**Eötvös Loránd Tudományegyetem**

**Természettudományi Kar**

# Komplex számok

Szakdolgozat

*Készítette:*
**Horváth Ádám Zoltán**
Matematika Bsc
Matematikai elemző szakirány

*Témavezető:*
**Fialowski Alice**
egyetemi docens

Budapest
2013

# Tartalomjegyzék

# 1. fejezet

# Bevezetés

A komplex számok ma már a matematika szerves részét képzik, de ez nem mindig volt így. Az 1500-as évek előtt nem ismerték őket, és később is sokan vitatták létjogosultságukat. Ma már természetesen látjuk, hogy elkerülhetetlen volt a bevezetésük. Új számokat mindig akkor vezettek be, ha kiderült, hogy az aktuális számhalmaz nem elég tág. A kivonással kiléptek a természetes számok közül, ekkor vezették be a negatív számokat. Az osztásnál már az egész számok sem voltak elegendőek, így jöttek létre a törtek. A gyökvonásnál keletkező problémákat pedig a komplex számok bevezetésével tudták megoldani.

A komplex számok nem csak az algebristákat hódították meg, hanem az algebra környezetéből kilépve hasznosnak bizonyultak a geometriában, az analízisben, a számelméletben, és idővel a fizikai, illetve mérnöki tudományok területére is eljutottak. Elterjedésük során számos problémát sikerült megoldani különböző tudományterületeken, melyek addig megválaszolatlanul maradtak.

A komplex számokat felhasználják többek között a kontrollelméletben, ahol a rendszerek stabilitását tudják meghatározni a komplex számsík segítségével, de hasznosak még elektromágnesesség és elektromosságtanban is, ahol az ellenállás, a kondenzátor, illetve a tekercs hatásait lehet összegezni egy komplex számmal. Komplex számokat alkalmaznak továbbá a jelanalizísben, a kvantum mechanikában, az áramlástanban, és a geometriában is.

Szakdolgozatomban egy rövid történelmi áttekintést követően, a komplex számok alapvető algebrai tulajdonságait, összefüggéseit mutatom meg, majd rátérek a komplex számok alkalmazásaira a geometriában, illetve a komplex analízisben, néhány fizikai példán, gyakorlati alkalmazáson keresztül. Végül egy kis kitekintést teszek a kvaterniók, hiperkomplex számok felé.

Dolgozatom során a történelmi áttekintéshez a [1], [2], [4]; az alapvető tulajdonságok fejezethez a [1], [2], [3]; a geometriai részhez a [3] ; a komplex analízis során a [5], [6], [9]; és végül a kvaterniókhoz a [7], [8] irodalmakat használtam fel.

# 2. fejezet

# Történelmi áttekintés

A komplex számokkal már a XVI. században elkezdtek foglalkozni, de a kezdeti eredmények, és egyáltalán a komplex számok elismertetése nem ment könnyen, csak jóval felfedezésük után kezdték őket rendszeresen használni.

Az első neves matematikus, akinek a neve a komplex számokhoz is köthető, Cardano volt. Ő figyelte meg, hogy a harmadfokú egyenletek megoldóképlete bizonyos speciális esetekben ($x^3 + ax = b$) negatív számok gyökét tartalmazhatja.

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{b^3}{2} - \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}}$$

Például az $x^3 = 15x + 4$ egyenletre (aminek $x = 4$ a valós megoldása) a formula negatív szám négyzetgyökét adja.

A problémát Rafael Bombelli azzal oldotta meg, hogy a "nem létező" négyzetgyököt úgy kezelte, mintha egy közönséges valós szám lenne. Így a

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}$$

összefüggésből megkapta, hogy

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1},$$

illetve

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1};$$

a kettő összegéből pedig

$$2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4,$$

vagyis megkapott egy egész számot úgy, hogy közben nem létező értékekkel számolt.

Ennek ellenére a komplex számokat továbbra is fenntartásokkal kezelték. Descartes és Newton például úgy gondolták, hogy ha egy komplex számot kapnak eredményül, akkor azt úgy kell értelmezni, hogy az adott problémának nincs is megoldása, mégis, ha egy valós megoldást találtak komplex számok segítségével, akkor azt elfogadták.

Az áttörést John Wallis hozta meg azzal, hogy kitalálta a komplex számok ábrázolásának egy módját.

Az egyértelmű volt, hogy a valós számok "közé" nem tudja beszorítani a komplex számokat, így a valós számegyenesen kívül bevezetett egy rá merőleges egyenest, amin a képzetes számokat helyezte el, ezzel minden komplex számot a síkban tudott ábrázolni .
Természetesen ez sem győzött meg mindenkit, de az, hogy a képzetes számok így már megfogható jelentéssel bírtak beindította a komplex számok elfogadásának folyamatát.
Habár Wallis alkalmazta először a geometriai megjelenítés módját, az elterjedését mégis inkább Caspar Wessel, Jean-Robert Argand, és Carl Friedrich Gauss nevéhez fűzhetjük.
Igaz, hogy a geometrai ábrázolás elősegítette a szemléltetést, de most, hogy már elfogadták a komplex számokat, szerettek is volna velük műveleteket végezni, márpedig a síkon vektorműveletekkel ez nehézkes lett volna. Sir William Rowan Hamilton volt az, aki a komplex számokra nem geometriailag tekintett, hanem rendezett valós számpárokként, ahol az egyik a valós, a másik a képzetes részt jelölte.
Az összadást és a szorzást olyan módon definiálta, hogy az asszociativitás, a kommutativitás és a disztributivitás tulajdonságok is érvényesek legyenek, így most már a komplex számok is teljes értékű tagjai lettek a matematikának.

# 3. fejezet

# Alapvető fogalmak, tulajdonságok

**3.0.1. Definíció.** *Az $a+bi$ alakú kifejezéseket, ahol $i=\sqrt{-1}$ illetve a és b valós számok, komplex számoknak nevezzük. Az a-t a komplex szám valós részének, b-t pedig az imaginárius részének (vagy képzetes részének) hívjuk. (b=0 esetén egy valós számot, míg a=0 esetén tisztán képzetes számot kapunk.)*

**3.0.2. Állítás.** *Tetszőleges x,y,z komplex számokra fennállnak a következők:*

- $(x+y)+z=x+(y+z)$, *vagyis az összeadás asszociatív.*
- $x+y=y+x$, *vagyis az összeadás kommutatív.*
- $x+0=0+x=x$, *vagyis a* $0$ *a nullelem.*
- $\forall x$*-re* $\exists$ *olyan* $y$ *melyre* $x+y=y+x=0$, *azaz van ellentett.*
- $(xy)z=x(zy)$, *azaz a szorzás asszociatív.*
- $xy=yx$, *azaz a szorzás kommutatív.*
- $x*1=1*x=x$, *vagyis az* $1$ *az egységelem.*
- $(x+y)z=xz+yz$, *disztibutivitás*

Egy szám reciprokának azt a számot nevezzük, amivel megszorozva az egységelemet kapjuk, ez az $a+bi$ komplex szám esetén

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i$$

vagyis reciprokot tört bővítéssel is számolhatunk.

**3.0.3. Definíció.** *A fenti törtbővítésben szereplő* $a-bi$ *számot az* $a+bi$ *szám konjugáltjának nevezzük. Jelölés:* $\overline{a+bi}$.

