Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Függvények folytonosságával kapcsolatos tételek és ellenpéldák

BSc Szakdolgozat

Készítette: Nagy-Lutz Zsaklin
Matematika BSc, Matematikai elemző szakirány

Témavezető: Gémes Margit
Analízis tanszék

Budapest, 2014

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A szakdolgozatomban a függvények folytonosságával kapcsolatos főbb tételeket fogom ismertetni.

Az első fejezetben bevezetem a folytonosság definícióját és két példában ezt használom fel a folytonosság ellenőrzésére.

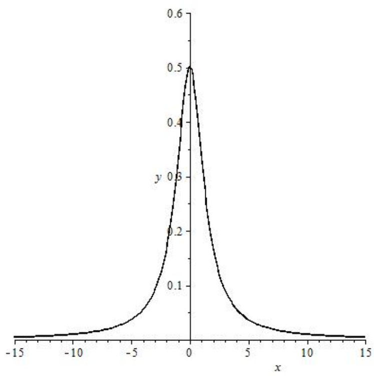
A következő négy fejezetben szerepel az átviteli elv, a korlátos, zárt intervallumban való folytonosság, az egyenletes folytonosság, illetve a monotonitás és folytonosság. Mindegyik témakörnél példákon keresztül mutatom be a tételeket. Egyes tételeknél ellenpéldák segítségével ismertetem, hogy a tétel feltételei nem hagyhatók el.

1. Függvény folytonossága

1.1. Definíció Legyen f értelmezve valamilyen a-t tartalmazó nyílt intervallumban. Az f függvény *folytonos* az a helyen, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik (ε-tól függő) $\delta > 0$, amelyre teljesül, hogy

$$| f(x) - f(a) | < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad | x - a | < \delta.$$

1.2. Példa olyan függvényre, amely az egész számegyenesen folytonos. Legyen $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$.



Bizonyítás. A 1.1 definíció alapján vizsgáljuk a folytonosságot egy tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ pontban.

$$| f(x) - f(a) | < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad | x - a | < \delta$$
$$\left| \frac{1}{x^2+2} - \frac{1}{a^2+2} \right| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad | x - a | < \delta$$

Először csak a két törtet nézzük. Közös nevezőre hozzuk, majd látható, hogy kiemelhető $(x - a)$:

$$\frac{1}{x^2+2} - \frac{1}{a^2+2} = \frac{a^2+2-x^2-2}{(x^2+2)(a^2+2)} = \frac{(a-x)(a+x)}{(x^2+2)(a^2+2)} = (x-a) \cdot \frac{(-1)(x+a)}{(x^2+2)(a^2+2)}$$

Ezután visszatérünk az eredeti feladatunkhoz:

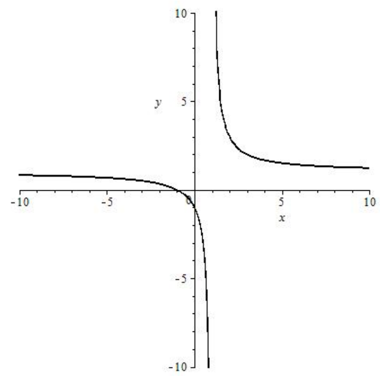
$$| x - a | \cdot \left| \frac{(-1)(x+a)}{(x^2+2)(a^2+2)} \right| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad | x - a | < \delta.$$

Ezt a törtet szeretnénk felülről becsülni, ezért a számlálót növelni, a nevezőt pedig csökkenteni kell. A feltétel az, hogy $| x - a | < \delta$, ami azt jelenti, hogy $x \in (a - \delta, a + \delta)$, vagyis $x < a + \delta$. Ha $\delta < 1$, akkor $x < a + 1$. Ezzel tudjuk a tört számláját felülről becsülni. A nevezőt pedig úgy csökkentjük, hogy az x^2-et tagot elhagyjuk.

$$| x - a | \cdot \frac{| (-1)(x+a) |}{(x^2+2)(a^2+2)} <| x - a | \cdot \frac{| (-1)(2a+1) |}{2(a^2+2)} < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad \delta < 1.$$

Így tehát látható, hogy $\delta = \min\left(1, \varepsilon \cdot \frac{2a^2+4}{2a+1}\right)$, vagyis a függvény folytonos az egész számegyenesen. $\square$

1.3. