyük a második felírást!
Szorozzuk meg mindkét oldalt e^G-vel! Ekkor a fentebb tárgyalt függvények:

$$p = e^G, q = g_2(t)\,e^G, f = h(t)\,e^G$$

$$\Rightarrow$$

$$Lx = f$$

□

4.1. Megoldási módszerek

4.1.1. Homogén

A homogén egyenlet megoldására nincs általános módszer.

4.1.1. Tétel. *A lineáris homogén differenciálegyenletek megoldásainak M terének egy bázisát (esetünkben: $x_1(t), x_2(t)$) a homogén egyenlet* alaprendszerének *nevezzük.*
Az ezekből, mint oszlopvektorokból képzett mátrix az egyenlet alapmátrixa.

A megoldás tehát előáll $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ alakban (ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$), azaz az alaprendszer ($x_1(t)$ és $x_2(t)$) egy két-dimenziós vektorteret feszít ki.

- *Ha "megsejtjük" az egyik megoldást:*
  $x_1(t)$-t ismerjük $\Rightarrow x_2(t) = x_1(t) \cdot z(t)$ alakú. Ebből $\dot{z}(t)$-re kapunk egy elsőrendű differenciálegyenletet.

- *Állandó együtthatós eset:*

$$x''(t) + px'(t) + qx(t) = 0$$

  , ahol $p, q \in \mathbb{R}$. A megoldást $x(t) = e^{\lambda t}$ alakban keressük.
  A $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ egyenletet a differenciálegyenlet *karakterisztikus egyenletének* nevezzük. Ennek a megoldásából/megoldásaiból kapjuk a λ értékeket, és vele az alaprendszert, a következő módon:

  - Ha $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ és $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} \quad \text{és} \quad x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

  - Ha λ kétszeres valós gyök:

$$x_1(t) = e^{\lambda t} \quad \text{és} \quad x_2(t) = t \cdot e^{\lambda t}$$

  - Ha $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, azaz: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, ekkor:

$$x_1(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t \quad \text{és} \quad x_2(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t$$

4.1.2. Inhomogén

4.1.2. Tétel. *Az inhomogén egyenlet megoldásai az M altér egy eltoltját képezik, azaz , ha $x_0(t)$ az egyenletnek egy* partikuláris megoldása *és az alaprendszer $x_1(t)$ és $x_2(t)$, akkor az egyenlet $\forall$ megoldása előáll a következő alakban:*

$$x(t) = x_0(t) + c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$$

Az alaprendszer mellé szükség van tehát az x_0 partikuláris megoldásra, ezt a következő módszerekkel találhatjuk meg:

- *Állandó együtthatós esetben:*
  Írjuk fel az inhomogén tagot a következő alakban:

  $$f(t) = e^{\alpha t}\left(P_1(t)\cos\beta t + P_2(t)\sin\beta t\right) \qquad \text{, ahol } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ és } P_1, P_2 \text{ polinomok.}$$

  Most írjuk fel a homogén részben kiszámolt λ-t $(\alpha + \beta i)$ alakban, ennek multiplicitását jelöljük k-val.
  Ekkor a partikuláris megoldás felírható ezzel a formulával, ahol Q_1 és Q_2 polinomok, melyek foka $max(deg(P_1), deg(P_2))$:

  $$x_0\left(t\right) = t^k e^{\alpha t}\left(Q_1(t)\cos\beta t + Q_2(t)\sin\beta t\right)$$

  Q_1 és Q_2 polinomokat az x_0 megoldás, és annak első és második deriváltjának az eredeti egyenletbe való visszahelyettesítésével kapjuk meg.

- *Állandók variálásának módszere:*
  Ez a módszer nem csak állandó együtthatók esetén működik, de függvényegyütthatós esetben elég bonyolult lehet, ill. előfordulhat, hogy csak numerikus módszerekkel állítható elő x_0.
  A partikuláris megoldást a következő alakban keressük:

  $$x_0\left(t\right) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$$

  A $c_1(t)$ és $c_2(t)$ függvényeket a *Wronski-determináns* segítségével kapjuk meg:

  4.1.1. Definíció. *(Wronski-determináns)*
  Az alapmátrix determinánsát kiszámoló függvény az ún. Wronski-determináns.

Esetünkben:

W(t) = $\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix}$, mivel $x_1(t)$ és $x_2(t)$ lineárisan függetlenek, ezért $W(t) \neq 0$.

Ekkor:

$$c_1(t) = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & x_2(t) \\ f(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix}}{W(t)} dt$$

Hasonlóan:

$$c_2(t) = \int \frac{\begin{vmatrix} x_1(t) & 0 \\ \dot{x}_1(t) & f(t) \end{vmatrix}}{W(t)} dt$$

4.2. A Tacoma híd

1940. július elsején az USA-ban, Washington államban felavatták a Tacoma hidat. Ezután a függesztett híd függőleges irányú rezgéseket kezdett végezni, innen a "galoppozó Gertie" elnevezés. Mivel nem tűnt veszélyesnek, rövid idő alatt túristalátványosság lett.