**3.0.4. Definíció.** *Egy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, ezt nevezzük nullosztómentességnek.*

**3.0.5. Állítás.** *A komplex számok halmaza nullosztómentes.*

**3.0.6. Definíció.** *Az a+bi komplex szám abszolút értékének a $\sqrt{a^2+b^2}$ nemnegatív valós számot nevezzük.*

**3.0.7. Állítás.** *Tetszőleges x,y komplex számokra igazak az alábbiak.*

- $\overline{\overline{x}} = x$.
- $\overline{x} = x$ *akkor és csak akkor, ha* $x$ *valós.*
- $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$, *vagyis a konjugálás összegtartó.*
- $\overline{x*y} = \overline{x} * \overline{y}$, *vagyis a konjugálás szorzattartó.*
- $|x| = 0$ *akkor és csak akkor, ha* $x = 0$.
- $|\overline{x}| = |x|$.
- $|xy| = |x||y|$, *az abszolút érték szorzattartó.*

## 3.1. Komplex számok reprezentációja

**Komplex számok, mint rendezett számpárok**
A komplex számokra tekinthetünk úgy is, mint rendezett valós számpárokra, ahol az első a valóst, a második a képzetes részt jelöli. Ebben az esetben a műveletekre a következő definicíót adhatjuk:

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

$$(a,b)(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

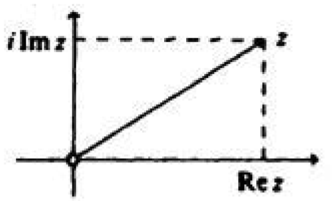
**3.1.1. Megjegyzés.** *Az* $(a,b)$ *rendezett számpárt az a+bi komplex számnak feleltethetjük meg, így az* $(a,0)$ *alakú rendezett párok felelnek meg a valós számoknak, míg a (0,b) alakúak a tisztán képzeteseknek. Így megkaphatjuk a* $i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0)$ *összefüggést is.*

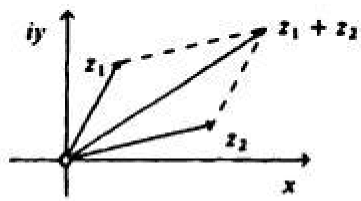
**Komplex számok, mint mátrixok**
A komplex számokat ábrázolhatjuk 2x2-es mátrixként is, mivel az a+bi komplex szám és a

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

mátrix között létezik kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés.

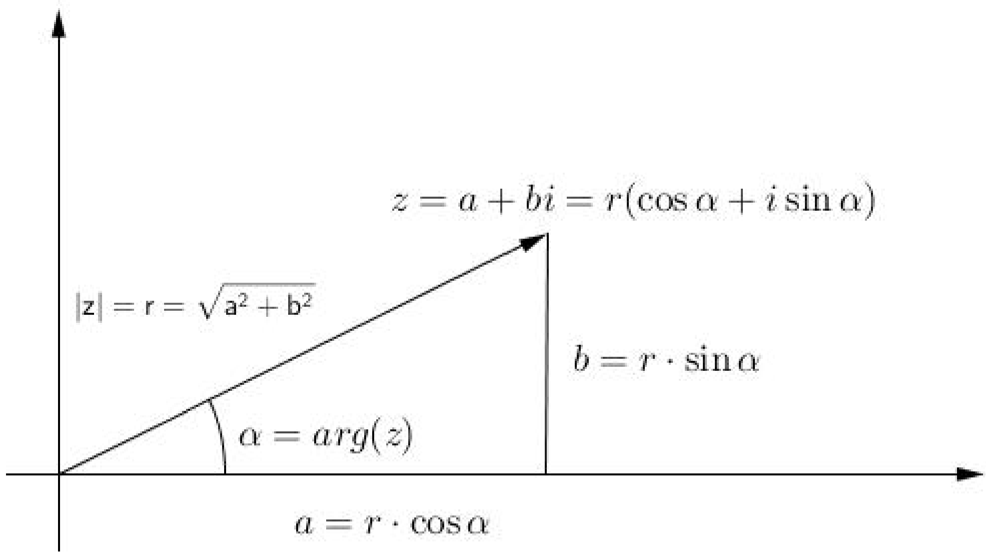
**Komplex számok, mint vektorok**
A komplex számok bizonyos tulajdonságait könnyebb geometriai környezetben szemléltetni, ezért a komplex számokra mostantól úgy is tekinthetünk, mint egy derékszögű koordinátarendszerben felvett helyvektorokra. Az egyik koordinátatengelyen fogjuk a komplex számok valós részét, míg a másikon a képzetes részét mérni. Azért is célszerű egy ilyen koordinátarendszerben vizsgálódni, mert így a komplex számok összeadására vonatkozó kifejezés éppen egybeesik az ebben a koordinátarendszerben történő vektor összeadással.




## 3.2. Trigonometrikus alak

Mint tudjuk, egy adott pontot úgy is meghatározhatunk, ha megadjuk, milyen messze van az origótól (vagyis a hosszát), illetve hogy az $x$ tengely pozitív felével milyen (irányított) szöget zár be.




Mint az ábrán is látszik, a komplex számok hossza és abszolút értéke ugyanaz, a szöget pedig szokás árkusznak, illetve argumentumnak is nevezni. A legfontosabb viszont, hogy a $z$ komplex szám felírható a következő alakban:

$$z = a + bi = r(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha).$$

Ezt nevezzük a komplex szám trigonometrikus alakjának.

**3.2.1. Tétel.** *Bármely tetszőleges z,w komplex számokra teljesül, hogy*

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

*(Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha z és w egyenlő állásúak.) Ez a háromszög-egyenlőtlenség.*

A trigonometrikus alak egyik legnagyobb előnye, hogy a szorzás művelet elvégzését nagyon egyszerűvé teszi, ugyanis ha

$$z = r(\cos + i \cdot \sin \alpha)$$

és

$$w = s(\cos \beta + i \cdot \sin \beta),$$

akkor a szorzatukra a következő adódik:

$$zw = rs(\cos(\alpha + \beta) + i \cdot \sin(\alpha + \beta)),$$

tehát komplex számok szorzatakor a szögük összeadódik, a hosszuk pedig összeszorzódik. Ha visszatérünk a geometriai szemlélethez, akkor ez éppen a forgatva nyújtásnak feleltethető meg.

Amennyiben a szorzást többször egymás után elvégezzük, úgy nem meglepő módon a hatványozásra is kapunk egy összefüggést:

$$[r(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)]^n = r^n(\cos(n\alpha) + i \cdot (\sin(n\alpha))).$$

Ezt formulát Moivre képletének is szokás nevezni.

## 3.3. Egységgyökök, rendek

A hatványozáshoz hasonlóan a gyökvonást is a trigonometrikus alak segítségével célszerű végezni.

$$\sqrt[n]{r(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)} = \sqrt[n]{r} \cdot ((\cos(\alpha/n)) + i \cdot \sin(\alpha/n))$$

Azonban az adott komplex számnak nemcsak ez az egyetlen $n$-edik gyöke van.

**3.3.1. Definíció.** *Az $\varepsilon$ komplex számot n-edik komplex egységgyöknek hívjuk, ha $\varepsilon^n = 1$.*

**3.3.2. Tétel.** *n-edik egységgyökökből pontosan n darab (periodikusság erejéig) különböző létezik, és ezek a következőek:*

$$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \cdot \sin(2k\pi/n).$$

Ráadásul $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$, vagyis ha egy egységgyököt megtaláltunk, akkor a többit is megkapjuk hatványozással.

