Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

A mátrixoktól a Turán-típusú tételekig

Szakdolgozat

Készítette: Antal József

Matematika BSc, matematikai elemző szakirány

Témavezető: Fialowski Alice, egyetemi docens

Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest

2013

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **2**

1.1. Alapismeretek 3

1.1.1. Determináns és nyom 3

1.1.2. Az adjungált és a transzponált mátrix 8

1.1.3. Sajátértékek, sajátvektorok, karakterisztikus polinom . 9

1.1.4. Hasonlóság és diagonalizálhatóság 10

1.1.5. Normális mátrixok 11

2. Speciális mátrixok és determinánsaik **13**

2.1. Pozitív mátrixok 13

2.2. Tridiagonális mátrixok 14

2.3. Cauchy-mátrix 15

2.4. Jacobi-mátrix 15

2.5. A Sylvester-mátrix és a rezultáns 16

3. Mátrixfelbontások **17**

3.1. LU-felbontás 17

3.2. Shur-felbontás 18

3.3. QR-felbontás 20

3.4. Poláris és Cartan-felbontás 22

4. A Hoffman-Singleton gráftétel és a Turán-típusú tételek **24**

4.1. Gráfok szomszédsági mátrixa 24

4.2. Hoffman-Singleton gráftétel és hasonló eredmények 25

4.3. Turán-típusú tételek 31

5. Összegzés **35**

1. fejezet

Bevezetés

Dolgozatom célja az algebra és a gráfelmélet néhány összefüggésének feltárása. Főként a gráfelméleti alkalmazások felfedezésével szerettem meg az algebrát és a mátrixokat. A dolgozat első szakaszaiban a lineáris algebra és a mátrixelmélet fontos állításait, tételeit ismertetem. Majd néhány nevezetes mátrixot említek meg, és mátrixfelbontásokat írok le. Végül a mátrixok gráfelméleti alkalmazásait vizsgálom.
Mátrixokkal, illetve azok elődjével már az ősi kínai írásokban találkozhatunk i. e. 300 és i. u. 200 között. A *The Nine Chapters on the Mathematical Art* említi a mátrixokat (lineáris) egyenletrendszerek megoldására. Nézzük, hogy is lehet például egy három ismeretlenes, három egyenletből álló lineáris egyenletrendszert mátrixok segítségével felírni.

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Ezek után több, mint 1000 évvel egy japán matematikus, *Seki* (1683) és a német *Leibniz* (1693) kezd determinánsokkal foglalkozni. 1750-ben a lineáris egyenletrendszerek megolhatóságáról *Cramer* publikál szabályt. A modern matematikában *J. J. Sylvester* (1814-1897) angol matematikus adta meg és használta először a mátrix fogalmát 1850-ben. Továbbá ő vezette be a gráf és a diszkrimináns elnevezéseket is. 1880-ban Sylvester matematikai kutatásaival, többek között a mátrixelmélet megalapozásával elnyerte a Royal Society Copley-medálját.
A mátrix bal felső sarkából induló átlós tengelyt a mátrix *főátló*jának (diagonálisának) nevezzük. A csupa nemnulla elemet tartalmazó mátrixok mellett megkülönböztetünk alsó és felső háromszögmátrixokat, illetve diagonális mátrixokat:

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}.$$

Ebben a dolgozatban csupán a komplex és a valós számokat használjuk. A továbbiakban $\mathbb{C}$ a komplex számok, $\mathbb{R}$ a valós számok testét jelöli, $\mathbb{F}$ pedig egy tetszőleges testet jelent.
A dolgozatban a lineáris algebrai, mátrixelméleti részekhez az [1]-[10]-ig, a gráfelméleti részek során pedig a [9]-[21]-ig terjedő forrásokat használtam.

1.1. Alapismeretek

Mindenekelőtt ismerkedjünk meg a lineáris algebra alapvető és majdhogynem legfontosabb fogalmaival.

1.1.1 Definíció *Legyen V tetszőleges vektortér. A $\mathcal{G} \subseteq V$ vektorhalmazt generátorrendszernek nevezzük, ha minden $v_i \in V$ vektor felírható a $\mathcal{G}$-beli g_i vektorok $\sum \mu_i g_i$ lineáris kombinációjaként. A $\mathcal{B} \subseteq V$ vektorhalmaz bázis, ha elemei minimális elemszámú generátorrendszert (vagy maximális elemszámú független rendszert) alkotnak V-ben. A bázis elemeinek száma a vektortér dimenziója.*

1.1.2 Definíció (Lineáris függetlenség) *Legyen V egy n-dimenziós vektortér az $\mathbb{F}$ test felett, $\mu_i \in \mathbb{F}$. Azt mondjuk, hogy $c_i \in V$ vektorok lineárisan függetlenek, ha abból, hogy a $\sum_{i=0}^{n} \mu_i c_i$ lineáris kombinációjuk 0, következik, hogy $\forall\ \mu_i = 0$.*

1.1.1. Determináns és nyom

A *determináns* a négyzetes, azaz $n \times n$-es mátrixokon értelmezett függvény, $k \times n$-es mátrixok determinánsát nem értelmezzük. A $det(A)$ egy komplex z számot jelöl, $det : \mathbb{C}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{C}$. Jelölése lehet továbbá a $det(a_1, \ldots, a_n)$, amelyben a_i-k a mátrixot felépítő vektorok.

1.1.3 Definíció *Legyen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, ekkor*

$$det(A) = \sum_{\pi} sgn(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \ldots a_{n\pi(n)},$$

ahol π az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz előjeles permutációja.

1.1.1 Példa $det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$

A determináns alapvető tulajdonságai közül megemlítjük:

- $det(A) = 0 \iff$ a mátrixot felépítő a_i oszlop- vagy sorvektorok lineárisan összefüggők;
- a determináns a mátrixot felépítő a_i oszlop- illetve sorvektorok multilineáris függvénye;
- $det(I) = det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = 1.$

Mint a komplex számoknak a reciprokát, a nem nulla determinánsú, négyzetes mátrixoknak is értelmezzük a multiplikatív *inverz*ét, A^{-1}-et, melyre teljesül, hogy A-val vett szorzata az egységmátrix (az *identitás*). Azt a négyzetes mátrixot, melynek létezik inverze, *invertálható*nak mondjuk. A $k \times n$-es mátrixok esetén is számíthatunk valamiféle inverzet, mégpedig a *Moore-Penrose féle általánosított inverz*et (ezt csak a következő szakaszban definiálom). Most nézzük a négyzetes mátrixok inverzét.

1.1.4 Definíció *Legyen* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ *és* $det(A) \neq 0$. *Ekkor az* A *mátrix inverzét a következőképp definiálhatjuk:*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{det(A)} & -\frac{A_{21}}{det(A)} & \frac{A_{31}}{det(A)} & \dots \\ -\frac{A_{12}}{det(A)} & \frac{A_{22}}{det(A)} & -\frac{A_{32}}{det(A)} & \dots \\ \frac{A_{13}}{det(A)} & -\frac{A_{23}}{det(A)} & \frac{A_{33}}{det(A)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

melyben A_{ij} *jelöli az* i*-edik sor és* j*-edik oszlop elhagyásával keletkező, az* a_{ij}*-hez tartozó* $(n-1) \times (n-1)$*-es aldeterminánst. Erre teljesül, hogy* $AA^{-1} =$ $= A^{-1}A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$.
A mátrix inverzekre továbbá az

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

azonosság teljesül. Mivel a mátrixszorzás asszociatív (tetszőlegesen átzárójelezhető) és $(AB)^{-1}AB = B^{-1}A^{-1}AB$, *tehát* $I = I$ *igaz, az azonosság helyes.*

A fenti definícióból következik, hogy egy négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha determinánsa nem nulla. Az ilyen mátrixokat *reguláris*, vagy *nemszinguláris* mátrixoknak hívjuk. A nulla determinánsú mátrixokat *szinguláris*nak nevezzük. Az alábbiakban a determináns kiszámítására ismertetek néhány módszert.

1.1.1 Állítás (Sarrus-szabály) *Legyen* $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$*, ekkor*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}).$$

1.1.1 Tétel (Kifejtési tétel) *Legyen* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$*, ekkor tetszőleges* $1 \le j \le n$*-re*

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij},$$

ahol A_{ij} *szintén az* i*-edik sor és* j*-edik oszlop elhagyásával keletkező, az* a_{ij}*-hez tartozó* $(n-1)\times(n-1)$*-es aldeterminánst jelöli.*

1.1.1 Következmény *A háromszögmátrixok determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.*

1.1.2 Tétel (Determinánsok szorzástétele) *Legyen* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *és* $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$*, ekkor*

$$det(AB) = det(A)det(B).$$

1.1.2 Következmény *A tételből következik, hogy* $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$*.*

A *Cauchy-Binet formula* a determinánsok szorzástételének hasznos és rendkívül elegáns általánosítása, melynek a következő bizonyítása már gráfelméleti eszközökhöz nyúl.