November 7-én a rezgés erősödni kezdett; reggel 7-kor 1 méter amplitúdójú volt, 10-re a híd különböző pontjai között 6 méter szintkülönbség is mérhető lett, majd 11 óra 10

perckor a híd leszakadt.
Erre reagálva az állam kormányzója beszédében ígéretet tett, miszerint "a hidat ugyanott és ugyanúgy fel fogjuk építeni".

A híres magyar származású mérnök-fizikus, Kármán Tódor, ekkor táviratot küldött a kormányzónak, melyben ez állt: "Ha Önök felépítik ugyanazt a hidat ugyanúgy és ugyanoda, mint először, akkor az új híd ugyanabba a folyóba fog belezuhanni, mint az első."
Ezzel arra célzott, hogy a tragédiának ésszerű oka volt, és nem lehet figyelmen kívül hagyni a természeti törvényeket. A környéken erős szél fúj, a széllökések az aerodinamikai örvényhatás következtében kényszerrezgést gerjesztettek a hídszerkezetben, ami a híd leomlásához vezetett.
Mivel egy híd egy rezgő rendszer, rátérünk a *mechanikai rezgések* vizsgálatára.

Tekintsünk egy m tömegű kocsit, mely egy D direkciós állandójú rugóval van falhoz rögzítve! (A rugó tömege elhanyagolható.)
Ha a rugó hosszát megváltoztatjuk az egyensúlyi helyzethez képest, a rugóban ébredő erő annak visszaállítására törekszik. Azonban mikor visszakerül az egyensúlyi állapotba (ekkor a rá ható erők eredője zérus), általában nem nulla a sebessége, azaz túllendül az egyensúlyi helyzeten. Ekkor a rugó ellenkező előjelű hosszváltozást szenved, majd ismét erő ébred az egyensúlyi állapot visszaállítására. Ez állandóan ismétlődik, létrejön egy mechanikai rezgés.

Ennek matematikai modelljével foglalkozunk ebben a fejezetben:
A rendszer egy tömegpontból áll, így helyzetét egyetlen adat jellemzi: $x(t)$, mely a kocsi vízszintes irányú elmozdulását mutatja az egyensúlyi helyzethez képest a t időpillanat-

ban. Azaz $x(t) = 0$ az egyensúlyi helyzetben.
A dinamika alaptörvénye kimondja, hogy a testre ható erők eredője egyenlő a test tömegének és gyorsulásának szorzatával, azaz: $F = m \cdot a$. Egyensúlyi helyzetben: $F = 0$.
Hooke-törvénye szerint egy szilárd test rugalmas alakváltozása arányos a testre ható erővel, esetünkben a *visszatérítő erő* nagysága arányos a kitéréssel és vele ellentétes irányú: $F = -D \cdot x$.
A fenti törvények alapján:

$$a = -\frac{D}{m}x(t)$$

A testre jelen esetben a következő erők hatnak: a gravitációs erő, a fentebb említett *visszatérítő erő*, a súrlódási erő, és esetleg egy $F(t)$ külső erő.

4.2.1. Harmonikus rezgőmozgás

Harmonikus rezgőmozgásról beszélünk, ha a súrlódást elhanyagoljuk. Ekkor a mozgásegyenlet a következő: $(D, m > 0)$

$$x''(t) + \frac{D}{m}x(t) = 0$$

Vezessük be a következő jelölést: $\omega_0 := \sqrt{\frac{D}{m}}$
Így a differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$.
Ennek megoldásai a $\lambda_1 = i \cdot \omega_0$ és a $\lambda_2 = -i \cdot \omega_0$.
Így az egyenlet általános megoldása: $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

$$x(t) = c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t$$

Alakítsunk egy kicsit ezen a formulán!
Olyan $A \geq 0$ számot és ϕ szöget keresünk, melyek adott c_1 és c_2 számokkal kielégítik az $A \sin \phi = c_1$ és az $A \cos \phi = c_2$ egyenleteket.
Vegyünk egy c_1 és c_2 befogójú derékszögű háromszöget, melynek a c_2 hosszúságú befogójával szemközti szöge legyen ϕ. Ekkor az átfogó $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ hosszúságú. Mivel ezek alapján tudjuk, hogy:

$$\sin \phi = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \quad \text{és} \quad \cos \phi = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$$

,ezért a kapott $x(t)$ kitérésfüggvényünket szorozzuk meg 1-gyel, pontosabban $\frac{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$-tel, majd emeljünk ki $\sqrt{c_1^2+c_2^2}$ -et:

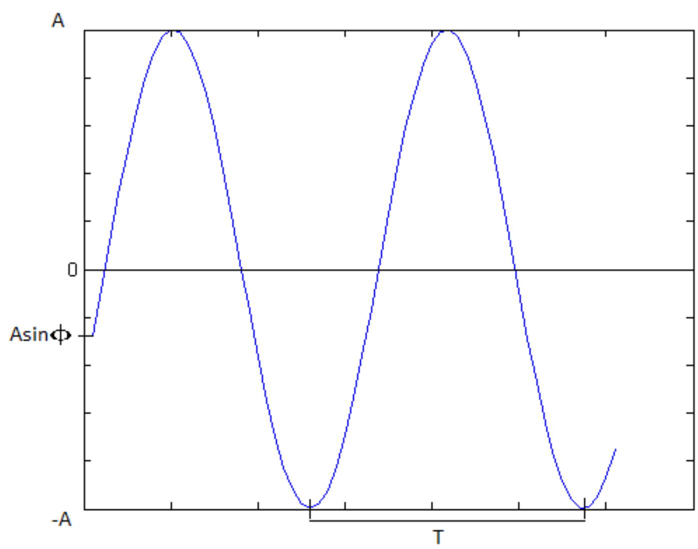
$$x(t) = \sqrt{c_1^2+c_2^2}\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\sin\omega_0 t + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\cos\omega_0 t\right)$$

A fentiek alapján:

$$x(t) = \sqrt{c_1^2+c_2^2}\cdot\Big(\sin\omega_0 t\cdot\cos\phi + \sin\phi\cdot\cos\omega_0 t\Big)$$

Legyen a keresett A szám $\sqrt{c_1^2+c_2^2}$ és vegyük észre, hogy a függvény átírható a következő alakba:

$$x(t) = A\cdot\sin\left(\omega_0 t+\phi\right)$$



Látszik, hogy a kitérés minden időpillanatban a $[-A; A]$ intervallumba esik (A a mozgás *amplitúdója*). A mozgás periódikus, a periódusidő $T = 2\pi/\omega_0$, a rendszer frekvenciája ω_0, ϕ pedig a fázisszög.

(A harmonikus rezgőmozgás a gyakorlatban nem megvalósítható, hiszen a súrlódást teljes egészében nem tudjuk kiküszöbölni. Azonban, mivel nem kapcsolódik szorosan a témámhoz, a *csillapított rezgőmozgással* nem foglalkozunk.)

4.2.2. Kényszerrezgés

A külső mozgató erő hatására rezgő rendszer az ú.n. *kényszerített harmonikus oszcillátor*. Ebben az esetben:

$$F = m \cdot a = -D \cdot x + F(t)$$

Ebből:

$$m \cdot x''(t) = -D \cdot x(t) + F(t)$$

Azaz a mozgásegyenletünk:

$$x''(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F(t)}{m} \tag{4.1}$$

Ez tehát az inhomogén változata a harmonikus rezgőmozgásnál felírt mozgásegyenletnek. A gyakorlatban a külső erő gyakran periódikus, vizsgáljunk meg két ilyen példát!

- **1. példa**

$$x''(t) + 4x(t) = \sin t$$

  - *Homogén rész*

$$x''(t) + 4x(t) = 0$$

    A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 + 4 = 0$, melynek megoldásai: $\lambda_{1,2} = \pm 2i$, tehát az alaprendszer:

$$x_1(t) = \cos 2t \quad \text{és} \quad x_2(t) = \sin 2t$$

  - *Inhomogén rész*

    Az $x_0(t)$ partikuláris megoldást a Wronski-determináns segítségével számoljuk ki.

$$W(t) = \begin{vmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -2\sin 2t & 2\cos 2t \end{vmatrix} = 2\cos^2 2t + 2\sin^2 2t = 2$$

$$c_1(t) = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin 2t \\ \sin t & 2\cos 2t \end{vmatrix}}{2} dt = -\frac{1}{2} \int \sin 2t \cdot \sin t \, dt$$

$$c_2(t) = \int \frac{\begin{vmatrix} \cos 2t & 0 \\ -2\sin 2t & \sin t \end{vmatrix}}{2} dt = \frac{1}{2} \int \cos 2t \cdot \sin t \, dt$$

A következő trigonometrikus azonosságokat fogjuk felhasználni:

$$\sin x\ \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2} \tag{4.2}$$

$$\sin x\ \cos y = \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2} \tag{4.3}$$

Így $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$:

$$c_1(t) = -\frac{1}{2}\int \frac{\cos t - \cos 3t}{2}\,dt = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{6}\sin 3t\right) + c_1 =$$

$$= \frac{1}{12}\sin 3t - \frac{1}{4}\sin t + c_1$$

$$c_2(t) = \frac{1}{2}\int \frac{\sin(-t) + \sin 3t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{6}\cos 3t\right) + c_2 =$$

$$= \frac{1}{4}\cos t - \frac{1}{12}\cos 3t + c_2$$

Tehát a partikuláris megoldás:

$$x_0(t) = \frac{1}{12}\sin 3t\ \cos 2t - \frac{1}{4}\sin t\ \cos 2t + c_1\cos 2t + \frac{1}{4}\cos t\ \sin 2t - \frac{1}{12}\cos 3t\ \sin 2t + c_2 \sin 2t$$

