

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Morvai Anikó

Matematika BSc.

Matematikai elemző szakirány

**DINAMIKAI RENDSZEREK VIZSGÁLATA
SZIMBOLIKUS PROGRAMCSOMAGOKKAL**

Szakedolgozat

Témavezető: Burcsi Péter, adjunktus

ELTE Informatika Kar, Komputeralgebra Tanszék

Belső konzulens: Villányi Viktória, adjunktus

Operációkutatási Tanszék



Budapest, 2014.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	3
1. Alapfogalmak	5
2. Pókháló ábra	8
2.1. Példa pókháló ábrára	8
2.2. A program forráskódja	9
3. Logisztikai függvény vizsgálata	10
3.1. A $\mu > 4$ eset	11
3.2. Cantor halmaz	11
3.2.1. Cantor halmaz konstrukciója:	11
3.2.2. A Cantor halmaz tulajdonságai	12
3.2.3. A Λ pontjainak jellemzése:	12
3.3. Az útvonalfüggvény	13
3.3.1. A program forráskódja:	13
3.4. Intervallum szűkítés	14
3.4.1. A program forráskódja	16
4. A $\mu = 4$ eset vizsgálata	18
4.1. Káosz	18
4.2. $\mu = 4$	19
4.3. A program forráskódja	21
5. Hármas periódus	22
5.1. A 3-as periódus vizsgálata Maple-el	25

Irodalomjegyzék 27

Bevezetés

A szakdolgozatom témája a dinamikai rendszerek vizsgálata szimbolikus programcsomagokkal.

Az első fejezetben tisztázok néhány alapfogalmat, amire a későbbiek során szükség lesz. Az egyes esetek vizsgálatához Maple programot használok. Leírom az Maple programban írt programok működését. A második fejezetben bemutatom a Pókháló ábrát, amivel szemléltethetjük az adott kezdeti értékek iteráltjainak viselkedését. A további fejezetekben kitérek az $F = \mu x(1 - x)$ függvény viselkedésre különböző μ -k esetén.

Először is nézzük meg, mi is az a dinamikai rendszer.

Vegyünk egy tudományos számológépet, írjunk be egy számot, és nyomjuk meg többször egymás utána az egyik függvény gombot. Így egy iterációs eljárást hozunk létre, ami példa egy diszkrét dinamikai rendszerre. Vegyünk egy x_0 kezdőpontot és egy $f(x)$ függvényt és kezdjük el iterálni.

$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots$

Egy példa: x, e^x, e^{e^x}, \dots

Néhány kezdeti értékre azt tapasztaljuk, hogy gyorsan túl csordul, végtelenbe tart.

Egy másik példa: $\sin(x)$. Egy kezdőértékből indítva, már pár iterációs lépés után észrevehetjük, hogy a függvényünk 0-hoz tart. A $\cos(x)$ függvény iteráltjai elég gyorsan 0.99984° -hoz tartanak.

Arra következtethetünk, hogy egy adott függvény iteráltjai egy fix határhoz, 0-hoz vagy végtelenhez tartanak. Ezzel szemben a $F = \mu x(1 - x)$ érdekes viselkedést mutat különböző μ értékek esetén. Például $\mu = 4$ esetén kaotikus lesz. Semmilyen szabályszerűséget nem tudunk felfedezni, ha valamilyen 0 és 1 közötti x_0 kezdőpontból kiindítjuk az iterá-

ciókat. Ezzel szemben, ha egy kicsit módosítunk a μ értékén és $\mu = 3.839$ környezetben vizsgáljuk akkor egy szép hármas periódust figyelhetünk meg. Az iteráció végül a 0.149888 ,0.489172, 0.959299 számhármast veszi fel.

A dolgozat célja az, hogy néhány példán keresztül bemutassa, hogy a Maple nevű szimbolikus programcsomag segítségével hogyan elemezhető számítógéppel a dinamikai rendszerek viselkedése. A számítógépes vizsgálat során kapott eredmények ábrákkal szemléltetve könnyebben megérthetők. A program segítségével nagy pontosság érhető el, ami lehetővé teszi az olyan viselkedés megfigyelését is, amit különben a kerekítési pontatlanság miatt nem vennénk észre.

1. fejezet

Alapfogalmak

A dinamikai rendszerek működésének megértéséhez, vizsgálatához szükségünk lesz néhány alapfogalomra. Vezessünk be néhány jelölést, melyet a továbbiakban használni fogunk.

\mathbb{R} jelölje a valós számokat. I vagy J mindig zárt intervallumot jelöl \mathbb{R} -ben azaz minden x pontra igaz, hogy $a \leq x \leq b$. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény. Jelölje f -nek az x szerinti deriváltját $f'(x)$, a második deriváltját $f''(x)$, a magasabb rendű deriváltját $f^{(r)}(x)$. Ha $f : I \rightarrow J$ kölcsönösen egyértelmű, akkor definiálhatjuk az f inverzét, amit az $f^{-1}(x)$ jelöl. Azt mondjuk hogy f osztálya C^r az I -n ha $f^{(r)}(x)$ létezik és folytonos minden $x \in I$ -ben. Azt mondjuk, hogy a függvény sima, ha az osztálya C^1 . A függvény C^∞ , ha minden deriváltja létezik és folytonos.

1.1 Definíció: Legyen $f : I \rightarrow J$. Az $f(x)$ függvény homeomorfizmus, ha $f(x)$ kölcsönösen egyértelmű, bijektív és folytonos és az $f^{-1}(x)$ is folytonos.

1.2 Definíció: Legyen $f : I \rightarrow J$. Az $f(x)$ függvény C^r -diffeomorfizmus, ha $f(x)$ C^r -homeomorfizmus oly módon, hogy $f^{-1}(x)$ is C^r .