1.1.3 Tétel (Cauchy-Binet formula) *Legyen* $A \in \mathbb{C}^{p\times q}$ *és* $B \in \mathbb{C}^{q\times p}$ $(p \le q)$*, ekkor*

$$det(AB) = \sum det(A_k)det(B_k),$$

ahol A_k *az* A *mátrix oszlopainak,* B_k *a* B *mátrix sorainak azonos indexű tagjaiból képzett* $p\times p$*-es mátrixokat jelölik.*

1.1.2 Példa $\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}.$

A Cauchy-Binet formula bizonyításához először igazolunk egy lemmát, azonban a lemma értelmezéséhez még szükségünk lesz néhány fogalomra.
Egy $G = (V, E)$ objektumot *gráf* nak hívunk, melyben V a csúcsok és E az élek halmazát jelöli. A gráf csúcsai valamilyen módon össze vannak kötve az

élekkel és minden él legfeljebb két különböző csúcsot köt össze. Egy *út* a gráfban éleknek olyan sorozata, melyben az élek végpontja (az utolsó él kivételével) megegyezik az őt követő él kezdőpontjával, és bármely csúcs pontosan egyszer szerepel benne. Az egy csúcsot, illetve élet többször is felhasználó utat *sétá*nak nevezzük. Egy gráf i *hosszú kör*, ha csupán egy i hosszú útból áll, melynek kezdő- és végpontja azonos. Ezeket az i hosszú köröket C_i jelöli. Például, ha egy háromszöget rajzolunk, az egy C_3 kör. Egy $G = (A, B, E)$ gráf *páros* (*bigráf*), amelyben $V = A \cup B$, azaz csúcsai két osztályba sorolhatók, és csak az osztályok között futnak élek. Egy gráf *súlyozott*, ha adva van mellé egy $\omega : E \longrightarrow \mathbb{R}$ leképezés és így az e él súlya $\omega(e)$. Ellenkező esetben *súlyozatlan.* A G súlyozott gráfban egy p út súlya a benne szereplő élek súlyának összege:

$$\omega(p) = \sum_{e \in p} \omega(e).$$

A gráf *irányított* (*digráf*), ha élei egy irányba haladnak, vagyis szomszédnak lenni nem szimmetrikus reláció.
Egy $\mathcal{P}$ úthalmaz útrendszer a G gráfban, ha a benne szereplő utak G minden csúcsát lefedik. A $\mathcal{P}$ útrendszer csúcsdiszjunkt, ha a benne szereplő utaknak páronként nincs közös pontjuk. A $\mathcal{P}$ útrendszer súlyának szorzata:

$$\omega(\mathcal{P}) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \omega(p).$$

Legyen $P = (R, C, E)$ irányított páros gráf, melyben r_i és c_j között fut él, ha létezik G-ben r_i-ből c_j-be vezető, irányított p út. Amennyiben G-ben r_i-ből c_j-be vezet út, a P-beli, r_i-ből c_j-be vezető él súlyát a következőképpen definiáljuk:

$$\omega(r_i c_j) = \sum_{p: r_i \to c_j \in G} \prod_{e \in p} \omega(e).$$

A $\mathcal{P}$ csúcsdiszjunkt útrendszer a P páros gráfban, ha ott a benne szereplő utak teljes párosítást adnak, azaz minden pontot pontosan egy út fed le. Ebben az útrendszerben mindegyik út egy élből áll. A $\mathcal{P}$ előjele, $sgn\mathcal{P} = (-1)^k$, ha a $\mathcal{P}$ útrendszerben k irányított út keresztezi egymást. Itt térünk át mátrixokra, mert az R-ből C-be menő útmátrix m_{ij}-edik eleme a P-beli r_i-ből c_j-be vezető irányított út súlya ($m_{ij} = \omega(r_i c_j)$).

1.1.1 Lemma (Gessel-Vienot) *Legyen $G = (V, E)$ irányított, aciklikus (nem tartalmaz irányított kört), súlyozott gráf. Továbbá legyen $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ és $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ két n elemű halmaz, melyekre $R \cup C \subseteq V$ teljesül. Ekkor az R-ből C-be menő M útmátrixra a*

$$det(M) = \sum_{\mathcal{P}} sgn\mathcal{P}\omega(\mathcal{P})$$

egyenlőség áll fenn, ahol $\mathcal{P}$-k az R-ből C-be menő csúcsdiszjunkt útrendszerek.

A lemma bizonyítása:
Definíció szerint a $det(M)$ determináns összeadandóinak egy tagja

$$sgn(\pi) m_{1\pi(1)} m_{2\pi(2)} \dots m_{n\pi(n)},$$

amely $m_{ij} = \omega(r_i c_j)$ miatt átírható

$$sgn(\pi)\omega(r_1 c_{\pi(1)})\omega(r_2 c_{\pi(2)}) \dots \omega(r_n c_{\pi(n)})$$

formába. Világos, hogy $\omega(r_1 c_{\pi(1)})\omega(r_2 c_{\pi(2)}) \dots \omega(r_n c_{\pi(n)})$ egy-egy nem feltétlenül csúcsdiszjunkt útrendszer súlya. Ezeket a tagokat összegezve majdnem be is láttuk a formulát. Azt kell csupán megmutatni, hogy a nem csúcsdiszjunkt $\mathcal{P}'$ útrendszerekre teljesül, hogy

$$\sum_{\mathcal{P}'} sgn\mathcal{P}'\omega(\mathcal{P}') = 0.$$

Ha $\mathcal{P}'$ nem csúcsdiszjunkt útrendszer, biztos van benne két út, amelyek legalább egy ponton metszik egymást. Legyen L a G-beli, a nem csúcsdiszjunkt útrendszerek halmazán értelmezett transzformáció, melyre $L\mathcal{P}$ az az útrendszer, amelynek útjai a p utak kezdőpontjaiból a p élein haladnak az út első, egy másik s úttal való kereszteződéséig, majd s élein mennek tovább. Látható, hogy $L(L\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ teljesül. Az eredeti és a módosított utak is ugyanazokat az éleket használják, tehát $\omega(L\mathcal{P}) = \omega(\mathcal{P})$. Továbbá, a módosítással a π permutációt egy inverzióval (indexcsere) szoroztuk meg, előjele így (-1)-szeresére változik. Ezen feltételek mellett érthető, hogy nem csúcsdiszjunkt útrendszerekre fennáll a fenti egyenlőség. Tehát a $\mathcal{P}$ csúcsdiszjunkt útrendszerekre

$$det(M) = \sum_{\mathcal{P}} sgn\mathcal{P}\omega(\mathcal{P}),$$

és ezzel a lemmát beláttuk.

□

A Cauchy-Binet formula bizonyítása:
Legyen $P = (R, C, E_1)$ A-ra, $Q = (C, D, E_2)$ pedig B-re, mint útmátrixra illeszkedő két irányított, páros gráf. Vagyis például az $r_i c_j$ él súlya a_{ij}. Ekkor az R-ből D-be menő $S = AB$ útmátrixra

$$s_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}.$$

Tehát azonos indexű oszlopokat, illetve sorokat választva az A és B mátrixból az $r_i c_k d_j$ utakat kapjuk, melyekre a Gessel-Vienot lemmát alkalmazva, a Cauchy-Binet formula bizonyítást nyer.

□

Itt ejtek még szót a *nyom*ról is, amely a determináns mellett szintén a négyzetes mátrixok függvénye. Jele $tr(A)$.

1.1.5 Definíció *$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ nyomát a következőképpen definiáljuk:*

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

1.1.3 Következmény $tr(AB) = tr(BA)$.

1.1.2. Az adjungált és a transzponált mátrix

A mátrixok körében jelentős szerepe van az *adjungálás*nak, mint egyváltozós (unér) műveletnek. Komplex elemű mátrixok esetén beszélünk adjungáltról, vagy más néven *hermitikus transzponált*ról. Jelölése leggyakrabban A^*, esetleg A^H. A $\overline{z}$ a z komplex szám *komplex konjugált*ja, melyben a képzetes rész előjelet vált. Például: $\overline{x+yi} = x - yi$.

1.1.6 Definíció *Legyen* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *ekkor*

$$A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \cdots \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Továbbá a $k \times n$-es mátrixok adjungáltját is definiáljuk, ekkor egy $n \times k$-as mátrix az eredmény. Ilymódon számíthatjuk ki egy $k \times n$-es mátrix négyzetes *metszetmátrix*át, A^*A-t. A már említett Moore-Penrose féle általánosított inverz számításához is a metszetmátrixot használjuk, és azt mondjuk, hogy a $k \times n$-es mátrix inverze $(A^*A)^{-1}A^* = A^{-1}(A^*)^{-1}A^*$.
Egy valós szám komplex konjugáltja önmaga, ezért valós elemű mátrixok esetében adjungálás helyett *transzponálunk*, ami a sorokat és oszlopokat felcseréli. Jelölése A^T.

1.1.7 Definíció *Legyen* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *ekkor*

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots \\ a_{12} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

1.1.3. Sajátértékek, sajátvektorok, karakterisztikus polinom

Minden A mátrix, mint leképezés hat egy x vektorra, melynek eredménye az Ax vektor. A sajátértékek, sajátvektorok azokat a skalárokat, vektorokat jelentik, amelyek ezt a hatást képesek helyettesíteni, tehát kielégítik az

$$Au = \lambda u$$

egyenletet, ahol λ egy *sajátérték* és u a hozzá tartozó *sajátvektor*. A sajátértékeket is csak négyzetes mátrixokra értelmezzük. Ha $k \times n$-es mátrixszal dolgozunk, *szinguláris értékek*ről beszélhetünk, melyek az A^*A négyzetes mátrix sajátértékeinek gyökeit jelentik. Egy $n \times n$-es mátrixnak legfeljebb n - különböző - sajátértéke lehet, és multiplicitással pontosan n.

1.1.8 Definíció *A $det(A - \lambda I) = 0$ polinomot az A mátrix karakterisztikus polinomjának nevezzük. A karakterisztikus polinom gyökei a λ_i sajátértékek.*

1.1.4 Tétel *Legyenek az A invertálható mátrix λ_i sajátértékei $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ és $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n$ a σ_i szinguláris értékei. Ekkor teljesülnek az alábbiak:*

$$\prod_{i=1}^{m} |\lambda_i| \leq \prod_{i=1}^{m} \sigma_i \qquad \forall \quad m \leq n \text{ esetén, és}$$
$$\sum_{i=1}^{k} |\lambda_i|^s \leq \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^s \qquad \forall \quad k \leq n, s > 0 \text{ esetén.}$$

1.1.2 Lemma *Egy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.*

A sajátértékek halmaza az A mátrix *spektrum*a. Az A mátrix legnagyobb abszolút értékű sajátértékének abszolút értékét az A mátrix *spektrálsugarának* nevezzük és $\rho(A)$-val jelöljük, tehát $\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$.

1.1.2 Állítás (Neumann-sor) *Legyen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix $\lambda_i \in \mathbb{R}$ sajátértékekkel. Amennyiben $\rho(A) < 1$, igaz a következő:*

$$\sum_{i=0}^{\infty} A^i = (I - A)^{-1}.$$

1.1.3 Állítás *Legyenek λ_i-k az A mátrix sajátértékei. Ekkor a következőket állíthatjuk:*

$$det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i, \qquad tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

1.1.4. Hasonlóság és diagonalizálhatóság

Ahhoz, hogy mátrixok hasonlóságát értelmezhessük, szükségünk lesz a vektortér *bázis*ára. Egy mátrix sokféle alakban felírható más és más bázisban.

1.1.9 Definíció *Azt mondjuk, hogy az $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix hasonló a $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixhoz, ha $\exists$ olyan S invertálható mátrix, melyre $A = SBS^{-1}$.*

A fenti definícióban szereplő S mátrixot *bázisáttérési mátrix*nak nevezzük. Például minden mátrix hasonló önmagához a *standard bázis*ban:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Az egyszerűség kedvéért csak a kétdimenziós esetet illusztráltuk. Ez esetben a standard bázis az $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektor alkotta vektorrendszer.