Felhasználva a következő trigonometrikus azonosságot:

$$\sin(x \pm y) = \sin x\ \cos y \pm \cos x\ \sin y \tag{4.4}$$

$\Rightarrow$

$$x_0(t) = \frac{1}{12}\sin t - \frac{1}{4}\sin t + c_1\cos 2t + c_2\sin 2t$$

$$x_0(t) = -\frac{1}{6}\sin t + c_1\cos 2t + c_2\sin 2t$$

Azaz a megoldás $(d_1, d_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R})$:

$$x(t) = d_1\cos 2t + d_2\sin 2t - \frac{1}{6}\sin t + c_1\cos 2t + c_2\sin 2t$$

$$x(t) = k_1\cos 2t + k_2\sin 2t - \frac{1}{6}\sin t$$

Látható, hogy a megoldásunk egy korlátos, periódikus függvény.

- **2. példa**

$$x''(t) + 4x(t) = \sin 2t$$

  - *Homogén rész*

$$x''(t) + 4x(t) = 0$$

Azaz a homogén rész megoldása teljesen ugyanaz, mint az előző feladatban, tehát csak az inhomogén részt vizsgáljuk.

  - *Inhomogén rész*

Szintén az előző feladathoz hasonlóan: $W(t) = 2$.

$$c_1(t) = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin 2t \\ \sin 2t & 2\cos 2t \end{vmatrix}}{2} dt$$

$$c_2(t) = \int \frac{\begin{vmatrix} \cos 2t & 0 \\ -2\sin 2t & \sin 2t \end{vmatrix}}{2} dt$$

Analóg módon ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$):

$$c_1(t) = -\frac{1}{2}\int \sin^2 2t \, dt = -\frac{1}{2}\int \frac{1-\cos 4t}{2} \, dt = -\frac{1}{4}\int 1 \, dt + \frac{1}{4}\int \cos 4t \, dt =$$

$$= \frac{1}{16}\sin 4t - \frac{1}{4}t + c_1$$

$$c_2(t) = \frac{1}{2}\int \sin 2t \; \cos 2t \, dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\sin 4t \, dt =$$

$$= -\frac{1}{16}\cos 4t + c_2$$

Tehát a partikuláris megoldás:

$$x_0(t) = \frac{1}{16}\sin 4t \; \cos 2t - \frac{1}{4}t \; \cos 2t + c_1 \cos 2t - \frac{1}{16}\cos 4t \; \sin 2t + c_2 \sin 2t$$

$\Rightarrow$

$$x_0(t) = \frac{1}{16}\sin 2t - \frac{1}{4}t\cos 2t + c_1\cos 2t + c_2 \sin 2t$$

Azaz a megoldás ($d_1, d_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$):

$$x(t) = d_1 \cos 2t + d_2 \sin 2t + \frac{1}{16} \sin 2t - \frac{1}{4} t \cos 2t + c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$$

$$x(t) = k_1 \cos 2t + k_2 \sin 2t + \frac{1}{16} \sin 2t - \frac{1}{4} t \cos 2t$$

Látható, hogy a megoldásunk itt már egy nem-korlátos, periódikus függvény.

Vizsgáljuk meg ennek a jelenségnek a hátterét!
Térjünk vissza a mozgásegyenletünkre (4.1) ! Vegyünk egy periódikus külső erőt: $F(t) = F_0 \cdot \cos \omega t$, ahol ($\omega_0$ a rendszer *saját frekvenciája* volt) ω -t a rendszer *kényszerfrekvenciájának* nevezzük.
A homogén egyenletet már megoldottuk a harmonikus rezgőmozgás vizsgálatánál, onnan:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \phi) = c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t$$

Az inhomogén tag:

$$f(t) = \frac{F(t)}{m} = \frac{F_0 \cdot \cos \omega t}{m}$$

A megoldás során két esetet érdemes megkülönböztetni:

- **1.** Ha $\omega \neq \omega_0$
- **2.** Ha $\omega = \omega_0$

Mindkét esetben szükség lesz a homogén egyenlet megoldásaira, tehát emlékeztetőül:

$$x_1(t) = \sin \omega_0 t \quad \text{és} \quad x_2(t) = \cos \omega_0 t$$

1. A Wronski-determináns segítségével fogjuk megoldani a feladatot:

$$W(t) = \begin{vmatrix} \sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t \\ \omega_0 \cos \omega_0 t & -\omega_0 \sin \omega_0 t \end{vmatrix} = -\omega_0 \sin^2 \omega_0 t - \omega_0 \cos^2 \omega_0 t = -\omega_0$$

$$c_1(t) = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos \omega_0 t \\ \frac{F_0 \cos \omega t}{m} & -\omega_0 \sin \omega_0 t \end{vmatrix}}{-\omega_0} dt = -\frac{1}{\omega_0} \int -\frac{F_0 \cos \omega_0 t \cdot \cos \omega t}{m}\, dt$$

$$c_2(t) = \int \frac{\begin{vmatrix} \sin \omega_0 t & 0 \\ \omega_0 \cos \omega_0 t & \frac{F_0 \cos \omega t}{m} \end{vmatrix}}{-\omega_0} dt = -\frac{1}{\omega_0} \int \frac{F_0 \sin \omega_0 t \cdot \cos \omega t}{m}\, dt$$