1.3 Definíció: Az előrevezető pályája x -nek az $x, f(x), f^2(x), \dots$ pontok halmaza amit az $O^+(x)$ jelöl. Ha f homeomorfizmus, definiálhatjuk a teljes x pályáját, mint az $f^n(x)$ ahol $n \in \mathbb{Z}$, és a hátravezető pályája x -nek $O^-(x)$, mint az $x, f^{-1}(x), f^{-2}(x), \dots$ pontok halmaza. (Azon értékek sorozata, amit most és a jövőben felvesz a pont. Ha van a függvények inverze, akkor a múlt is kitalálható.)

1.4 Definíció: Az x pont f -nek a fixpontja, ha $f(x) = x$. Az x pont periodikus n periódussal, ha $f^n(x) = x$. A legkisebb pozitív n -t amire $f^n(x) = x$ az x alapperiódusának nevezzük. Jelölje az n periódusú periodikus pontok halmazát $Per_n(f)$, és a fixpontok halmazát $Fix(f)$. A periodikus pont összes iterációjának halmaza a periodikus pálya.

1.5 Példa: Az $f(x) = x^3$ függvénynek a 0 , -1 és az 1 periodikus pontjai, és nincs is más periodikus pontja.

1.6 Definíció: Az x pont végül n periódusú periodikus, ha x nem periodikus, de létezik $m > 0$, amire az $f^{n+i}(x) = f^i(x)$ minden $i \geq m$ esetén. Tehát $f^i(x)$ periodikus $i \geq m$ esetén.

1.7 Példa: Vegyük az $f(x) = x^2$ -et az $f(1) = 1$ fixpont, viszont az $f(-1) = 1$ végül periodikus.

1.8 Megjegyzés: Végülis periodikus pontok nem fordulhatnak elő, ha a leképezés homeomorfizmus.

1.9 Definíció: Legyen p pont n periódusú periodikus. Egy x előre aszimptotikus p -re ha $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{in}(x) = p$. A p stabil halmazát jelölje $W^s(p)$, ami magába foglalja az összes előre aszimptotikus p pontot.

1.10 Definíció: Egy x pont az f kritikus pontja, ha $f'(x) = 0$. A kritikus pont nemelfajuló, ha $f''(x) \neq 0$. A kritikus pont elfajuló, ha $f''(x) = 0$.

1.11 Definíció: Legyen p egy n alapperiódusú periodikus pont. A p pont hiperbolikus ha $|(f^n)'(p)| \neq 1$.

1.12 Állítás: Legyen p hiperbolikus fixpont $|f'(0)| < 1$. Ekkor van egy nyitott intervallum p körül oly módon, hogy ha $x \in U$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p$.

1.13 Bizonyítás: Mivel $f \in C^1 \exists \epsilon > 0$ úgy, hogy $|f'(x)| < A < 1$ ha $x \in [p - \epsilon, p + \epsilon]$.

Lagrange-féle középértéktétel által

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| \leq A|x - p| < |x - p| \leq \epsilon.$$

Ezért $f(x)$ -et tartalmazza $[p - \epsilon, p + \epsilon]$ és, valójában közelebb van p -hez mint x -hez.

Indukcióval:

$$|f^n(x) - p| \leq A^n|x - p| \text{ így } f^n(x) \rightarrow p \text{ amikor } n \rightarrow \infty.$$

1.14 Definíció: Ha $|f'(p)| < 1$ és p fixpont, akkor a p pontot vonzó fixpontnak, attraktor-nak vagy nyelőnek nevezzük.

1.15 Definíció: A p fixpontot taszító fixpontnak, repellornak vagy forrásnak nevezzük, ha $|f'(x)| > 1$.

1.16 Állítás: Az $|f'(p)| > 1$ és p fixpont

1. Taszító fixpont kis környezetében f^{-1} létezik, f^{-1} -nek vonzó fixpontja a pont.
2. $\exists \epsilon$, hogy $\forall x \in (p - \epsilon, p + \epsilon)$, $x \neq p$ esetén $\exists n : f^n(x) \notin (p - \epsilon, p + \epsilon)$.

2. fejezet

Pókháló ábra

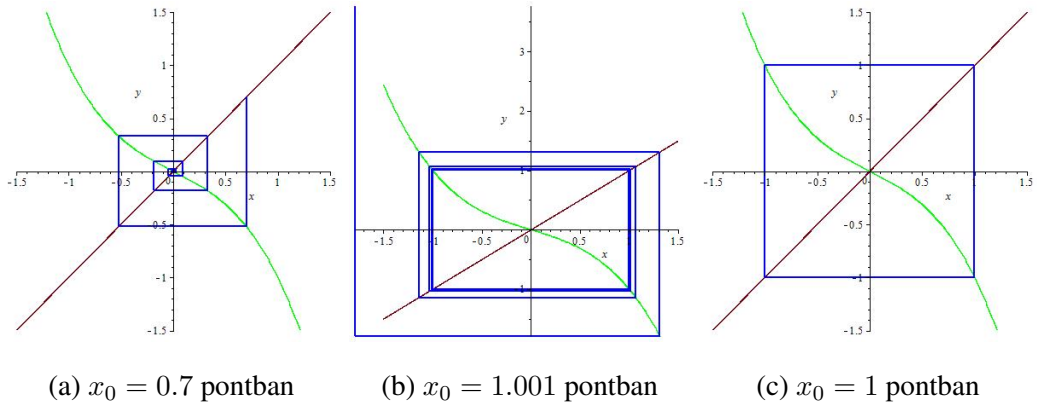
A dinamikai rendszerek vizsgálatánál egy pont viselkedésének vizsgálatához pókháló ábrát készíthetünk. A pókháló ábrán látni lehet, hogy egy pont környezetében hogyan viselkedik a függvényünk. Maple segítségével írunk egy programot, ami pókháló ábrát készít. A program kirajzolja a vizsgálni kívánt függvényt és az $x = y$ egyenest. Egy for ciklus segítségével kiszámoljuk az adott x_0 kezdeti pontban a függvény iteráltjait. Az iterációk számát a program hívásakor adhatjuk meg. Ezekből az értékekből készítünk egy listát és ennek segítségével rajzolja meg a program az ábrát az adott x_0 pontból kiindulva.