1.1.10 Definíció *Egy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixot diagonalizálhatónak nevezünk, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz.*

1.1.5 Tétel *Egy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ akkor és csak akkor diagonalizálható, ha n lineárisan független sajátvektora van.*

A *spekrálfelbontás*ban a mátrix sajátvektorai képezik a megfelelő bázist.

1.1.6 Tétel (Spektrálfelbontás) *Legyenek λ_i-k az A mátrix n különböző sajátértékei. Ekkor A hasonló a következő diagonális mátrixhoz:*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ha az A mátrix nem rendelkezik n darab különböző sajátértékkel, a *Jordan-normálforma* ad egy A-hoz hasonló mátrixot.

1.1.7 Tétel (Jordan) *Minden $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix hasonló egy*

$$J = \bigoplus_i J_i = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & J_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & J_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \text{ mátrixhoz,}$$

ahol $\forall$ J_i *egy* $\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$ *alakú négyzetes Jordan-blokk. Az i-edik Jordan-blokk mérete az i-edik sajátérték multiplicitásával számolt $k \times k$-es mátrix. Az így keletkezett J mátrixot az A mátrix Jordan-normálformájának nevezzük.*

Egy bázis lehet továbbá *ortogonális* és *ortonormált*. Ortogonális bázisban minden vektor merőleges egymásra, azaz páronkénti skalárszorzatuk nulla. A skalárszorzat jele $\langle a, b\rangle$. Az $\mathbb{R}$-beli skalárszorzat a benne szereplő vektorok azonos indexű koordinátáinak szorzatösszege ($a^T b$), a $\mathbb{C}$-beli skalárszorzatban pedig az első vektor elemeinek konjugáltjait véve képezzük a szorzatösszeget ($a^* b$). Az ortonormált bázisban a vektorok ortogonálisak és 1 hosszúak. A vektor hossza a koordinátái a négyzetösszegének a gyöke (*euklidészi vektornorma*), jele $||a||$. A standard bázis ortonormált.

1.1.5. Normális mátrixok

A mátrixok között megkülönböztetett szerepük van a *normális mátrix*oknak.

1.1.11 Definíció *Egy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix normális, ha $AA^* = A^*A$.*

1.1.8 Tétel *Minden $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normális mátrix a sajátvektoraiból álló ortonormált bázisban diagonalizálható.*

Az alábbiakban további háromféle mátrixszal és főbb tulajdonságaikkal ismerkedünk meg.

1.1.12 Definíció *Legyen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix. Az A mátrix önadjungált (hermitikus), ha $A^* = A$ (Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $A^T = A$, A szimmetrikus).*

1.1.4 Állítás (Önadjungált mátrixok jellemzése) *$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ önadjungált $\iff$ A normális és $\forall$ sajátértéke valós.*

1.1.9 Tétel (Főtengelytétel) *Minden $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix összes sajátértéke valós.*

A sajátértékek ismeretében meghatározhatjuk az önadjungált mátrixok karakterét.
Legyen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ önadjungált mátrix. Ekkor:

- Az A mátrix *pozitív definit*, ha $\forall$ sajátértéke pozitív;
- Az A mátrix *negatív definit*, ha $\forall$ sajátértéke negatív;
- Az A mátrix *pozitív szemidefinit*, ha $\forall$ sajátértéke ≥ 0 és sajátértéke a 0 is;
- Az A mátrix *negatív szemidefinit*, ha $\forall$ sajátértéke ≤ 0 és sajátértéke a 0 is;
- Az A mátrix minden más esetben *indefinit*.

1.1.13 Definíció *Legyen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix. Az A mátrix ferdén önadjungált, ha $A^* = -A$ (Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $A^T = -A$, A ferdén szimmetrikus).*

1.1.14 Definíció *Legyen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix. Az A mátrix unitér, ha $A^* = A^{-1}$ (Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $A^T = A^{-1}$, A ortogonális).*

1.1.5 Állítás (Unitér mátrixok jellemzése) *Az alábbiak ekvivalensek:*

i. *$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitér;*

ii. *A skalárszorzattartó;*

iii. *A normatartó;*

iv. *A távolságtartó;*

v. *$\forall$ unitér Q mátrix esetén AQ unitér;*

vi. *A normális és $\forall$ sajátértéke abszolút értékben 1.*

1.1.10 Tétel *Minden $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonális mátrix hasonló egy*

$$B = \bigoplus_i B_i = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & B_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & B_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \text{ mátrixhoz,}$$

ahol $B_i = \pm 1$, vagy $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ alakú α-szögű forgatásmátrix.

Az unitér mátrixoknak nemcsak oszlop-, de sorvektorai is ortonormáltak. Könnyen látható, hogy mindhárom fent említett mátrix normális.

2. fejezet

Speciális mátrixok és determinánsaik

Ebben a fejezetben olyan mátrixokat mutatok be, melyek különlegesek és alkalmazásaik is ismertek. Természetesen nem az összeset, csak néhányat.

2.1. Pozitív mátrixok

Ez az elnevezés sajnos nem teljesen egyértelmű a matematikában. Gyakran *elemenként pozitív* és *pozitív definit mátrixok*at is nevezünk így. Az első esetben talán népszerűbb elnevezés a *nemnegatív mátrix*, bár ez se teljesen egyértelmű. Ebben a dolgozatban a pozitív definit mátrixokat említjük egyszerűen pozitív mátrixokként.
Egy $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix bal felső elemével kezdődő $i \times i$-s mátrixot az A mátrix *i-edik minormátrix*ának hívjuk. Az i-edik minormátrix determinánsa az A mátrix *i-edik főminor*ja ($i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$).

2.1.1 Tétel (Sylvester-féle kritérium) *Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix akkor és csak akkor pozitív definit, ha szimmetrikus és $\forall$ főminorja pozitív.*

2.1.2 Tétel *Legyen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ önadjungált mátrix. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

i. A pozitív (szemi)definit;

ii. A $\forall$ sajátértéke és determinánsa nemnegatív;

iii. λ_i sajátértékei és σ_i szinguláris értékei megegyeznek;

iv. $\exists$ egy pozitív (szemi)definit $\sqrt{A}$ mátrix, melyre $(\sqrt{A})^2 = A$;

v. $\exists$ olyan B mátrix, melyre $B^*B = A$.

2.1.1 Állítás *Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix pozitív definit, ha $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ esetén $x^T A x > 0$.*

2.2. Tridiagonális mátrixok

Mielőtt rátérnénk a *tridiagonális mátrix*ok tárgyalására, ismerkedjünk meg a *Hessenberg-mátrix*okkal. Ezek a mátrixok a „majdnem" háromszögmátrixok.
Egy tetszőleges $n \times n$-es mátrix diagonálisa alatti átlókat a diagonálistól lefele számolva a mátrix *i-edik szubdiagonális*ának hívjuk, a diagonális felettieket a diagonálistól felfele számolva pedig a mátrix *i-edik szuperdiagonális*ának($i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$). Az alsó és felső Hessenberg-mátrixok olyan háromszögmátrixok, melyeknek még az első szuper-, illetve szubdiagonálisában is nemnulla elemek vannak.

2.2.1 Definíció *Egy $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ négyzetes mátrixot tridiagonálisnak nevezünk, ha a következő alakban írható fel (alsó és felső Hessenberg-mátrix egyben):*

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix},$$

azaz $a_{ij} = 0$, ha $|i-j| > 1$.

Általában *szalagmátrix*oknak hívjuk azokat a $n \times n$-es mátrixokat, melyekre $|i-j| < c$, $c \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ esetén $a_{ij} \neq 0$ teljesül és minden más esetben $a_{ij} = 0$. A továbbiakban a tridiagonális mátrixok determinánsának kiszámítására adunk egy formulát.
Legyen $a_1, a_2, \ldots$ tetszőleges sorozat. A sorozat *n-edik kontinuáns*át $C(n)$ jelöli. A kontinuánsokat rekurzív módon számíthatjuk ki a következőképpen:

$$\begin{aligned} C(0) &= 1 \\ C(1) &= a_1 \\ &\vdots \\ C(n) &= a_n C(n-1) + C(n-2). \end{aligned}$$

Legyenek továbbá $b_1, b_2, \ldots$ és $c_1, c_2, \ldots$ is sorozatok. Ezen három sorozat *n-edik együttes kontinuáns*át $C^{\triangle}(n)$ jelöli. Ezeket a kontinuánsokat rekurzióval adhatjuk meg:

$$\begin{aligned} C^{\triangle}(0) &= 1 \\ C^{\triangle}(1) &= a_1 \\ &\vdots \\ C^{\triangle}(n) &= a_n C^{\triangle}(n-1) - b_{n-1} c_{n-1} C^{\triangle}(n-2). \end{aligned}$$

A három sorozat együttes kontinuánsai a tridiagonális mátrix determinánsaihoz vezetnek.

2.2.1 Állítás *Egy tridiagonális mátrix n-edik minormátrixának determinánsa a mátrix bal fölső sarkából a jobb alsó sarkába vezető elemeinek, mint sorozatoknak az n-edik együttes kontinuánsa, azaz $det(A) = C^{\triangle}(n)$.*

2.3. Cauchy-mátrix

Vannak olyan négyzetes mátrixok, melyeknek egy konkrét képlettel ki lehet számítani a determinánsát. Ilyen például a *Cauchy-mátrix*.

2.3.1 Definíció *Legyenek $a_1, \dots, a_n$ és $b_1, \dots, b_n$ $2n$ darab skalár. Azt a négyzetes mátrixot, melynek elemei:*

$$c_{ij} = (a_i + b_j)^{-1} = \tfrac{1}{a_i+b_j},$$

Cauchy-mátrixnak nevezzük.

2.3.1 Állítás *A Cauchy-mátrix determinánsa a*

$$det(C) = \frac{\prod_{i>j}(a_i-a_j)(b_i-b_j)}{\prod_{i,j}(a_i+b_j)}$$

képlettel számítható ki.

2.4. Jacobi-mátrix

A *Jacobi-mátrix* az analízisben a többváltozós, vektorértékű függvények parciális deriváltjainak tárolására szolgál.

2.4.1 Definíció *Legyen $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$ egy $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ leképezés. A következő $m \times n$-es mátrixot az f leképezéshez tartozó Jacobi-mátrixnak nevezzük:*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Amennyiben $n = m$, Jacobi-determinánst is értelmezhetünk.