Kiemelve a konstansokat, majd a következő és a (4.3) trigonometrikus azonosságokat felhasználva:

$$\cos x\ \cos y = \frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2} \tag{4.5}$$

kapjuk meg $c_1(t)$ -t és $c_2(t)$ -t:

$$c_1(t) = \frac{F_0}{m\omega_0}\int \frac{\cos((\omega_0-\omega)t)+\cos((\omega_0+\omega)t)}{2}\,dt =$$

$$= \frac{F_0}{2m\omega_0}\left(\frac{\sin((\omega_0-\omega)t)}{\omega_0-\omega}+\frac{\sin((\omega_0+\omega)t)}{\omega_0+\omega}\right)$$

$$c_2(t) = -\frac{F_0}{m\omega_0}\int \frac{\sin((\omega_0-\omega)t)+\sin((\omega_0+\omega)t)}{2}\,dt =$$

$$= \frac{F_0}{2m\omega_0}\left(\frac{\cos((\omega_0-\omega)t)}{\omega_0-\omega}+\frac{\cos((\omega_0+\omega)t)}{\omega_0+\omega}\right)$$

Közös nevezőre hozás után a partikuláris megoldás:

$$x_0(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0}\cdot$$

$$\left(\frac{\sin\omega_0 t\,(\omega_0\,(\sin((\omega_0-\omega)t)+\sin((\omega_0+\omega)t))+\omega\,(\sin((\omega_0-\omega)t)-\sin((\omega_0+\omega)t)))}{(\omega_0-\omega)(\omega_0+\omega)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\cos\omega_0 t\,(\omega_0\,(\cos((\omega_0-\omega)t)+\cos((\omega_0+\omega)t))+\omega\,(\cos((\omega_0-\omega)t)-\cos((\omega_0+\omega)t)))}{(\omega_0-\omega)(\omega_0+\omega)}\right)$$

Használjuk fel a (4.3), (4.4), (4.5), (4.2) formulákat (ebben a sorrendben) a partikuláris megoldás egyszerűbb alakra hozatalánál!

$$x_0(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0}\cdot$$

$$\left(\frac{\sin\omega_0 t\,(\omega_0\,(2\sin\omega_0 t\cdot\cos\omega t)+\omega\,(-2\cos\omega_0 t\cdot\sin\omega t))}{\omega_0^2-\omega^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\cos\omega_0 t\,(\omega_0\,(2\cos\omega_0 t\cdot\cos\omega t)+\omega\,(2\sin\omega_0 t\cdot\sin\omega t))}{\omega_0^2-\omega^2}\right)=$$

$$= \frac{F_0}{2m\omega_0}\cdot\left(\frac{\omega_0\left(2\sin^2\omega_0 t\cdot\cos\omega t+2\cos^2\omega_0 t\cdot\cos\omega t\right)}{\omega_0^2-\omega^2}+\right.$$

$$+\frac{\omega\left(-2\cos\omega_0 t\cdot\sin\omega t\cdot\sin\omega_0 t+2\sin\omega_0 t\cdot\sin\omega t\cdot\cos\omega_0 t\right)}{\omega_0^2-\omega^2}\Bigg)=$$

$$=\frac{F_0}{2m\omega_0}\cdot\frac{2\omega_0\cos\omega t}{\omega_0^2-\omega^2}$$

$\Rightarrow$

$$x_0(t)=\frac{F_0}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\cos\omega t$$

Azaz ekkor a megoldás:

$$x(t)=A\sin\left(\omega_0 t+\phi\right)+\frac{F_0}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\cos\omega t$$

Látható, hogy az eredmény ugyanaz, mint a harmonikus rezgőmozgásnál, plusz egy periódikus tag. Minél eltérőbb a saját és a kényszerfrekvencia, annál kevésbé jelentős ez a plusz mozgás, ellenben ha nagyon közeliek, akkor tetszőlegesen nagy lehet.
Lássuk mi történik, ha egyenlőség áll fenn!

2. $\omega_0=\omega$
Mivel állandó együtthatós egyenletről beszélünk, megoldhatjuk a másik módszerrel is:

$$\frac{F_0\cos\omega t}{m}=e^{\alpha t}\left(P_1(t)\cos\omega_0 t+P_2(t)\sin\omega_0 t\right)$$

Mivel $\lambda_{1,2}=\pm i\omega_0\rightarrow\alpha=0$, azaz $e^{\alpha t}=1$. $\omega_0=\omega$, ezért a továbbiakban csak az ω jelölést fogom használni.
A fentiek alapján $P_1(t)=\frac{F_0}{m}$ és $P_2(t)=0$, így P_1 konstanspolinom. E miatt $Q_1(t)$ és $Q_2(t)$ is konstansok, vagy 0. (A továbbiakban q_1-gyel, ill. q_2-vel jelölöm őket, $q_1,q_2\in\mathbb{R}$.)
Látjuk, hogy $k=1$, azaz felírhatjuk a partikuláris megoldást a következő alakban:

$$x_0(t)=t\left(q_1\cos\omega t+q_2\sin\omega t\right)\tag{4.6}$$

Számoljuk ki ennek a második deriváltját!

