Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Ikvahidi Adrienn
Matematika BSc.
Elemző matematikus szakirány

Növekedési függvények, populációnövekedési modellekben szereplő differenciálegyenletek

Szakdolgozat

Témavezető: Pfeil Tamás
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2014.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Szakdolgozatom témája a növekedési függvények és populációnövekedési modellekben szereplő differenciálegyenletek. Először pár később használandó definíciót mutatok be. Utána nevezetes függvények vizsgálatával foglalkozok, ellenőrzöm, hogy eleget tesznek-e a növekedési függvény feltételeinek, majd további tulajdonságokat mutatok be.

A harmadik fejezetben a korábban bemutatott nevezetes függvényeket előállító differenciálegyenletek közül néhányat vizsgálok, majd megkeresem a függvények és a differenciálegyenletek közti kapcsolatot.

1. fejezet

Alapfogalmak

1.1 Definíció Legyen az f valós függvény értelmezve az a pont egy környezetében. Azt mondjuk, hogy az f függvény az a pontban differenciálható, ha a

$$\lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \tag{1.1}$$

véges határérték létezik, és az valós szám. Az (1.1) határérték az f függvény a pontbeli differenciálhányadosa vagy deriváltja, jele $f'(a)$.

1.2 Definíció Az f valós függvény monoton növekvő (monoton csökkenő) az $A \subset D(f)$ halmazon, ha minden t_1, $t_2 \in A$, $t_1 < t_2$ esetén

$$f(t_1) \leq f(t_2) \qquad (f(t_1) \geq f(t_2)). \tag{1.2}$$

Ha a (1.2) egyenlőtlenség helyett $f(t_1) < f(t_2)$, illetve $f(t_1) > f(t_2)$ áll fenn, akkor az f függvényt szigorúan monoton növekvőnek (illetve szigorúan monoton csökkenőnek) nevezzük. A monoton növekvő vagy monoton csökkenő függvényeket röviden monoton függvényeknek hívjuk.

1.3 Definíció Az f valós függvény konvex az $I \subset D(f)$ intervallumon, ha minden $a, b \in I$ és $a < t < b$ esetén

$$f(t) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a) + f(a). \tag{1.3}$$

Ha az (1.3) egyenlőtlenség helyett $f(t) \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)+f(a)$ áll, akkor az f függvényt az I intervallumon konkávnak nevezzük.

Ha pedig $f(t) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)+f(a)$, illetve $f(t) > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)+f(a)$ áll, akkor az f függvényt az I intervallumon szigorúan konvexnek, illetve szigorúan konkávnak nevezzük.

1.4 Definíció Azt mondjuk, hogy az f valós függvénynek az a pontban lokális maximuma (illetve minimuma) van, ha az a pontnak van olyan U környezete, amelyben f értelmezve van, és minden $x \in U$ esetén $f(x) \leq f(a)$ (illetve $f(x) \geq f(a)$). Ekkor az a pontot az f függvény lokális maximumhelyének (illetve lokális minimumhelyének) nevezzük.

1.5 Tétel Ha az f függvény differenciálható az a pontban és ott lokális szélsőértéke van, akkor $f'(a) = 0$.

Ez a lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele.

1.6 Tétel Ha az f függvény differenciálható a t_0 pont egy környezetében és $f'(t_0) = 0$, emellett t_0 említett környezetében f' előjelet vált, akkor az f függvénynek a t_0 pont előbbi környezetében lokális szélsőértéke van.

Ez a lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele.

1.7 Definíció Azt mondjuk, hogy az a pont az f valós függvénynek inflexiós pontja, ha az f függvény differenciálható az a pontban, és van olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy f konvex az $(a-\delta, a]$ intervallumon és konkáv az $[a, a+\delta)$ intervallumon, vagy fordítva.

1.8 Tétel Ha f kétszer differenciálható függvény a t_0 pontban és ott inflexiója van, akkor $f''(t_0) = 0$.

Tehát kétszer differenciálható f függvény t_0 pontbeli inflexiójának szükséges feltétele $f''(t_0) = 0$.

1.9 Tétel Ha az f függvény kétszer differenciálható a t_0 pont egy környezetében, $f''(t_0) = 0$ és f'' előjelet vált a t_0 pontban, akkor az f függvénynek inflexiója van a t_0 pontban.

Ez pedig a vizsgált pontbeli inflexió elégséges feltétele.

1.10 Definíció Legyen f kétváltozós folytonos függvény, $D(f)$ összefüggő nyílt halmaz, ekkor az f függvény által meghatározott elsőrendű explicit közönséges differenciálegyenlet:

$$x'(t) = f(t, x(t)).$$

1.11 Definíció Egy elsőrendű explicit közönséges differenciálegyenlet maximális megoldása olyan megoldás, melynek nincs olyan valódi kiterjesztése, amelyik megoldás lenne.

1.12 Definíció Ha az elsőrendű explicit közönséges

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

differenciálegyenlethez az

$$x(t_0) = x_0$$

kezdeti feltételt kielégítő x megoldásfüggvényt keresünk, akkor kezdetiérték-feladatról beszélünk. Ha van ilyen x függvény, akkor a kezdetiérték-feladat megoldható. Egy kezdetiérték-feladat megoldása egyértelmű, ha pontosan egy maximális megoldása van.

1.13 Definíció Legyen f kétváltozós folytonos függvény, $D(f)$ összefüggő nyílt halmaz. Ha az $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumra, és az $y : I \to \mathbb{R}^n$ differenciálható függvényre teljesül, hogy

$$(t, y(t)) \in D(f) \text{ minden } t \in I \text{ esetén,} \tag{1.4}$$

$$y'(t) = f(t, x(t)) \text{ minden } t \in I \text{ esetén,} \tag{1.5}$$

$$y(t_0) = p_0 \tag{1.6}$$

akkor az y függvényt az I intervallumon az f jobb oldalú explicit közönséges differenciálegyenlet megoldásának nevezzük az $y(t_0) = p_0$ kezdeti feltétel mellett.

1.14 Definíció Az f valós függvény eleget tesz a Lipschitz-feltételnek az $A \subset D(f)$ halmazon, ha van olyan $K \geq 0$ konstans, hogy

$$|f(x_1) - f(x_0)| \leq K \cdot |x_1 - x_0|$$

minden $x_0, x_1 \in A$ esetén.

1.15 Tétel (Picard-Lindelöf-tétel) Ha a kétváltozós valós értékű f függvény a $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos zárt halmazon folytonos és ezen a halmazon bármely rögzített első változó esetén a második változójában eleget tesz a Lipschitz-feltételnek, akkor az

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

differenciálegyenlethez és a H halmaz tetszőleges belső pontjához tartozó kezdetiérték-feladat megoldása egyértelmű.

2. fejezet

Nevezetes függvények

A telítődési vagy más néven korlátos növekedési függvények az idő múlásával növekvő és felső korláttal rendelkező mennyiségek időbeli alakulásának leírására szolgálnak. E függvények értelmezve vannak a nemnegatív valós számok halmazán, valamint három fontos tulajdonsággal rendelkeznek:

– nemnegatívak,

– szigorúan monoton növekvőek,

– a $+\infty$ helyen a határértékük pozitív valós szám.

A telítődési függvényeket a demográfusok és a biztosítási szakemberek a népesedési és túlélési folyamatok, a biológusok a populációdinamikában korlátos növekedésű populációk leírására és közelítésére használják.

2.1. Logisztikus függvény

A logisztikus függvényt alkalmazhatjuk adott eltartóképességű élőhelyen növekvő populáció méretére az idő függvényében.

Példaként említhetjük még az internet-előfizetők számának alakulását szintén az idő függvényében. Egy felmérésben ez a fv. jól közelíthető volt logisztikus függvénnyel.

2.1 Definíció Logisztikus függvénynek nevezzük az

$$L(t) := \frac{a}{1+be^{-kt}}, \quad D(L) := \mathbb{R} \tag{2.1}$$

alakú függvényeket, ahol $a, b, k \in \mathbb{R}^+$.

Először megmutatjuk, hogy a logisztikus függvény eleget tesz a nemnegativitási és a szigorú növekedési feltételnek, továbbá $+\infty$-ben valós határértéke van. E függvény kétszer differenciálható és nyilván pozitív értékű. Szigorúan monoton növekvő az

$$L'(t) = \frac{abke^{-kt}}{(1+be^{-kt})^2} > 0, \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

egyenlőtlenség szerint, hiszen $a, b, k > 0$ és az exponenciális függvény értékei pozitívak. Végül

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{a}{1+be^{-kt}} = a.$$

Vizsgáljuk meg, hogy a (2.1) alakú függvény a paraméterek mely értékeire tesz eleget a nemnegativitási és a szigorú növekedési feltételnek, emellett mikor van valós határértéke $+\infty$-ben.