Ha az egységgyököket geometrailag ábrázoljuk, akkor éppen egy origó középpontú szabályos $n$-szöget kapunk.
Tehát az 1-nek $n$ darab $n$-edik gyöke van.
Vajon a többi komplex számmal is ez a helyzet?
A válasz természetesen igen, ami abból következik, hogy a komplex számmal való szorzás forgatva nyújtást jelent geometrailag.
A $z = z \cdot 1$-et felhasználva láthatjuk, hogy lényegében a komplex egységgyököket kell megszorozni $z$-vel, ami így ismét csak egy szabályos $n$-szöget eredményez, tehát

**3.3.3. Tétel.** *Minden nem nulla komplex számnak pontosan $n$ darab $n$-edik gyöke van.*

A fentiek értelmében az egyik gyök megkapható a képletből, majd ezt megszorozva az egységgyökökkel, megkaphatjuk az összes többit is.

Azt láttuk, hogy az egységgyökök hatványai periodikusak, de ugyanez nem mondható el például a valós számokról. Tehát arra szeretnénk választ kapni, hogy egy tetszőleges komplex számnak hány "különböző" hatványa van.

**3.3.4. Definíció.** *Az $n$ egész szám "jó kitevője" a $z$ komplex számnak, amennyiben $z^n = 1$.*

**3.3.5. Definíció.** *Egy $z$ komplex szám rendjének nevezzük a különböző hatványainak számát, amennyiben nem periodikus, úgy a rendjét végtelennek tekinthetjük. Jelölése: $o(z)$.*

**3.3.6. Tétel.** *Egy komplex szám rendje megegyezik a legkisebb jó kitevőjével, és*

$$z^k = z^l \iff o(z)|k - l.$$

**3.3.7. Következmény.** *$o(z)|k$ ,ahol $k$ egy jó kitevő.*

**3.3.8. Tétel.** *Ha $z$ rendje véges és $k$ egész szám, akkor*

$$o(z^k) = \frac{o(z)}{(o(z), k)}.$$

**3.3.9. Állítás.** *Egy $z$ nem nulla komplex szám rendje akkor és csak akkor véges, ha $|z| = 1$ és $arg(z) = 2k\pi$, ahol $k$ racionális szám. Ha $k = p/q$ és $(k, n) = 1$, akkor $o(z) = q$.*

# 4. fejezet

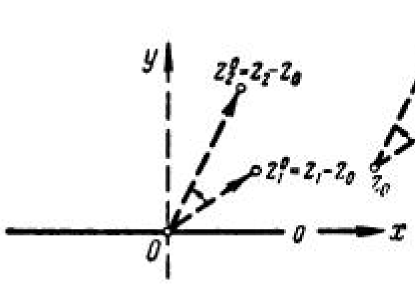
# Geometrai alkalmazások és példák

Mint azt az előzőekben láttuk, tetszőleges $z_1, z_2$ komplex számok esetén:

$$d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|.$$

Az is nyilvánvaló, hogy két origón átmenő, $z_1^0$ illetve $z_2^0$ pontok által meghatározott egyenesek által közrezárt szögön($\alpha$) a két egyenes $x$ tengellyel bezárt szögeinek különbségét értjük,vagyis

$$\alpha = arg(z_1^0) - arg(z_2^0) = arg\frac{z_2^0}{z_1^0}.$$




Továbbá két, tetszőleges $z_0$ pontban metsző, $z_1$, $z_2$ pontok által meghatározott egyenes által közrezárt szög is meghatározható. Ha a $z' = z - z_0$ leképzést alkalmazzuk, akkor így már az origóban metszik egymást az egyenesek. Ez a leképzés a $z_1$ és a $z_2$ pontokat rendre a $z_1^0 = z_1 - z_0$-be, illetve $z_2^0 = z_2 - z_0$-be viszi. Ekkor az eredeti és az eltolt egyenesek szögei is megegyeznek, vagyis

$$\alpha = arg(z_2 - z_0) - arg(z_1 - z_0) = arg(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}).$$

**4.0.10. Definíció.** *A $V(z_0, z_1, z_2) = \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$ törtet a $z_0$, $z_1$, $z_2$ komplex számok rátájának nevezzük.*

**4.0.11. Tétel.** *A $z_0$, $z_1$, $z_2$ pontok kollineárisak (vagyis közös egyenesre fekszenek), ha $\alpha([z_1, z_2][z_0, z_2]) = 0$ vagy $\pi$.*

Ez az előbbiek szerint azt is jelenti, hogy $V(z_0, z_1, z_2)$ valós.

**4.0.12. Tétel.** *A $z_0$, $z_1$, $z_2$, $z_3$ pontok egy körön helyezkednek el, vagy kollineárisak, ha*

$$\alpha([z_0, z_2][z_1, z_2]) - \alpha([z_0, z_3][z_1, z_3]) = 0$$

*vagy*

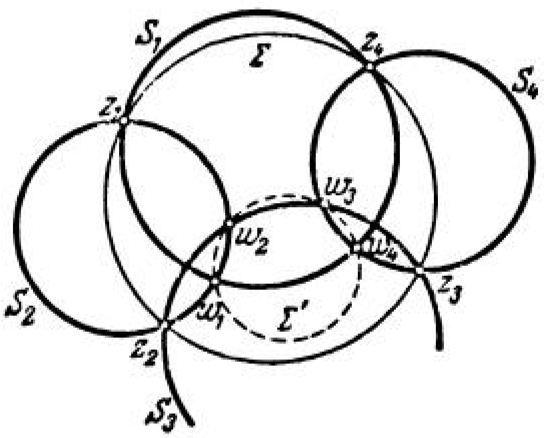
$$\alpha([z_0, z_2][z_1, z_2]) - \alpha([z_0, z_3][z_1, z_3]) = \pi,$$

*tehát ha a*

$$\frac{V(z_0, z_1, z_2)}{V(z_0, z_1, z_3)} = \frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} / \frac{z_0 - z_3}{z_1 - z_3}$$

*hányados valós. Ezt nevezzük a négy pont kereszt-rátájának,és $W(z_0, z_1, z_2, z_3)$ -vel jelöljük.*

**4.0.13. Állítás.** *Legyen a síkon adott négy kör $(S_1, S_2, S_3, S_4)$, és legyenek $z_1$ és $w_1$ azok a pontok, amelyekben $S_1$ és $S_2$ metszik egymást. Hasonlóan $z_2$ és $w_2$ azok a pontok, amelyekben $S_2$ és $S_3$ , $z_3$ és $w_3$ azok a pontok, amelyekben $S_3$ és $S_4$ , $z_4$ és $w_4$ azok a pontok, amelyekben $S_4$ és $S_1$ metszik egymást. Ekkor ha $z_1$, $z_2$, $z_3$, és $z_4$ egy körön fekszenek(vagy kollineárisak), akkor $w_1$, $w_2$, $w_3$, és $w_4$ is egy körön fekszenek(vagy kollineárisak).*