$$x_0'(t)=\left(q_1\cos\omega t+q_2\sin\omega t\right)+t\left(q_2\omega\cos\omega t-q_1\omega\sin\omega t\right)=$$

$$=\left(tq_2\omega+q_1\right)\cos\omega t+\left(q_2-tq_1\omega\right)\sin\omega t$$

$$x_0''(t)=q_2\omega\cos\omega t-(tq_2\omega+q_1)\omega\sin\omega t-q_1\omega\sin\omega t+(q_2-tq_1\omega)\omega\cos\omega t$$

$$x_0''(t)=\left(2q_2\omega-tq_1\omega^2\right)\cos\omega t-\left(2q_1\omega+tq_2\omega^2\right)\sin\omega t\tag{4.7}$$

(4.6) és (4.7) formulákat visszahelyettesítve (4.1) mozgásegyenletbe $\Rightarrow$

$$\frac{F_0 \cos \omega t}{m} = \left(2q_2\omega - tq_1\omega^2\right)\cos \omega t - \left(2q_1\omega + tq_2\omega^2\right)\sin \omega t + \omega^2 t(q_1 \cos \omega t + q_2 \sin \omega t)$$

Átrendezés után kapott két egyenlet a következő:

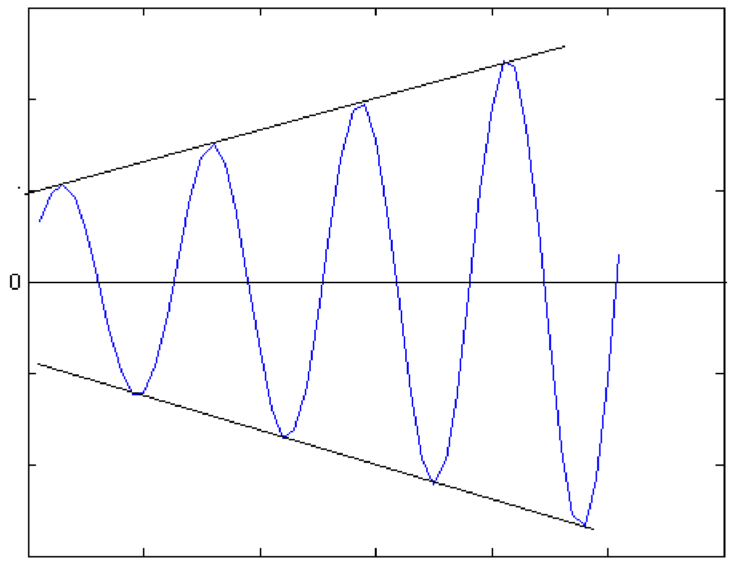
- $(q_2\omega^2 t - 2q_1\omega - tq_2\omega^2)\sin \omega t = 0$
  $$2q_1\omega = 0$$
  $$q_1 = 0$$
- $\dfrac{F_0}{m}\cos \omega t = (2q_2\omega - tq_1\omega^2 - t\omega^2 q_1)\cos \omega t$
  $$\frac{F_0}{m} = 2q_2\omega$$
  $$q_2 = \frac{F_0}{2\omega m}$$

$\Rightarrow$

$$x_0(t) = t \cdot \frac{F_0}{2\omega m}\sin \omega t$$

Tehát a megoldás:

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi) + t \cdot \frac{F_0}{2\omega m}\sin \omega t$$



Látjuk, hogy a második tagban megjelent egy t -s szorzó, így a függvény nem-korlátosra változott. Ez egy rugó esetében annyit tesz, hogy a hosszváltozása nem korlátos, ami lehetetlen, a rugó elszakad.
Tehát, ha a kényszerfrekvencia megegyezik a rendszer saját frekvenciájával, *rezonancia* lép fel és a mozgás nem-korlátossá válik. Ez történt a Tacoma híd eseténél is.

4.3. Alternatív megoldási módszer: A Laplace transzformált

A Laplace transzformált egy függvénytranszformáció, egy egyváltozós valós függvényhez egy komplex függvényt rendel.
A segítségével megoldhatunk speciális alakú másodrendű lineáris differenciálegyenleteket az általános módszereknél rövidebb idő alatt.

