Versenyfeladatok a középiskolában

SZAKDOLGOZAT

Készítette: Kallós Dóra

Matematika BSc - elemző szakirány

Témavezető: Fialowski Alice, egyetemi docens

ELTE TTK, Algebra és Számelmélet Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2013

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Dologozatomban számelméleti versenyfeladatokat dolgozok fel. Azért választottam ezt a témát, mert a matematikának a gyakorlati részét szeretem, és egyetemi tanulmányaim alatt is szívesen oldottam meg konkrét feladatokat. Nagy örömmel mélyedtem el ezekben az érdekes példákban, és sokszor meg is lepődtem, hogy milyen sok hasonló feladat lapul a háttérben. Úgy érzem, hogy e feladatok segítségével a számelméleti tudásom is elmélyült és élőbbé vált.

A feladatokat magam oldottam meg, kivéve azokat, ahol ezt külön jeleztem. Először az egyetemi anyag felhasználása nélkül (esetleg többféleképpen), majd az egyetemi anyag felhasználásával oldottam meg őket. A legtöbb feladatot igyekeztem általánosítani, illetve hasonló feladatokat készíteni.

A feladatok megoldása során észrevettem, hogy ha középiskolás módszerekkel szeretnénk megoldani őket, akkor egyedi ötletekre van szükség, amelyek egyes esetekben továbbvihetőek, de az esetek többségében az általánosabb feladatok megoldásánál nem célravezetőek. Speciális ötletek hiányában vagy nem lehet megoldani a feladatokat, vagy csak nagyon sok számolással juthatunk eredményre. Ezzel szemben az egyetemi tanulmányaim során megismertem olyan módszereket, amelyek ezeket a feladatokat új megvilágításba helyezték, és könnyebben megoldhatóvá tették. Ha magasabb szintű matematikát használunk, több feladatnak egy sor általánosítása adódik, illetve hasonló feladatokat tudunk "gyártani".

A szakdolgozat felépítése a következő: Az első fejezetben röviden ismertetem azt az egyetemi anyagot, amit a feladatok megoldása során felhasználok. A második fejezet oszthatósággal és maradékokkal kapcsolatos feladatokat tárgyal. A harmadik fejezetben számjegyes feladatokat gyűjtöttem össze, míg a negyedik fejezetben diofantikus egyenletek a téma. Ahol csak lehetett, ugyanazon az elven alapuló hasonló feladatokat készítettem.

1. Felhasznált definíciók, tételek

1.1. Definíció. [1, 15. oldal]
A b egész számot az a egész szám osztójának nevezzük, ha létezik olyan q egész szám, amelyre $a = bq$.

Jelölés: $b \mid a$

1.1. Tétel. [1, 17. oldal]

- *Minden a-ra $a \mid a$*
- *Ha $c \mid b$ és $b \mid a$, akkor $c \mid a$*
- *Az $a \mid b$ és $b \mid a$ oszthatóságok egyszerre akkor és csak akkor teljesülnek, ha az a b-nek egységszerese.*
- *Ha $c \mid a$ és $c \mid b$, akkor $c \mid a + b$, $c \mid a - b$, tetszőleges (egész) k-ra $c \mid ka$, és tetszőleges (egész) r, s-re $c \mid ra + sb$.*

1.2. Tétel.

- $a - b \mid a^n - b^n$

1.3. Tétel. [1, 29. oldal]
Legyenek a, b, c rögzített egész számok. Az $ax + by = c$ diofantikus egyenletnek akkor és csak akkor létezik megoldása, ha $(a, b) \mid c$.

1.4. Tétel. [1, 42. oldal]
Minden $n > 1$ egész szám felírható

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$$

alakban, ahol $p_1, \dots, p_r$ különböző (pozitív) prímek és $\alpha_i > 0$ egész. Ez a felírás a $p_i^{\alpha_i}$ prímhatványtényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

1.5. Tétel. [1, 43. oldal]
Az

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$$

kanonikus alakú n számnak egy d pozitív egész akkor és csak akkor osztója, ha d kanonikus alakja

$$d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}, \qquad \textit{ahol} \quad 0 \le \beta_i \le \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

1.2. Definíció. [1, 54. oldal]
Legyenek a és b egész számok és m pozitív egész. Azt mondjuk, hogy a kongruens b-vel modulo m, ha $m \mid a - b$.

Jelölés: $a \equiv b \pmod{m}$

1.6. Tétel. [1, 55. oldal]

- *Minden a-ra* $a \equiv a \pmod{m}$
- $a \equiv b \pmod{m} \Longrightarrow b \equiv a \pmod{m}$
- $a \equiv b \pmod{m}, b \equiv c \pmod{m} \Longrightarrow a \equiv c \pmod{m}$
- $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m} \Longrightarrow a + c \equiv b + d \pmod{m}$ *és* $a - c \equiv b - d \pmod{m}$
- $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m} \Longrightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$

1.7. Tétel. [1, 58. oldal]
Legyen $d = (c, m)$. Ekkor

$$ac \equiv bc \pmod{m} \Longleftrightarrow a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}.$$

1.8. Tétel. [1, 58. oldal]

$$ac \equiv bc \pmod{m}, \quad (c, m) = 1 \Longrightarrow a \equiv b \pmod{m}.$$

1.3. Definíció (Euler-féle φ-függvény). [1, 62. oldal]
Tetszőleges n pozitív egész esetén $\varphi(n)$ az $1, 2, \dots, n$ számok közül az n-hez relatív prímek számát jelenti.

1.9. Tétel. [1, 67. oldal]
Legyen n *kanonikus alakja*

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}, \qquad ahol \qquad \alpha_i > 0.$$

Ekkor

$$\varphi(n) = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \dots \left(p_r^{\alpha_r} - p_r^{\alpha_r - 1}\right) = \prod_{i=1}^{r} \left(p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1}\right).$$

1.10. Tétel (Euler-Fermat-tétel). [1, 71. oldal]

$$(a, m) = 1 \Longrightarrow a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

1.11. Tétel (A "kis" Fermat-tétel egyik alakja). [1, 72. oldal]
Ha p *prím és* $(a, p) = 1$*, akkor* $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$*.*

1.12. Tétel (A "kis" Fermat-tétel másik alakja). [1, 72. oldal]
Ha p *prím, akkor bármely* a *egész számra* $a^p \equiv a \pmod{p}$*.*

1.4. Definíció. [1, 74. oldal]
Legyenek a*,* b *egészek és* m *pozitív egész. Ekkor az* $ax \equiv b \pmod{m}$ *kongruenciát lineáris kongruenciának nevezzük, és ennek egy megoldásán olyan* s *egész számot értünk, amelyet az* x *helyére beírva a kongruencia fennáll.*

1.13. Tétel. [1, 75. oldal]
Az $ax \equiv b \pmod{m}$ *kongruenciának akkor és csak akkor létezik megoldása, ha* $(a, m) \mid b$*.*

Megjegyzés: Az $ax \equiv b \pmod{m}$ lineáris kongruencia és az $ax + my = b$ lineáris diofantikus egyenlet kölcsönösen viszavezethetők egymásra.

1.14. Tétel. [1, 76. oldal]
Ha az $ax \equiv b \pmod{m}$ *kongruencia megoldható, akkor a megoldásszáma* (a, m)*.*
Legyen $(a, m) = d$*,* $m = dm_1$*, és tegyük fel, hogy az* s *egész szám (az egyik) megoldása az* $ax \equiv b \pmod{m}$ *kongruenciának. Ekkor az*

$$s, \quad s + m_1, \quad s + 2m_1, \quad \dots, \quad s + (d-1)\, m_1$$

számok páronként inkongruensek modulo m*, kielégítik a kongruenciát, és az összes megoldás ezek valamelyikével kongruens modulo* m*.*

1.5. Definíció. [1, 81. oldal]
Szimultán kongruenciarendszernek azt nevezzük, amikor ugyanarra az ismeretlenre egyidejűleg több, különböző modulus szerinti kongruenciafeltételt is előírunk:

$$f_1(x) \equiv 0 \pmod{m_1}, \quad f_2(x) \equiv 0 \pmod{m_2}, \quad \ldots, \quad f_k(x) \equiv 0 \pmod{m_k},$$

ahol $f_1, \ldots, f_k$ egész együtthatós polinomok.