2.1. Példa pókháló ábrára

Nézzünk meg ezt egy konkrét példán. Vegyünk a $-\frac{1}{2}(x^3 + x)$ függvényt. Nézzük meg különböző x_0 értékekre. Az első esetben vegyünk 0 és 1 közötti x_0 értéket. Legyen pl. az $x_0 = 0.7$. Futtassuk erre az értékre a pókháló ábrázoló programunkat. A (2.1a) ábrán láthatjuk az eredményt. Az ábrán megfigyelhetjük, hogy a pókháló a 0.7 pontból indul és lépésenként közelít a 0-hoz. Ebből leolvashatjuk, hogy a 0 és 1 közötti értékekre a függvény iteráltjait a 0 bevonzza.

Második esetben vegyünk az $x_0 = 1.001$ pontot. A (2.1b) ábrán láthatjuk, hogy pár iterációs lépés utána a függvény iteráltjai elszállnak.

Harmadik esetben nézzük az $x_0 = 1$ pontot. A $-\frac{1}{2}(x^3 + x)$ függvényt az 1 pontban iterálva felváltva -1 -et illetve 1 -et kapunk eredményül minden iterációs lépésben. Ez figyelhetjük meg a (2.1c) ábrán is. Ez egy kettes periódus, felváltva ismétlődik a -1 és az 1 .



2.1. ábra. Pókháló ábrák

2.2. A program forráskódja

```

restart;
pokhalo := proc (fv, n, x0)
g1 := plot(x, x = -2 .. 2, y = -2 .. 2);
g2 := plot(fv, x = -1 .. 2, y = -2 .. 2, color = green);
L := [];
z := x0;
  for i to n do
    L := [L[], [z, z], [z, eval(fv, x = z)]];
    z := eval(fv, x = z);
  end do;
L;
plots[display](g1, g2, plot(L, color = blue))
end proc;

```

3. fejezet

Logisztikai függvény vizsgálata

Vizsgáljuk a $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ függvényt, különböző μ értékek esetén. Először nézzük a $\mu > 1$ esetet:

3.1 Állítás: $F_\mu(0) = F_\mu(1) = 0$.

A $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$ fixpontja és a 0 a másik fixpont.

A $F'_\mu(0) > 1$ tehát taszító és $0 < p_\mu < 1$, ha $\mu > 1$.

3.2 Állítás: Tegyük fel hogy, $\mu > 1$.

Ha $x < 0$, akkor $F_\mu^n \rightarrow -\infty$ mikor $n \rightarrow \infty$.

Ha $x > 1$, akkor $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$ mikor $n \rightarrow \infty$.

3.3 Bizonyítás: Ha $x < 0$, akkor $\mu x(1 - x) < x$, így $F_\mu(x) < x$. Ezért $F_\mu^n(x)$ csökkenő pontok sorozata. Ez a sorozat nem konvergál p -hez mikor $F_\mu^{n+1} \rightarrow F_\mu(p) < p$ míg $F_\mu^n(p) \rightarrow p$. Ezért $F_\mu^n(p) \rightarrow -\infty$, ha $x > 1$, akkor $F_\mu^n(x) < 0$ így $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$.

3.4 Állítás: Legyen $1 < \mu < 3$.

1. F_μ legyen egy vonzó fixpont, ahol $p_\mu = \frac{(\mu-1)}{\mu}$ és taszító fixpont a 0-ban.

2. Ha $0 < x < 1$ akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu^n(x) = p_\mu$.

3.1. A $\mu > 4$ eset

Az előző fejezetben vizsgált eseteknél, számunkra fontosabb a $\mu > 4$ eset. A továbbiakban ezzel fogunk foglalkozni. Nézzük az $F = \mu x(1 - x)$ függvényt $\mu > 4$ esetben.

Legyen

$$A_0 = \{x \in [0, 1] \mid F(x) > 1\}$$

$$A_1 = \{x \in [0, 1] \mid F(x) = A_0\}$$

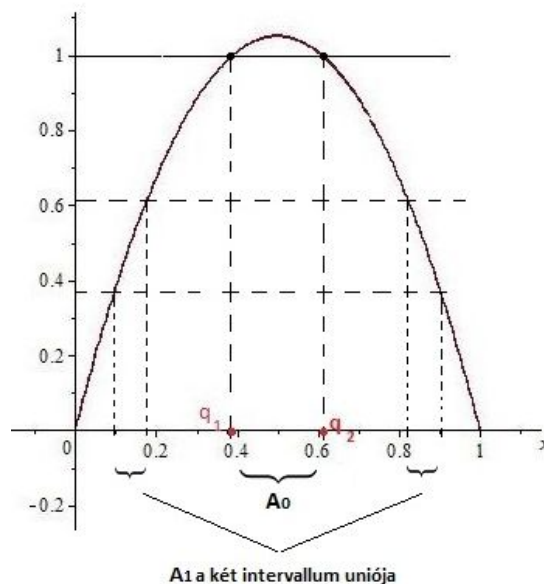
⋮

$$A_{n+1} = \{x \in [0, 1] \mid F(x) = A_n\}$$

Indukció:

$$F : [0, q_1] \rightarrow [0, 1] \text{ bijektív } \nearrow$$

$$F : [q_2, 1] \rightarrow [0, 1] \text{ bijektív } \searrow$$



3.1. ábra

- A_n 2^n db diszjunkt nyílt intervallum egyesítése
- $[0, 1] \setminus \bigcup_{k=0}^n A_k : 2^{n+1}$ zárt uniója
- $[0, 1] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n : \Lambda$ -ra $F : \Lambda \rightarrow \Lambda$
- Λ úgynevezett Cantor halmaz
- Λ F -invariáns