$k = 0$ esetén az L függvény konstansfüggvény, így nem szigorúan monoton növekvő. Ha $k < 0$, akkor pedig

$$\lim_{t\to+\infty} L(t) = 0,$$

tehát $k > 0$ szükséges feltétel. Ha $a = 0$, akkor L konstansfüggvény, ha pedig $a < 0$, akkor

$$\lim_{t\to+\infty} L(t) = a < 0,$$

ezért $a > 0$ is szükséges feltétel. Ezután $k, a > 0$ esetén az L' deriváltfüggvény (2.2) alakja mutatja, hogy L szigorú monoton növekedése csak $b > 0$ mellett teljesülhet. Ha $a, b, k > 0$, akkor a (2.1) függvény teljesíti mindhárom elvárt tulajdonságot.

Vizsgáljuk tovább a logisztikus függvényt!

$$L''(t) = abk\,\frac{-ke^{-kt}(1+be^{-kt})^2 - e^{-kt}\cdot 2(1+be^{-kt})be^{-kt}(-k)}{(1+be^{-kt})^4}$$

$$= \frac{abk^2 e^{-kt}(be^{-kt} - 1)}{(1 + be^{-kt})^3}, \; t \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Ez a hányados akkor nulla, amikor a számláló utolsó tényezője nulla, hiszen az exponenciális függvény mindenhol pozitív, ezért a második derivált t zérushelyére fennáll

$$be^{-kt} - 1 = 0.$$

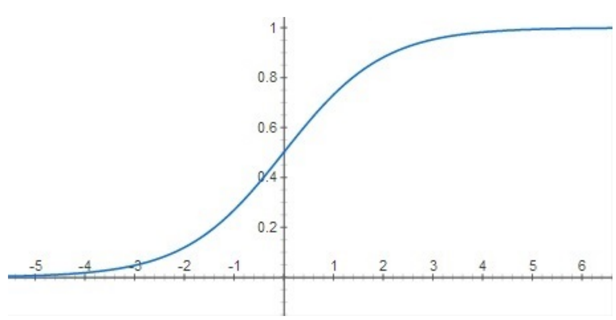
Ezt átrendezve kapjuk a

$$t = \frac{\ln(b)}{k}$$

megoldást. A (2.3) formula szerint $L''(t) > 0$, ha $t < \frac{\ln(b)}{k}$, és $L''(t) < 0$, ha $t > \frac{\ln(b)}{k}$, ezért L konvex a $\left[0, \frac{\ln(b)}{k}\right]$ intervallumon, konkáv a $\left[\frac{\ln(b)}{k}, +\infty\right)$ intervallumon. Ebből következik, hogy $t = \frac{\ln(b)}{k}$ inflexiós pontja az L függvénynek.

Az alábbi táblázatban foglaljuk össze a logisztikus függvényre kapott eredményeket:

$D(L)$	$(-\infty,0)$	0	$\left(0, \frac{\ln(b)}{k}\right)$	$\frac{\ln(b)}{k}$	$\left(\frac{\ln(b)}{k}, +\infty\right)$
L'	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
L''	$+$	$+$	$+$	0	$-$
L	mono ko	ton nv	nö ex	vek inflexió	vő konkáv



A logisztikus függvény $a = b = k = 1$ esetén

2.2. Gompertz-függvény

A Gompertz-függvényt Benjamin Gompertz (1779-1865) brit matematikusról nevezték el. A demográfusok és a biztosítási szakemberek gyakran használják különböző népesedési és túlélési folyamatok közelítő leírásakor.

Példaként említhetjük még a tumorok növekedésének modellezését. A tumorok behatárolt területen nőnek, ahol véges a rendelkezésükre álló tápanyag. A Gompertz-függvény a tumorok méretének növekedéséről ad információt.

2.2 Definíció Gompertz-függvénynek nevezzük a

$$G(t) := ae^{be^{kt}}, \quad D(G) := \mathbb{R} \tag{2.4}$$

alakú függvényeket, ahol $a \in \mathbb{R}^+$, $b, k \in \mathbb{R}^-$.

Vizsgáljuk meg, milyen paraméterekre teljesíti a (2.4) alakú függvény a nemnegativitási és a szigorú növekedési feltételt, emellett mikor van valós határértéke $+\infty$-ben.

Az a paraméter csak pozitív lehet, mert ha negatív vagy nulla lenne, akkor a függvényértékek nem volnának nemnegatívak, vagy a függvény nem volna szigorúan monoton növekvő az $\mathbb{R}^+$ intervallumon.

Ha b vagy k nulla lenne, akkor a függvény konstansfüggvény lenne, nem volna szigorúan monoton növekvő. Ha pedig b és k előjele különbözik, akkor a függvény szigorúan monoton csökkenő, nem szigorúan monoton növekvő.
Ha $a, b, k > 0$, akkor

$$\lim_{t \to +\infty} ae^{be^{kt}} = +\infty,$$

ha pedig $b, k < 0$, akkor

$$\lim_{t \to +\infty} ae^{be^{kt}} = a,$$

ami $a > 0$ esetén pozitív valós határérték.

A vizsgált függvény kétszer differenciálható, tekintsük a deriváltját:

$$G'(t) = abke^{kt}e^{be^{kt}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ha $a > 0$ és $b, k < 0$, akkor a derivált mindenütt pozitív, ezért G szigorúan monoton növekvő függvény. Ha a paraméterek előjele ilyen, akkor mindhárom feltételt teljesíti a (2.4) függvény.

Megjegyzés.

Ha $a > 0$, valamint b és k ellentétes előjelű, akkor G szigorúan monoton csökkenő függvény, melynek határértéke $+\infty$-ben nulla. Ilyen függvény elenyészési folyamatban írhatja le a vizsgált mennyiséget az idő függvényében.

Vizsgáljuk tovább a Gompertz-függvényt!

$$G''(t) = abk(ke^{kt}e^{be^{kt}} + e^{kt}e^{be^{kt}}bke^{kt}) = abk^2e^{kt}e^{be^{kt}}(1 + be^{kt}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tudjuk, hogy $a > 0$, $b, k < 0$ és az exponenciális függvény sehol sem 0, ezért $G''(t)$ zérushelye az

$$1 + be^{kt} = 0$$

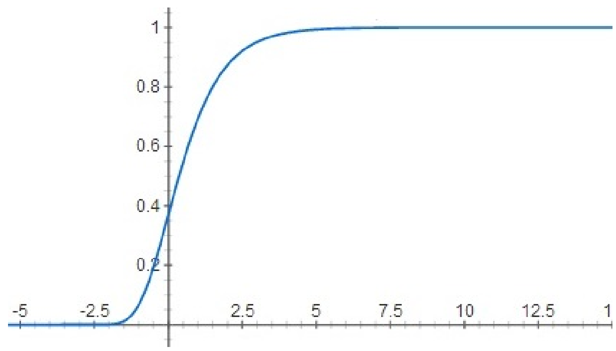
egyenlet megoldása, vagyis

$$t = \frac{\ln(-\frac{1}{b})}{k}.$$

Mivel $G''(t)$ előjelet vált ezen a helyen, a kapott szám inflexiós pont.

Az alábbi táblázatban foglaljuk össze a Gompertz-függvényre kapott eredményeket:

$D(G)$	$\left(-\infty, \frac{\ln(-\frac{1}{b})}{k}\right)$	$\frac{\ln(-\frac{1}{b})}{k}$	$\left(\frac{\ln(-\frac{1}{b})}{k}, +\infty\right)$
G'	$+$	$+$	$+$
G''	$+$	0	$-$
G	szigorúan konvex	monoton inflexió	növekvő konkáv



A Gompertz-függvény $a = 1$, $b = k = -1$ esetén

2.3. Bertalanffy-függvény

A Bertalanffy-függvényt Ludwig von Bertalanffy (1901-1972) magyar származású osztrák biológusról nevezték el. A Bertalanffy-függvénnyel a cápák testhosszának növekedését próbálták leírni, e növekedés szintén egy telítődési szinthez tartó folyamat. Bertalanffy modellje (ld. a 2.3. pontot) szerint minden cápa egy kezdeti testhosszal születik, majd elkezd növekedni, és a testhosszának, mint az életkor függvényének valós határértéke lenne $+\infty$-ben, ha az egyed örökké élne.

2.3 Definíció Bertalanffy-függvénynek nevezzük a

$$B(t) := a(1 - be^{-kt}), \quad D(B) := \mathbb{R} \tag{2.5}$$

alakú függvényeket, ahol $a, k \in \mathbb{R}^+, b \in (0,1]$.

Először megmutatjuk, hogy a Bertalanffy-függvény eleget tesz a nemnegativitási és a szigorú növekedési feltételnek, továbbá $+\infty$-ben valós határértéke van. E függvény a nemnegatív számok halmazán nemnegatív értékű, ha $b \in (0,1]$, mert $t \geq 0$ esetén $e^{-kt} \leq 1$. Szigorúan monoton növekvő a

$$B'(t) = abk \cdot e^{-kt} > 0, \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

egyenlőtlenség szerint, hiszen $a, b, k > 0$ és az exponenciális függvény értékei pozitívak. Végül

$$\lim_{t \to +\infty} a(1 - be^{-kt}) = a.$$

Vizsgáljuk meg, hogy a (2.5) alakú függvény a paraméterek mely értékére tesz eleget a nemnegativitási és a szigorú növekedési feltételnek, emellett mikor van valós határértéke $+\infty$ esetén. Ha $k = 0$, akkor a B függvény konstansfüggvény, így nem szigorúan monoton növekvő. Ha $k < 0$, akkor pedig

$$\lim_{t \to +\infty} a(1 - be^{-kt}) = -\infty$$

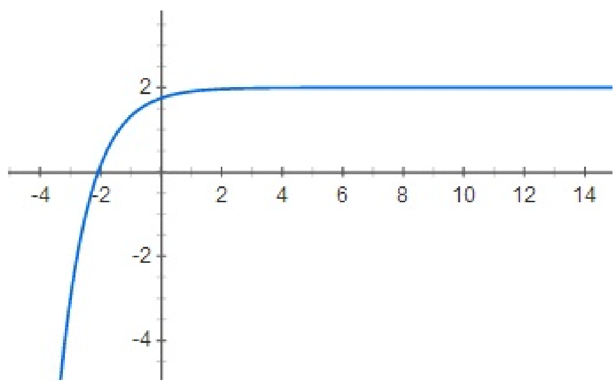
lenne, tehát $k > 0$. Ebben az esetben $\lim\limits_{t \to +\infty} B(t) = a$, tehát $a > 0$ szükséges feltétel.

Ha $b = 0$, akkor a B függvény konstansfüggvény, így nem szigorúan monoton növekvő. Ha $b < 0$, akkor pedig (2.6) szerint B' negatív lenne, azaz a függvény nem lenne monoton növekvő, tehát $b > 0$ is szükséges feltétel. Ekkor $B(0) = a(1 - b) \geq 0$ miatt $b \leq 1$ is szükséges. Ha $a, k > 0$ és $0 < b \leq 1$, akkor a vizsgált függvény teljesíti mindhárom feltételt.

Vizsgáljuk tovább a Bertalanffy-függvényt!

$$B''(t) = -abk^2 e^{-kt}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Ez a függvény sehol nem veszi fel a nulla értéket, így a Bertalanffy-függvénynek nincs inflexiós pontja, és minden $t \in \mathbb{R}$ esetén konkáv függvény.



A Bertalanffy függvény $a = 2$, $b = \frac{1}{8}$, $k = 1$ esetén

Megjegyzés.

A Bertalanffy-függvényt $b = 1$ esetén a Mitscherlich-függvénynek is nevezik.

A Bertalanffy-függvény speciális esete a most következő Weibull-függvénynek.

2.4. Weibull-függvény

A Weibull-függvény a Weibull-féle eloszlás eloszlásfüggvényét általánosítja. Ezt az eloszlást többek között a megbízhatósági analízisben használják, ilyen például egy berendezés meghibásodásáig eltelt idő várható értékének kiszámítása.

2.4 Definíció Weibull-függvénynek nevezzük a

$$W(t) := a(1 - be^{-(kt)^c}), \quad D(W) := [0, +\infty) \tag{2.7}$$

alakú függvényeket, ahol $a, c, k \in \mathbb{R}^+, b \in (0{,}1]$.

Megmutatjuk, hogy a Weibull-függvény teljesíti a nemnegativitási és a szigorú növekedési feltételt, valamint a határértéke $+\infty$-ben valós szám. Ha t ≥ 0, akkor $e^{-(kt)^c} \leq 1$ miatt $W(t) \geq 0$, továbbá

$$\lim_{t \to +\infty} a(1 - be^{-(kt)^c}) = a > 0.$$

A függvény folytonos, továbbá kétszer differenciálható az $\mathbb{R}^+$ intervallumon és ott a deriváltja

$$W'(t) = a(-b)e^{-(kt)^c}(-c)(kt)^{c-1}k = abce^{-(kt)^c}k^c \cdot t^{c-1}.$$

Ez minden $t \in \mathbb{R}^+$ esetén pozitív, így a W függvény szigorúan monoton növekvő a $[0, +\infty)$ intervallumon.

Vizsgáljuk tovább a Weibull-függvényt $c \neq 1$ esetén!

$$W''(t) = k^c \cdot abc \left(e^{-(kt)^c}(-c)(kt)^{c-1}k \cdot t^{c-1} + e^{-(kt)^c}(c-1)t^{c-2}\right) =$$

$$= k^c \cdot abc \cdot e^{-(kt)^c} t^{c-2}((-c)(kt)^c + c - 1), \; t \in \mathbb{R}^+. \tag{2.8}$$

Ez a szorzat akkor nulla, amikor a szorzat utolsó tényezője nulla, hiszen az exponenciális függvény és a pozitív alap hatványa mindenhol pozitív, ezért

$$(-c)(kt)^c + c - 1 = 0.$$

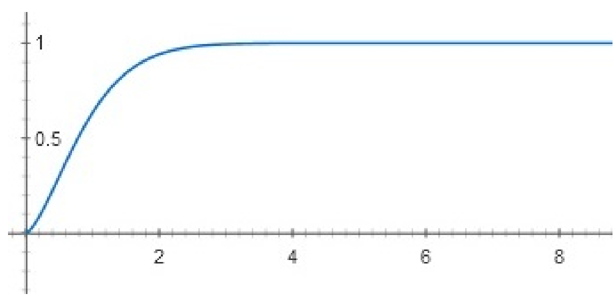
Ezt átrendezve kapjuk, hogy akkor van pozitív megoldás, ha $c > 1$, mégpedig

$$t = \frac{1}{k}\left(\frac{c-1}{c}\right)^{\frac{1}{c}}.$$

Ekkor a (2.8) formula szerint $c > 1$ esetén $W''(t) > 0$, ha $t < \frac{1}{k}\left(\frac{c-1}{c}\right)^{\frac{1}{c}}$, és $W''(t) < 0$, ha $t > \frac{1}{k}\left(\frac{c-1}{c}\right)^{\frac{1}{c}}$, ezért $W(t)$ konvex a $\left[0, \frac{1}{k}\left(\frac{c-1}{c}\right)^{\frac{1}{c}}\right]$ intervallumon, konkáv a $\left[\frac{1}{k}\left(\frac{c-1}{c}\right)^{\frac{1}{c}}, +\infty\right)$ intervallumon. Ebből következik, hogy $t = \frac{1}{k}\left(\frac{c-1}{c}\right)^{\frac{1}{c}}$ inflexiós pontja a W függvénynek.

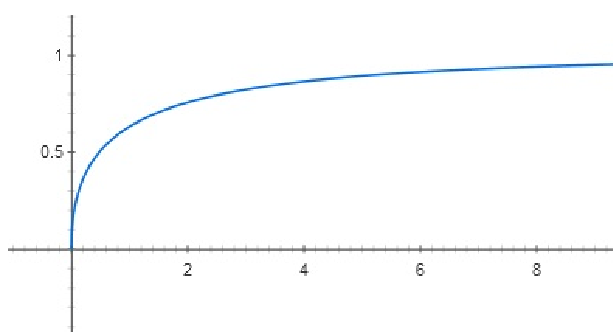
Az alábbi táblázatban foglaljuk össze a Weibull-függvényre kapott eredményeket a $c > 1$ esetben:

$D(W)$	0	$\left(0, \frac{1}{k}\left(\frac{c-1}{c}\right)^{\frac{1}{c}}\right)$	$\frac{1}{k}\left(\frac{c-1}{c}\right)^{\frac{1}{c}}$	$\left(\frac{1}{k}\left(\frac{c-1}{c}\right)^{\frac{1}{c}}, +\infty\right)$
W'	$+$	$+$	$+$	$+$
W''	$+$	$+$	0	$-$
W	szigo kon	rúan vex	monoton inflexió	növekvő konkáv



A Weibull-függvény $a = b = k = 1$, $c = \frac{3}{2}$ esetén

A $0 < c \leq 1$ esetben a Weibull-függvény konkáv a $[0, +\infty)$ intervallumon.



A Weibull-függvény $a = b = k = 1$, $c = \frac{1}{2}$ esetén

Megjegyzés.

A $j, \lambda \in \mathbb{R}^+$ paraméterű Weibull-eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f(t) := \begin{cases} \frac{j}{\lambda}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{j-1} e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^j}, & \text{ha } t \geq 0 \\ 0, & \text{ha } t < 0. \end{cases}$$

Számoljuk ki az f függvény improprius integrálját a valós számok halmazán!

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 0 + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{j}{\lambda}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{j-1} e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^j}\mathrm{d}t =$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \int\limits_{0}^{T} \frac{j}{\lambda}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{j-1} e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^j}\mathrm{d}t = \lim_{T\to+\infty}\left[-e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^j}\right]_0^T =$$

$$= \lim_{T\to+\infty}\left(-e^{-\left(\frac{T}{\lambda}\right)^j}\right) - (-e^0) = 1.$$

Az f függvény nemnegatív értékű és szakaszonként folytonos, ezért tényleg egy valószínűségeloszlás sűrűségfüggvénye. A Weibull-eloszlás F eloszlásfüggvényére

$$F(t) = \int\limits_{0}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau = \int\limits_{0}^{t} \frac{j}{\lambda}\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^{j-1} e^{-\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^j}\mathrm{d}\tau = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^j}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Minden eloszlásfüggvény nemnegatív értékű, balról folytonos és monoton növekvő függvény, melynek határértéke $+\infty$-ben 1. Mivel f pozitív az $\mathbb{R}^+$ intervallumon és folytonos a $[0, +\infty)$ intervallumon, ezért F szigorúan monoton növekvő a $[0, +\infty)$ halmazon.

F speciális esete a fentebb definiált Weibull-függvénynek, hiszen ha a (2.7) képletben $a := b := 1$, akkor

$$W(t) = 1 - e^{-(kt)^c}, \quad t \in [0, +\infty),$$

és a $k := \frac{1}{\lambda},\ c := j$ választással

$$W(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^j} = F(t), \quad t \in [0, +\infty).$$

A Weibull-eloszlást Maurice Fréchet (1878-1973) fedezte fel 1927-ben, és 1933-ban alkalmazták először granulált részecskék eloszlásának leírására. Az eloszlást Waloddi Weibullról

(1887-1979) nevezték el, aki 1951-ben írta le részletesen. Alkalmazási területei igen sokszínűek, példaként említhetjük a hibaanalízist, radarképek kiértékelését, mobilkommunikációban a csatornák áthallásvizsgálatát, időjárás előrejelzését, ezen belül is a szélsebességeloszlást.

2.5. Richards-függvény

2.5 Definíció Richards-függvénynek nevezzük az

$$R(t) := a(1 - be^{-kt})^c, \quad D(R) := [0, +\infty) \tag{2.9}$$

alakú függvényeket, ahol $a, c, k \in \mathbb{R}^+$, $b \in (0{,}1]$ vagy $a, k \in \mathbb{R}^+$ és $b, c \in \mathbb{R}^-$.

Megmutatjuk, hogy a Richards-függvény teljesíti a nemnegativitási és a szigorú növekedési feltételt, valamint a határértéke $+\infty$-ben valós szám. Ha $0 < a, c, k$ és $0 < b \leq 1$, akkor $t \geq 0$ esetén $e^{-kt} > 0$ miatt $R(t) \geq 0$, ha pedig $a, k > 0$ és $b, c < 0$, akkor $t \geq 0$ esetén $0 < e^{-kt}$ és $b < 0$ miatt $1 < 1 - be^{-kt}$, ezért $R(t) > 0$. Mindkét esetben

$$\lim_{t \to +\infty} a(1 - be^{-kt})^c = a > 0.$$

A függvény folytonos, kétszer differenciálható az $\mathbb{R}^+$ halmazon és a deriváltja

$$R'(t) = abck \cdot e^{-kt}(1 - be^{-kt})^{c-1}, \ t \in \mathbb{R}^+,$$

ezért a deriváltfüggvény mindkét esetben mindenütt pozitív, így a függvény szigorúan monoton növekvő.

Vizsgáljuk tovább a Richards-függvényt!

Ha $c = 1$, akkor a Bertalanffy-függvény $[0, +\infty)$ intervallumra vonatkozó leszűkítését kapjuk. Ha $c \neq 1$, akkor

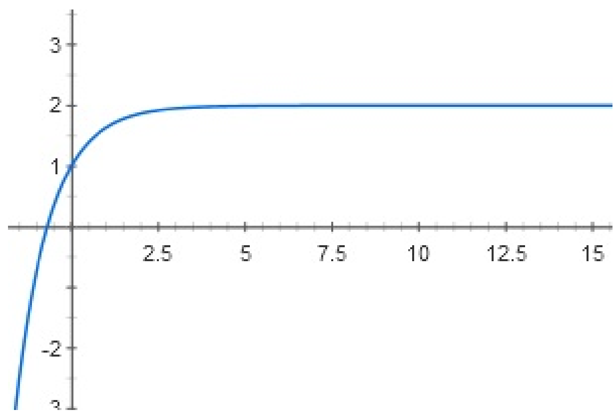
$$R''(t) = -abck^2 e^{-kt}(1 - be^{-kt})^{c-2}(1 - bce^{-kt}), \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{2.10}$$

mely csak abban az esetben lehet nulla, ha (2.10) jobb oldalának valamelyik tényezője nulla. $(1-be^{-kt})^{c-2}$ tényező pozitív, mert a hatvány alapja minden $t \in \mathbb{R}$ számra mindkét esetben pozitív. Eszerint inflexiós pontot az utolsó tényező zérushelyeként kaphatunk:

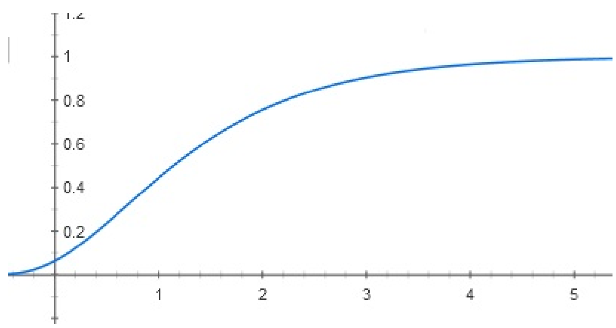
$$1 - bce^{-kt} = 0, \tag{2.11}$$

melynek az egyetlen valós megoldása $t = \frac{\ln bc}{k}$, ami $bc > 1$ esetén pozitív. Ekkor a (2.10) formula szerint $R''(t) > 0$, ha $t < \frac{\ln bc}{k}$, és $R''(t) < 0$, ha $t > \frac{\ln bc}{k}$, ezért R konvex a $\left[0, \frac{\ln bc}{k}\right]$ intervallumon, konkáv a $\left[\frac{\ln bc}{k}, +\infty\right)$ intervallumon. Ebből következik, hogy $t = \frac{\ln bc}{k}$ inflexiós pontja az R függvénynek.

Ha pedig $0 < bc \leq 1$, akkor az (2.11) egyenletnek nincs pozitív megoldása, és $R'' < 0$ az $\mathbb{R}^+$ intervallumon, ezért R konkáv függvény.



A Richards-függvény $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$, $c = k = 1$ esetén



A Richards-függvény $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $k = 1$, $c = 4$ esetén

2.6. Morgan-Mercer-Flodin-függvény

2.6 Definíció Morgan-Mercer-Flodin-függvénynek nevezzük az

$$M(t) := a\left(1 - \frac{b}{1+(kt)^c}\right), \quad D(M) := [0, +\infty) \tag{2.12}$$

alakú függvényeket, ahol $a, c, k \in \mathbb{R}^+$ és $b \in (0,1]$.

Megmutatjuk, hogy a Morgan-Mercer-Flodin függvény teljesíti a nemnegativitási és a szigorú növekedési feltételt, valamint a határértéke $+\infty$-ben valós szám.

A definícióban szereplő paraméterek mellett M nemnegatív a $[0, +\infty)$ intervallumon és pozitív az $\mathbb{R}^+$ intervallumon, továbbá

$$\lim_{t\to+\infty} a\left(1 - \frac{b}{1+(kt)^c}\right) = a > 0.$$

A függvény folytonos a $[0, +\infty)$ intervallumon, kétszer differenciálható az $\mathbb{R}^+$ intervallumon és deriváltja

$$M'(t) = abck\,\frac{(kt)^{c-1}}{(1+(kt)^c)^2}, \; t \in \mathbb{R}^+.$$

A deriváltfüggvény pozitív értékű, emiatt az M függvény szigorúan monoton növekvő a $[0, +\infty)$ intervallumon.

Vizsgáljuk tovább a Morgan-Mercer-Flodin-függvényt!

$$M''(t) = abck^2(kt)^{c-2}\frac{(c-1)(1+(kt)^c) - 2c(kt)^c}{(1+(kt)^c)^3}, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{2.13}$$

Ez a függvény akkor nulla, amikor a hányados számlálója nulla, vagyis amikor

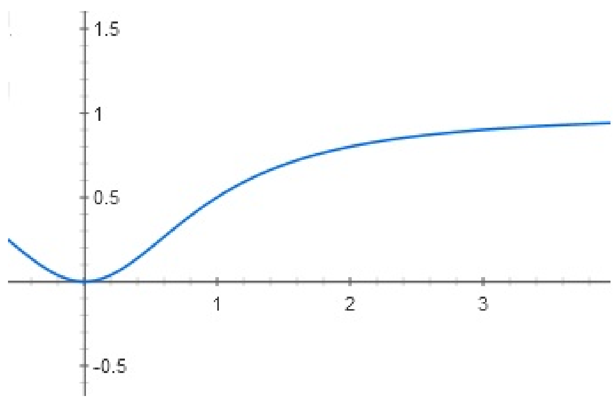
$$(c-1)(1+(kt)^c) - 2c(kt)^c = 0.$$

Az egyenletnek pontosan akkor van pozitív megoldása, ha $c > 1$, mégpedig

$$t = \frac{1}{k}\left(\frac{c-1}{c+1}\right)^{\frac{1}{c}}.$$

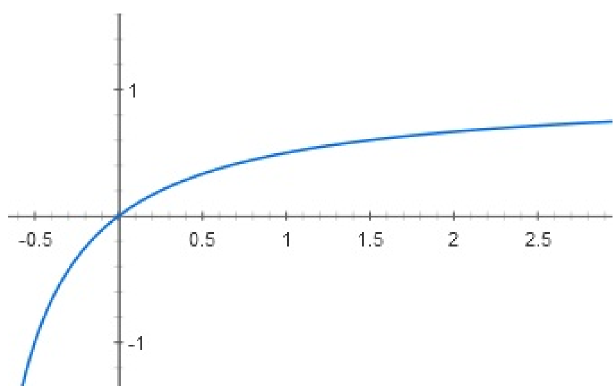
A $c > 1$ esetben a (2.13) formula szerint $0 < M''(t)$, ha $0 < t < \frac{1}{k}\left(\frac{c-1}{c+1}\right)^{\frac{1}{c}}$, és $M''(t) < 0$, ha $t > \frac{1}{k}\left(\frac{c-1}{c+1}\right)^{\frac{1}{c}}$, ezért M konvex a $\left[0, \frac{1}{k}\left(\frac{c-1}{c+1}\right)^{\frac{1}{c}}\right]$ intervallumon, konkáv a $\left[\frac{1}{k}\left(\frac{c-1}{c+1}\right)^{\frac{1}{c}}, +\infty\right)$ intervallumon. Ebből következik, hogy $t = \frac{1}{k}\left(\frac{c-1}{c+1}\right)^{\frac{1}{c}}$ inflexiós pontja az M függvénynek.

$D(M)$	0	$\left(0, \frac{1}{k}\left(\frac{c-1}{c+1}\right)^{\frac{1}{c}}\right)$	$\frac{1}{k}\left(\frac{c-1}{c+1}\right)^{\frac{1}{c}}$	$\left(\frac{1}{k}\left(\frac{c-1}{c+1}\right)^{\frac{1}{c}}, +\infty\right)$
M'	$+$	$+$	$+$	$+$
M''	$+$	$+$	0	$-$
M	szigo kon	rúan vex	monoton inflexió	növekvő konkáv



A Morgan-Mercer-Flodin-függvény $a = b = k = 1$, $c = 2$ esetén

Ha $c \leq 1$, akkor $M' > 0$ és $M'' \leq 0$ a $(0, +\infty)$ intervallumon, azaz a függvény szigorúan monoton növekvő és konkáv, nincs inflexiós pontja.



A Morgan-Mercer-Flodin-függvény $a = b = k = c = 1$ esetén

3. fejezet

Differenciálegyenletek

3.1. Logisztikus differenciálegyenlet

3.1 Definíció A logisztikus differenciálegyenlet

$$y'(t) = k \cdot y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{a}\right) \tag{3.1}$$

alakú, ahol $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

A (3.1) differenciálegyenlet szétválasztható differenciálegyenlet, a szétválasztás után az

$$\int \frac{1}{y(1-\frac{y}{a})}\,\mathrm{d}y = \int k\ \mathrm{d}t$$

egyenletet kapjuk abban az esetben, ha $y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{a}\right) \neq 0$ semelyik $t \in D(y)$ esetén sem.

A bal oldali primitív függvényt parciális törtekre bontással számolhatjuk ki:

$$\frac{1}{y(1-\frac{y}{a})} = \frac{1}{y} + \frac{\frac{1}{a}}{1-\frac{y}{a}} = \frac{1}{y} + \frac{1}{a-y},$$

tehát

$$\int \frac{1}{y(1-\frac{y}{a})}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{y} + \frac{1}{a-y}\,\mathrm{d}y = \int k\,\mathrm{d}t.$$

Ezért a primitív függvényeket kiszámolva alkalmas $p \in \mathbb{R}$ mellett a következő egyenletet kapjuk:

$$\ln|y(t)| - \ln|a - y(t)| = kt + p,$$

$$\ln\left|\frac{y(t)}{a-y(t)}\right| = kt + p.$$

Ezt átrendezve kapjuk, hogy

$$y(t) = \frac{a}{1+be^{-kt}}, \quad \text{ahol } b := \pm e^{-p}.$$

A (3.1) egyenlet szétválasztásakor feltettük, hogy $y(t)\left(1-\frac{y(t)}{a}\right) \neq 0$ semelyik $t \in D(y)$ esetén sem. Most vizsgáljuk meg a kihagyott esetet! Megoldás a 0 és az a értékű mindenütt értelmezett konstansfüggvény, más kihagyott maximális megoldás pedig a Picard-Lindelöf-tétel miatt nincs.