**4.0.14. Bizonyítás (forrás: [3]).**

Felhasználjuk, hogy $z_1$, $z_2$, $w_1$, $w_2$ az $S_2$ körön fekszenek, ez hasonlóan elmondható a többi pontról és körről is. Vagyis igaz, hogy

$$W(z_1, w_2, z_2, w_1) = \frac{z_1 - z_2}{w_2 - z_2} / \frac{z_1 - w_1}{w_2 - w_1},$$

$$W(z_2, w_3, z_3, w_2) = \frac{z_2 - z_3}{w_3 - z_3} / \frac{z_2 - w_2}{w_3 - w_2},$$

$$W(z_3, w_4, z_4, w_3) = \frac{z_3 - z_4}{w_4 - z_4} / \frac{z_3 - w_3}{w_4 - w_3},$$

$$W(z_4, w_1, z_1, w_4) = \frac{z_4 - z_1}{w_1 - z_1} / \frac{z_4 - w_4}{w_2 - w_4}$$

mind valósak, tehát a

$$\frac{W(z_1, w_2, z_2, w_1)W(z_3, w_4, z_4, w_3)}{W(z_2, w_3, z_3, w_2)W(z_4, w_1, z_1, w_4)} = W(z_1, z_3, z_2, z_4)W(w_1, w_3, w_2, w_4)$$

értéknek is valósnak kellene lennie.
Mivel itt az első kereszt-ráta valós, ezért a második is az, vagyis az állítás igaz. □

# 5. fejezet

# Komplex Analízis

A komplex számok természetesen az analízisben is megjelennek. És mint a többi területen, itt is hasonlóságot mutatnak a valós számokkal, ugyanakkor lényegi eltéréseket is észrevehetünk.

## 5.1. Konvergencia, folytonosság, differenciálhatóság

**Sorozatok konvergenciája:**
A $z_n \in \mathbb{C}$ sorozat konvergens , és határértéke $z$, amennyiben a

$$z_n = x_n + iy_n$$

$$z = x + iy$$

felírásban $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ , $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, és minden $\varepsilon > 0$-ra létezik $n_0$, hogy minden $n > n_0$-ra

$$|z_n - z| = \sqrt{(x_n - x)^2(y_n - y)^2} < \varepsilon.$$

**Függvények konvergenciája:**
Legyen $z_0 \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$, ekkor tekintsük a

$$B(z_0, \delta) = \{z : |z - z_0| < \delta\}$$

$z_0$ körüli, $\delta$ sugarú nyílt kört.

**5.1.1. Definíció.** *Legyen $D \in \mathbb{C}$. Azt mondjuk $D$ tartomány, ha*

- $\forall z_0 \in D : \exists \delta > 0, B(z_0, \delta) \subset D$ *és*
- $\forall z_1, z_2 \in D$*-hez létezik törött vonal, amely $z_1$-ből $z_2$-be megy.*

**5.1.2. Definíció.** *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $z_0 \in D$, $f : D \backslash \{Z_0\} \to \mathbb{C}$. Azt mondjuk, hogy $f$ konvergens $z_0$-ban, és $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$, ha $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0$ és $\forall z \in B(z_0, \delta) \cap (D \backslash \{z_0\})$ esetén $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.*

**Függvények folytonossága:**

**5.1.3. Definíció.** *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f : D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, ekkor $f$ folytonos $z_0$-ban, ha $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.*

**5.1.4. Tétel (Átviteli elv).** *Minden $z_n \in D$ és $\lim_{n \to \infty} z_n = z_0$ esetén $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = f(z_0)$.*

**5.1.5. Definíció.** *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f : D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$; azt mondjuk, hogy $f$ differenciálható $z_0$-ban és differenciálhányadosa $z_0$-ban: $f'(z_0) \in \mathbb{C}$, ha*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

**5.1.6. Definíció (Derivált függvény).** *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f : D \to \mathbb{C}$. Tegyük fel, hogy $f$ minden pontban differenciálható, ekkor az $f' : D \to \mathbb{C}$ függvényt $f$ derivált függvényének nevezzük.*

**Deriválási szabályok:**

- $(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$.
- $(f \cdot g)(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$.
- $(\frac{f}{g})'(z_0) = \frac{f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)}{g^2(z_0)}$.
- $(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0)) \cdot g'(z_0)$.
- $(f^{-1})'(z_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z_0))}$.
- $(c \cdot f)'(z_0) = c \cdot f'(z_0)$, $c \in \mathbb{C}$.

Legyen $D \subset \mathbb{C}, f : D \to \mathbb{C}$ függvény, ekkor $f(z)$ felírható a következő alakban is:

$$f(z) = f(x + i \cdot y) = u(x + iy) + i \cdot v(x + iy) = u(x, y) + i \cdot v(x, y).$$

Tegyük fel, hogy f differenciálható a $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$ pontban. Ekkor

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{(x+iy) \to (x_0+iy_0)} \frac{u(x, y) + iv(x, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{(x + iy) - (x_0 + iy_0)} =$$

Vízszintes egyenes mentén:

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Függőleges egyenes mentén pedig:

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{u(x_0, y) + iv(x_0, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{iy - iy_0}$$

$$= -i \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Vagyis a következő egyenlőségeknek kell teljesülni:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

és

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Ezeket nevezzük *Cauchy-Riemann differenciálegyenletek*nek.

**5.1.7. Állítás.** *$f$ akkor és csak akkor differenciálható a $z_0 = x_0 + iy_0$ pontban, ha $D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u$ és $v$ differenciálható $(x_0, y_0)$-ban, és teljesülnek a Cauchy-Riemann differenciálegyenletek.*

**5.1.8. Definíció.** *Legyen $z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n = 0...\infty$.*
*Ekkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ alakú kifejezést $z_0$ körüli hatványsornak nevezzük.*

A fenti hatványsor konvergens $z_0 \in \mathbb{C}$-ben, ha az $S_k = \sum\limits_{n=0}^{k} a_n(z - z_0)^n$ összegsorozat konvergens. A $\lim\limits_{k \to \infty} S_k$ határértéket a hatványsor $z_0$-ban felvett összegének nevezzük. A hatványsort abszolút konvergensnek hívjuk, ha $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n \cdot (z - z_0)^n|$ konvergens.

**5.1.9. Definíció.** *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tetszőleges tartomány, $f : D \to \mathbb{C}$ függvény, azt mondjuk, hogy a fenti hatványsor $D$-n $f$-hez egyenletesen konvergál, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $k_0$, hogy minden $k > k_0$, és minden $z \in D$ -re*

$$|f(z) - \sum_{n=0}^{k} a_n \cdot (z - z_0)^n| < \varepsilon.$$

**5.1.10. Tétel (Cauchy-Hadamard).** *Tekintsük a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$ hatványsort és legyen*

$$r := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

*a hatványsor konvergenciasugara. Ekkor a hatványsor konvergens a $B(z_0, r)$ körön, sőt ott abszolút konvergens is, és minden $\delta < r$ esetén a hatványsor egyenletesen konvergens a $B(z_0, \delta)$ körön.*

Ha $|z - z_0| > r$, akkor a hatványsor divergens. Az $r$ számot a hatványsor konvergenciasugarának nevezzük.

**5.1.11. Definíció.** *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f : D \to \mathbb{C}$ olyan függvény, amely minden pontban komplex értelemben differenciálható. Ekkor $f$-et $D$-n reguláris, vagy holomorf függvénynek hívjuk.*

**5.1.12. Tétel.** *Legyen a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$ hatványsor konvergenciasugara $r$. Legyen $f : B(z_0, r) \to \mathbb{C}$ a hatványsor összegfüggvénye: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$. Ekkor $f$ holomorf a $B(z_0, r)$ körön és ott $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (z - z_0)^{n-1}$.*

## 5.2. Az exponenciális és a logaritmus függvények

Az előzőek alapján most már definiálni tudjuk az exponenciális függvényt.

**5.2.1. Definíció.** *Exponenciális függvénynek az alábbi összegfüggvényt nevezzük:*

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

**5.2.2. Állítás.** $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w))$.

**5.2.3. Bizonyítás (forrás: [5]).**

Legyen $w \in \mathbb{C}$ rögzített. Tekintsük a $g(z) := \exp(z + w) \cdot \exp(-z)$ függvényt, ekkor

$$g'(z) = \exp'(z + w) \cdot \exp(-z) + \exp(z + w) \cdot \exp'(-z) \cdot (-1) =$$

$$= \exp(z + w) \cdot \exp(-z) - \exp(z + w) \cdot \exp(-z) = 0.$$

Tehát $g(z) =$ konstans, ez például $z = 0$ esetén $\exp(w)$-t ad, és mivel ez konstans ezért: minden $z, w$ -re

$$\exp(z + w) \cdot \exp(-z) = \exp(w).$$

$$\text{Speciálisan: } w = 0 \Rightarrow \exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp(0) = 1,$$

vagyis az állítás valóban igaz. □

**Egy érdekes következmény.** Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén

$$e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi} = e^a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(bi)^n}{n!} =$$

$$= e^a \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(bi)^{2k}}{2k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(bi)^{2k+1}}{2k+1!}) = e^a(\cos b + i \cdot \sin b).$$

Ez a képlet $z = 0 + i$ esetén a következő összefüggést adja:

$$e^i = e^0(\cos 1 + i \cdot \sin 1)$$

$$e^{i\pi} = e^0 \cdot (\cos \pi + i \cdot \sin \pi) = -1$$

**Periodikusság:**

A komplex értelemben vett exponenciális függvény egy nagyon lényeges dologban tér el a valós megfelelőjétől, mégpedig a következőben:

$z \in \mathbb{C}$ esetén

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot (\cos 2\pi + i \cdot \sin 2\pi) = e^z,$$

vagyis a komplex értelemben vett $e^z$ $2\pi$ szerint periodikus függvény.

Az exponenciális függvény definiálása után természetesen adódik, hogy a logaritmust is meg szeretnénk határozni.

$z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ esetén legyen

$$\log z = \log r + i \cdot \varphi = \log |z| + i \cdot \arg z,$$

ahol

$$-\pi < \arg z < \pi, \text{ és } \log'(z) = \frac{1}{z}.$$

## 5.3. Trigonometrikus függvények

Az exponenciális függvényhez hasonlóan a trigonometrikus függvények is meghatározhatók:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n!} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Innen az ismert deriválási szabályok rögtön adódnak :

$$\cos'(z) = \sin(z) \text{ és } \sin'(z) = \cos(z)$$

**5.3.1. Megjegyzés.** *A trigonometrikus összefüggések komplex esetben is érvényesek. Például:*

$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = (\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2})^2 + (\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i})^2 = \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} + 2}{4} + \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} - 2}{-4} = 1$$

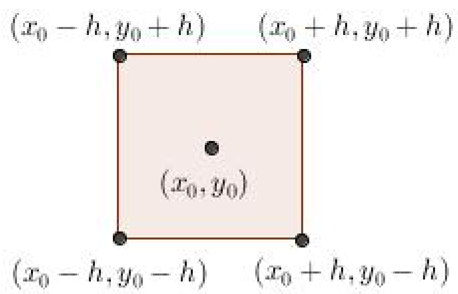
## 5.4. Ideális folyadékáramlás

A geometria mellett a komplex számokat a fizika területén is nagymértékben használják. A komplex számok előkerülnek a rezgések és hullámok leírásánál, az elektromosságtanban, illetve az áramlástanban is. Mi most a folyadékáramlásokat fogjuk közelebbről megvizsgálni, először is az ideális folyadékáramlást.

**5.4.1. Definíció.** *Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ tartomány. Ideális folyadékáramlásról beszélhetünk, ha az áramlás*

- *stacionárius: vagyis minden pillanatban az adott $(x_0, y_0) \in D$ pontban tartózkodó részecske sebessége nem függ az időtől;*
- *forrás- és nyelőmentes: vagyis anyag nem keletkezik, illetve nem is tűnik el;*
- *örvénymentes.*

Az első feltétel úgy is megfogalmazható, hogy D-n adott egy vektormező, amely minden $(x_0, y_0) \in D$-hez hozzárendel egy $(u(x, y), v(x, y))$ sebességvektort.
Ennek mintájára szeretnénk a második, illetve a harmadik feltételt is matematikailag megfogalmazni.




$(x_0, y_0) \in D$

$$[x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - h, y_0 + h] \subset D$$

Ekkor az $[x_0 - h, y_0 - h; x_0 - h, y_0 + h]$ falon a folyadék beáramlás mennyisége egységnyi idő alatt(a területből adódóan):

$$\int_{-h}^{h} u(x_0 - h, y_0 + t)\mathrm{d}t.$$

A másik függőleges fal, vagyis a $[x_0 + h, y_0 - h; x_0 + h, y_0 + h]$ esetében ugyanez a vektor most kiáramlást jelent, vagyis :

$$-\int_{-h}^{h} u(x_0 - h, y_0 + t)\mathrm{d}t.$$

Még a vízszintes falakat kell megvizsgálni. Az alsó $[x_0 - h, y_0 - h; x_0 + h, y_0 - h]$ falon egységnyi idő alatt beáramló folyadék:

$$\int_{-h}^{h} v(x_0 + t, y_0 - h)\mathrm{d}t.$$

A felső $[x_0 - h, y_0 + h; x_0 + h, y_0 + h]$ falon pedig:

$$-\int_{-h}^{h} v(x_0 + t, y_0 + h)\mathrm{d}t.$$

Ekkor a forrás- és nyelőmentesség megfogalmazható így is:

$$0 = \int_{-h}^{h} u(x_0 - h, y_0 + t)\mathrm{d}t - \int_{-h}^{h} u(x_0 + h, y_0 + t)\mathrm{d}t$$

$$+ \int_{-h}^{h} v(x_0 + t, y_0 - h)\mathrm{d}t - \int_{-h}^{h} u(x_0 + t, y_0 + h)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-h}^{h} u(x_0 - h, y_0 + t) - u(x_0 + h, y_0 + t)\mathrm{d}t +$$

$$+ \int_{-h}^{h} v(x_0 + t, y_0 - h) - u(x_0 + t, y_0 + h)\mathrm{d}t.$$

Az integrálszámítás középértéktétele alapján:
$\exists\ \xi_1, \xi_2 \in (-h, h)$ úgy, hogy

$$0 = 2h(u(x_0 - h, y_0 + \xi_1) - u(x_0 + h, y_0 + \xi_1)) + 2h(v(x_0 + \xi_2, y_0 - h) - v(x_0 + \xi_2, y_0 + h)).$$

Most a Lagrange középértéktételt alkalmazzuk:
$\exists\ \xi_3, \xi_4 \in (-h, h)$ úgy, hogy

$$0 = 2h(-2h \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + \xi_3, y_0 + \xi_1)) + 2h(-2h \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(x_0 + \xi_2, y_0 + \xi_4)).$$

Vagyis

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + \xi_3, y_0 + \xi_1) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0 + \xi_2, y_0 + \xi_4).$$

Mint tudjuk, $\xi_i \in (-h, h)$, ezért $h \to 0$ esetén $\xi_i \to 0$, valamint, mivel $x_0, y_0$ tetszőleges volt, ezért igaz, hogy

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Ez hasonlít a Cauchy-Riemann differenciálegyenletek egyikére, csak az előjele nem jó, de mint a későbbiekben kiderül majd, nagyon is erős a kapcsolat közöttük.