1.15. Tétel. [1, 82. oldal]
Az

$$\begin{aligned} x &\equiv c_1 \pmod{m_1} \\ x &\equiv c_2 \pmod{m_2} \end{aligned}$$

szimultán kongruenciarendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha

$$(m_1, m_2) \mid c_1 - c_2.$$

Megoldhatóság esetén az összes megoldás egy maradékosztályt alkot modulo $[m_1, m_2]$. Ez más megfogalmazásban azt jelenti, hogy ha az s egész szám a szimultán kongruenciarendszer egy megoldása, akkor az alábbi t értékek adják az összes megoldást:

$$t \equiv s \,(mod\,[m_1, m_2])\,, \quad \textit{azaz} \quad t = s + k[m_1, m_2], \ \textit{ahol } k \ \textit{egész}\ .$$

1.6. Definíció. [1, 334. oldal]
Pell-egyenletnek egy

$$x^2 - my^2 = 1 \tag{1}$$

alakú diofantikus egyenletet nevezünk, ahol az m (rögzített) pozitív egész és nem négyzetszám. Az (1) egyenlet két triviális megoldása $x = \pm 1$, $y = 0$, az ezektől különböző (azaz $y \neq 0$ típusú) megoldások a nemtriviális megoldások.

1.16. Tétel. [1, 334. oldal]
Legyen m olyan pozitív egész, amely nem négyzetszám. Ekkor az (1) *diofantikus egyenletnek végtelen sok megoldása van.*

1.17. Tétel. [1, 337. oldal]
Legyen m olyan pozitív egész, amely nem négyzetszám, és x_0, y_0 az (1) diofantikus egyenletnek az a(z egyértelműen meghatározott) megoldása, amelyre $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ és $x_0 + y_0\sqrt{m}$ minimális. Ekkor az összes megoldást az

$$x + y\sqrt{m} = \pm(x_0 + y_0\sqrt{m})^n, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

képlettel meghatározott x, y egész számpárok adják.

2. Oszthatóság és maradékok meghatározása

2.1. Feladat

Van-e 2000 olyan pozitív egész szám, hogy egyikük sem osztható semelyik másikkal, de bármelyikük négyzete osztható az összes többi számmal?

2.1.1. Megoldás

Legyenek a számok:

$$\begin{aligned}
n_1 &= p_1^2 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_i \cdot \ldots \cdot p_{2000}\\
n_2 &= p_1 \cdot p_2^2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_i \cdot \ldots \cdot p_{2000}\\
n_3 &= p_1 \cdot p_2 \cdot p_3^2 \cdot \ldots \cdot p_i \cdot \ldots \cdot p_{2000}\\
&\vdots\\
n_i &= p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_i^2 \cdot \ldots \cdot p_{2000}\\
&\vdots\\
n_{2000} &= p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_i \cdot \ldots \cdot p_{2000}^2,
\end{aligned}$$

ahol $p_1, \ldots, p_{2000}$ különböző prímek.
Ezek közül a számok közül egyik sem osztható semelyik másikkal. Csak akkor osztható egy szám egy másik számmal, ha az osztó prímtényezős felbontásában ugyanazok a prímek szerepelnek, és a p_i prím legfeljebb akkora hatványon szerepel, mint az osztandóban.
Az állítás másik fele, hogy bármelyikük négyzete osztható az összes többi számmal, igaz, mivel bármelyiküknek vesszük a négyzetét, akkor annak a prímtényezős felbontásában minden prím legalább annyiadik hatványon van, mint a többi számban.
Például:

$$\begin{aligned}
n_1^2 = &\left(p_1^2 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_i \cdot \ldots \cdot p_{2000}\right)^2 = \left(p_1^2 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_i \cdot \ldots \cdot p_{2000}\right) \cdot\\
&\cdot \left(p_1^2 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_i \cdot \ldots \cdot p_{2000}\right)\\
n_1^2 = &\ p_1^4 \cdot p_2^2 \cdot p_3^2 \cdot \ldots \cdot p_i^2 \cdot \ldots \cdot p_{2000}^2
\end{aligned}$$

2.1.2. Általánosítás

Ezt a feladatot többféleképpen is általánosíthatjuk.
A 2000 helyett bármely más $n \geq 2$ pozitív egész szám esetén teljesül az állítás, ha a számokat a fenti módon adjuk meg.

A másik általánosítási lehetőség, ha a négyzetre emelés helyett bármely más $n \geq 2$ pozitív egész kitevőre nézzük a feladatot.

2.2. Feladat

1-től 100 000-ig hány olyan n egész szám van, amelyre n^3+23n többszöröse a 24-nek?

2.2.1. Megoldás

Először maradékok szerinti szétválasztással oldjuk meg a feladatot. 24-gyel osztva a számok $24k, 24k+1, 24k+2, \ldots, 24k+23$ alakúak.
Mindegyiket külön-külön behelyettesítjük az n^3+23n kifejezésbe, és megnézzük, hogy amit így kapunk, osztható-e 24-gyel.

$$\begin{aligned} 24k &\Longrightarrow (24k)^3 + 23 \cdot 24k = 24^3 \cdot k^3 + 23 \cdot 24k \\ 24k \pm 1 &\Longrightarrow (24k \pm 1)^3 + 23 \cdot (24k \pm 1) = (24k)^3 \pm 3 \cdot (24k)^2 + 3 \cdot (24k) \pm \\ &\quad \pm 1 + 23 \cdot 24k \pm 23 \sim \pm 24 \end{aligned}$$

Azokkal a tagokkal, amikben szerepel a 24 mint szorzótényező, nem kell foglalkoznunk, mivel azok biztosan oszthatóak 24-gyel, így ezeket a továbbiakban nem kell kiírni. A többi tagot megnézzük, hogy osztható-e 24-gyel, és ha igen, akkor a számok azon halmaza minden k esetén osztható lesz 24-gyel.