3.2. Cantor halmaz

3.2.1. Cantor halmaz konstrukciója:

Cantor halmaz készítéséhez vegyük a $[0, 1]$ intervallumot. Ebből az intervallumból vegyük ki a közepét, vagyis a $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ nyílt intervallumot. Így megmarad a $[0, \frac{1}{3}]$ és a $[\frac{2}{3}, 1]$ intervallum. Az előzőhöz hasonlóan ezekből is dobjuk ki a közepét, így marad $[0, \frac{1}{9}], [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$,

$[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$ és $[\frac{8}{9}, 1]$. A továbbiakban is hasonlóan járunk el minden intervallummal, és ezt folytassuk a végtelenségig.

Az n -edik közelítés: $C_n = \frac{C_{n-1}}{3} \cup (\frac{2}{3} + \frac{C_{n-1}}{3})$.



3.2. ábra. Az első hat iteráció ábrázolása.

Az ábra forrása: Wikipédia [5]

Az n . iterációs lépés után 2^n darab intervallum keletkezik, a keletkezett intervallumok együtt az eredeti $(\frac{2}{3})^n$ -részét fedik le. Minél több intervallumot tartalmaz, annál kevesebbet fednek le. A Cantor-halmaz a törlések után megmaradt pontokat tartalmazza. Határértékben, az összes $k \in \mathbb{N}$ -re összemetszve a k . intervallumokat az eredeti intervallum hosszának nulla része marad, pedig a halmaz még mindig kontinuum számosságú.

3.2.2. A Cantor halmaz tulajdonságai

1. Kompakt, perfekt, nem tartalmaz intervallumon, és sehol sem sűrű.
2. Lebesgue-mértéke nulla.
3. Önhasonló.
4. Kontinuum számosságú.

3.2.3. A Λ pontjainak jellemzése:

$$\Sigma = \Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots), \sigma_i \in \{0, 1\}\}$$

A Σ -n vett d távolság amikor $s = (s_0, s_1, \dots)$ és $t = (t_0, t_1, \dots)$:

$$d(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|s_n - t_n|}{2^n} \text{ távolság.}$$

$$\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$$

$$s_0, s_1, s_2, \dots \mapsto s_1, s_2, s_3$$

3.5 Állítás: Σ folytonos.

3.6 Állítás: $Ha s_0 = t_0, s_1 = t_1, \dots, s_n = t_n \Rightarrow d(s, t) \leq \frac{1}{2^n}$

$Ha d(s, t) < \frac{1}{2^n} \Rightarrow s_0 = t_0, \dots, s_n = t_n$

3.3. Az útvonalfüggvény

Bevezetünk egy úgynevezett útvonalfüggvényt.

$(S : \Lambda \rightarrow \Sigma)$, ahol $x \in \Lambda$ -ra $S(x) = s_0, s_1, s_2, \dots \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } F^n(x) < \frac{1}{2} \\ 1, & \text{ha } F^n(x) \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

A Maple segítségével írhatunk egy programot, ami adott μ , n és x értékekre elkészíti az $F = \mu x(1 - x)$ függvény iteráltjainak útvonalfüggvényét. Egy for ciklus segítségével a programunk kiszámolja az F függvény első n iteráltját. Ebből készít egy listát és egy másik for ciklus segítségével végigmegegy a lista elemein és megvizsgálja, hogy $\frac{1}{2}$ -nél nagyobb vagy kisebb értéket vesz fel. Készít egy új listát amiben, ha $\frac{1}{2}$ -nél kisebb az érték 0-t különben 1-est ír. Az így elkészült 0-ákból és 1-esekből álló lista adja az útvonalfüggvényünket. Ha például a programunkat a $\mu = 4.1$, $n = 20$, és $x = 0.4$ értékekre hívjuk meg, akkor az 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1 útvonalfüggvényt kapjuk.

3.3.1. A program forráskódja:

```
Cantor1 := proc (mu, n, x)
F := x -> mu*x*(1-x)
  for i to n do
    g[i] := evalf((F@@i)(x))
  end do;
t := seq(g[i], i = 1 .. n);
  for i to n do
    if t[i] < 1/2 then z[i] := 0
    else z[i] := 1
    end if
  end do;
```

```
s := seq(z[i], i = 1 .. n)
end proc;
```

3.4. Intervallum szűkítés

Egy másik Maple programmal a már meglévő útvonalfüggvény segítségével intervallum szűkítéssel meghatározhatjuk az n . iterált hova képez. Ehhez először írunk kell két eljárást. Az első az `fIter`. Ez az eljárás az F függvény n -edik iteráltját számolja ki az x helyen. Ezeket felhasználva elkészíthetjük az intervallum szűkítő programot.

```
fIter := proc (F, n, x)
local i, ret;
ret := x;
for i to n do
ret := F(ret)
end do;
ret
end proc
```