Az f függvényhez tartozó Jacobi-mátrix jelölése J_f. Amennyiben J_f invertálható, akkor $det(J_f)$ Jacobi-determinánsnak az integráltranszformációnál van jelentős szerepe. Az alábbi képletben $f(x)$ egy tetszőleges többváltozós függvényt, míg g egy többváltozós, vektorértékű függvényt jelöl.

$$\int_{g(T)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod_i dx_i = \int_T f(g(t_1, t_2, \dots, t_n))|det(J_g)| \prod_i dt_i$$

2.5. A Sylvester-mátrix és a rezultáns

Két polinom *Sylvester-mátrix*a azt mutatja meg, hogy a két polinomnak van-e közös osztója. Ez a mátrix tulajdonképpen egy homogén lineáris egyenletrendszer együttható mátrixa.

2.5.1 Definíció *Legyenek* $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *és* $g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ *polinomok, melyekre* $a_n, b_n \neq 0$. *Az alábbi* $(n+m)\times(n+m)$*-es mátrixot az* $f(x)$ *és* $g(x)$ *polinomok Sylvester-mátrixának nevezzük.*

$$S(f,g) = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & a_n & \dots & \dots & \dots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_1 & b_0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & b_m & \dots & \dots & \dots & b_0 \end{pmatrix}.$$

A Sylvester-mátrix determinánsa a *rezultáns.* Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomok rezultánsát $R(f,g)$ jelöli. Amennyiben két polinom rezultánsa 0, a fent említett egyenletrendszernek létezik pontosan egy, nemnulla megoldása, és a két polinomnak van közös osztója. Ha a két polinom rezultánsa nem 0, nincs közös osztójuk.

2.5.1 Állítás *Az* $f(x)$ *polinom diszkriminánsa kifejezhető* $f(x)$ *és* $f'(x)$ *rezultánsával:*

$$D(f) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{a_n} R(f,f').$$

2.5.1 Példa *Legyen* $f(x) = ax^2+bx+c$. *Az* $f(x)$ *és* $f'(x)$ *Sylvester-mátrixa:*

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{pmatrix},$$

melynek determinánsa, azaz az $f(x)$ *és* $f'(x)$ *polinomok rezultánsa:*

$$R(f,f') = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{vmatrix} = ab^2 - 2a(b^2-2ac) = ab^2 - 2ab^2 + 4a^2c =$$
$$= 4a^2c - ab^2 = -a(b^2-4ac).$$

Tehát $f(x)$ *diszkriminánsa a képletünk szerint* $D(f) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{a_n} R(f,f') =$ $= \frac{-1}{a}(-a)(b^2-4ac) = b^2-4ac.$

3. fejezet

Mátrixfelbontások

A következőkben mátrixfelbontásokat ismerhetünk meg, melyek segítséget nyújthatnak például lineáris egyeletrendszerek megoldásában, illetve a mátrix determinánsa vagy inverze kiszámításában is.

3.1. LU-felbontás

Az *LU-felbontás* vagy *Gauss-féle felbontás* a mátrix háromszögmátrixok szorzataként történő felírását jelenti.

3.1.1 Definíció (LU-felbontás) *Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix*

$$A = LU$$

alakú felbontását az A mátrix LU-felbontásának nevezzük, melyben L egy alsó háromszögmátrix egyesekből álló főátlóval, U pedig egy felső háromszögmátrix, az A mátrix Gauss-eliminált alakja.

3.1.1 Példa *Tekintsük az* $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 7 & 11 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ *mátrixot. Ez egy* szimmetrikus, pozitív definit mátrix *a 2.1.1-es tétel alapján. Készítsük el az LU-felbontását!*

Először is a mátrix Gauss-eliminált felső háromszögmátrix alakját kell felírnunk. Ehhez vonjuk ki a mátrix második sorából az első $\frac{7}{5}$-szörösét, a harmadikból a $\frac{3}{5}$-szörösét, majd a harmadikhoz adjuk hozzá a második $\frac{11}{6}$-szorosát:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 7 & 11 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 0 & 11 - \frac{49}{5} & 2 - \frac{21}{5} \\ 0 & 2 - \frac{21}{5} & 6 - \frac{9}{5} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 0 & \frac{6}{5} & -\frac{11}{5} \\ 0 & -\frac{11}{5} + \frac{11}{5} & \frac{21}{5} + (-\frac{121}{30}) \end{pmatrix}.$$

Így tehát kiszámoltuk, hogy $U = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 0 & \frac{6}{5} & -\frac{11}{5} \\ 0 & 0 & \frac{5}{30} \end{pmatrix}$.
Az L mátrix elkészítéséhez csupán a felhasznált együtthatókat kell alsó háromszögmátrixba rendeznünk. A $\frac{7}{5}$-öt és a $\frac{3}{5}$-öt pozitív, míg a $\frac{11}{6}$-ot negatív előjellel látjuk el:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{7}{5} & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & -\frac{11}{6} & 1 \end{pmatrix}.$$

3.1.1 Állítás *Amennyiben A determinánsa nem nulla és létezik LU-felbontása, akkor az egyértelmű.*

3.1.2 Állítás *Ha A-nak $i = 1, \dots, n-1$-re minden i-edik főminorja nem nulla, akkor létezik LU-felbontása.*

3.1.1 Tétel *Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak létezik egyértelmű LU-felbontása, amennyiben A összes főminorja nem nulla.*

3.2. Shur-felbontás

A *Shur-felbontás* a mátrix sajátvektoraiból képzett ortonormált bázisban kívánja felírni a mátrixot.

3.2.1 Tétel (Shur-felbontás) *Minden* A *komplex elemű, négyzetes mátrix felbontható*

$$A = QTQ^*$$

alakra, ahol Q unitér, T pedig felső háromszögmátrix. A T mátrix akkor és csak akkor diagonális, ha A normális.

Ahhoz, hogy ezt a bázist megtaláljuk, a *Gram-Schmidt eljárás*t használjuk, mellyel a mátrix sajátvektorait ortonormalizáljuk.
Jelölje az ortonormalizálni kívánt vektorokat (jelen esetben a mátrix sajátvektorait) a_i, és a belőlük készített ortonormált vektorokat q_i. Ekkor a q_i vektorok kiszámítására az alábbi képlet használható:

$$q_i = \frac{a_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle q_k, a_i \rangle q_k}{||a_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle q_k, a_i \rangle q_k||}.$$

3.2.1 Példa *Legyen* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Keressük meg a Shur-felbontását!*
Számítsuk ki A karakterisztikus polinomját, sajátértékeit és sajátvektorait

(a szóban forgó determinánst a harmadik sor szerint fejtjük ki):

$$det(A-xI) = \begin{vmatrix} 2-x & 1 & -1 \\ 1 & 2-x & 3 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)((2-x)^2-1) = (1-x)^2(3-x).$$

A sajátértékek tehát: $3, 1, 1$. *Nézzük a sajátvektorokat!*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel 1 *az* A *kétszeres sajátértéke, a hozzá tartozó második sajátvektort a* $(A-\lambda I)u_{i+1} = u_i$ *képlettel számíthatjuk ki, amelyben* λ *a többszörös sajátérték, és* u_i *az eredetileg hozzá tartozó sajátvektor:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Így a három sajátvektor: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. *A sajátvektorok ortonormáltjai a* $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *vektorok, ez a Gram-Schmidt ejárással könnyen ellenőrizhető. Ez nem más, mint a* Q *mátrix.*

Végül nincs más dolgunk, csak kiszámítani a T *mátrixot, amit a* $T = Q^*AQ$ *képlettel tehetjük meg.*

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A tétel bizonyítása:

A bizonyítás során két esetet vizsgálunk.

Ha A normális, akkor n különböző sajátvektora független, sőt ortonormált rendszert is alkot. Ezért, ha az u_i sajátvektorokból képezzük az U mátrixot, teljesül rá a következő:

$$AU = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Mivel U unitér, ebből látható, hogy jobbról szorozva az adjungáltjával, megkapjuk az A Shur-felbontását. Tehát amennyiben A normális, létezik Shur-felbontása.
Ha A nem normális, biztosan létezik legalább egy λ sajátértéke. Erre igaz:

$$Aq = \lambda q.$$

Egészítsük ki a q sajátvektort $q, q_2, \ldots, q_n$ ortonormált rendszerré. Ezen vektorokat tegyük a Q mátrixba:

$$AQ = (\lambda q \;\; c_1 \;\; \ldots \;\; c_n)$$
$$Q^*AQ = \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{b} \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

A továbbiakban megmutatjuk, hogy ha C-nek létezik Shur-felbontása, akkor A-nak is, és ezzel tételünk bizonyítást nyer. Tegyük fel, hogy RTR^* a C Shur-felbontása. Legyen

$$K = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ekkor: } K^*AK = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^* \end{pmatrix} Q^*AQ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$
$$K^*AK = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{b} \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$
$$K^*AK = \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{b}R \\ 0 & R^*CR \end{pmatrix}.$$

Mivel $R^*CR = T$ felső háromszögmátrix, ezért K^*AK is az, ebből következően A-nak is létezik Shur-felbontása. Így a tételt teljes indukcióval beláttuk.

□

3.3. QR-felbontás

A QR-felbontás vagy Gram-féle felbontás a mátrix oszlopvektorait ortonormalizálja, így egyszerűsítve a mátrixszal való számolást.

3.3.1 Tétel (QR-felbontás) *Legyen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertálható mátrix. Az A mátrix felírható*

$$A = QR$$

alakban, melyben Q egy $n \times n$-es unitér mátrix, R pedig egy felső háromszögmátrix, pozitív főátlóbeli elemekkel.

3.3.2 Tétel (Általános QR-felbontás) *Egy $A \in \mathbb{C}^{p\times q}$ mátrixnak, melynek q darab oszlopa lineárisan független, van*

$$A = QR$$

felbontása, melyben Q egy $p \times q$-as izometrikus mátrix, azaz $Q^*Q = I$, R pedig egy négyzetes felső háromszögmátrix pozitív főátlóbeli elemekkel. A QR-felbontás mindig egyértelmű.

3.3.1 Példa *Legyen* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ *mátrix. Keressük meg az általános QR-felbontását!*
A Q mátrix előállításához, melyre $Q^*Q = I$-nek kell teljesülnie, ortonormalizálnunk kell az A mátrix oszlopait. Vagyis azt kell elérnünk, hogy páronként legyenek merőlegesek és mindegyiknek 1 legyen a hossza. Erre a Gram-Schmidt eljárás ad egy alternatívát (a q_i oszlopvektor az A i-edik oszlopának normáltja):

$$q_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

$$q_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$q_2 = \frac{q_2'}{||q_2||} = \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Ezek alapján ki tudjuk számolni q_3-at is. Így tehát

$$Q = (q_1 \;\; q_2 \;\; q_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Az R mátrixban az eljárás során felhasznált együtthatókat tároljuk, a főátlóban euklidészi vektornormák jelennek meg: $R = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

3.4. Poláris és Cartan-felbontás

Minden z komplex szám felírható $z = |z|e^{i\psi}$ (*exponenciális alak*) formában, melyben $0 \leq \psi < 2\pi$. Ha $z = x + yi$, akkor $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ennek a mátrixokra történő kiterjesztése a *poláris felbontás*.

3.4.1 Tétel (Poláris felbontás) *Tetszőleges A négyzetes, komplex mátrix felírható*

$$A = SU$$

alakban, ahol S önadjungált pozitív szemidefinit, U pedig unitér mátrix. Amennyiben A invertálható, poláris felbontása egyértelmű.

A fent szereplő $A = SU$ alakot a mátrix bal oldali poláris felbontásának hívjuk. Az $A = US$ jobb oldali felbontást pedig akár a QR-febontáshoz hasonlíthatjuk. Az $A = S_1U_1$ és $A = U_2S_2$ poláris felbontásokban $S_1 = S_2$ pontosan akkor, ha A normális.

3.4.1 Példa *Tekinsük az $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrixot. Keressük meg a poláris felbontását!*
Számoljuk ki az AA^* pozitív szemidefinit mátrixot: $AA^* = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, és sajátértékeit: $9, 4$. Az AA^* mátrix sajátértékeinek gyökei lesznek S mátrix sajátértékei. Szükségünk lesz még az AA^* sajátvektoraira: $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. Az S mátrixot a következőképpen kaphatjuk meg:

$$S \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{14}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{11}{10} \end{pmatrix}.$$

Miután kiszámítottuk S-et, U-t is megkaphatjuk:

$$U = S^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

A tétel bizonyítása:
Tegyük fel, hogy $A = SU$, ekkor $AA^* = SUU^*S^* = S^2$, így szükségszerűen $S = \sqrt{AA^*}$. Mivel $S^2 = AA^*$ pozitív szemidefinit, ezért létezik egy megfelelő, szintén pozitív szemidefinit $\sqrt{AA^*}$ mátrix. Továbbá, ha $S^2 = AA^*$, akkor $S^{-1}A = S(A^*)^{-1} = U$ és $UU^* = S^{-1}AA^{-1}S^* = S^{-1}S^* = I$ azaz U unitér.

□

3.4.2 Tétel (Cartan-felbontás) *Bármely A négyzetes, komplex mátrix felírható*

$$A = K_1 D K_2$$

alakban, ahol K_1 és K_2 unitér, D pedig egy diagonális mátrix.

Bizonyítás:
Tegyük fel, hogy $A = SU$ az A mátrix poláris felbontása. Mivel S önadjungált, az $S = K_1 D K_1^*$ Shur-felbontásban D diagonális mátrix. Beírva ezt az A mátrix poláris felbontásába, azt kapjuk, hogy $A = K_1 D K_1^* U$, melyben $K_1^* U$ is unitér.

□

4. fejezet

A Hoffman-Singleton gráftétel és a Turán-típusú tételek

Az utolsó fejezetben néhány érdekes gráfelméleti eredményt mutatok be. A gráfelmélet a 20. században kialakult kutatási terület. Számtalan alapvető eredménye magyar matematikusok nevéhez kapcsolható, azonban mostanára már szinte az egész világon elterjedt. Például a későbbiek folyamán ismertetendő *fokszám-átmérő problémá*val egy ausztrál kutatócsoport is foglalkozik. Elevenítsünk fel néhány gráfelméleti alapfogalmat. Egy $G = (V, E)$ gráfban megkülönböztetünk *egyszeres*, *párhuzamos* és *hurokél*eket. Az egyszeres él minden esetben két különböző csúcshoz kapcsolódik, van egy kezdő- és egy végpontja. Ha két csúcsot egynél több él köt össze, azok párhuzamos élek. A hurokél olyan él, melynek kezdő- és végpontja ugyanaz a csúcs. A csúcs *fokszám*át az adja, hogy hány él illeszkedik a csúcsra. A gráf *d-reguláris*, ha minden csúcsának foka d. *Összefüggő* a gráf, ha bármely két csúcsa között létezik út. Egy G gráf *részgráf*ként tartalmaz egy H gráfot, ha a H csúcs- és élhalmaza is részhalmaza a G csúcs- és élhalmazának. A G gráf *teljes*, ha $|V(G)| = i$ és minden csúcs között fut él. Ezeket K_i jelöli. Az i csúcsú teljes gráfok $(i-1)$-regulárisak.

4.1. Gráfok szomszédsági mátrixa

Mióta megjelentek a számítógépek, egyre nagyobb és nagyobb gráfok váltak kezelhetővé a matematikában. Ezért fontos kérdéssé vált, hogyan lehetne ezeket hatékonyan tárolni és programokat futtatni rajtuk. E kérdésekre ad alternatívát a *szomszédsági mátrix*.

4.1.1 Definíció (Adjacencia mátrix) *Legyen $G = (V, E)$ tetszőleges súlyozatlan gráf. Azt az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot, melyre $n = |V(G)|$, azaz a gráf csúcsainak száma, és*

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ha } i \neq j \text{ és az } i\text{-edik és } j\text{-edik csúcs között nem fut él;} \\ p & \text{ha } i \neq j \text{ és az } i\text{-edik és } j\text{-edik csúcs között } p \text{ darab párhuzamos él fut;} \\ q & \text{ha } i = j \text{ és az } i\text{-edik csúcsra } q \text{ darab hurokél illeszkedik,} \end{cases}$$

a G gráf adjacencia vagy szomszédsági mátrixának nevezzzük.

Könnyen meggondolható, hogy egy irányítatlan gráf szomszédsági mátrixa mindig szimmetrikus, illetve, hogy egy *egyszerű gráf* (amely összefüggő, nem tartalmaz párhuzamos és hurokéleket) mátrixa csupán egyesekből és nullákból áll, csupa nullával a főátlóban. Az adjacencia mátrix sajátértékeinek halmazát a *gráf spektrumá*nak hívjuk.
Ez a mátrix tulajdonképpen a gráf csúcsai közti 1 hosszú utak számát tárolja.

4.1.1 Tétel *Jelölje $\zeta_k(i \to j)$ a G gráf i-edik csúcsából a j-edik csúcsába vezető k hosszú séták számát! Ekkor*

$$\zeta_k(i \to j) = (A^k)_{ij},$$

azaz a k hosszú séták száma megegyezik G szomszédsági mátrixa k-adik hatványának megfelelő indexű elemével.

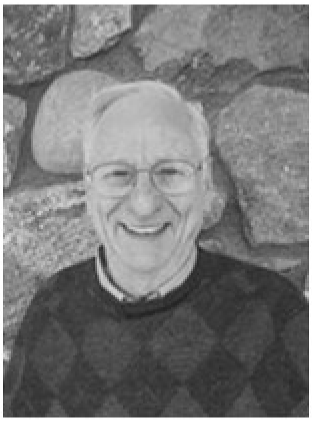
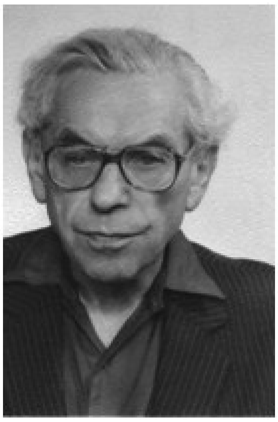
Bizonyítás:
Először tekintsük a $k = 2$ esetet. Ekkor A^2 elemei $\sum_t a_{it}a_{tj}$ alakúak, ahol a t-edik összeadandó 1, ha i, t és j egy 2 hosszú sétát feszít ki i és j között, különben 0. Vagyis A^2 elemei az i és j között futó sétákat számolják össze. Most tegyük fel, hogy az állítás $k+1$-re is igaz, tehát $\zeta_{k+1}(i \to j) = A^{k+1} = A^k A$. Ez pedig igaz, mivel A^{k+1} elemei azokat a k hosszú sétákat számolják össze, melyek egy éllel kiegészítve i-ből j-be vezetnek.

$\square$

4.1.1 Következmény *Egy G egyszerű gráfban található három hosszú körök (háromszögek) száma $\frac{tr(A^3)}{6}$, ahol A a G gráf szomszédsági mátrixa.*

4.2. Hoffman-Singleton gráftétel és hasonló eredmények

A következő alfejezetekben ismertetett eredmények többé-kevésbé három jelentős matematikushoz kapcsolódnak, akik mind a 20. század második felében tevékenykedtek.


Ők (balról jobbra) A. J. Hoffmann, Erdős Pál és Turán Pál. Ezek az emberek többek között a gráfelmélet alapjait tették le.
Elsőként az úgynevezett *fokszám-átmérő problémát* mutatom be.

4.2.1 Definíció *Egy $G = (V, E)$ összefüggő gráf átmérője az a legkisebb k szám, melyre bármely két csúcs között $\exists$ legfeljebb k hosszú út.*

A gráfok átmérője mellett definiálunk még egy hasonló gráfparamétert, a *girth*-t (a magyar nyelvben *bőség* vagy *kerület* néven szokás említeni). Egy gráfnak g a girth-e, ha a legrövidebb benne megtalálható kör C_g. Így például C_i girth-e i, átmérője $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$. A girth paraméterrel lehet megadni a *cage* típusú gráfokat. Ezek a gráfok d-regulárisak, jelölésük $cage(d, g)$.
A fokszám-átmérő problémában az a cél, hogy maximalizáljuk a gráf csúcsainak számát adott d maximális fokszám és k-as átmérő esetén. Az így kapott gráfokat (d, k)-*gráf*oknak nevezzük. Edward F. Moore vetette fel ezt a problémát, és ezzel kapcsolatban az első jelentős eredményt is ő alkotta meg, bár csak 1960-ban Hoffman és doktorandusza, R. R. Singleton nevezték el Moore-ról ezt az állítást, és a gráfok egy csoportját.

4.2.1 Állítás (Moore-féle korlát) *Legyen G egy k átmérőjű gráf d maximális fokszámmal, azaz van olyan csúcsa, melynek foka d. Ekkor*

$$|V(G)| \leq 1 + d \sum_{i=0}^{k-1} (d-1)^i,$$

azaz csúcsainak száma felülről becsülhető. A fenti egyenlőtlenségben egyenlőség csak d-reguláris gráf esetén állhat fenn.