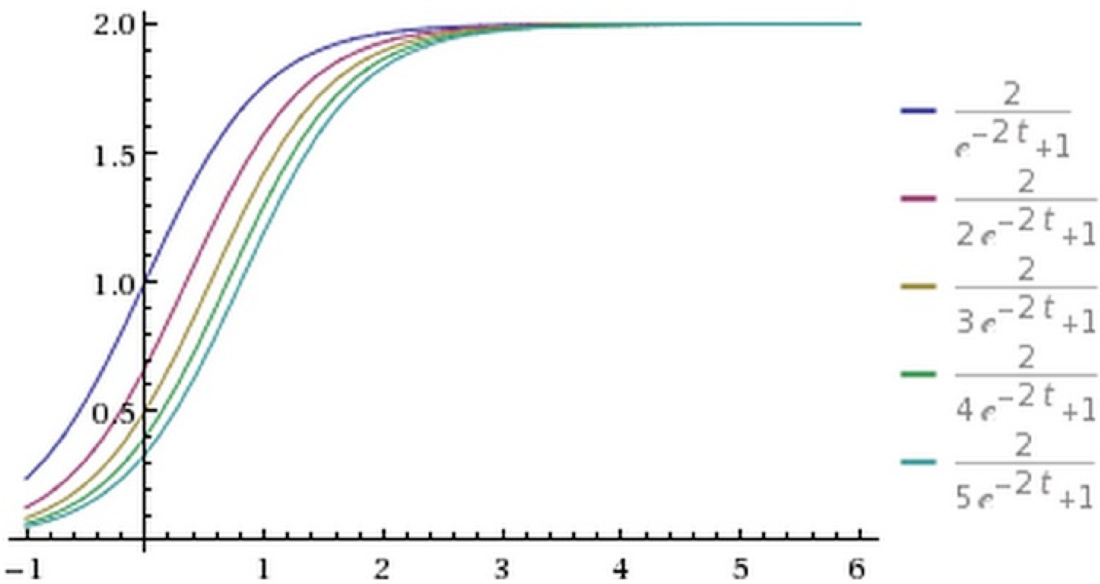
Tehát a differenciálegyenlet maximális megoldásai $y(t) = 0$ mellett

$$y(t) = \frac{a}{1+be^{-kt}}, \; b \in \mathbb{R},$$

ahol $b \geq 0$ esetén $D(y) = \mathbb{R}$, $b < 0$ esetén pedig $D(y) = \left(-\infty, -\frac{1}{k}\ln(-\frac{1}{b})\right)$ vagy $D(y) = \\ = \left(-\frac{1}{k}\ln(-\frac{1}{b}), +\infty\right)$.

Megjegyzés.

Ha $a, b, k \in \mathbb{R}^+$, akkor 2.1 Definícióbeli logisztikus függvényeket kapunk.



A logisztikus differenciálegyenlet néhány megoldása

$a, k = 2$ paraméterekre

3.2. Gompertz-féle differenciálegyenlet

3.2 Definíció A Gompertz-féle differenciálegyenlet

$$y'(t) = p\,y(t)\ln\left(\frac{a}{y(t)}\right) \tag{3.2}$$

alakú, ahol $a, p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. A differenciálegyenlet jobb oldalának értelmezési tartománya $a \in \mathbb{R}^+$ esetén $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R}^-$ esetén $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$.

A (3.2) differenciálegyenlet szétválasztható, a szétválasztás után a következő alakot kapjuk abban az esetben, amikor $\ln\left(\frac{a}{y(t)}\right) \neq 0$ semelyik $t \in D(y)$ esetén sem:

$$\frac{dy}{\ln\left(\frac{a}{y}\right)y} = p\,\mathrm{d}t.$$

$$\int \frac{1}{\ln\left(\frac{a}{y}\right)y}\,\mathrm{d}y = \int p\,\mathrm{d}t. \tag{3.3}$$

A bal oldali primitív függvényeket a következő helyettesítéssel számoljuk ki:

$$u := \ln\left(\frac{a}{y}\right),\ du = -\frac{1}{y}\mathrm{d}y.$$

$$\int \frac{1}{\ln\left(\frac{a}{y}\right)y}\,\mathrm{d}y = \int -\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = -\ln|u| + q = -\ln\left|\ln\left(\frac{a}{y}\right)\right| + q,\ q \in \mathbb{R}.$$

A (3.3) egyenlet szerint

$$-\ln\left|\ln\left(\frac{a}{y(t)}\right)\right| = pt + q^*,\ q^* \in \mathbb{R},$$

ezt rendezve kapjuk az

$$y(t) = ae^{\pm e^{-pt-q^*}},\quad q^* \in \mathbb{R} \tag{3.4}$$

megoldásokat.

A (3.2) egyenlet szétválasztásakor feltettük, hogy $\ln\left(\frac{a}{y(t)}\right) \neq 0$ semelyik $t \in D(y)$ esetén sem. Vizsgáljuk meg most ezt az esetet! A Picard-Lindelöf-tétel szerint maximális megoldásként csak az

$$y(t) = a,\ D(y) = \mathbb{R}$$

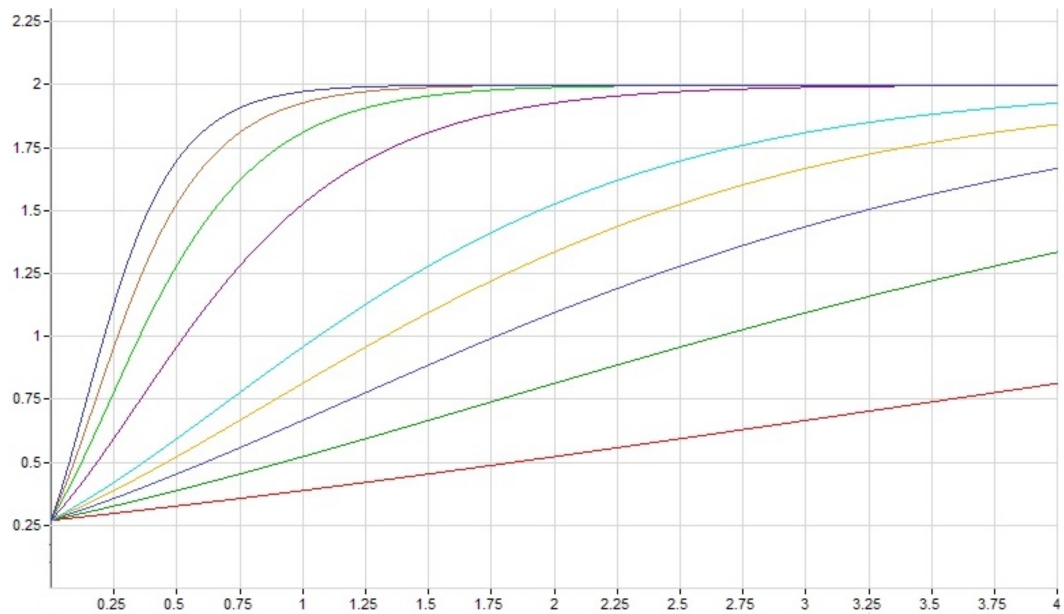
konstansfüggvényt kapjuk. Tehát a differenciálegyenlet maximális megoldásai

$$y(t) = ae^{be^{-pt}},\ D(y) = \mathbb{R},$$

ahol $b \in \mathbb{R}$.

Megjegyzés.

A megoldások $a, p \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}^-$ esetén 2.2 Definícióbeli Gompertz-függvények.



A Gompertz-féle differenciálegyenlet néhány megoldása

$a, b = 2$ paraméterekre

3.3. Bertalanffy-féle differenciálegyenlet

3.3 Definíció A Bertalanffy-féle differenciálegyenlet

$$y'(t) = k(a - y(t)) \tag{3.5}$$

alakú, ahol $a, k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

A (3.5) egyenlet lineáris differenciálegyenlet, ezért az

$$y'(t) + ky(t) = ka$$

alakra hozva, majd az egyenlet mindkét oldalát beszorozva e^{kt}, $t \in D(y)$ fügvénnyel

$$y'(t)e^{kt} + ky(t)e^{kt} = kae^{kt}.$$

A bal oldalon szorzat deriváltját kapjuk, ezért

$$(y(t)e^{kt})' = kae^{kt}.$$

A jobb oldal primitív függvényei

$$\int kae^{kt}\,\mathrm{d}t = ae^{kt} + c,\ \ c \in \mathbb{R},$$

amiből következik

$$y(t) = a + ce^{-kt} = a\left(1 + \frac{c}{a}e^{-kt}\right),\ \ c \in \mathbb{R}.$$