Most az örvénymentességet szeretnénk leírni:
Cirkuláció az alsó lapon:

$$\int_{-h}^{h} u(x_0 + t, y_0 - h)\mathrm{d}t.$$

A felső lapon:

$$-\int_{-h}^{h} u(x_0 + t, y_0 + h)\mathrm{d}t.$$

A bal oldali lapon:

$$-\int_{-h}^{h} v(x_0-h, y_0+t)\mathrm{d}t.$$

A jobb oldalin pedig:

$$\int_{-h}^{h} u(x_0+h, y_0+t)\mathrm{d}t.$$

Tehát az örvénymentesség megfogalmazható így:

$$0=\int_{-h}^{h} u(x_0+t, y_0-h)\mathrm{d}t-\int_{-h}^{h} u(x_0+t, y_0+h)\mathrm{d}t$$

$$-\int_{-h}^{h} v(x_0-h, y_0+t)\mathrm{d}t+\int_{-h}^{h} u(x_0+h, y_0+t)\mathrm{d}t.$$

Az előzekhez hasonlóan az integrálszámítás, illetve a Lagrange középértéktételt alkalmazva:

$$0=-\frac{\partial u}{\partial y}(x_0+\xi_1, y_0+\xi_3)+\frac{\partial v}{\partial x}(x_0+\xi_4, y_0+\xi_2).$$

Itt is $h \to 0$ esetén:

$$-\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)+\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)=0.$$

A forrás- és nyelőmentességre, valamint az örvénymentességre kapottak alapján, előjeltől eltekintve, a Cauchy-Riemann differenciálegyenleteket kaptuk meg.
Ezt az előjel problémát könnyen feloldhatjuk:
Legyen $f(x+iy)=u(x,y)-i\cdot v(x,y)$, ekkor

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial(-v)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial(-v)}{\partial x}.$$

Így ezek már valóban a Cauchy-Riemann egyenletek.

## 5.5. Görbék és komplex vonalintegrál

**5.5.1. Definíció.** *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ folytonos függvény; ekkor azt mondjuk, hogy $\varphi$ egy görbe.*

**5.5.2. Definíció.** *Legyen $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$, és legyen $a=t_0<t_1, \cdots, t_{n-1}<t_n=b$ az $[a,b]$ intervallum egy $F$ felosztása. Jelölje $s_F=\sum_{k=1}^{n}|\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})|$ a közelítő összeget.*

**5.5.3. Definíció.** *Ha $s_F$ felülről korlátos, akkor azt mondjuk, hogy $\varphi$ rektifikálható, és hossza:*

$$l(\varphi) = \sup s_F \text{ , ahol } F \text{ végigfut az összes (végtelen sok) felosztáson.}$$

*Ha $\varphi(t) = x(t) + i \cdot y(t)$, $t \in [a, b]$, akkor az*

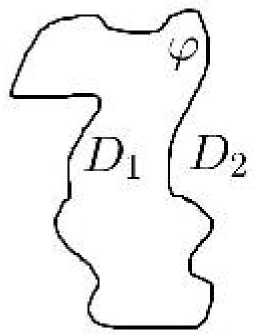
$$l(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \mathrm{d}t$$

*a $\varphi$ görbe ívhossza.*

**5.5.4. Definíció.** *Legyen $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ görbe; azt mondjuk, hogy $\varphi$ egyszerű, ha minden $t_1 \neq t_2 \in [a, b]$-re $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$.*
*Azt mondjuk $\varphi$ zárt, ha $\varphi(a) = \varphi(b)$.*
*Azt mondjuk, hogy $\varphi$ egyszerű zárt (Jordan görbe), ha $\varphi$ zárt és $t_1 < t_2$ esetén $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ akkor és csak akkor, ha $t_1 = a, t_2 = b$.*

**5.5.5. Tétel (Jordan görbe tétele:).** *Legyen $\varphi[a, b] \to \mathbb{C}$ egyszerű zárt görbe, ekkor léteznek olyan $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$ tartományok, melyekre teljesülnek a következők:*

- *$\mathbb{C} = D_1 \cup D_2 \cup \varphi([a, b])$ és bármelyik kettő metszete üres;*
- *$D_1$ korlátos, míg $D_2$ nem korlátos.*




*Itt $D_1$-et a görbe belsejének, $D_2$-t pedig a külsejének nevezzük.*
*Jelölésük rendre int$\varphi$, illetve ext$\varphi$.*

**5.5.6. Definíció.** *Legyen $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ görbe , legyen $F : a = t_0 < ... < t_n = b$ felosztás, és legyen $\gamma := \max(t_k - t_{k-1} : k = 1...n)$; ekkor $\gamma$ -t az $F$ felosztás finomságának nevezzük.(Minél kisebb az érték, annál finomabb a felosztás.)*

**5.5.7. Definíció.** *Legyen $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ rektifikálható görbe, és legyen $f : \varphi([a, b]) \to \mathbb{C}$ folytonos; ekkor létezik olyan $I \in \mathbb{C}$ komplex szám, hogy minden $\varepsilon > 0$ -hoz van $\delta > 0$ úgy, hogy minden $\delta$ -nál finomabb $F$ felosztás esetén, és minden $\xi_1 \in [t_0, t_1], \xi_2 \in [t_1, t_2], ..., \xi_n \in [t_{n-1}, t_n]$ esetén*

$$|\sum_{k=1}^{n} f(\varphi(\xi_k)) \cdot (\varphi(t_k) - \varphi(t_k - 1)) - I| < \varepsilon.$$

*Az $I$ számot az $f$ függvény $\varphi$ mentén vett komplex vonalintegráljának nevezzük.*

**5.5.8. Állítás.** *Ha $\varphi$ folytonosan differenciálható $[a, b]$-n, és $f$ folytonos $\varphi([a, b])$-n, akkor*

$$\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

**5.5.9. Következmény (Triviális becslés).** *Legyen $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ rektifikálható, $f : \varphi[a, b] \to \mathbb{C}$ folytonos és $|f(z) \leq M|$, ekkor*

$$|\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z| \leq M \cdot l(\varphi).$$

**5.5.10. Állítás.** *Legyen $\varphi_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\varphi_2 : [b, c] \to \mathbb{C}$, $\varphi_1(b) = \varphi_2(b)$,*
*és legyen $f(\varphi_1([a, b]) \cup \varphi_2([a, b])) \to \mathbb{C}$ folytonos, ekkor*

$$\int_{\varphi_1+\varphi_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\varphi_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\varphi_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

**5.5.11. Definíció.** *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f : D \to \mathbb{C}$.*
*Azt mondjuk, hogy $F$ az $f$ függvény primitív függvénye, ha $F$ reguláris $D$-n és $F' = f$.*

**5.5.12. Állítás.** *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, ekkor a $0$ (mint függvény) összes primitív függvénye konstans.*