A második a `ratSolve`. Ez az eljárás úgy működik, mint az $f_{solve}((F@@n)(x) = Y, x = a..b)$, csak racionális számokkal.

```
ratSolve := proc (F, n, Y, a, b, prec := 10^(-5))
local i, lo, hi, fLo, fHi, mid, fMid;
lo := a;
hi := b;
fLo := fIter(F, n, lo);
fHi := fIter(F, n, hi);
if 0 < (fLo - Y) * (fHi - Y)
then printf("Nem garantálható, hogy lesz gyök %a és %a között.", lo, hi)
return
end if;
while abs(fHi - fLo) > prec do
```

```

mid := (1/2)*lo+(1/2)*hi;
fMid := fIter(F, n, mid);
if (fLo-Y)*(fMid-Y) > 0 then
  lo := mid;
  fLo := fMid
else
  hi := mid;
  fHi := fMid
end if
end do;
mid
end proc

```

Ezeket felhasználva elkészíthetjük az intervallum szűkítő programot. A programban meg kell adni egy listát ami az útvonalfüggvényünk 0-ákból és 1-ekből álló listája. Majd megadjuk a μ értékét és az F függvényt. A `ratSolve` eljárás segítségével kiszámoljuk, hogy az első iterált hol veszi fel az 1-et. Az A lesz a $[0, 0.5]$ -on a B pedig a $[0.5, 1]$ -on felvett érték. Egy `if` segítségével két esetet különböztetünk meg. Az egyik eset, ha az útvonal függvényünk első eleme 0, akkor az $a[1]$ 0 lesz a $b[1]$ pedig az előbb kiszámolt A értékét veszi fel. A másik esetben, ha az első elem 1, akkor az $a[1]$ a B értéket kapja a $b[1]$ pedig az 1-et. A `Digits` paranccsal azt állíthatjuk meg, hány tizedesjegy pontosságú számokkal dolgozzunk. Majd egy `for` ciklus segítségével végig vizsgáljuk az L lista elemeit. 4 esetet különböztetünk meg attól függően, hogy a lista aktuális eleme 0 vagy 1 illetve a vizsgált intervallumon a függvény növekvő vagy csökkenő. Így minden lépésben szűkül az intervallum.

Futtassuk a programot a következő paraméterekkel:

$L = [1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]$, a függvény $F = \mu x(1 - x)$ és $\mu = 4.2$

Ekkor a következő eredményt kapjuk:

```

0.6091079714, 1
0.6091079714, 0.8239954007
0.7319708165, 0.8239954007
0.7319708165, 0.7922025752
0.7477509102, 0.7922025752
0.7477509102, 0.7646642955
0.7589992946, 0.7646642955
0.7589992946, 0.7632220913
0.7613052939, 0.7632220913
0.7613052939, 0.7621771079
0.7618511240, 0.7621771079
0.7618511240, 0.7619291417
0.7618936798, 0.7619291417

```

Jól látható, hogy minden lépésben szűkül az intervallum.

3.4.1. A program forráskódja

```

L := [1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]
mu := 4.2
F := x-> mu*x*(1-x)
Digits := 10;
A := ratSolve(F, 1, 1, 0, 0.5):
B := ratSolve(F, 1, 1, 0.5, 1):
  if L[1] = 0 then a[1] := 0; b[1] := A
  elif L[1] = 1 then a[1] := B; b[1] := 1 end if

for k from 1 to nops(L)-1 do
  if ((F@@k) (a[k]) > (F@@k) (b[k]) and L[k+1]=1)

```

```
    then a[k+1]:=a[k];b[k+1]:=ratSolve(F,k,B,a[k],b[k])
  elif((F@@k)(a[k])<(F@@k)(b[k])and L[k+1]=1
    then a[k+1]:=ratSolve(F,k,B,a[k],b[k]);b[k+1]:=b[k]
  elif((F@@k)(a[k])<(F@@k)(b[k])and L[k+1]=0)
    then a[k+1]:=ratSolve(F,k,A,a[k],b[k]);b[k+1]:=b[k]
  elif((F@@k)(a[k])>(F@@k)(b[k])and L[k+1]=0)
    then a[k+1]:=a[k];b[k+1]:=ratSolve(F,k,A,a[k],b[k])
end if;
a[k],b[k]
end do;
```

4. fejezet

A $\mu = 4$ eset vizsgálata

4.1. Káosz

4.1 Definíció: *Devaney-féle káosz:*

Az x metrikus tér (x, f) dinamikai rendszer kaotikus (Devaney-féle értelemben), ha

1. Érzékenyen függ a kezdeti feltételektől.
2. A periodikus pontok halmaza sűrű.
3. Topológikusan tranzitív. (elég ha van sűrű pálya)

4.2 Definíció: *Topológikus tranzitivitás:*

Az (x, f) topológikusan tranzitív, ha $\forall U, V$ nyílthalmazra $\exists n: f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

4.3 Állítás: *Ha létezik sűrű pálya, akkor a rendszer topológikusan tranzitív.*

4.4 Bizonyítás: *Az x legyen az a pont aminek a pályája sűrű $\Rightarrow \exists k: f^k(x) \in U$.*

Ha V -ben már jártunk, akkor vegyük ki azokat a pontokat V -ből amiket korábban láttunk.

Így egy V' nyílthalmazt kapunk.

$\exists m: f^m(x) \in V, m > k$

Legyen: $n = m - k$

Ekkor $f^k(x) \in U, f^n(f^k(x)) \in V \Rightarrow f^n(U) \cap V \neq \emptyset$

4.5 Megjegyzés: *Kellett: Minden nemüreshalmaz ∞ .*

4.2. $\mu = 4$

Nem sokat tudunk mondani a $\mu x(1-x)$ iteráltjainak viselkedéséről. $\mu = 4$ esetén kaotikusan viselkedik. Azt viszont megtudjuk mondani, hogy egyes értéket milyen valószínűséggel fogja felvenni.