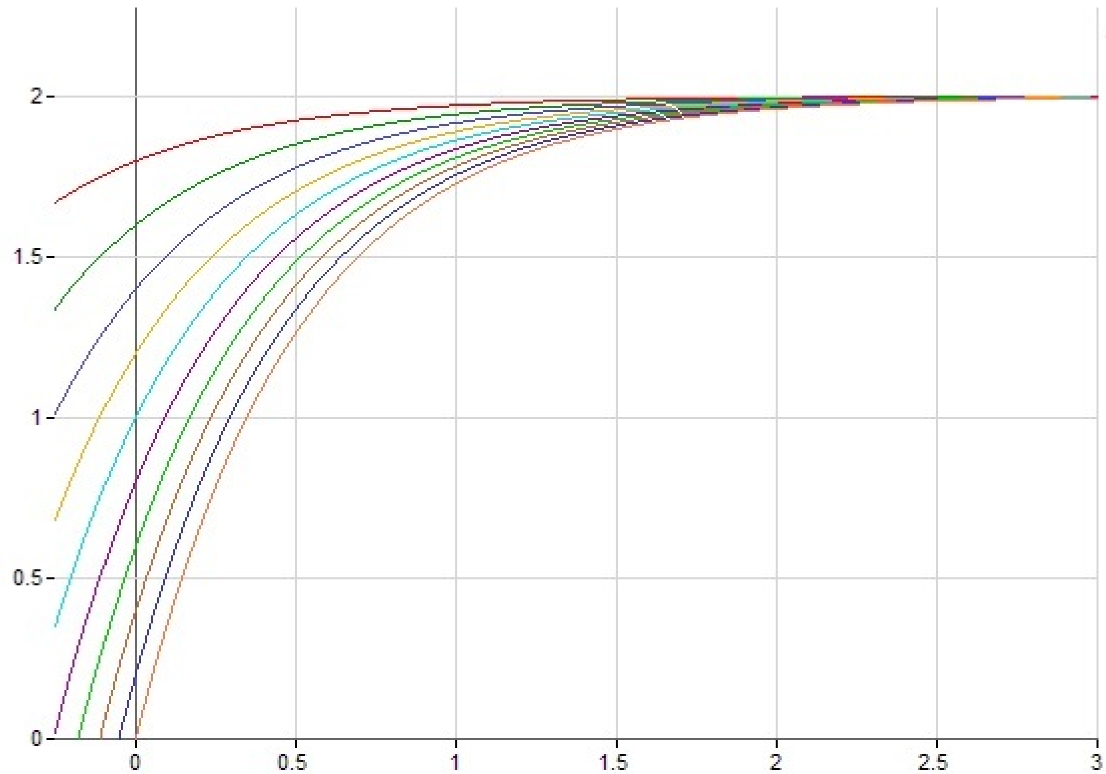
A $b := \frac{c}{a} \in \mathbb{R}$ választással a differenciálegyenlet maximális megoldásai

$$y(t) = a(1 - be^{-kt}),\ \ D(y) = \mathbb{R}, \tag{3.6}$$

ahol $b \in \mathbb{R}$.

Megjegyzés.

A differenciálegyenlet maximális megoldásai $a, k \in \mathbb{R}^+$, $b \in (0{,}1]$ esetén 2.3 Definícióbeli Bertalanffy-függvények.



A Bertalanffy-féle differenciálegyenlet néhány megoldása
$a, k > 0$ és $b \in (0{,}1]$ paraméterekre

A Bertalanffy-féle differenciálegyenlettel először cápák testhosszának növekedését modellezték. Ha nem a testhosszt, hanem a testtömeget szeretnénk leírni az idő függvényében *(z)*, akkor feltételezve, hogy a testtömeg egyenesen arányos a testhossz köbével, az előbbire vonatkozó differenciálegyenlet:

$$z'(t) = K\, z(t)^{\frac{2}{3}} \left(1 - \left(\frac{z(t)}{A}\right)^{\frac{1}{3}}\right), \tag{3.7}$$

ahol $A,\ K \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(Bertalanffy modelljében természetesen $a, k \in \mathbb{R}^+$, illetve $A, K \in \mathbb{R}^+$.)

Írjuk fel, milyen differenciálegyenlet érvényes a $z(t) := \gamma y^3(t),\ D(z) := D(y)$ függvényre, ahol $\gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Ekkor

$$y(t) = \left(\frac{z(t)}{\gamma}\right)^{\frac{1}{3}},\ y'(t) = \frac{z'(t)}{3\gamma^{\frac{1}{3}} z(t)^{\frac{2}{3}}}.$$

A z függvényt helyettesítve a (3.7) differenciálegyenletbe

$$z'(t) = 3ak\gamma^{\frac{1}{3}} z(t)^{\frac{2}{3}} \left(1 - \left(\frac{z(t)}{\gamma a^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right).$$

A $K := 3ak\gamma^{\frac{1}{3}}$ és $A := \gamma\, a^3$ választással a (3.7) differenciálegyenletet kapjuk meg.

A (3.7) differenciálegyenlet bármely $A, K \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ esetén szétválasztható, a szétválasztás után a következő alakhoz jutunk, ha $z(t) \neq 0$ és $z(t) \neq A$ semelyik $t \in D(z)$ esetén sem:

$$\frac{\mathrm{d}z}{z^{\frac{2}{3}}\left(1 - \left(\frac{z}{A}\right)^{\frac{1}{3}}\right)} = K\,\mathrm{d}t.$$

$$\int \frac{1}{z^{\frac{2}{3}}\left(1 - \left(\frac{z}{A}\right)^{\frac{1}{3}}\right)}\,\mathrm{d}z = \int K\,\mathrm{d}t.$$

A bal oldali primitív függvényeket a következő helyettesítéssel számoljuk ki:

$$u := z^{\frac{1}{3}}, \quad \mathrm{d}u = \frac{1}{3z^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}z.$$

$$\int \frac{1}{z^{\frac{2}{3}}\left(1 - \left(\frac{z}{A}\right)^{\frac{1}{3}}\right)}\,\mathrm{d}z = \int \frac{3}{1 - \frac{u}{\sqrt[3]{A}}}\,\mathrm{d}u = -3\sqrt[3]{A}\,\ln|\sqrt[3]{A} - u| + b_1 =$$

$$= -3\sqrt[3]{A}\,\ln|\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{z}| + b_1,\ b_1 \in \mathbb{R}.$$

Ezért

$$-3\sqrt[3]{A}\,\ln|\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{z}| = kt + b,\ b \in \mathbb{R}.$$

Ezt rendezve kapjuk a

$$z(t) = \left(\sqrt[3]{A} \pm e^{-\frac{kt+b}{3\sqrt[3]{A}}}\right)^3,\ b \in \mathbb{R}$$

megoldást.

A (3.7) egyenlet szétválasztásakor feltettük, hogy

$$z(t)^{\frac{2}{3}}\left(1 - \left(\frac{z(t)}{A}\right)^{\frac{1}{3}}\right) \neq 0$$

semelyik $t \in D(z)$ esetén sem. Az ekkor elvesztett maximális megoldások a 0 és az A értékű mindenütt értelmezett konstansfüggvények. Ezért a differenciálegyenlet maximális megoldásai az $y(t) = 0, D(y) = \mathbb{R}$ konstansfüggvény mellett a

$$z(t) = \left(\sqrt[3]{A} + e^{-\frac{Kt+b}{3\sqrt[3]{A}}}\right)^3,\ D(z) := \mathbb{R}$$

függvények.

3.4. Richards-féle differenciálegyenlet

3.4 Definíció A Richards-féle differenciálegyenlet

$$y'(t) = py(t)\left(1 - \left(\frac{y(t)}{a}\right)^r\right) \tag{3.8}$$

alakú, ahol $p, a, r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

A (3.8) differenciálegyenlet szétválasztható, a szétválasztás után a következő alakot kapjuk abban az esetben, amikor $y(t)\left(1 - \left(\frac{y(t)}{a}\right)^r\right) \neq 0$ semelyik $t \in D(y)$ esetén sem:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1 - \left(\frac{y}{a}\right)^r\right)} = \int p\,\mathrm{d}t.$$

A szétválasztás után a bal oldali primitív függvényeket általában nem tudjuk meghatározni. Ha r pozitív egész, akkor a bal oldali integrandus racionális törtfüggvény, de annak a primitív függvényeit sem tudjuk paraméteres alakban megadni.