**5.5.13. Tétel (Newton-Leibniz formula).** *Legyen $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ rektifikálható, $f$ folytonos egy $(\varphi[a, b])$-t tartalmazó tartományban, és tegyük fel, hogy $f$-nek van primitív függvénye.(Az egyik primitív függvénye legyen $F$.) Ekkor*

$$\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

**5.5.14. Bizonyítás (forrás: [5]).**

Ha $\varphi$ folytonosan differenciálható, akkor

$$\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_a^b (F \circ \varphi)'\mathrm{d}t = (F \circ \varphi)(b) - (F \circ \varphi)(a) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

□

**5.5.15. Állítás.** *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f : D \to \mathbb{C}$ folytonos, ekkor a következő három állítás ekvivalens:*

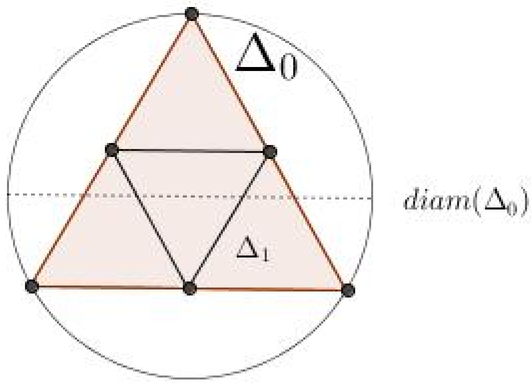
- *Az $f$-nek létezik primitív függvénye;*
- *Minden $\varphi[a, b] \to D$ rektifikálható zárt görbére $\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z = 0$;*
- *Minden $\varphi[a, b] \to D$ zárt törött vonalra $\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z = 0$.*

**5.5.16. Tétel (Goursat Lemma).** *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $\Delta$ olyan háromszögvonal, melyre $\Delta \subset D$ és $int\Delta \subset D$; legyen $f : D \to \mathbb{C}$ reguláris, ekkor*

$$\int_{\Delta} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

**5.5.17. Bizonyítás (forrás: [5]).**

Háromszögvonalak egy sorozatát képezzük. Legyen $\Delta_0 := \Delta$, azaz a kezdeti háromszögvonal. Ennek az oldalfelező pontjait összekötve 4 kisebb háromszög keletkezik:




Legyen $\Delta_{n+1}$ a $\Delta_n$ felbontásából az a kis háromszög, amelyre $f$ vonalintegráljának abszolút értéke maximális. Ekkor

$$|\int_{\Delta_n} f(z)\mathrm{d}z| \leq 4 \cdot |\int_{\Delta_{n+1}} f(z)\mathrm{d}z|.$$

A $\Delta_{n+1}$ hasonló $\Delta_n$-hez, és a hasonlóság aránya 1 : 2.

$$|\int_{\Delta_0} f(z)\mathrm{d}z| \leq 4^n \cdot \int_{\Delta_n} f(z)\mathrm{d}z$$

Továbbá tudjuk, hogy $diam(\Delta_n) = \frac{diam(\Delta_0)}{2^n} \to 0$ tehát egy ponttá "zsugorodik" össze; ez legyen $z_0$. Az f differenciálható $z_0$-ban, így

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z).$$

Innen

$$\int_{\Delta_n} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\Delta_n} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z))\mathrm{d}z =$$

$$= \int_{\Delta_n} f(z_0) + \int_{\Delta_n} f'(z_0)(z - z_0)\mathrm{d}z + \int_{\Delta_n} r(z)\mathrm{d}z =$$

$$= 0 + 0 + \int_{\Delta_n} r(z)\mathrm{d}z.$$

A triviális becslés értelmében:

$$\int_{\Delta_n} f(z)\mathrm{d}z \leq M \cdot l(\Delta_n) = \frac{M \cdot l(\Delta_0)}{2^n}.$$

A fentiek alapján az $\omega(z) := \frac{r(z)}{z-z_0}$ jelölést alkalmazva a jobboldal

$$\leq sup|\omega(z)| \cdot diam(\Delta_n) \cdot \frac{l(\Delta_0)}{2^n} \leq sup|\omega(z)| \cdot \frac{l(\Delta_0)^2}{4^n},$$

tehát összességében:

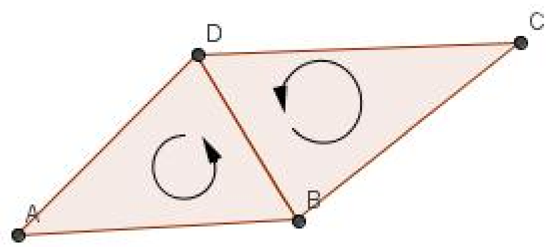
$$\frac{\int_{\Delta_0} f(z)\mathrm{d}z}{4^n} \leq \int_{\Delta_n} f(z)\mathrm{d}z \leq sup|\omega(z)| \cdot \frac{l(\Delta_0)^2}{4^n},$$

vagyis

$$\int_{\Delta_0} f(z)\mathrm{d}z \leq sup|\omega(z)| \cdot l(\Delta_0)^2,$$

ahol $sup|\omega(z)| \to 0$, tehát az integrál valóban 0. □

**5.5.18. Következmény.** *Legyen $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ sokszögvonal, és $f$ legyen reguláris $\varphi[a, b] \cup int\varphi$-ben, ekkor $\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z = 0$.*




*Lényegében arról van szó, hogy a sokszögek előállíthatók háromszögekből, a "fölösleges" élek pedig, mivel két darab háromszögnél integráljuk ellentétes előjellel, ezért a vonalintegrál értékéhez nem járulnak hozzá.*

**5.5.19. Tétel (Cauchy alaptétel).** *Legyen $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ rektifikálható egyszerű zárt görbe, $f$ reguláris a $\varphi[a, b] \cup int\varphi$-ben, ekkor*

$$\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

## 5.6. Fizikai alkalmazások

**5.6.1. Definíció.** *Egy görbe egységnyi idő alatti pozitív irányba történő perdületének mértéket cirkulációnak nevezzük, és Re $\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z$ módon számoljuk.*

**5.6.2. Definíció.** *Az egységnyi idő alatt egy görbe balpartjáról a jobbpartra kiáramló folyadék mennyiségét fluxusnak nevezzük, és értékét a Im $\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z$ formula segítségével határozzuk meg.*

**5.6.3. Definíció.** *Áramvonalnak nevezzük az olyan görbét, melynek bármelyik pontjában vett érintője az ott vett sebességvektor irányába esik.*

**5.6.4. Állítás.** *A $\varphi$ görbe áramvonal akkor és csak akkor, ha minden $\varphi^*$ részgörbéjére*

$$Im \int_{\varphi^*} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

*Ekkor az áramvonalak egyenletei: $Im(F) = c$, ahol $F' = f$.*

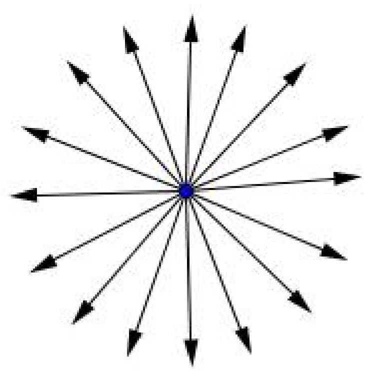
A következő példákban szeretnénk meghatározni az áramvonalakat a fluxus és a cirkuláció segítségével.

**5.6.5. Példa.**

Legyen $f(z) = \frac{1}{z}$, ekkor

$$F(z) = \log z = \log |z| + i \cdot arg(z),$$

tehát $Im(F(z)) = arg(z)$, vagyis az áramvonlak egyenletei: $arg(z) = c$, ahol $c$ konstans.