Ehhez vegyük a $G(y) = 1 - |2y - 1|$ úgynevezett sátorleképezést.

$$1 - |2y - 1| = \begin{cases} 2y, & \text{ha } y \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2y, & \text{ha } y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

A sátorleképezés topológikusan konjugált az $F(x) = 4x(1-x)$ logisztikus leképezéssel.

Legyen $H : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ és $x = H(y) = \sin^2\left(\frac{\pi y}{2}\right)$.

Topológikus konjugáltsághoz teljesülnie kell a következő összefüggésnek:

$$H(G(y)) = F(H(y))$$

Ekkor

$$F(H(y)) = 4\sin^2\left(\frac{\pi y}{2}\right)\left(1 - \sin^2\left(\frac{\pi y}{2}\right)\right) = 4\sin^2\left(\frac{\pi y}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\pi y}{2}\right) = \sin^2(\pi y).$$

Az első esetben $y \in [0, \frac{1}{2})$, ekkor $G(y) = 2y$, így

$$H(G(y)) = \sin^2\left(\frac{\pi 2y}{2}\right) = \sin^2(\pi y).$$

A második esetben pedig $y \in [\frac{1}{2}, 1)$, ekkor a $G(y) = 2 - 2y$, így tehát

$$H(G(y)) = \sin^2\left(\frac{\pi(2-2y)}{2}\right) = \sin^2(\pi - \pi y) = \underbrace{\sin(\pi)}_0 \cos(\pi y) - \underbrace{\cos(\pi)}_{-1} \sin(\pi y) = \sin^2(\pi y).$$

Az alábbi összefüggés által:

$$\tilde{\rho}(x)|dx| = \rho(y)|dy|$$

Ebből

$$\tilde{\rho}(x) = \rho(y) \frac{|dy|}{|dx|}$$

A leképezéshez: $x = \sin^2\left(\frac{\pi y}{2}\right)$

$$\frac{dx}{dy} = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) = \pi \sqrt{x(1-x)}$$

Tehát a

$$\tilde{\rho}(x) = \rho(y) \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}$$

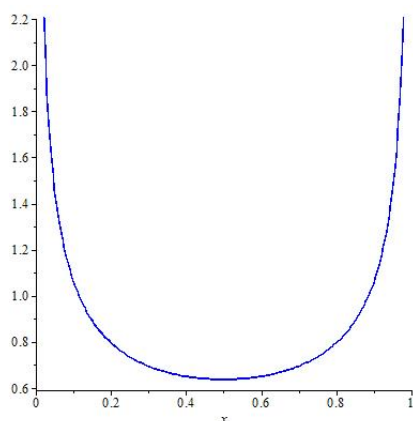
Az sátorleképezésnek az eltoláshoz hasonlóan az invariáns mértéke $\rho(y) = 1$.

Ezt felhasználva a $\mu = 4$ esetén a logisztikus függvényünk invariáns mértéke:

$$\tilde{\rho}(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}$$

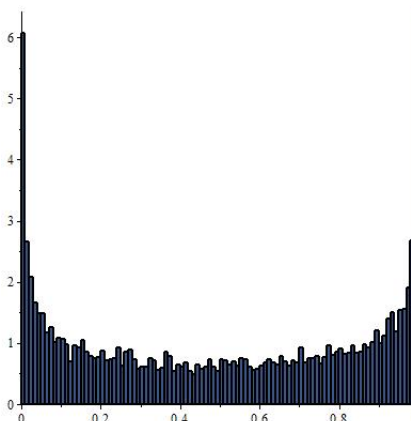
Ezt Maple segítségével ábrázoljuk. (4.1) ábra.

A fenti valószínűségi eloszlást szemléltethetjük egy programmal. Vizsgáljuk meg, hogy viselkedik végtelen 0 és 1 közötti x értékekre. A programhoz szükségünk lesz a Maple RandomTools és Statistics csomagokjaira. Ezek a random szám generáláshoz és a hisztogram készítéshez kellene. Készítünk egy z hosszú véletlen 0 és 1 közötti számokból álló listát. (A z értékét a program hívásakor adhatjuk meg). Iteráljuk $\mu x(1-x)$ függvényt n -szer (n értékét is a program hívásakor adhatjuk meg) véletlen x értékekre. A kapott értékekből egy listát készítünk, és egy hisztogramon ábrázoljuk ezeket. A hisztogramon megfigyelhetjük, hogy legnagyobb valószínűséggel 0-hoz vagy 1-hez közeli értékek lesznek az iterációk eredményei. A programunkat 100 db 0 és 1 közötti véletlen x értékre és 100 iterációs lépésre futattva a (4.2) ábrán látható hisztogramot kaptuk.



4.1. ábra.

Az invariáns mérték függvénye.



4.2. ábra.

A hisztogram.

4.3. A program forráskódja

```
with(RandomTools);
with(Statistics);
random_proc := proc (F, z, n)
A:= [seq(Generate(float(range=0..1,digits=3,method=uniform)),i=1..z)];
  L := [];
  for j to z do
    x0 := A[j];
    for i to n do
      L := [L[], x0];
      x0 := F(x0);
    end do
  end do;
  Statistics:-Histogram(L, bincount = 100);
end proc
```

5. fejezet

Hármas periódus

Az előző fejezetben láthattuk, hogy viselkedik az $F = \mu x(1 - x)$ függvény $\mu = 4$ esetén. Ebben a fejezetben vizsgáljuk meg, mi történik a $\mu = 3.839$ környezetében.