$$\begin{aligned} 24k \pm 2 &\Longrightarrow (24k \pm 2)^3 + 23 \cdot (24k \pm 2) \sim \ldots (\pm 2)^3 + \ldots + 23 \cdot (\pm 2) = \\ &\quad = \pm 8 \pm 46 = \pm 54 \\ 24k \pm 3 &\Longrightarrow (24k \pm 3)^3 + 23 \cdot (24k \pm 3) \sim \ldots (\pm 3)^3 + \ldots + 23 \cdot (\pm 3) = \\ &\quad = \pm 27 \pm 69 = \pm 96 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
24k \pm 4 &\Longrightarrow (24k \pm 4)^3 + 23 \cdot (24k \pm 4) \sim \ldots (\pm 4)^3 + \ldots + 23 \cdot (\pm 4) = \\
&= \pm 64 \pm 92 = \pm 156 \\
24k \pm 5 &\Longrightarrow (24k \pm 5)^3 + 23 \cdot (24k \pm 5) \sim \ldots (\pm 5)^3 + \ldots + 23 \cdot (\pm 5) = \\
&= \pm 125 \pm 115 = \pm 240 \\
24k \pm 6 &\Longrightarrow (24k \pm 6)^3 + 23 \cdot (24k \pm 6) \sim \ldots (\pm 6)^3 + \ldots + 23 \cdot (\pm 6) = \\
&= \pm 216 \pm 138 = \pm 354 \\
24k \pm 7 &\Longrightarrow (24k \pm 7)^3 + 23 \cdot (24k \pm 7) \sim \ldots (\pm 7)^3 + \ldots + 23 \cdot (\pm 7) = \\
&= \pm 343 \pm 161 = \pm 504 \\
24k \pm 8 &\Longrightarrow (24k \pm 8)^3 + 23 \cdot (24k \pm 8) \sim \ldots (\pm 8)^3 + \ldots + 23 \cdot (\pm 8) = \\
&= \pm 512 \pm 184 = \pm 696 \\
24k \pm 9 &\Longrightarrow (24k \pm 9)^3 + 23 \cdot (24k \pm 9) \sim \ldots (\pm 9)^3 + \ldots + 23 \cdot (\pm 9) = \\
&= \pm 729 \pm 207 = \pm 936 \\
24k \pm 10 &\Longrightarrow (24k \pm 10)^3 + 23 \cdot (24k \pm 10) \sim \ldots (\pm 10)^3 + \ldots + 23 \cdot (\pm 10) = \\
&= \pm 1000 \pm 230 = \pm 1230 \\
24k \pm 11 &\Longrightarrow (24k \pm 11)^3 + 23 \cdot (24k \pm 11) \sim \ldots (\pm 11)^3 + \ldots + 23 \cdot (\pm 11) = \\
&= \pm 1331 \pm 253 = \pm 1584 \\
24k \pm 12 &\Longrightarrow (24k \pm 12)^3 + 23 \cdot (24k \pm 12) \sim \ldots (\pm 12)^3 + \ldots + 23 \cdot (\pm 12) = \\
&= \pm 1728 \pm 276 = \pm 2004
\end{aligned}
$$

A $24k$, $24k+1$, $24k+3$, $24k+5$, $24k+7$, $24k+8$, $24k+9$, $24k+11$, $24k+13$, $24k+15$, $24k+16$, $24k+17$, $24k+19$, $24k+21$, $24k+23$ számhalmazok oszthatóak minden k esetén 24-gyel.

Most ezeknek a számát kell meghatározni 1-től 100 000-ig.

$$
\begin{aligned}
1 &\le 24k \le 100\,000 \\
\frac{1}{24} &\le k \le 4166 + \frac{16}{24} \\
k &= 1, 2, \ldots, 4166 = 4166
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
1 &\le 24k + 13 \le 100\,000 \\
-12 &\le 24k \le 99\,987 \\
\frac{-1}{2} &\le k \le 4166 + \frac{3}{24} \\
k &= 0, 1, 2, \ldots, 4166 = 4167
\end{aligned}
$$

$$1 \leq 24k + 1 \leq 100\ 000$$
$$0 \leq 24k \leq 99\ 999$$
$$0 \leq k \leq 4166 + \frac{15}{24}$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, 4166 = 4167$$

$$1 \leq 24k + 3 \leq 100\ 000$$
$$-2 \leq 24k \leq 99\ 997$$
$$\frac{-1}{12} \leq k \leq 4166 + \frac{13}{24}$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, 4166 = 4167$$

$$1 \leq 24k + 5 \leq 100\ 000$$
$$-4 \leq 24k \leq 99\ 995$$
$$\frac{-1}{6} \leq k \leq 4166 + \frac{11}{24}$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, 4166 = 4167$$

$$1 \leq 24k + 7 \leq 100\ 000$$
$$-6 \leq 24k \leq 99\ 993$$
$$\frac{-1}{4} \leq k \leq 4166 + \frac{9}{24}$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, 4166 = 4167$$

$$1 \leq 24k + 8 \leq 100\ 000$$
$$-7 \leq 24k \leq 99\ 992$$
$$\frac{-7}{24} \leq k \leq 4166 + \frac{8}{24}$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, 4166 = 4167$$

$$1 \leq 24k + 15 \leq 100\ 000$$
$$-14 \leq 24k \leq 99\ 985$$
$$\frac{-7}{12} \leq k \leq 4166 + \frac{1}{24}$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, 4166 = 4167$$

$$1 \leq 24k + 16 \leq 100\ 000$$
$$-15 \leq 24k \leq 99984$$
$$\frac{-5}{8} \leq k \leq 4166$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, 4166 = 4167$$

$$1 \leq 24k + 17 \leq 100\ 000$$
$$-16 \leq 24k \leq 99\ 983$$
$$\frac{-2}{3} \leq k \leq 4165 + \frac{23}{24}$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, 4165 = 4166$$

$$1 \leq 24k + 19 \leq 100\ 000$$
$$-18 \leq 24k \leq 99\ 981$$
$$\frac{-3}{4} \leq k \leq 4165 + \frac{21}{24}$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, 4165 = 4166$$

$$1 \leq 24k + 21 \leq 100\ 000$$
$$-20 \leq 24k \leq 99\ 979$$
$$\frac{-5}{6} \leq k \leq 4165 + \frac{19}{24}$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, 4165 = 4166$$

$$\begin{aligned} 1 &\le 24k+9 \le 100\ 000 \\ -8 &\le 24k \le 99\ 991 \\ \frac{-1}{3} &\le k \le 4166+\frac{7}{24} \\ k &= 0,1,2,\ldots,4166 = 4167 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &\le 24k+23 \le 100\ 000 \\ -22 &\le 24k \le 99\ 977 \\ \frac{-11}{12} &\le k \le 4165+\frac{17}{24} \\ k &= 0,1,2,\ldots,4165 = 4166 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &\le 24k+11 \le 100\ 000 \\ -10 &\le 24k \le 99\ 989 \\ \frac{-5}{12} &\le k \le 4166+\frac{5}{24} \\ k &= 0,1,2,\ldots,4166 = 4167 \end{aligned}$$

Összesen tehát $10 \cdot 4167 + 5 \cdot 4166 = 62\ 500$, 24-gyel osztható szám van 1-től 100 000-ig.

2.2.2. Megoldás

Azt kell belátni, hogy $24 \mid n^3+23n$ milyen n-ekre teljesül. Mivel a $24 = 3 \cdot 8$ és $(3,8) = 1$ (azaz relatív prímek), ezért elég, ha külön-külön belátjuk, hogy $3 \mid n^3+23n$ és $8 \mid n^3+23n$ milyen n-ekre teljesül.
Kongruencia segítségével felírható az alábbi:

$$\begin{aligned} n^3+23n &\equiv 0 \pmod 3 \\ n^3+2n &\equiv 0 \pmod 3 \\ n^3-n &\equiv 0 \pmod 3 \\ (n-1)\,n\,(n+1) &\equiv 0 \pmod 3 \end{aligned}$$

3 egymást követő egész szám szorzatát kaptuk, amiből valamelyik tag biztosan osztható 3-mal, ezért az n^3+23n minden n esetén osztható 3-mal. Így ezzel a továbbiakban nem kell foglalkoznunk.

$$
\begin{aligned}
n^3 + 23n &\equiv 0 \pmod 8 \\
n^3 - n &\equiv 0 \pmod 8 \\
(n-1)\, n\, (n+1) &\equiv 0 \pmod 8
\end{aligned}
$$

Ez két esetben lehetséges:

- Ha valamelyik tényező osztható 8-cal. Ekkor az egész szorzat osztható 8-cal. Ekkor

$$
\begin{aligned}
&n = 8k + 1 \quad \text{vagy} \\
&n = 8k \quad \text{vagy} \\
&n = 8k - 1.
\end{aligned}
$$

- Ha valamelyik tényező osztható 2-vel, egy másik tényező pedig 4-gyel. Tehát vagy $4 \mid n-1$ és $2 \mid n+1$ vagy $2 \mid n-1$ és $4 \mid n+1$.
  Ekkor

$$
\begin{aligned}
&n = 4k + 1 \quad \text{vagy} \\
&n = 4k - 1.
\end{aligned}
$$

A $4k+1$ alakú számok halmazában benne vannak a $8k+1$ alakú számok.
A $4k-1$ alakú számok halmazában benne vannak a $8k-1$ alakú számok.
Tehát a $4k+1$, a $4k-1$ és a $8k$ alakú számok esetén teljesül az oszthatóság.
Most ezeket összeszámoljuk 1-től 100 000-ig és megkapjuk a választ a feladatra.

$$
\begin{array}{lll}
1 \le 4k+1 \le 100\,000 & 1 \le 4k-1 \le 100\,000 & 1 \le 8k \le 100\,000 \\
0 \le 4k \le 99\,999 & 2 \le 4k \le 100\,001 & 0,125 \le k \le 12\,500 \\
0 \le k \le 24\,999,75 & 0,5 \le k \le 25\,000,25 & k = 1, 2, \ldots, 12\,500 \\
k = 0, 1, \ldots, 24\,999 & k = 1, 2, \ldots, 25\,000 &
\end{array}
$$

Összesen tehát $25\,000 + 25\,000 + 12\,500 = 62\,500$ olyan n egész szám van, amelyre az $n^3 + 23n$ a 24 többszöröse.