Itt az áramvonalak nem egyenesek, hanem ellentétes irányú félegyenesek. Ez lényegében egy forrásnak felel meg.

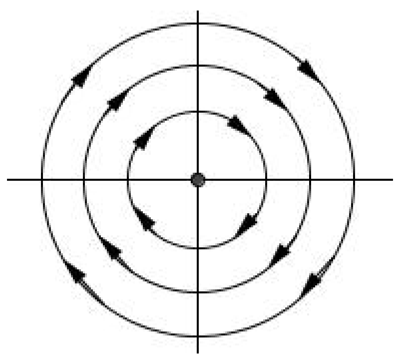
**5.6.6. Példa.**

Legyen $f(z) = \frac{i}{z}$, ekkor

$$F(z) = i \cdot \log z = i \cdot \log |z| - arg(z),$$

vagyis $Im(F(z)) = \log |z|$, tehát az áramvonalak egyenletei: $\log |z| = c$, azaz

$$|z| = e^c = C(\text{konstans})$$



A negatív irányítás abból adódik , hogy a cirkuláció, azaz $Re(F(z))$ negatív.
Ezt nevezzük tiszta örvénynek.

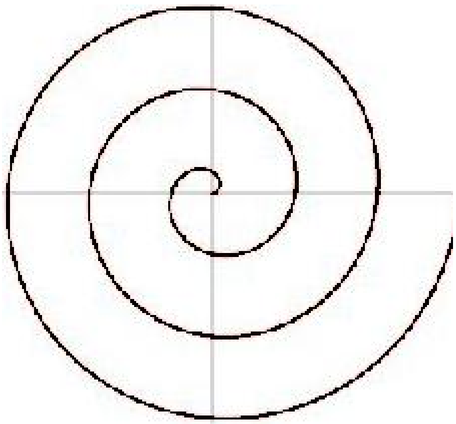
**5.6.7. Példa.**

Legyen $f(z) = \frac{a+bi}{z}$, ekkor

$$F(z) = a + bi \cdot \log z = (a + bi)(\cdot \log |z| + i \cdot arg(z)),$$

tehát $Im(F(z)) = a \cdot arg(z) + b \cdot \log |z|$.
A $|z| := r$, illetve az $arg(z) := \alpha$ jelöléseket alkalmazva:
$Im(F(z)) = a\alpha + b \log r$, tehát az áramvonalak egyenlete $a\alpha + b \log r = c$, amit rendezve azt kapjuk, hogy

$$r = e^{\frac{c}{b}} \cdot e^{\frac{-a}{b}\alpha}, \text{ ahol } e^{\frac{c}{b}} \text{konstans.}$$



Ezt nevezzük a hétköznapi értelmben vett örvénynek.

# 6. fejezet

# Kvaterniók

Mint azt az előzőekben láthattuk, a valós számtest kibővítése egy képzetes résszel hasznosnak bizonyult. Természetesen adódik a kérdés, hogy ha egy ilyen lépéssel sikerült a valóságot jobban megérteni, akkor miért ne tegyünk még egy lépést, vagy akár többet is?

Hamilton volt az, aki úgy gondolta, hogy ha már vannak egy, illetve kétdimenziós számok (valós, és komplex), akkor lehetnek magasabb dimenziósak is. Mivel a komplex számokkal való szorzás a síkon forgatva nyújtásnak felel meg, ő megpróbált olyan számokat keresni, amelyek a térben viselkednek hasonlóan, ezért $a+bi+cj$ alakú számokat keresett, melyekben az első rész valós, míg a másik kettő a komplex számokhoz hasonlóan képzetes.

Hosszas próbálkozások után sem sikerült a komplex számokhoz hasonló számhármasokat találnia; habár összeadni és kivonni tudta őket, a szorzással meggyült a baja.

Végül, egy mára már nevezetessé vált pillanatban 1843.október 16-án, mikor az Ír Királyi Akadémia ülésére sietett, rájött, hogy a probléma megoldását eggyel nagyobb dimenzióban kell keresni, de íróeszköz és papír híján, hogy az ötlet el ne szálljon, felfedezését belevéste a közeli Broom hídba.

A kvaterniók tehát egy valós és három képzetes részből tevődnek össze, vagyis formálisan: $a + bi + cj + dk$ ahol $a, b, c, d$ valós $i, j, k$ pedig a képzetes egységek, melyekre az alábbi összefüggések érvényesek.

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$ij = k,\ jk = i,\ ki = j$$

$$ji = -k,\ kj = -i,\ ik = -j$$

A kvaterniók sok tekintetben hasonlóak a komplex számokhoz, például a kvaterniók is leírhatóak trigonometrikus alakban, azonban egy jelentős gyengülés is fellép, mivel a kvaterniók a szorzásra nézve már nem kommutatívak, így csak ferdetestet, míg a komplex számok testet alkotnak.

A kvaterniókat manapság például robotok vezérlésénél alkalmazzák, vagy térbeli elforgatások leírásánál, ahol így 3x3 as forgatásmátrix helyett jóval egyszerűbb a kvaternió négy komponensét eltárolni.

A kvaterniókhoz hasonlóan léteznek még magasabb dimenziós számok.
Az oktonionok egy valós és hét képzetes részből állnak, de szerkezetileg ezek egyre gyengébbek, a komplex számokhoz viszonyítva már nemcsak a szorzás kommutativitását, de még az asszociativitását is elvesztik.

Tehát, habár a valós számokat érdemes volt komplex számokká bővítenünk, ezt a bővítést mégsem fokozhatjuk a végtelenségig, mert így a számfogalmunk szerkezete gyengül meg.

# 7. fejezet

# Összefoglalás

Dolgozatomban megvizsgáltam, miért volt szüksége a régi idők matematikusainak a komplex számok bevezetésére, illetve, hogy a bevezetés során milyen nehézségekbe ütköztek.

Ezekután megnéztem a komplex számtest alapvető algebrai tulajdonságait, műveleteit, illetve ezek kapcsolatát a reprezentálás különböző módjaival.

Láttunk a komplex számoknak egy geometriai alkalmazását, majd pedig a komplex analízissel ismerkedtünk meg, mely során egy fizikai alkalmazáson, a folyadék áramláson keresztül szemléltettem, hogy miért is elengedhetetlen a komplex számok ismerete.

Végül a számfogalom továbbfejlesztésének lehetőségeit, és ezek következményeit mértem fel.

**Köszönetnyilvánítás:**

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek Fialowski Aliznak, hogy hasznos tanácsaival és segítőkézségével a dolgozat megírása során végig támogatott.

# Irodalomjegyzék


[1] H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel, R. Remmert: *Numbers*, Springer, 1995.

[2] Kiss Emil: *Bevezetés az algebrába*, Typotex, 2007.

[3] I. M. Yaglom: *Complex Numbers in Geometry*, Academic Press, 1968.

[4] Szöllősy Imre: *A rugalmasságról*, Timp, 2004.

[5] Sigray István: *Komplex függvények*, előadásjegyzet, 2011/2012/2.

[6] Farkas Barnabás: *Komplex függvénytan*, online jegyzet, 2007.

[7] Klukovits Lajos: *Algebrai struktúrák*, online jegyzet, 2013.

[8] http://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion

[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Complex_number