A $\mu = 3.839$ környékén az $F = \mu x(1 - x)$ függvénynek a 0 és a p_μ taszító fixpontjai. Van egy vonzó 3-as periódus. $a_1 \mapsto a_2 \mapsto a_3 \mapsto a_1$

A $\mu = 3.839$ estén az $F = \mu x(1 - x)$ függvénynek két fixpontja van.

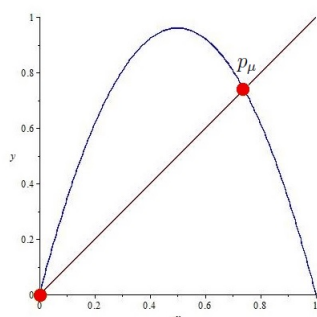
Ez látható a (5.1.) ábrán.

Ha tovább iteráljuk a függvényt akkor ez a két fixpont megmarad, de ezek mellett további fixpontjai lesznek.

Az F^3 fixpontjai növekvő sorrendben: $0, a_1, b_1, a_2, b_2, p_\mu, b_3, a_3$.

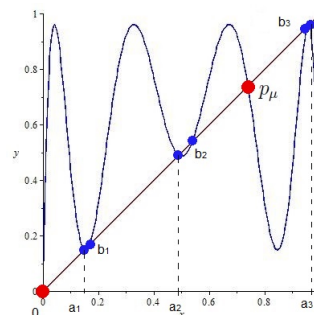
Ezeket láthatjuk a (5.2.) ábrán.

A $b_1 \mapsto b_2 \mapsto b_3 \mapsto b_1$ egy taszító 3-as periódus.



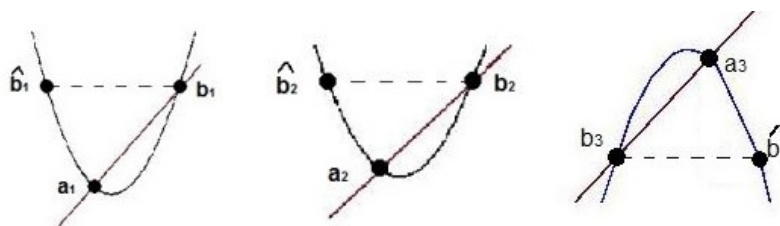
5.1. ábra.

Az F^1 fixpontjai.



5.2. ábra.

Az F^3 fixpontjai.



5.3. ábra.

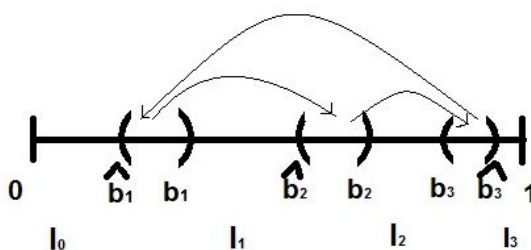
A 5.2. ábra kinagyított részletei.

A (5.3) ábrán látható módon vegyük a $\widehat{b}_1, \widehat{b}_2, \widehat{b}_3$. Amiről tudjuk, hogy

- $F^3(\widehat{b}_3) = F^3(b_3) = b_3$.
- $F^3(b_1) = F^3(\widehat{b}_1) = b_1$.
- $F^3(b_2) = F^3(\widehat{b}_2) = b_2$.

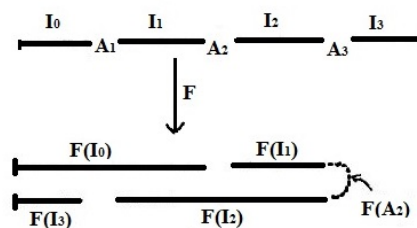
5.1 Állítás: a_i -nek F^3 szerinti vonzási intervalluma b_i és \widehat{b}_i közötti ív.

Ezt az állítást nem bizonyítjuk, de a (5.4)-es ábrán jól megfigyelhető.



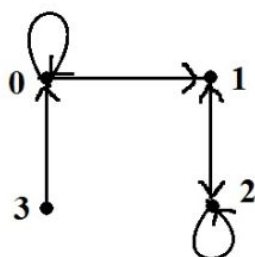
5.4. ábra. Vonzási intervallumok.

Minden olyan pont, ami nem tart a vonzó 3-as periódushoz, az örökre az I_0, I_1, I_2, I_3 -ban halad. A (5.5) ábrán megfigyelhetjük, melyik intervallum hova képez.



5.5. ábra

Ha $I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_0$ -ban mozgunk, azt a (5.6) ábrán látott gráf szerint tesszük.



5.6. ábra

Legyen

$$\Lambda = \{x | F^n(x) \notin A_1 \cup A_2 \cup A_3, n = 0, 1, \dots\}$$

$$\Lambda \subseteq I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_0$$

5.2 Állítás: $\Lambda \subseteq I_1 \cup I_2 \cup I_0 \cup I_3$, de a periódikus pontok csak $I_1 \cup I_2$ -ben vannak.

5.3 Bizonyítás: I_0 -ban az $F(x) > x \rightsquigarrow I_0$ -t elhagyja. $F^{-1}(I_3) = \emptyset$.

5.4 Tétel: $(\Lambda \cup (I_1 \cup I_2), F) \simeq (\Sigma_\sigma, \sigma)$

Ahol Σ_σ azon $\{1, 2\}$ elemekből álló végtelen sorozatok halmaza, melyekben két egymás utáni jegyre, S_i, S_{i+1} az $S_1 \rightarrow S_{i+1}$ él a G gráfban. A (5.6) ábrán látható módon az 1. és 2. csúcsra vonatkozóan.