2.3. Feladat

Mutassuk meg, hogy $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 1001 + 1002 \cdot 1003 \cdot \ldots \cdot 2002$ osztható 2003-mal.

2.3.1. Megoldás

[3, megoldása alapján]

Egy szám 2003-mal való osztási maradéka változatlan marad, ha a számból kivonunk 2003-mat. Így az összeg 2003-mal való oszthatósági maradékán nem változtat, ha a második tagjában szereplő minden tényezőből kivonunk 2003-mat. Az így kapott összeg

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 1001 + (-1001) \cdot (-1000) \cdot \ldots \cdot (-1) = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 1001 - 1001 \cdot 1000 \cdot \ldots \cdot 1 = 0,$$

ami osztható 2003-mal, így az eredeti összeg is.

2.3.2. Megoldás

Felírjuk kongruencia segítségével a feladatot.

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 1001 + 1002 \cdot 1003 \cdot \ldots \cdot 2002 &\equiv 0 \pmod{2003} \\ 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 1001 + (-1001) \cdot (-1000) \cdot \ldots \cdot (-1) &\equiv 0 \pmod{2003} \\ 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 1001 - 1001 \cdot 1000 \cdot \ldots \cdot 1 &\equiv 0 \pmod{2003} \end{aligned}$$

Mindkét szorzat ugyanazokból a tényezőkből áll, így a szorzatuk egyenlő, viszont, mivel az előjelük ellentétes, ezért az összegük 0 lesz.

2.3.3. Általánosítás

A feladatot a következőképpen általánosíthatjuk.

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \left(\frac{n-1}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right) + \left(\frac{n-1}{2} + 1\right) \cdot \left(\frac{n-1}{2} + 2\right) \cdot \ldots \cdot (n-1)$$

mindig osztható n-nel, ha n és $\frac{n-1}{2}$ is páratlan.

$$
\begin{aligned}
1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)+\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)&\equiv 0 \pmod n\\
1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)+\left(-\frac{n-1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot(-2)\cdot(-1)&\equiv 0 \pmod n\\
1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)-\left(\frac{n-1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1&\equiv 0 \pmod n
\end{aligned}
$$

A megoldás során azt használtuk ki, hogy a két szorzat ellentétes előjelű, ami csak akkor lehetséges, hogyha páratlan tagból állnak. Tehát az $\frac{n-1}{2}$-nek páratlannak kell lennie. Az $n-1$-nek pedig párosnak kell lennie, hogy a szorzatok ugyananyi tagból álljanak, ebből következik, hogy n páratlan.

2.4. Feladat

Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n esetén $2^{4n}-1$ és $2^{4n}+1$ közül valamelyik osztható 17-tel.

2.4.1. Megoldás

A $2^{4n}-1$-et és a $2^{4n}+1$-et átírhatjuk a következő alakra.
$2^{4n}-1=16^n-1=(17+(-1))^n-1$ és $2^{4n}+1=16^n+1=(17+(-1))^n+1$.
Felhasználjuk a binomiális tételt.

$$
\begin{aligned}
(17+(-1))^n=\binom{n}{0}\cdot 17^n\cdot(-1)^0+\binom{n}{1}\cdot 17^{n-1}\cdot(-1)^1+\ldots+\\
+\binom{n}{n-1}\cdot 17^1\cdot(-1)^{n-1}+\binom{n}{n}\cdot 17^0\cdot(-1)^n
\end{aligned}
$$

Az utolsó tag kivételével mindegyik tag osztható 17-tel.

$$
\binom{n}{n}\cdot 17^0\cdot(-1)^n=(-1)^n
$$

Az eredeti kifejezésbe, a 2^{4n} helyére beírhatjuk a $(-1)^n$, mivel 17-tel osztva ugyanazt a maradékot adják. Ekkor a $2^{4n}+1$ páratlan n esetén, a $2^{4n}-1$ páros n esetén osztható 17-tel.

2.4.2. Megoldás

Azt állítjuk, hogy a $2^{4n}-1$ páros n esetén, a $2^{4n}+1$ pedig páratlan n esetén osztható 17-tel. Ez teljes indukcióval igazolható.

Először a $2^{4n}-1$-ről látjuk be az oszthatóságot. Ekkor $n=2k$ alakú. Tehát

$$2^{4n}-1=2^{4\cdot(2k)}-1=2^{8k}-1$$

Első lépésben megnézzük, hogy $k=1$-re igaz-e az állítás.

$$2^{8k}-1=2^{8}-1=255,\text{ ami osztható 17 -tel .}$$

Második lépésben feltesszük, hogy k-ra igaz az állítás, és belátjuk, hogy akkor $k+1$-re is igaznak kell lennie.
Tehát $2^{8\cdot(k+1)}-1$-nek is oszthatónak kell lennie 17-tel.

$$2^{8\cdot(k+1)}-1=2^{8k+8}-1=2^{8}\cdot 2^{8k}-1=256\cdot 2^{8k}-1$$

Ha 17-tel osztható számokat adunk hozzá a kifejezéshez vagy vonunk ki a kifejezésből, és amit így kapunk, osztható 17-tel, akkor az eredeti kifejezés is osztható 17-tel.
Ennek alapján:

$$256\cdot 2^{8k}-1-255=256\cdot 2^{8k}-256=256\cdot\left(2^{8k}-1\right)$$

Az indukciós feltevés miatt a $2^{8k}-1$ osztható 17-tel, aminek a 256-szorosa is osztható 17-tel. Tehát az állítást igazoltuk.

Most a $2^{4n}+1$-ről látjuk be az oszthatóságot. Ekkor $n=2k+1$ alakú. Tehát

$$2^{4n}+1=2^{4\cdot(2k+1)}+1=2^{8k+4}+1$$

Itt is megnézzük, hogy $k=1$-re igaz-e az állítás.

$$2^{8k+4}+1=2^{8+4}+1,\text{ ami osztható 17-tel .}$$

Most is feltesszük, hogy k-ra igaz az állítás, és belátjuk, hogy akkor $k+1$-re is igaznak kell lennie.
Tehát $2^{8\cdot(k+1)+4}+1$-nek is oszthatónak kell lennie 17-tel.

$$2^{8\cdot(k+1)+4}+1=2^{8k+8+4}+1=256\cdot 2^{8k+4}+1$$

Ismét alkalmazzuk, hogy 17-tel osztható számot adunk hozzá.

$$256 \cdot 2^{8k+4} + 1 = 256 \cdot 2^{8k+4} + 1 + 255 = 256 \cdot 2^{8k+4} + 256 = 256 \cdot \left(2^{8k+4} + 1\right)$$

Az indukciós feltevés miatt a $2^{8k+4} + 1$ osztható 17-tel, aminek a 256-szorosa szintén osztható 17-tel.
Ezzel a két teljes indukciós bizonyítással beláttuk az állításunkat.