4.3.1. Definíció. *(Laplace transzformált)*
$f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ integrálható függvény. Ekkor $\exists A > 0$, melyre $|f(t)| \leq_{|<} e^{At}$.
Legyen $s \in \mathbb{C}$, melyre $Re(s) > A$, ekkor $f(t)$ függvény Laplace transzformáltja:

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

4.3.1. Tétel. *(Tulajdonságok)*
A Laplace transzformált homogén és lineáris, tehát:

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + \ldots + c_k f_k(t)] = c_1\mathcal{L}[f_1(t)] + \ldots + c_k\mathcal{L}[f_k(t)]$$

Bizonyítás:
Szükséges feltétel: $\exists \mathcal{L}[f_i(t)] = \int_0^\infty f_i(t)e^{-st}dt \qquad \forall i \in \mathbb{N}$, és $\forall c_i \in \mathbb{R}$.

- $$\mathcal{L}[c_i f_i(t)] = \int_0^\infty c_i f_i(t)e^{-st}dt = c_i \int_0^\infty f_i(t)e^{-st}dt = c_i\mathcal{L}[f_i(t)]$$
- $$c_i\mathcal{L}[f_i(t)] + c_{i+1}\mathcal{L}[f_{i+1}(t)] = \int_0^\infty c_i f_i(t)e^{-st}dt + \int_0^\infty c_{i+1}f_{i+1}(t)e^{-st}dt =$$
$$= \int_0^\infty e^{-st}\left(c_i f_i(t) + c_{i+1}f_{i+1}(t)\right)dt = \mathcal{L}[c_i f_i(t) + c_{i+1}f_{i+1}(t)]$$

□

A Laplace transzformált alkalmazásához szükségesek kezdeti feltételek, azaz az f függvénynek és deriváltjának egy adott pontban felvett értékei. Hiszen ismertek egy függvény első és második deriváltjának transzformáltjaira vonatkozó formulák.

4.3.2. Tétel.
$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$$

Bizonyítás:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \left[f(t)e^{-st}\right]_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$$

□

4.3.3. Tétel.
$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)$$

Bizonyítás: Az előző tételt felhasználva:

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s\mathcal{L}[f'(t)] - f'(0) = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)$$

□

4.3.1. Megjegyzés.
$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n\mathcal{L}[f(t)] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

(Teljes indukcióval könnyen belátható.)

4.3.1. Nevezetes függvények Laplace transzformáltjai

Exponenciális függvény

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^\infty e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt = \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right]_0^\infty = \lim_{\omega \to \infty} \left(\frac{e^{(a-s)\omega}}{a-s} - \frac{1}{a-s} \right) =$$

$$= \frac{1}{s-a} \qquad \text{,ha } s > a.$$

Szögfüggvény

Csak a sin függvény transzformáltját fogom levezetni, hasonló a többi trigonometrikus függvény Laplace transzformáltjának levezetése is.

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \int_0^\infty e^{-st} \sin \omega t \, dt = \left[-\frac{e^{-st} \sin \omega t}{s} \right]_0^\infty + \frac{\omega}{s} \int_0^\infty e^{-st} \cos \omega t \, dt =$$

$$= \lim_{a \to \infty} \left(-\frac{\sin \omega a \cdot e^{-sa}}{s} + 0 \right) - \left[\frac{\omega}{s} \cdot \frac{e^{-st} \cos \omega t}{s} \right]_0^\infty - \frac{\omega^2}{s^2} \int_0^\infty e^{-st} \sin \omega t \, dt =$$

$$= 0 - \frac{\omega}{s^2} \cdot \lim_{a \to \infty} \left(e^{-sa} \cos \omega a - 1 \right) - \frac{\omega^2}{s^2} \mathcal{L}[\sin \omega t] \qquad \text{, ha } s > 0.$$

$$\Rightarrow \qquad \mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2} \mathcal{L}[\sin \omega t] \qquad \text{, ha } s > 0. \text{ Azaz, ha } s > 0\text{:}$$

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Azonosan egy függvény

Erre a hatvány függvény Laplace transzformáltjánál lesz szükségünk.

$$\mathcal{L}[1] = \int_0^\infty e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^\infty = \lim_{\omega \to \infty} \left(-\frac{e^{-s\omega}}{s} + \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s} \qquad \text{, ha } s, t > 0.$$

Hatvány függvény

$$\mathcal{L}[t^n] = \int_0^\infty t^n e^{-st} dt = \left[-\frac{t^n e^{-st}}{s} \right]_0^\infty + \frac{n}{s} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} dt =$$

$$= \lim_{\omega \to \infty} \left(-\frac{\omega^n e^{-s\omega}}{s} + 0 \right) + \frac{n}{s} \mathcal{L}[t^{n-1}] = \frac{n}{s} \mathcal{L}[t^{n-1}]$$

Most tekintsük ennek a rekurzív formulának az első tagjait:

$$\mathcal{L}[t^0] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[t^0] = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{s}\mathcal{L}[t] = \frac{2}{s^3}$$

Tovább számolva megsejthető, hogy:

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Bizonyítás: (Teljes indukcióval)
Látjuk, hogy $n = 1$ esetben igaz a sejtésünk.
Tfh:

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Nézzük meg mi történik $(n + 1)$ esetén:

$$\mathcal{L}[t^{n+1}] = \frac{n+1}{s}\mathcal{L}[t^n] = \frac{n+1}{s} \cdot \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}$$