Útvonal segítségével írhatjuk le. $S(x) = s_0, s_1, s_2, \dots, s_n$

$$S_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } F^n(x) \in I_1 \\ 2, & \text{ha } F^n(x) \in I_2 \end{cases}$$

5.5 Állítás: (Σ_σ, σ) kaotikus.

A Λ halmaz és abban a dinamika leírható szimbolikusán, és a pont-útvonalsorozat átmenet itt is hasonló a $\mu = 4$ -hez, hasonlóan számolható.

5.1. A 3-as periódus vizsgálata Maple-el

Vizsgáljuk az $F = \mu x(1 - x)$ függvényt a $\mu = 3.839$ értékre nézve. Maple segítségével számoljuk ki a függvény fixpontjainak, a $0, a_1, b_1, a_2, b_2, p_\mu, b_3, a_3$ értékeit.

Ehhez segítségünkre lesz a Maple `fix:=fsolve((F@@3)(x)=x, x=0..1)` parancsa, ami megadja az x függvény és az F^3 függvény metszéspontjait a $[0, 1]$ intervallumon.

A megoldásunk: `fix:=0., 0.1498883137, 0.1690401018, 0.4891729028, 0.5392461625, 0.7395168928, 0.9538123235, 0.9593233011.`

Tehát ebből kideül, hogy:

$$0$$

$$a_1 = 0.1498883137$$

$$b_1 = 0.1690401018$$

$$a_2 = 0.4891729028$$

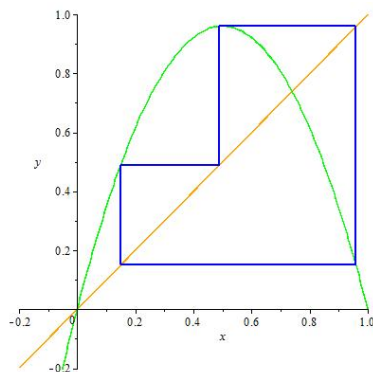
$$b_2 = 0.5392461625$$

$$p_\mu = 0.7395168928$$

$$b_3 = 0.9538123235$$

$$a_3 = 0.9593233011$$

Az a_1, a_2, a_3 vonzó 3-as periódus a b_1, b_2, b_3 taszító hármass periódus. A (2)-es fejezetben bemutatott pókháló készítő program segítségével készítsük el a pókháló ábráját. Ezen a (5.7.) ábrán jól megfigyelhető a 3-as periódus.



5.7. ábra. A 3-as periódus pókhálóábrája.

Maple segítségével határozzuk meg az a_i -k vonzási intervallumait. Ezt úgy tehetjük meg, hogy kiszámoljuk a $\widehat{b}_1, \widehat{b}_2, \widehat{b}_3$ értékeit.

Az adott intervallumon kiszámoljuk, hogy hol veszi fel a b_i értéket. Ezt a következő parancsokkal tehetjük meg:

A \widehat{b}_1 : `b1k:=fsolve((F@@3)(x)=b1, x=0.1 .. 0.3)`

Az eredmény: `b1k:=0.1394711594, 0.1690401018`

A \widehat{b}_2 : `b2k:=fsolve((F@@3)(x)=b2, x=0.4 .. 0.6)`

Az eredmény: `b2k := 0.4607534517, 0.5392461625`

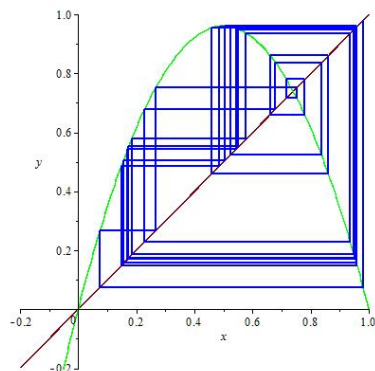
A \widehat{b}_3 : `bk3:=fsolve((F@@3)(x)=b3, x=0.8 .. 1)`

Az eredmény: `bk3:= 0.9538123235, 0.9622670071`

Tehát ebből láthatjuk, hogy a_i vonzási intervallumai:

- a_1 esetén: $[0.1394711594, 0.1690401018]$
- a_2 esetén: $[0.4607534517, 0.5392461625]$
- a_3 esetén: $[0.9538123235, 0.9622670071]$

Ha a vonzási intervallumon kívülről veszek egy pontot, az nem tart a 3-as periódushoz mindig a (5.4.) ábrán látható I_0, I_1, I_2, I_3 -ban halad. Ez jól látható a (5.8.) pókhálóábrán. Az ábrán látható pókhálóábra elkészítéséhez a vonzási intervallumon kívülről választottunk egy pontot, ebből az $x_0 = 0.98$ pontból kiindulva rajzoltattuk ki a pókhálót.



5.8. ábra. Vonzási intervallumon kívüli viselkedés.

Irodalomjegyzék

- [1] Collet,Pierre-Eckmann,Jean-Pierre,
Concepts and Results in Chaotic Dynamics:A Short Course,
Springer-Verlag Berlin Heidelberg,New York, 2006.
- [2] Devaney,Robert L., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems Second Edition*,
Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1989.
- [3] Harrison, F. Fiona, *Egyetemi jegyzet*,
URL: <http://www.srl.caltech.edu/phys106/p106b01/topic3.pdf>
- [4] Simon L. Péter, *Differenciálegyenletek és dinamikai rendszerek jegyzet*,
URL: <http://www.cs.elte.hu/~simonp/DinRJegyz/dinrendjegyzet.pdf>
- [5] Wikipedia, *Cantor halmaz*,
URL: <http://hu.wikipedia.org/wiki/Cantor-halmaz>