2.4.3. Megoldás

Kongruenciával gyorsabban megoldható a feladat. Azt kell belátni, hogy minden n esetén vagy a $16^n - 1 \equiv 0 \pmod{17}$ vagy a $16^n + 1 \equiv 0 \pmod{17}$ teljesül.

$$\begin{array}{ll} 16^n - 1 \equiv 0 \pmod{17} & 16^n + 1 \equiv 0 \pmod{17} \\ (-1)^n - 1 \equiv 0 \pmod{17} & (-1)^n + 1 \equiv 0 \pmod{17} \end{array}$$

Páros n esetén a $16^n - 1 \equiv 0 \pmod{17}$ kongruencia teljesül, tehát a $2^{4n} - 1$ osztható 17-tel.
Páratlan n esetén a $16^n + 1 \equiv 0 \pmod{17}$ kongruencia teljesül, tehát a $2^{4n} + 1$ osztható 17-tel.

2.4.4. Általánosítás

Ennek a feladatnak a mintájára végtelen sok feladat készíthető.
Bármely k esetén, minden pozitív egész n-re, a $(k-1)^n - 1$ és a $(k-1)^n + 1$ közül valamelyik osztható k-val.
Pontosabban, minden k esetén a $(k-1)^n - 1$ páros n esetén osztható k-val, a $(k-1)^n + 1$ pedig páratlan n esetén osztható k-val.
Két teljes indukciós bizonyítással igazolhatjuk az állításunkat.

$(k-1)^n - 1$ páros n esetén osztható k-val, azaz $n = 2l \Rightarrow (k-1)^{2l} - 1$.
Megnézzük $l = 1$-re az állítást.

$$(k-1)^{2 \cdot 1} - 1 = k^2 - 2k + 1 - 1 = k^2 - 2k \text{ , ami osztható k-val}$$

Tegyük fel, hogy az állítás igaz l-re, és bizonyítjuk $l+1$-re.

$$(k-1)^{2(l+1)}-1 \Longrightarrow (k-1)^{2l+2}-1 \Longrightarrow (k-1)^2 \cdot (k-1)^{2l}-1$$

Hozzáadunk $(-k^2+2k)$-t.

$$(k-1)^2 \cdot (k-1)^{2l} - k^2 + 2k - 1 \Longrightarrow (k-1)^2 \cdot (k-1)^{2l} - (k-1)^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (k-1)^2 \cdot \Big((k-1)^{2l}-1\Big)$$

A $(k-1)^{2l}-1$ az indukciós feltétel miatt osztható k-val, aminek a $(k-1)^2$-szerese is osztható k-val.

$(k-1)^n+1$ páratlan n esetén osztható k-val, azaz $n=2l+1 \Rightarrow (k-1)^{2l+1}+1$. Megnézzük $l=1$-re az állítást.

$$(k-1)^{2\cdot 1+1}+1 = (k-1)^3+1 = k^3-3k^2+3k-1+1 = k^3-3k^2+3k,$$

ami osztható k-val

Tegyük fel, hogy az állítás igaz l-re, és bebizonyítjuk, hogy akkor $l+1$-re is igaznak kell lennie.

$$(k-1)^{2\cdot(l+1)+1}+1 \Longrightarrow (k-1)^{2l+2+1}+1 \Longrightarrow (k-1)^2 \cdot (k-1)^{2l+1}+1$$

Hozzáadunk (k^2-2k)-t.

$$(k-1)^2 \cdot (k-1)^{2l+1} + k^2 - 2k + 1 \Longrightarrow (k-1)^2 \cdot (k-1)^{2l+1} + (k-1)^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (k-1)^2 \cdot \Big((k-1)^{2l+1}+1\Big)$$

A $(k-1)^{2l+1}+1$ az indukciós feltétel miatt osztható k-val, aminek a $(k-1)^2$-szerese is osztható k-val.

2.5. Feladat

Osztható-e $20^{2004}+16^{2004}-3^{2004}-1$ 323-mal?

2.5.1. Megoldás

A 323 prímtényezős felbontása $323 = 17^1 \cdot 19^1$. Mivel $(17,19)=1$, azaz relatív prímek, ezért a kifejezés akkor és csak akkor osztható 323-mal, ha 17-tel és 19-cel is osztható.

$$20^{2004} = (19+1)^{2004} \quad \text{és} \quad 16^{2004} = (19-3)^{2004}$$

Ezekre felírjuk a binomiális tételt.

$$(19+1)^{2004} = \binom{2004}{0} \cdot 19^{2004} + \binom{2004}{1} \cdot 19^{2003} + \ldots + \binom{2004}{2003} \cdot 19^{1} + \\ + \binom{2004}{2004} \cdot 19^{0}$$

A kifejezés minden tagja osztható 19-cel, kivéve az utolsó tagot.

$$(19-3)^{2004} = \binom{2004}{0} \cdot 19^{2004} \cdot (-3)^{0} + \binom{2004}{1} \cdot 19^{2003} \cdot (-3)^{1} + \ldots + \\ + \binom{2004}{2003} \cdot 19^{1} \cdot (-3)^{2003} + \binom{2004}{2004} \cdot 19^{0} \cdot (-3)^{2004}$$

Ennek a kifejezésnek is minden tagja osztható 19-cel, kivéve az utolsó tagot.

$$\binom{2004}{2004} \cdot 19^{0} = 1 \quad \text{és} \quad \binom{2004}{2004} \cdot 19^{0} \cdot (-3)^{2004} = (-3)^{2004}$$

Az eredeti kifejezésbe, a 20^{2004} helyett beírhatjuk az 1-et, a 16^{2004} helyett pedig beírhatjuk a $(-3)^{2004}$-t, hiszen 19-cel osztva ugyanazt a maradékot adják.

$$20^{2004} + 16^{2004} - 3^{2004} - 1 \sim 1 + (-3)^{2004} - 3^{2004} - 1$$

Tehát erre teljesül a 19-cel való oszthatóság.

Most másképp írjuk át a kifejezéseket.

$$20^{2004} = (17+3)^{2004} \quad \text{és} \quad 16^{2004} = (17-1)^{2004}$$

Ezekre is felírjuk a binomiális tételt.

$$(17+3)^{2004} = \binom{2004}{0} \cdot 17^{2004} \cdot 3^{0} + \binom{2004}{1} \cdot 17^{2003} \cdot 3^{1} + \ldots + \\ + \binom{2004}{2003} \cdot 17^{1} \cdot 3^{2003} + \binom{2004}{2004} \cdot 17^{0} \cdot 3^{2004}$$

Az utolsó tagot kivéve, a kifejezés minden tagja osztható 17-tel.

$$(17-1)^{2004} = \binom{2004}{0} \cdot 17^{2004} - \binom{2004}{1} \cdot 17^{2003} + \ldots - \binom{2004}{2003} \cdot 17^{1} + \\ + \binom{2004}{2004} \cdot 17^{0}$$

Itt is minden tag osztható 17-tel, kivéve az utolsó tagot.

$$\binom{2004}{2004} \cdot 17^{0} \cdot 3^{2004} = 3^{2004} \quad \text{és} \quad \binom{2004}{2004} \cdot 17^{0} = 1$$

Az eredeti kifejezésbe, a 20^{2004} helyett beírhatjuk a 3^{2004}-ent, a 16^{2004} helyett pedig beírhatjuk az 1-et, hiszen 17-tel osztva ugyanazt a maradékot adják.

$$20^{2004} + 16^{2004} - 3^{2004} - 1 \sim 3^{2004} + 1 - 3^{2004} - 1$$

Erre teljesül a 17-tel való oszthatóság.
Mivel 17-tel és 19-cel is osztható a kifejezés, ezért 323-mal is osztható.