4.2.2 Definíció (Moore-gráf) *Amennyiben egy G egyszerű gráf*

i. d-reguláris, k átmérőjű és

ii. $1 + d\sum_{i=0}^{k-1}(d-1)^i$ csúcsa van,

Moore-gráfnak hívjuk. Azt a feltételt, hogy k-as átmérője legyen, helyettesíthetjük azzal, hogy legyen $2k+1$ a girth-e. Ezeket a gráfokat $M(d,k)$-val (vagy cage$(d, 2k+1)$-el) jelöljük.

Vizsgáljuk meg a k átmérőjű, $M(2,k)$ Moore-gráfokat! Ebben a speciális esetben, mivel $d = 2$,

$$|V(G)| = 1 + 2\sum_{i=0}^{k-1}(2-1)^i = 1 + 2k.$$

Láthatjuk, hogy ez a szám megegyezik a Moore-gráfok girth-ével. Ebből arra következtethetünk, hogy $M(2,k)$ a páratlan köröket jelöli. Tehát például minden C_{2i+1} 2-reguláris Moore-gráf. A C_{2i+1} gráf girth-e $2i+1$. A d rögzítésével nem korlátozható túlságosan a Moore-gráfok száma, már $M(2,k)$-ra is végtelen sok esetet kapunk.
Izgalmasabb kérdés az átmérő hosszát rögzíteni és úgy vizsgálódni. Ekkor $M(d,2)$-re már meglepő eredményeket kapunk.

4.2.1 Tétel (Hoffman-Singleton, 1960) *$M(d,2)$-re csak $d \in \{2,3,7,57\}$ esetén létezhet gráf, $d \in \{2,3,7\}$-re pedig egyértelműen létezik.*

Bizonyítás:
Csak a tétel első részét bizonyítjuk, az egyértelmű létezést nem.
Legyen G egy 2 átmérőjű Moore-gráf. Csúcsainak száma így: $|V(G)| = n = d^2+1$. Mivel G d-reguláris, szomszédsági mátrixa minden sorában és oszlopában pontosan d darab egyes szerepel. Nem nehéz meggondolni, hogy ha G tartalmazna háromszöget (C_3-at), legfeljebb $1+d+(d-2)(d-1)+2(d-2) = d^2-1$ csúcsa lehet. Hasonlóan, ha G tartalmazna négyszöget (C_4-et), legfeljebb $1+d+(d-1)(d-1)+(d-2) = d^2$ csúcsa lehet. Vagyis nem tartalmazhat se három-, se négyszöget. Az ötszög már nem zárható ki, mert az garantálja a 2-es átmérőt, úgy is mondhatjuk, hogy G girth-e 5.
A továbbiakban legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a G szomszédsági mátrixa, ekkor A^2 főátlójában mindenhol d van. Mivel G nem tartalmaz négyszöget, az A^2 mátrix a főátlóján kívül csupán nullákat és egyeseket tartalmaz, ráadásul, pont ott van benne egyes, ahol A-ban nulla és fordítva. Ezért felírható az alábbi egyenlőség, melyben J a csupa egyesből álló mátrixot jelöli:

$$A^2 + A - (d-1)I = J.$$

Vegyük észre, hogy J sajátértékei kifejezhetők A sajátértékeivel. A J sajátértékeit ismerjük, az n egyszeres, a 0 $(n-1)$-szeres sajátértéke, azaz A sajátértékei a $\lambda^2+\lambda-(d-1)=n=d^2+1$ és a $\lambda^2+\lambda-(d-1)=0$ egyenletek gyökei. Az első egyenlet egy esetben teljesül, ha $\lambda=d$. Az A mátrix többi, $n-1$ sajátértéke a $\lambda_1=\frac{-1+\sqrt{4d-3}}{2}$ vagy a $\lambda_2=\frac{-1-\sqrt{4d-3}}{2}$ alakot ölti. Jelölje λ_1 multiplicitását m_1, λ_2-ét pedig m_2. Tudjuk, hogy $m_1+m_2=n-1=d^2$. Mivel A nyoma 0, sajátértékeinek összege is 0, tehát:

$$m_1\frac{-1+\sqrt{4d-3}}{2}+m_2\frac{-1-\sqrt{4d-3}}{2}+d=0$$
$$\frac{(m_1-m_2)\sqrt{4d-3}}{2}-\frac{m_1+m_2}{2}+d=0.$$

Világos, hogy ha $\sqrt{4d-3}$ irracionális, csak $m_1=m_2$ esetén teljesülhet az egyenlőség. Ebben az esetben $d=\frac{d^2}{2}$, azaz $d=0$ vagy $d=2$. Nyilván $d=0$-ra d-reguláris, 2 átmérőjű gráf nincsen, de a $d=2$-re már van (ez C_5).
Most tegyük fel, hogy $\sqrt{4d-3}$ racionális, egész szám. Legyen $\sqrt{4d-3}=s$, ekkor $d=\frac{s^2+3}{4}$. Helyettesítsük ezt egyenletünkbe:

$$\frac{(m_1-m_2)s}{2}-\frac{\left(\frac{s^2+3}{4}\right)^2}{2}+\frac{s^2+3}{4}=0$$
$$-s^4+2s^2+16s(m_1-m_2)+15=0.$$

Az utolsó egyenletből következik, hogy s-nek osztania kell 15-öt. Vagyis, ha:

$$\begin{array}{rll} s=1, & \text{akkor} & d=1, \text{ de 1-reguláris, 2 átmérőjű gráf nincs,} \\ s=3, & \text{akkor} & d=3, \\ s=5, & \text{akkor} & d=7, \\ s=15, & \text{akkor} & d=57. \end{array}$$

Ezzel beláttuk, hogy 2 átmérőjű Moore-gráf csak $d\in\{2,3,7,57\}$ esetén létezhet.

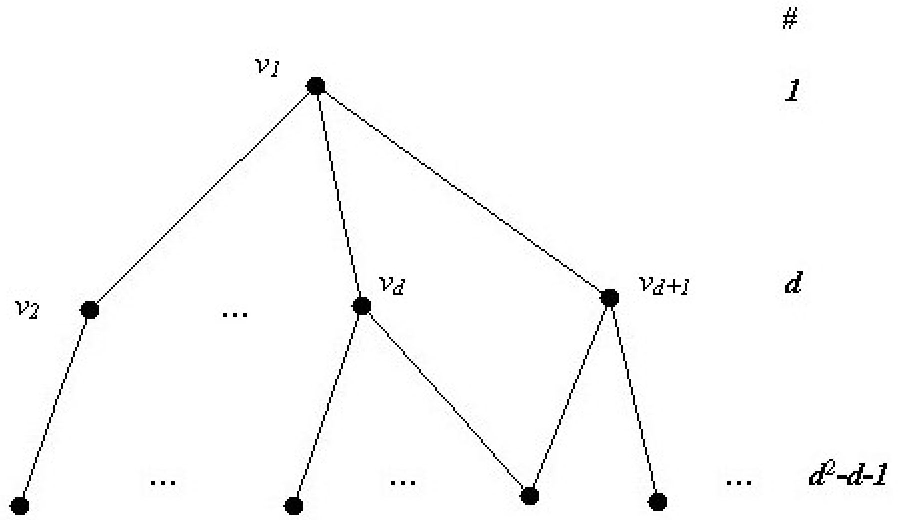
□

4.2.2 Tétel *$M(d,3)$-ra csak $d=2$ esetén létezik gráf, ez pedig nem más, mint C_7.*

Eddigi $M(d,k)$ jelölésünket bővíthetjük egy újabb paraméterrel. Ez az új paraméter a Moore-gráfokhoz köthető, és ez a *defektus*. A defektus az a szám, amennyivel kevesebb a gráf csúcsainak száma a Moore-féle korlátnál. Így eddigi jelölésünk (d,k,δ)-ra módosul, a δ a defektus jele. Ezek már nem Moore-gráfok, ezért nem teszünk elé M-et. Az új jelölés alapján a Moore-gráfokat $(d,k,0)$ jelöli.

4.2.3 Tétel (Erdős-Hoffman-Fajtlowicz) *$(d,2,1)$-re csak $d=2$ esetén létezik gráf, ez pedig nem más, mint C_4.*

Bizonyítás:
Legyen most G egy 2 átmérőjű, 1 defektusú gráf. Csúcsainak száma így: $|V(G)| = n = d^2$. Nem nehéz meggondolni, hogy G-ben nem lehet $k < d$ fokszámú csúcs, hiszen akkor legfeljebb $1 + kd$ csúcsa lehet. Tehát G d-reguláris és szomszédsági mátrixa minden sorában és oszlopában pontosan d darab egyes szerepel. Tudjuk, hogy egy gráfban a fokszámok összege mindig páros, ezért most d páros. Korábbi érvelésünk szerint, ha G tartalmazna háromszöget (C_3-at), legfeljebb $1 + d + (d-2)(d-1) + 2(d-2) = d^2 - 1$ csúcsa lehet, azaz G háromszögmentes. Azonban, ha G nem tartalmazna négyszöget (C_4-et), $d^2 + 1$ csúcsa lenne. Ebből következően G mindenképpen tartalmaz egy C_4-et, azaz G girth-e 4. Ráadásul az is belátható, hogy G minden csúcsának szerepelnie kell pontosan egy C_4-ben. Ezt a következő ábra szemlélteti:



Az ábra azt mutatja, hogy v_1, mint a kiindulópont csúcsa egy C_4-nek, így azt mondhatjuk, hogy bármely csúcsot kiindulópontnak tekintve, az szerepel egy C_4-ben.
A továbbiakban legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a G szomszédsági mátrixa, ekkor A^2 főátlójában mindenhol d van. Mivel G tartalmaz egy négyszöget, az A^2 mátrix a főátlóján kívül csupán nullákat, egyeseket, illetve minden sorában és oszlopában pontosan egy kettest tartalmaz, ráadásul, pont ott van benne nemnulla elem, ahol A-ban nulla és fordítva. Ezért felírható az alábbi egyenlőség, melyben J a csupa egyesből álló mátrixot jelöli:

$$A^2 + A - (d-1)I = J + \bigoplus_{1}^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy $\bigoplus_{1}^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sajátértékei kifejezhetők A és J sajátértékeivel. A J sajátértékeit ismerjük, az n egyszeres, a 0 $(n-1)$-szeres sajátértéke; $\bigoplus_{1}^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$-nek pedig $\frac{n}{2}$-szörös sajátértéke a $+1$ és a -1, azaz A sajátértékei a $\lambda^2 + \lambda - (d-1) = n \pm 1 = d^2 \pm 1$, $\lambda^2 + \lambda - (d-1) = 1$ és a $\lambda^2 + \lambda - (d-1) = -1$ egyenletek gyökei. Az első egyenlet egy esetben teljesül, ha $\lambda = d$ és a $\pm$ $+$. A második egyenlet az A mátrix további $\frac{d^2}{2} - 1$, a harmadik pedig $\frac{d^2}{2}$ sajátértékére áll fenn. Így a többi sajátérték $\lambda_1 = \frac{-1+\sqrt{1+4d}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{1+4d}}{2}$, $\lambda_3 = \frac{-1+\sqrt{4d-7}}{2}$ vagy $\lambda_4 = \frac{-1-\sqrt{4d-7}}{2}$ alakú. Jelölje λ_1 multiplicitását m_1, λ_2-ét m_2, λ_3-ét m_3, λ_4-ét m_4. Tudjuk, hogy $m_1 + m_2 = \frac{d^2}{2} - 1$ valamint, hogy $m_3 + m_4 = \frac{d^2}{2}$. Legyen továbbá $\sqrt{1+4d} = p$ és $\sqrt{4d-7} = q$. Mivel A nyoma 0, sajátértékeinek összege is 0, tehát:

$$m_1 \frac{-1+p}{2} + m_2 \frac{-1-p}{2} + m_3 \frac{-1+q}{2} + m_4 \frac{-1-q}{2} + d = 0.$$

Világos, hogy ha p irracionális, csak $m_1 = m_2$ esetén teljesülhet az egyenlőség. Ez ellentmondás, hiszen $m_1 + m_2 = \frac{d^2}{2} - 1$ soha nem lesz páros. Tehát p racionális, s mivel $1 + 4d$ egész szám, p is az. Ha q is egész, akkor $p^2 - q^2 = 8$, azaz $p = 3$ és $q = 1$, ebből következően pedig $d = 2$.
Ha q irracionális, szintén ellentmondásra jutunk. Tegyük fel, hogy q irracionális és $m_3 = m_4$. Alakítsuk át és egyszerűsítsük egyenletünket:

$$d - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) + \frac{p}{2}(m_1 - m_2) - \frac{1}{2}(m_3 + m_4) + \frac{q}{2}(m_3 - m_4) = 0$$
$$d - \frac{d^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{p}{2}(m_1 - m_2) = 0.$$

A $d = \frac{p^2-1}{4}$-et beírva az egyenletbe:

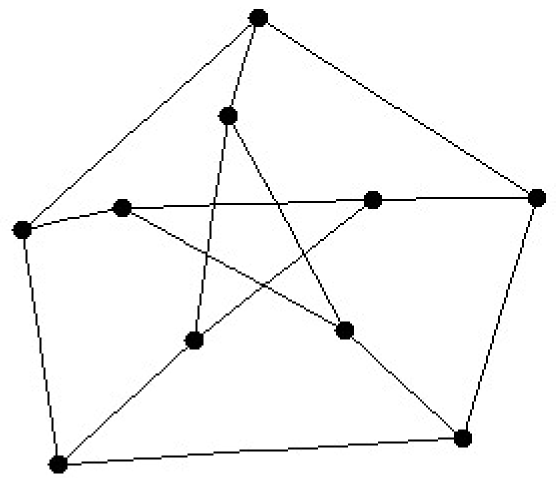
$$p^4 - 10p^2 - 16p(m_3 - m_4) - 7 = 0.$$

Ebből az egyenletből következik, hogy p-nek osztania kell 7-et. Ha $p = 1$, akkor $d = 0$, ez nyilván nem lehetséges, azonban ha $p = 7$, akkor $d = 12$, de ez sem lehet, mert a $d = 12$ esetben az A mátrix sajátértékei köbeinek összege 72, márpedig, mivel G háromszögmentes, az A sajátértékeire $\sum_i \lambda_i^3 = 0$-nak kellene teljesülnie.

$\square$

$d \backslash k$	2	3
2	öt hosszú kör, C_5	hét hosszú kör, C_7
3	tíz csúcsú, *Petersen-gráf*	nem létezik
7	ötven csúcsú, *Hoffman-Singleton-gráf*	nem létezik
57	létezése nem bizonyított	nem létezik

4.1. táblázat. Nevezetes Moore-gráfok



4.1. ábra. A *Petersen-gráf*, $M(3,2)$ vagy $cage(3,5)$

Az alábbi eredmény már teljesen magyar. Három matematikus, Erdős Pál, Sós Vera és Rényi Alfréd nevéhez köthető. Ez a tétel is a gráfelmélet egy alapvető tétele.

4.2.4 Tétel (Barátságtétel, 1966) *Ha egy G egyszerű, irányítatlan gráf bármely két csúcsának pontosan egy szomszédja van, akkor G-nek van olyan csúcsa, amely az összes többivel össze van kötve.*

4.3. Turán-típusú tételek

A *Turán-típusú tételek* a *tiltott részgráf problémá*hoz kapcsolódnak, vagyis azt mondják ki, hogy maximum hány éle lehet egy egyszerű gráfnak, ha nem tartalmaz egy adott részgráfot. Az első eredmény ezzel kapcsolatban azonban még Turán születése előtt vált ismertté.

4.3.1 Tétel (Mantel, 1907) *Ha egy n csúcsú G egyszerű gráf nem tartalmaz C_3-at (háromszöget), élszámára az alábbi egyenlőtlenség teljesül:*

$$|E(G)| \leq \tfrac{n^2}{4}.$$

Továbbá az 1930-as években Erdős bizonyított egy tételt C_4 esetére.

4.3.2 Tétel (Erdős) *Ha egy n csúcsú G egyszerű gráf nem tartalmaz négy hosszú kört (C_4-mentes), élszámára*

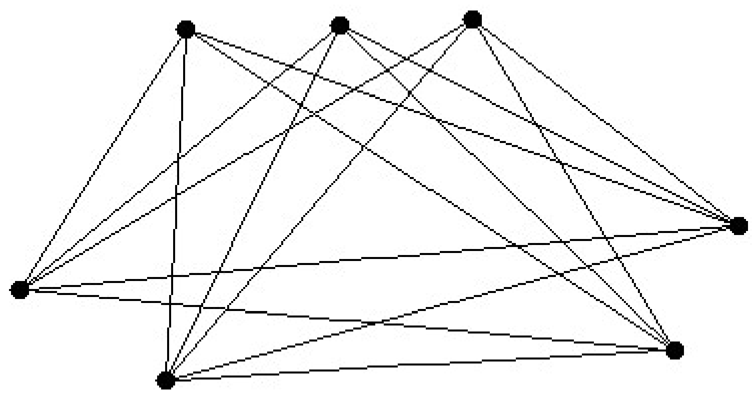
$$|E(G)| \leq \tfrac{n}{4}(1+\sqrt{4n-3})$$

teljesül.

Turán 1941-es cikkében fogalmazta meg áltanosabban a problémát a teljes részgráfok tiltására. Turán eredeti problémája így hangzott: *„Egy bajnokságon n játékos vesz részt és már N meccset lejátszottak. Hány meccset kell lejátszani (milyen nagy legyen N), hogy biztos legyen k játékos, akik már játszottak egymással?"* Ennek megoldásához speciális gráfokat vezetett be.

4.3.1 Definíció (Turán-gráf) *Azt az n csúcsú G egyszerű gráfot, melynek csúcsai r osztályba sorolhatók úgy, hogy az osztályok csúcsszámai legfeljebb eggyel különböznek és csak az egyes osztályok között fut él, ott viszont minden csúcs között, n csúcsú, r osztályú (r-kromatikus) Turán-gráfnak nevezzük. Ezt a gráfot $T(n,r)$-rel jelöljük.*

Konstruáljuk meg az n csúcsú, r osztályú Turán-gráfot! Először is osszuk el n-et r-rel: $n = rl + m = (r-m)l + m(l+1)$. Ha n többszöröse r-nek, akkor $m = 0$, ekkor a csúcsokat r darab l csúcsszámú osztályba soroljuk. Amennyiben $m \neq 0$, akkor $r-m$ darab l és m darab $l+1$ méretű osztályba osztjuk a csúcsokat. Az osztályok között minden lehetséges élet behúzunk, az osztályokon belül egyet se. Például lássuk $T(7,3)$-at, azaz a 7 csúcsú, 3 osztályú Turán-gráfot:



Számoljuk most meg az n csúcsú, r osztályú Turán-gráf éleit! Ezt a *komplementer gráf* segítségével tehetjük meg. Egy $G = (V,E)$ egyszerű gráf komplementerén azt a $\overline{G}$ egyszerű gráfot értjük, melyben két csúcs között akkor és csak akkor fut él, ha G-ben nem. Ha a Turán-gráfot egyesítjük a komplementerével, annyi éle lesz, mint az n csúcsú teljes gráfnak, vagyis $\binom{n}{2}$.

Ebből vonjuk le a gráf komplementerének élszámát, így, ha r osztja n-et, $|E(T(n,r))| = \binom{n}{2} - r\binom{\frac{n}{r}}{2} = \frac{n^2}{2}(1-\frac{1}{r})$. Ha r nem osztja n-et, csak kevesebb él lehet.

4.3.3 Tétel (Turán, 1941) *Amennyiben G olyan n csúcsú egyszerű gráf, amely nem tartalmaz K_s-et (s csúcsú teljes gráfot), legfeljebb annyi éle van, mint az n csúcsú, $s-1$ osztályú Turán-gráfnak, azaz $T(n,s-1)$-nek:*

$$|E(G)| \leq |E(T(n,s-1))| \leq \left(1-\tfrac{1}{s-1}\right)\tfrac{n^2}{2}.$$

Bizonyítás:
Először feltesszük, hogy $n \geq s$, máskülönben az egyenlőtlenség triviálisan teljesül. Tekintsük azt a n csúcsú, G egyszerű gráfot, amely nem tartalmaz K_s-t és emellett a lehető legtöbb éle van! Így G-ben biztos található K_{s-1} részgráf. Partícionáljuk a csúcsokat, szakítsunk ki G-ből egy $s-1$ csúcsú teljes gráfot. A megmaradt $n-s+1$ csúcsú gráf éleinek száma a tétel szerint legfeljebb $\left(1-\frac{1}{s-1}\right)\frac{(n-s+1)^2}{2}$. A kiszakított $s-1$ és a többi $n-s+1$ csúcs között $(s-2)(n-s+1)$ él fut, ha több él lenne köztük, az K_s-et eredményezne G-ben. Az $s-1$ csúcsú teljes részgráfnak pedig $\binom{s-1}{2}$ éle van. Számoljuk össze G éleit:

$$|E(G)| \leq \left(1-\frac{1}{s-1}\right)\frac{(n-s+1)^2}{2} + (s-2)(n-s+1) + \binom{s-1}{2} = \left(1-\frac{1}{s-1}\right)\frac{n^2}{2}.$$

Ezzel a tételt teljes indukcióval beláttuk.