Tehát az indukciós feltevés felhasználásával igazoltuk a sejtést. □

4.3.2. Példafeladat

$$x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = e^{-4t}$$
$$x(0) = 0$$
$$x'(0) = -1$$

Megoldás:
Vegyük az egyenlet mindkét oldalának Laplace transzformáltját! A transzformáció tulajdonságait felhasználva:

$$\mathcal{L}[x''(t)] - 5\mathcal{L}[x'(t)] + 6\mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[e^{-4t}]$$

Behelyettesítve a deriváltak transzformáltjára vonatkozó képleteket és a kezdeti feltételeket:

$$s^2\mathcal{L}[x(t)] + 1 - 5s\mathcal{L}[x(t)] + 6\mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[e^{-4t}]$$

$$(s^2 - 5s + 6)\mathcal{L}[x(t)] + 1 = \mathcal{L}[e^{-4t}]$$

Az exponenciális függvény Laplace transzformáltját megvizsgáltuk. $\Rightarrow$ $\quad \mathcal{L}[e^{-4t}] = \dfrac{1}{s+4}$
Az egyenletet $\mathcal{L}[x(t)]$-re rendezve:

$$\mathcal{L}[x(t)] = \frac{1 - s - 4}{(s+4)(s^2 - 5s + 6)} = \frac{-(s+3)}{(s-2)(s-3)(s+4)}$$

A jobb oldalt parciális törtekre bontva kapjuk:

$$\mathcal{L}[x(t)] = \frac{\frac{35}{42}}{s-2} - \frac{\frac{36}{42}}{s-3} + \frac{\frac{1}{42}}{s+4}$$

A jobb oldalon lévő három kifejezést viszont felismerjük, pontosabban azt, hogy egy-egy exponenciális függvény Laplace transzformáltjai. Ebből a megoldás:

$$x(t) = \frac{35}{42}e^{2t} - \frac{36}{42}e^{3t} + \frac{1}{42}e^{-4t}$$

Ellenőrzés:

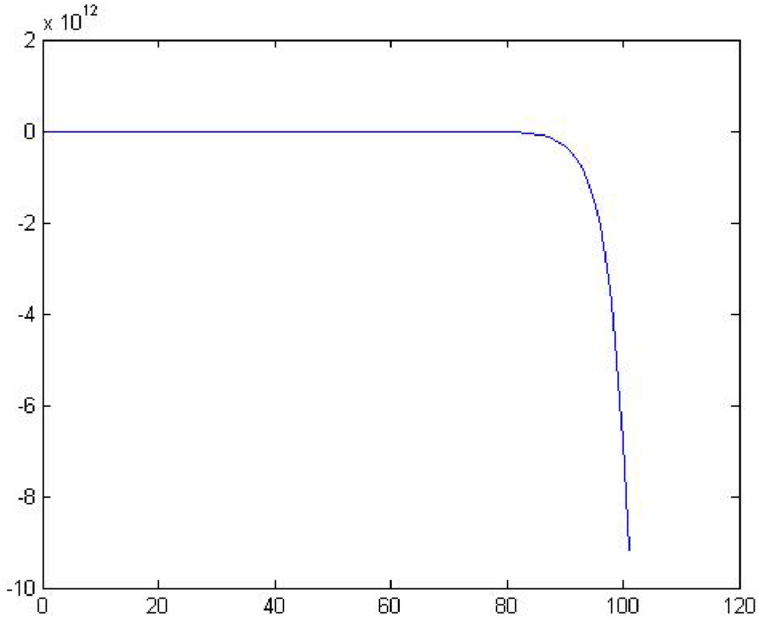
$$x'(t) = \frac{70}{42}e^{2t} - \frac{108}{42}e^{3t} - \frac{4}{42}e^{-4t}$$
$$x''(t) = \frac{140}{42}e^{2t} - \frac{324}{42}e^{3t} + \frac{16}{42}e^{-4t}$$

Látjuk, hogy a kezdeti feltételek teljesülnek.
Nézzük az egyenlet bal oldalát:

$$e^{2t}\left(\frac{140}{42} - \frac{350}{42} + \frac{210}{42}\right) + e^{3t}\left(-\frac{324}{42} + \frac{540}{42} - \frac{216}{42}\right) + e^{-4t}\left(\frac{16}{42} + \frac{20}{42} + \frac{6}{42}\right) = e^{-4t}$$

Tehát az eredmény helyes volt.

Ábrázolva a görbe:


x 10^12
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
0
20
40
60
80
100
120

Irodalomjegyzék

[1] Hatvani László-Pintér Lajos, *Differenciálegyenletes modellek a középiskolában*

[2] K. K. Ponomarjov, *Differenciálegyenletek felállítása és megoldása*

[3] Kovács Béla, *Matematika II.*

[4] Simon L. Péter, *Közönséges differenciálegyenletek előadás jegyzet*

[5] Wikipédia, *www.wikipedia.org/wiki/Differenciálegyenlet*