2.5.2. Megoldás

Kongruencia használatával, ennél a feladatnál is gyorsabban jutunk a megoldáshoz.

$$\begin{aligned} 20^{2004} + 16^{2004} - 3^{2004} - 1 &\equiv 0 \pmod{17} \\ 3^{2004} + (-1)^{2004} - 3^{2004} - 1 &\equiv 0 \pmod{17} \\ 0 &\equiv 0 \pmod{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20^{2004} + 16^{2004} - 3^{2004} - 1 &\equiv 0 \pmod{19} \\ 1^{2004} + (-3)^{2004} - 3^{2004} - 1 &\equiv 0 \pmod{19} \\ 0 &\equiv 0 \pmod{19} \end{aligned}$$

Tehát beláttuk, hogy a $20^{2004} + 16^{2004} - 3^{2004} - 1$ osztható 17-tel és 19-cel is, tehát osztható 323-mal.

2.5.3. Általánosítás

A feladatot általánosítani is tudjuk. A megoldások során nem használtuk fel, hogy a kitevő 2004, csak azt használtuk, hogy páros, tehát az állítás igaz minden páros kitevőre, azaz

$$323 \mid 20^{2n} + 16^{2n} - 3^{2n} - 1.$$

2.6. Feladat

Igazoljuk, hogy $7^{2001} - 3^{3335}$ osztható 100-zal.

2.6.1. Megoldás

Ezt kell belátni: $100 \mid 7^{2001} - 3^{3335}$.
Felírjuk a 2001 és a 3335 prímtényezős felbontását.
$2001 = 3^1 \cdot 23^1 \cdot 29^1 = 3 \cdot 667$ és $3335 = 5^1 \cdot 23^1 \cdot 29^1 = 5 \cdot 667$

$$100 \mid 7^{3 \cdot 667} - 3^{5 \cdot 667}$$
$$100 \mid \left(7^3\right)^{667} - \left(3^5\right)^{667}$$
$$100 \mid 343^{667} - 243^{667}$$

Felhasználjuk ezt az azonosságot: $a - b \mid a^n - b^n$, azaz egész kitevőjű hatványok különbsége mindig osztható az alapok különbségével.

$$343 - 243 \mid 343^{667} - 243^{667}$$
$$100 \mid 343^{667} - 243^{667}$$

Tehát a $7^{2001} - 3^{3335}$ osztható 100-zal.

2.6.2. Megoldás

Írjuk fel az állítást kongruencia segítségével.
$7^{2001} - 3^{3335} \equiv 0 \pmod{100}$
Felírjuk a 100 prímtényezős felbontását.

$$100 = 2^2 \cdot 5^2 \Rightarrow 100 = 4 \cdot 25$$

Mivel $(4, 25) = 1$, ezért ez a kifejezés pontosan akkor osztható 100-zal, ha 4-gyel és 25-tel is osztható. Tehát felírhatjuk két külön kongruenciaként.

$$7^{2001} - 3^{3335} \equiv 0 \pmod{4}$$
$$\left(7^3\right)^{667} - \left(3^5\right)^{667} \equiv 0 \pmod{4}$$
$$343^{667} - 243^{667} \equiv 0 \pmod{4}$$
$$3^{667} - 3^{667} \equiv 0 \pmod{4}$$

$$
\begin{aligned}
7^{2001} - 3^{3335} &\equiv 0 \pmod{25} \\
\left(7^3\right)^{667} - \left(3^5\right)^{667} &\equiv 0 \pmod{25} \\
343^{667} - 243^{667} &\equiv 0 \pmod{25} \\
18^{667} - 18^{667} &\equiv 0 \pmod{25}
\end{aligned}
$$

Mindkét esetben a kifejezés kongruens 0-val, tehát a $7^{2001} - 3^{3335}$ osztható 100-zal.

2.6.3. Általánosítás

Ezt a feladatot is általánosíthatjuk, mégpedig úgy, hogy a 2001 helyett bármely $3n$ alakú számot, a 3335 helyett pedig bármely $5n$ alakú számot írhatunk, mivel az így kapott kifejezés mindig osztható 100-zal.
Azaz a $7^{3n} - 3^{5n}$ minden n esetén osztható 100-zal.
Az állításunkat teljes indukcióval igazolhatjuk.
Nézzük meg, $n = 1$-re igaz-e az állítás.

$$7^{3\cdot 1} - 3^{5\cdot 1} = 343 - 243 = 100, \text{ ami osztható 100-zal }.$$

Feltesszük, hogy n-re igaz az állítás. Belátjuk, hogy akkor $n+1$-re is igaznak kell lennie.
$7^{3(n+1)} - 3^{5(n+1)}$-nek oszthatónak kell lennie 100-zal.

$$7^{3(n+1)} - 3^{5(n+1)} = 7^{3n+3} - 3^{5n+5} = 7^3 \cdot 7^{3n} - 3^5 \cdot 3^{5n} = 343 \cdot 7^{3n} - 243 \cdot 3^{5n}$$

Kivonjuk a kifejezés azon részét, ami biztosan osztható 100-zal, és ha a maradékról belátjuk, hogy az is osztható 100-zal, akkor az eredeti kifejezés is osztható 100-zal.

$$43 \cdot 7^{3n} - 43 \cdot 3^{5n} = 43\left(7^{3n} - 3^{5n}\right)$$

Az indukciós feltevés miatt a $7^{3n} - 3^{5n}$ osztható 100-zal, tehát a $43\left(7^{3n} - 3^{5n}\right)$ is osztható 100-zal.
Az állításunkat ezzel igazoltuk.

2.7. Feladat

Legyen $a_n = 5^n + 7^n$ (n pozitív egész). Határozzuk meg a_{1999}-nek a 216-tal való osztásakor kapott maradékát.

2.7.1. Megoldás

Arra vagyunk kíváncsiak, hogy az $5^{1999}+7^{1999}$-nek mennyi a maradéka 216-tal osztva.

Külön-külön átírjuk a megfelelő alakba az 5^{1999}-t és a 7^{1999}-t, hogy utána felírhassuk rájuk a binomiális tételt.

$$5^{1999} = (6-1)^{1999} \text{ és } 7^{1999} = (6+1)^{1999}$$

$$(6-1)^{1999} = \binom{1999}{0} \cdot 6^{1999} - \binom{1999}{1} \cdot 6^{1998} + \ldots + \binom{1999}{1996} \cdot 6^3 - \\ - \binom{1999}{1997} \cdot 6^2 + \binom{1999}{1998} \cdot 6^1 - \binom{1999}{1999} \cdot 6^0$$

Ennek a kifejezésnek az utolsó három tagját kivéve minden tagja osztható 216-tal.

$$(6+1)^{1999} = \binom{1999}{0} \cdot 6^{1999} + \binom{1999}{1} \cdot 6^{1998} + \ldots + \binom{1999}{1996} \cdot 6^3 + \\ + \binom{1999}{1997} \cdot 6^2 + \binom{1999}{1998} \cdot 6^1 + \binom{1999}{1999} \cdot 6^0$$

Ennek a kifejezésnek is az utolsó három tagját kivéve minden tagja osztható 216-tal.

Tehát ezeknek a tagoknak kell nézni a 216-tal való osztási maradékát.

Beírhatjuk őket az eredeti kifejezésbe, hiszen 216-tal osztva ugyanazt a maradékot adják.

$$5^{1999} + 7^{1999} \sim 1999 \cdot 6 + 1999 \cdot 6 \sim 12$$

Azt kaptuk, hogy az $5^{1999} + 7^{1999}$ 216-tal való osztási maradéka 12.