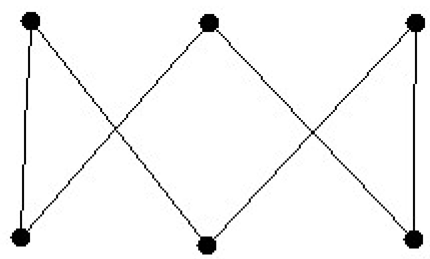
□

4.3.1 Megjegyzés *Ha a G egyszerű, K_s-mentes gráfnak pontosan $|E(T(n,s-1))|$ éle van, akkor G az n csúcsú, $s-1$ osztályú Turán-gráf.*

A Turán-gráf tehát egy gráfelméleti maximumot ad, hiszen $T(n,s-1)$-be bárhogy behúzva egy élet, az már tartalmaz K_s-t. Ezek alapján a válasz Turán kérdésére $|E(T(n,k-1))|+1$.
Legyen $G=(A,B,E)$ páros gráf. Egy páros gráfot *kiegyensúlyozott*nak hívunk, ha $|A|=|B|$. Ha mindkét osztályban az összes csúcs fokszáma azonos, akkor G *(bi)reguláris*. A páros gráf *teljes*, ha osztályai között minden lehetséges él be van húzva. A teljes páros gráfokat $K_{a,b}$ jelöli, ha $|A|=a$ és $|B|=b$. Ha $a=b$ vagy $a=b\pm 1$, az így kapott teljes páros gráf tulajdonképpen az $a+b$ csúcsú, 2 osztályú Turán-gráf.

Most vizsgáljuk meg *Zarankiewicz problémáját*. Kazimierz Zarankiewicz lengyel matematikus 1951-ben tette fel a következő kérdést:*„Legfeljebb hány éle lehet, annak az egyik osztályában r, a másik osztályában s csúcsot tartalmazó páros gráfnak, melyben nincs $K_{a,b}$ részgráf?”* Megjegyezzük, hogy az $a=b=2$ esetén adódó $K_{2,2}$ azonos C_4-gyel.

Jelölje $Z_{a,b}(r,s)$ azt a legkisebb k számot, melyre az egyik osztályában r, a másik osztályában s csúcsot tartalmazó páros gráfba összesen k élet behúzva, abban biztos van $K_{a,b}$ részgráf. Ha $a = b$ és $r = s$, ezt a számot $Z_a(r)$-rel jelöljük. Tehát a válasz Zarankiewicz problémájára $Z_{a,b}(r,s) - 1$.
Nézzünk egy egyszerű példát, legyen $a = b = 2$ és $r = s = 3$. Ebben az esetben $Z_{2,2}(3,3)$ vagy röviden $Z_2(3)$ értékét keressük. Az alábbi ábrán megfigyelhető, hogy $Z_2(3) > 6$, hiszen behúzható hat él anélkül, hogy $K_{2,2}$ megjelenjen a gráfban.



Másrészről észrevehető, hogy $Z_2(3) \leq 7$, mivel bárhogy behúzva egy hetedik élet, a gráfban már lesz $K_{2,2}$, tehát $Z_2(3) = 7$.
Erre a problémára többek között szintén Turán Pál adott felső becslést.

4.3.4 Tétel (Kővári-Sós-Turán, 1954) *Ha $a, b > 1$, akkor*

$$Z_{a,b}(r,s) \leq (a-1)^{\frac{1}{b}}(s-b+1)r^{1-\frac{1}{b}} + (b-1)r + 1.$$

Az 50-es évek második felében Reiman István foglalkozott Zarankiewicz problémájával és egy speciális esetére adott felső becslést.

4.3.5 Tétel (Reiman) *Legyen $a = b = 2$ és $r = s = n$, ekkor*

$$Z_2(n) \leq \tfrac{n}{2}(1 + \sqrt{4n-3}) + 1.$$

4.3.2 Megjegyzés *A 4.3.5-ös tétel állítása ekvivalens azzal, hogy a $2n$ darab csúcsot, mindkét osztályában n-et tartalmazó, C_4-mentes páros gráfnak legfeljebb $\frac{n}{2}(1 + \sqrt{4n-3})$ éle lehet.*

Arra az általános esetre, amikor $a = b$ és $r = s$, egy szlovák matematikus, Štefan Znám publikált felső becslést a 60-as évek elején.

4.3.6 Tétel (Štefan Znám) $Z_a(r) \leq (a-1)^{\frac{1}{a}} r^{2-\frac{1}{a}} + \frac{1}{2}(a-1)r + 1.$

5. fejezet

Összegzés

Az első három fejezetben a mátrixok tulajdonságairól és kezelhetőségéről volt szó. Megismertük többek között a determináns, a mátrixinverz, a nyom, az adjungált mátrix, a sajátértékek, a sajátvektorok, a hasonlóság és a diagonalizálhatóság fogalmát. Már a determinánsok tanulmányozásakor láthattuk, hogy gráfokkal illusztrálható és egyszerűsíthető a kiszámításuk. Elegáns bizonyítást kaphatunk gráfok segítségével a Cauchy-Binet formulára, amelyből következik a determinánsok szorzástétele. A determináns sokféleképpen kiszámítható, alkalmazásai is ismertek, a mátrixelmélet alapvető definíciói után ezt próbáljuk kutatni. Van például olyan mátrix, melynek egy képlettel kiszámítható a determinánsa. Mindezek után a mátrixokkal való számolást megkönnyítő mátrixfelbontásokat ismerhetünk meg. Ezek elsősorban lineáris egyenletrendszerek megoldásánál nyújtanak hasznos segítséget.
Az utolsó, nagy fejezetben már gráfelmélettel foglalkozunk. Rögtön kiderül, hogy a gráfokat mátrixokkal is reprezentálhatjuk. Később két problémakört tekintünk: a fokszám-átmérő problémát és a tiltott részgráf problémát. Az első probléma vizsgálata közben leírjuk a híres Hoffman-Singleton tételt, melynek csak mátrixelméleti eszköztárral történő bizonyítása ismert. A másik problémakörhöz tartoznak a Turán-típusú tételek és Zarankiewicz problémája.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek, Fialowski Alice-nak, hogy folyamatosan támogatott, értékes megjegyzéseivel segített a dolgozat megírásában, és kérdéseimmel mindig bátran fordulhattam hozzá. Köszönöm továbbá Szőnyi Tamásnak és Héger Tamásnak, hogy hasznos tanácsaikkal szintén segítették munkámat. Szeretném megemlíteni Fialowski Alice mellett többi algebra tanáromat, Ágoston Istvánt, Csörgő Piroskát, Kiss Emilt, Károlyi Gyulát és Somlai Gábort, akik felkeltették bennem az érdeklődést az algebra iránt és így ilyen szép témát tudtam választani, köszönöm nekik. Köszönöm évfolyamtársaimnak, hogy támogató megjegyzéseikkel mindig mellettem álltak és családomnak, hogy támogattak. Végül, de nem utolsósorban, köszönet illeti A. J. Hoffmant, a new yorki IBM Thomas J. Watson Center kutatóját, amiért rendelkezésemre bocsátotta a [15]-ös cikket, és Kisházi Dánielt, a LaTeX programcsomag használatához nyújtott segítségéért.

Irodalomjegyzék

[1] V. V. Praszolov: *Lineáris algebra*, Typotex Kiadó, 2005

[2] Peter D. Lax: *Lineáris algebra és alkalmazásai*, Akadémiai Kiadó, 2008

[3] Faragó István, Horváth Róbert: *Numerikus módszerek*, Typotex Kiadó, 2011

[4] Karlheinz Spindler: *Abstract algebra with applications*, Dekker Kiadó **Vol. 1** 1994

[5] Grégoire Allaire, Sidi Mahmond Kaber: *Numerical Linear Algebra*, Springer, 2008

[6] Harry Dym: *Linear Algebra in Action*, AMS, 2007

[7] *http://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_(mathematics)*

[8] *http://en.wikipedia.org/wiki/Continuant_(mathematics)*

[9] Katona Gyula Y., Recski András, Szabó Csaba: *A számítástudomány alapjai*, Typotex Kiadó, 2005

[10] Martin Aigner, Günter M. Ziegler: *Bizonyítások a könyvből*, Typotex Kiadó, 2004

[11] P. Turán: *An extremal problem in graph theory*, Eötvös Loránd Mathematical and Physical Society, 1941

[12] P. Erdős, A. Rényi: *Egy gráfelméleti problémáról (On a problem in the theory of graphs, in Hungarian)*, MTA **7** 1963, 623-641.

[13] P. Erdős, S. Fajtlowicz, A. J. Hoffman: *Maximum degree in graphs of diameter 2*, Networks **10** 1980, 87-90.

[14] P. Erdős: *Turán Pál gráf tételéről (On the graph theorem of Turán, in Hungarian)*, Mat. Lapok **21** 1971, 249-251.

[15] A. J. Hoffman, R. R. Singleton: *On Moore graphs with diameters 2 and 3*, IBM Journal of Research and Development **4** 1960, 497-504.

[16] M. Miller, M. Nguyen and G. Pineda-Villavicencio: *On the nonexistence of graphs of diameter 2 and defect 2*, Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 2009

[17] M. Miller, J. Širaň: *Moore graphs and beyond: A survey of the degree/diameter problem*, The Electronic Journal of Combinatorics, 2013

[18] Szőnyi Tamás jegyzetei a Turán-tételkörről

[19] *http://en.wikipedia.org/wiki/Zarankiewicz_problem*

[20] Varga Judit: *Nevezetes pontrendszerek a véges geometriákban*, ELTE TTK Számítástudományi Tanszék, tanári szakdolgozat, 2008

[21] Z. Füredi: *An upper bound on Zarankiewicz' problem*, Combinatorics, Probability and Computing **5** 1994, 29-33.