Behelyettesítéssel ellenőrizzük, hogy

$$y(t) := a(1 - be^{-prt})^{-\frac{1}{r}},\ D(y) := [0, +\infty) \tag{3.9}$$

minden $b \in \mathbb{R}$, $b \leq 1$ mellett megoldása (3.8) differenciálegyenletnek:

$$\begin{aligned} y'(t) &= a\left(-\frac{1}{r}\right)(1-be^{-prt})^{-\frac{1}{r}-1}\,bpre^{-prt} = \\ &= -abpe^{-prt}(1-be^{-prt})^{-\frac{1+r}{r}},\ t \in \mathbb{R}^+. \end{aligned} \tag{3.10}$$

A differenciálegyenlet jobb oldalába a vizsgált függvényt helyettesítve pedig a

$$ap(1 - be^{-prt})^{-\frac{1}{r}}\left(1 - \left(\frac{a(1 - be^{-prt})^{-\frac{1}{r}}}{a}\right)^r\right) =$$

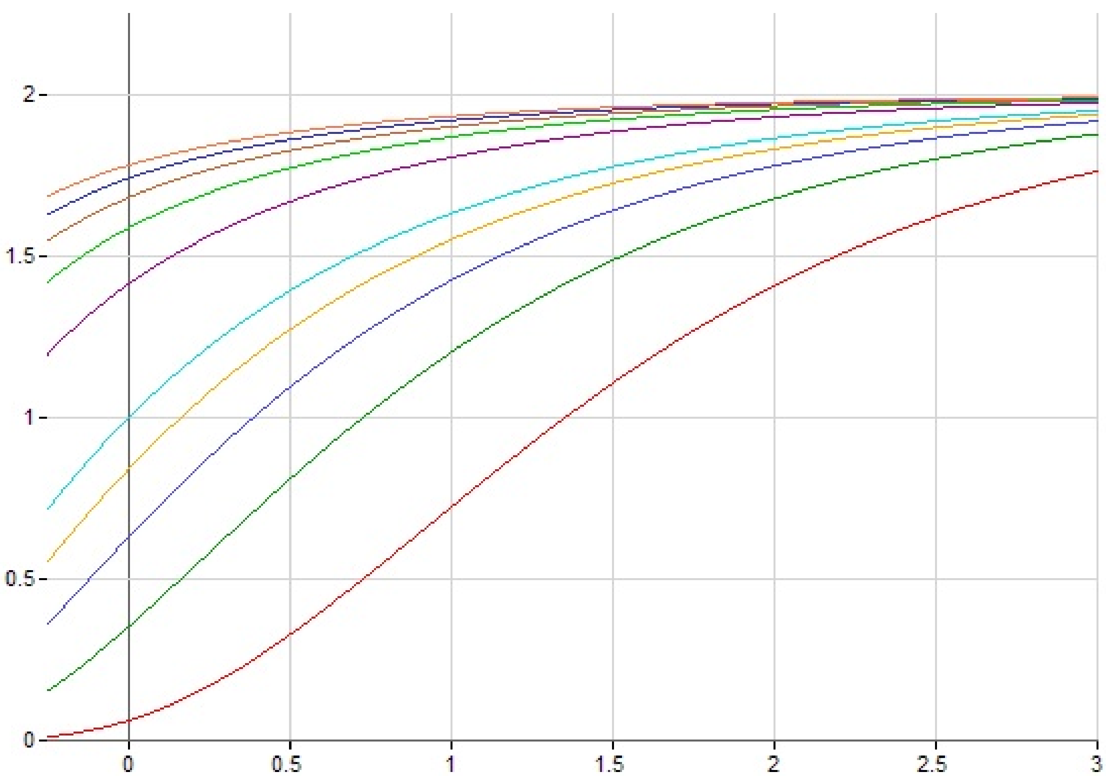
$$= -abpe^{-prt}\frac{(1 - be^{-prt})^{-\frac{1}{r}}}{1 - be^{-prt}} = -abpe^{-prt}(1 - be^{-prt})^{-\frac{1+r}{r}},\ t \in \mathbb{R}^+$$

függvényt kapjuk, ami egyenlő a (3.10) deriváltfüggvénnyel, tehát a (3.9) függvények tényleg megoldásai a (3.8) differenciálegyenletnek minden $b \in \mathbb{R}$, $b \leq 1$ mellett.

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az $y(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$ konstansfüggvény maximális megoldás.

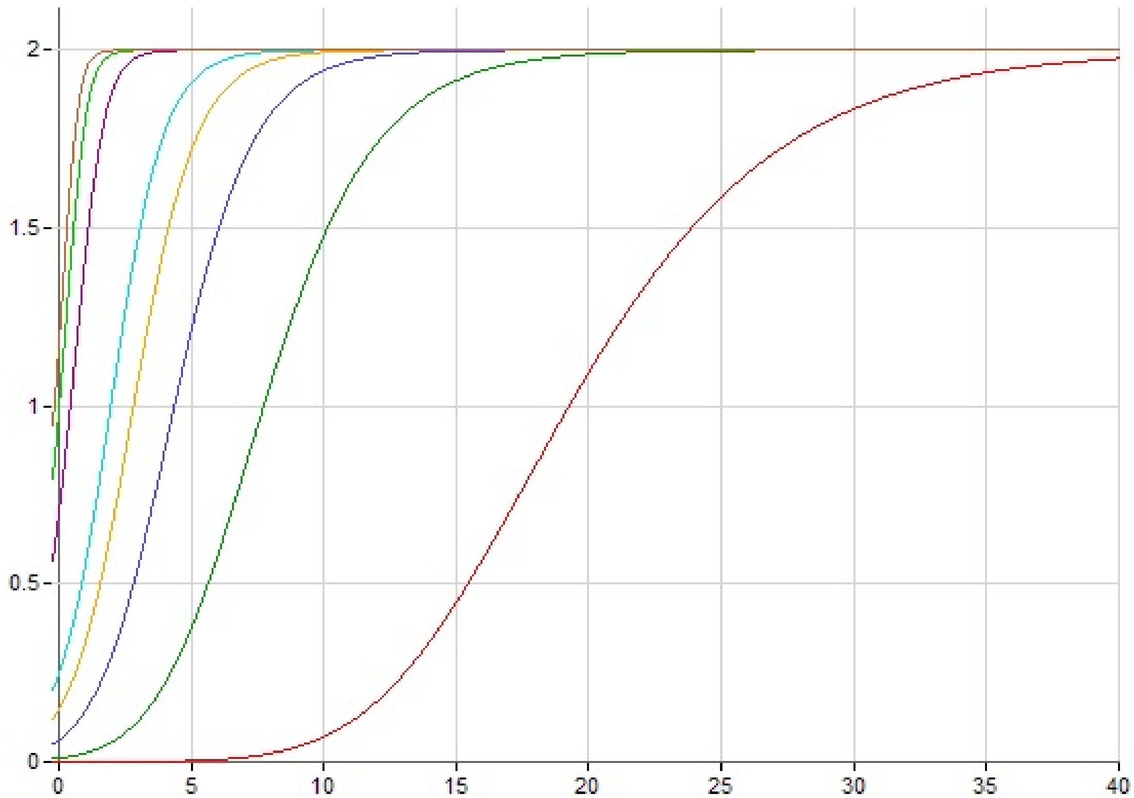
Megjegyzés.
A $c := -\frac{1}{r}$ és $k := pr$ választással látjuk, hogy a megoldásfüggvények 2.5 Definícióbeli Richards-függvények az alábbi két esetben:

- $a > 0$, $r, p < 0$ és $b \in (0{,}1]$, hiszen pontosan akkor $a, c, k \in \mathbb{R}^+$ és $b \in (0{,}1]$,
- $a, r, p > 0$ és $b < 0$, mert pontosan akkor $a, k > 0$ és $b, c < 0$.



A Richards-féle differenciálegyenlet néhány megoldása

$a = 2$, $b = 0{,}5$ paraméterekre



A Richards-féle differenciálegyenlet néhány megoldása

$a = 2$ és $b = -7$ paraméterekre

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Pfeil Tamásnak hasznos segítségét, tanácsait és precíz munkáját. Köszönöm barátaimnak, akik végig mellettem álltak és támogattak.

Irodalomjegyzék

[1] Biczók Gyula, Tolner László, Békéssy András, Krámli András, Ruda Mihály, Soltész János: *A növényi fejlődés néhány modellezési lehetőségének összehasonlító vizsgálata*, MÉM NAK, MTA SZTAKI(kézirat), http://www.mkk.szie.hu/ tolner/1982/Biczok.pdf

[2] Fokasz Nikosz: *Növekedési függvények, társadalmi diffúzió, társadalmi változás,* Szociológiai Szemle 2006/3, 19-51.

[3] Hunyadi László: *A logisztikus függvény és a logisztikus eloszlás,* Statisztikai Szemle, 82. évfolyam, 2004. 10-11. szám

[4] Lackovich Miklós – T. Sós Vera: *Analízis I.,* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2006.

[5] Lackovich Miklós – T. Sós Vera: *Analízis II.,* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2006.

[6] Sikolya Eszter: *Analízis jegyzet Matematikatanári Szakosok részére,* Budapest, 2013, http://tankonyvtar.ttk.bme.hu/pdf/161.pdf

[7] Tóth János, Simon Péter: *Differenciálegyenletek,* TYPOTEX Kiadó, Budapest, 2004.