2.7.2. Megoldás

A feladat kongruenciával: $5^{1999} + 7^{1999} \equiv x \pmod{216}$
A $216 = 3^3 \cdot 2^3 = 27 \cdot 8$, és mivel $(27, 8) = 1$, ezért felírhatjuk a következő szimultán kongruenciarendszert.

$$5^{1999} + 7^{1999} \equiv x \pmod{27}$$
$$5^{1999} + 7^{1999} \equiv x \pmod{8}$$

Tekintsük először az $5^{1999} + 7^{1999} \equiv x \pmod{27}$.
Mivel $(5, 27) = 1$ és $(7, 27) = 1$, ezért alkalmazhatjuk az Euler-Fermat-tételt.
Tehát $5^{\varphi(27)} \equiv 1 \pmod{27}$ és $7^{\varphi(27)} \equiv 1 \pmod{27}$, ahol $\varphi(27) = 3^3 - 3^2 = 18$.
Ezeket felhasználva a következő kongruenciát kapjuk:

$$5 \cdot 5^{1998} + 7 \cdot 7^{1998} \equiv x \pmod{27}$$
$$5 \cdot 1 + 7 \cdot 1 \equiv x \pmod{27}$$
$$12 \equiv x \pmod{27}$$

Most tekintsük az $5^{1999} + 7^{1999} \equiv x \pmod{8}$.
Mivel $(5, 8) = 1$ és $(7, 8) = 1$, ezért alkalmazhatjuk az Euler-Fermat-tételt.
Tehát $5^{\varphi(8)} \equiv 1 \pmod{8}$ és $7^{\varphi(8)} \equiv 1 \pmod{8}$, ahol $\varphi(8) = 2^3 - 2^2 = 4$.
Ezeket felhasználva a következő kongruenciát kapjuk:

$$5^3 \cdot 5^{1996} + 7^3 \cdot 7^{1996} \equiv x \pmod{8}$$
$$5^3 \cdot 1 + 7^3 \cdot 1 \equiv x \pmod{8}$$
$$(-3)^3 + (-1)^3 \equiv x \pmod{8}$$
$$4 \equiv x \pmod{8}$$

A $4 \equiv x \pmod{8}$ kongruenciát átírhatjuk $x = 8y + 4$ alakra, amit behelyettesítünk a másik kongruenciába.

$$12 \equiv 8y + 4 \pmod{27}$$
$$8 \equiv 8y \pmod{27}$$
$$1 \equiv y \pmod{27}$$

$y = 27z + 1 \Longrightarrow x = 8 \cdot (27z + 1) + 4 \Longrightarrow x = 216z + 12$
Az $5^{1999} + 7^{1999}$-nek a 216-tal való osztásakor kapott maradéka tehát 12.

3. Számjegyes feladatok

3.1. Feladat

Határozzuk meg azokat a pozitív egész számokat, amelyek 14-szer akkorák, mint a számjegyeik összege.

3.1.1. Megoldás

Nézzük meg, hogy hány jegyűek lehetnek az ilyen számok!

- 1-jegyű: Ez nem lehetséges, mivel ekkor a szám megegyezik a számjegyek összegével.
- 2-jegyű:

$$\begin{aligned} \overline{ab} &= 14\,(a+b) \\ 10a+b &= 14\,(a+b) \\ 10a+b &= 14a+14b \\ 0 &= 4a+13b \end{aligned}$$

  Ez nem lehetséges, mivel a és b pozitív számjegyek.

- 3-jegyű:

$$\begin{aligned} \overline{abc} &= 14\,(a+b+c) \\ 100a+10b+c &= 14\,(a+b+c) \\ 100a+10b+c &= 14a+14b+14c \\ 86a &= 4b+13c \end{aligned}$$

  Az a csak 1 lehet. Ez abból következik, hogy ha a b és c is maximális, azaz 9, akkor $4\cdot 9+13\cdot 9=153$, míg $86\cdot 2$ már 172.
  Tehát meg kell oldanunk a $86=4b+13c$ lineáris diofantikus egyenletet, ami átírható a $4b\equiv 86 \pmod{13}$ lineáris kongruenciára.

$$\begin{aligned} 4b &\equiv 86 \pmod{13} \\ 4b &\equiv 8 \pmod{13} && \text{Mivel } (4,13)=1 \\ b &\equiv 2 \pmod{13} \end{aligned}$$

Mivel $(4, 13) = 1$, ezért megtaláltuk a kongruencia egyetlen megoldását.
Ekkor $86 = 4 \cdot 2 + 13 \cdot c \Longrightarrow c = 6$.
Tehát a szám a 126.

- 4-jegyű: $\overline{abcd} = 14 \cdot (a + b + c + d)$
  Az $\overline{abcd}$ szám legalább 1000, viszont ha az a, b, c, d mind maximális, azaz $9 \Rightarrow 14\,(9 + 9 + 9 + 9) = 504$. Tehát 4 jegyű nem lehetséges, sőt 4-nél több jegyű sem lehet.
  Az egyetlen olyan pozitív egész szám, amely 14-szer akkora, mint a számjegyei összege a 126.

3.2. Feladat

Négy jóbarát észrevette, hogy ha elosztják a könyveik számát a számjegyek összegével, akkor eredményül mind a négyen ugyanazt az egész számot, 13-mat kapják. Bizonyítsuk be, hogy legalább kettejüknek ugyanannyi könyve van.

3.2.1. Megoldás

A feladatot átfogalmazva először is keressük azokat a számokat, amelyek 13-szor akkorák, mint a számjegyeik összege. Meg kell néznünk, hasonlóan az előző feladathoz, hogy hány jegyűek lehetnek ezek a számok.

- 4 vagy annál több jegyű nem lehet a szám.
  Legyen $\overline{abcd} = 13\,(a + b + c + d)$ Egy 4-jegyű szám legalább 1000, viszont ha az összes számjegy értéke a maximális 9, akkor annak a 13-szorosa még mindig csak 468.

- 1-jegyűnél nincs értelme a feladatnak, hiszen egy szám nem lehet egyenlő a 13-szorosával.

- 2-jegyű szám esetén legyen

$$\overline{ab} = 13\,(a + b) \Longrightarrow 0 = 3a + 12b$$

  Mivel a és b pozitív számjegyek, ezért ez nem lehetséges.

- 3-jegyű esetén

$$\overline{abc} = 13\,(a+b+c)$$
$$100a + 10b + c = 13a + 13b + 13c$$
$$87a = 3b + 12c$$

Az a csak 1 lehet, mivel ha b és c is 9, akkor $3 \cdot 9 + 12 \cdot 9 = 135$, míg $87 \cdot 2$ már 174.
Most is egy diofantikus egyenletet kell megoldanunk, amit átírunk lineáris kongruenciává.
$87 = 3b + 12c \Longrightarrow 3b \equiv 87 \pmod{12}$

$$\begin{aligned} 3b &\equiv 87 \pmod{12} \qquad\qquad \text{Mivel } (3,12) = 3 \\ b &\equiv 29 \pmod 4 \\ b &\equiv 1 \pmod 4 \end{aligned}$$

Mivel $(3,12) = 3$, ezért 3 megoldása van a kongruenciának, mégpedig a $b = 1$, $b = 5$ és $b = 9$.

$$87 = 3 \cdot 1 + 12 \cdot c \Longrightarrow c = 7$$
$$87 = 3 \cdot 5 + 12 \cdot c \Longrightarrow c = 6$$
$$87 = 3 \cdot 9 + 12 \cdot c \Longrightarrow c = 5$$

Tehát 3 olyan szám van, amelyek 13-szor akkorák, mint a számjegyeik összege. Ezek a 117, 156 és a 195. Visszatérve az eredeti feladatra, mivel 3 ilyen szám van, amelyek pontosan a könyvek száma, a skatulyaelv szerint, legalább kettejüknek ugyanannyi könyve van.

Megjegyzés

Az előző két feladat ugyanazon az elven alapszik. A mintájukra, a 13 és a 14 változtatásával sok hasonló feladat készíthető.

4. Diofantikus egyenletek

4.1. Feladat

Van-e egész számokból álló megoldása az $x^2 - 2y^2 = 3$ egyenletnek?

4.1.1. Megoldás

Keresünk egy alkalmas modulust, amivel megnézzük az egyenlet két oldalát és ha nem kapunk azonos maradékot, akkor nincs egész megoldása az egyenletnek.
Mivel négyzetszámok vannak az egyenletben, ezért érdemes modulo 8 vizsgálni a feladatot. A négyzetszámok modulo 8 0, 1 vagy 4 maradékot adnak.

$$\begin{aligned} x^2 &\equiv 0 & \qquad -2y^2 &\equiv 0 \\ x^2 &\equiv 1 & \qquad -2y^2 &\equiv -2 \\ x^2 &\equiv 4 & \qquad -2y^2 &\equiv 0 \end{aligned}$$

Ezeket akárhogy próbáljuk összepárosítani, sehogy sem kaphatunk 3-mat. Tehát ennek az egyenletnek nincs egész számokból álló megoldása.

Megjegyzés

Ennek a feladatnak a mintájára nagyon sok hasonló feladat készíthető. Ha olyan egyenletet szeretnénk, aminek nincs megoldása, akkor az egyenlet jobboldalára olyan számot kell írni, ami a baloldallal nem egyezik meg modulo 8.
Ha olyan egyenletet szeretnénk, aminek van megoldása, akkor a jobb oldalon lévő számot úgy kell változtatni, hogy megegyezzen a baloldallal modulo 8.

Az egyenlet baloldalán található együtthatók változtatásával is sok hasonló feladat készíthető. Itt is, aszerint kell változtatni a számokat, hogy az egyenletnek legyen vagy ne legyen megoldása.

4.2. Feladat

Keressük meg az összes olyan derékszögű háromszöget, amelynek oldalai egész számok, és az átfogóhoz 6-ot hozzáadva a befogók összegét kapjuk.

4.2.1. Megoldás

[4, megoldása alapján]

Az átfogót c-vel, a befogókat a, b-vel jelölve a feltétel $a + b = c + 6$.
Ebből kifejezzük c-t $\Longrightarrow c = a + b - 6$.
Felhasználjuk Pitagorasz-tételét: $a^2 + b^2 = c^2$, és ebbe helyettesítjük be a $c = (a + b - 6)$-ot.

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 &= (a + b - 6)^2 \\
a^2 + b^2 &= a^2 + (b - 6)^2 + 2a\,(b - 6) \\
a^2 + b^2 &= a^2 + b^2 + 36 - 12b + 2ab - 12a \\
0 &= 36 - 12b + 2ab - 12a \\
0 &= 18 - 6b + ab - 6a \\
0 &= 18 + (a - 6)\,(b - 6) - 36 \\
18 &= (a - 6)\,(b - 6)
\end{aligned}$$

Most megnézzük, hogy a 18 hogy áll elő két egész szám szorzataként.

$$\begin{aligned}
18 &= 1 \cdot 18 & \qquad 18 &= (-1) \cdot (-18) \\
18 &= 2 \cdot 9 & \qquad 18 &= (-2) \cdot (-9) \\
18 &= 3 \cdot 6 & \qquad 18 &= (-3) \cdot (-6)
\end{aligned}$$

A második három esetben b értéke nem lenne pozitív. A többi esetben a háromszög oldalai: $(7, 24, 25)$, $(8, 15, 17)$ és $(9, 12, 15)$.

4.3. Feladat

A $3+4+5+6 = 3 \cdot 6$; $15+16+17+\ldots+34+35 = 15 \cdot 35$ egyenlőségek azt sugallják, hogy a természetes számokból ki lehet választani néhány egymás követőt úgy, hogy összegük egyenlő a legkisebb és a legnagyobb kiválasztott szám szorzatával. Mutassuk meg, hogy végtelen sok ilyen tulajdonságú sorozat van!

4.3.1. Megoldás

[3, megoldása alapján]

Általánosan felírva a feladatot, olyan $a < b$ pozitív egészeket keresünk, amelyekre teljesül az $a + (a+1) + \ldots + b = ab$ egyenlőség. A számtani sorozat összegképletének segítségével az egyenlőség bal oldalát felírhatjuk a következő alakban:

$$\frac{(a+b)\,(b-a+1)}{2}.$$

$$\frac{(a+b)\,(b-a+1)}{2} = ab$$

$$a^2 + 2ab - b^2 - a - b = 0$$

Ezt felírhatjuk

$$(2a+2b-1)^2 - 8b^2 = 1$$

alakban.
Ha elvégezzük az $x = 2a + 2b - 1$ és $y = b$ helyettesítést, akkor az

$$x^2 - 8y^2 = 1$$

egyenletet kapjuk, ami egy úgynevezett Pell-egyenlet.

Először megkeressük az egyenletnek azt az (x_0, y_0) pozitív egész megoldását, amelyre az $x_0 + y_0\sqrt{8}$ minimális. Ekkor az összes megoldást, az

$$x + y\sqrt{m} = \pm(x_0 + y_0\sqrt{m})^n, \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

képlet segítségével találhatjuk meg.

Az egyenlet azon megoldása, amelyre az $x_0+y_0\sqrt{8}$ minimális, az az $x_0 = 3$, $y_0 = 1$. Ebből a képlet segítségével kapjuk a többi megoldást. Mivel a megoldásszám végtelen, csak néhány szerepel itt.

$$
\begin{aligned}
x + y\sqrt{8} &= \pm(3+1\sqrt{8})^2 = \pm\left(17+6\sqrt{8}\right) && \Longrightarrow x_1 = 17, && y_1 = 6 \\
x + y\sqrt{8} &= \pm(3+1\sqrt{8})^3 = \pm\left(99+35\sqrt{8}\right) && \Longrightarrow x_1 = 99, && y_1 = 35 \\
x + y\sqrt{8} &= \pm(3+1\sqrt{8})^4 = \pm\left(577+204\sqrt{8}\right) && \Longrightarrow x_1 = 577, && y_1 = 204 \\
x + y\sqrt{8} &= \pm(3+1\sqrt{8})^5 = \pm\left(3363+1189\sqrt{8}\right) && \Longrightarrow x_1 = 3363, && y_1 = 1189
\end{aligned}
$$

A Pell-egyenletre kapott (x_n, y_n) megoldásokat visszahelyettesítjük az

$$x = 2a + 2b - 1 \text{ és } y = b$$

kifejezésekbe, és ezzel megkapjuk a feladatunk megoldásait.

$$
\begin{aligned}
&y = b = 6 && x = 17 = 2a + 2b - 1 && \Longrightarrow a = 3 \\
&y = b = 35 && x = 99 = 20 + 2b - 1 && \Longrightarrow a = 15 \\
&y = b = 204 && x = 577 = 2a + 2b - 1 && \Longrightarrow a = 85 \\
&y = b = 1189 && x = 3363 = 2a + 2b - 1 && \Longrightarrow a = 493
\end{aligned}
$$

Az első néhány sorozat legkisebb és legnagyobb tagjai rendre:
$(3, 6)\,, (15, 35)\,, (85, 204)\,, (493, 1189)$
Mivel a Pell-egyenletnek végtelen megoldása van, így az eredeti kifejezésünknek is végtelen megoldása van, tehát végtelen sok ilyen sorozat van.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Fialowski Alice Tanárnőnek, és Pappné Dr. Kovács Katalin Tanárnőnek a támogatásukat, tanácsaikat és hasznos ötleteiket, amivel hozzájárultak a szakdolgozatom elkészüléséhez.

Irodalomjegyzék

[1] Freud Róbert-Gyarmati Edit: *Számelmélet*,
Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2006

[2] Dr.Hegyvári Norbert-Pogáts Ferenc: *Középiskolai matematikai versenyek 1985-1987*,
Tankönyvkiadó, Budapest, 1989

[3] http://www.komal.hu/lap/korabbilapok.h.shtml

[4] http://db.komal.hu/KomalHU/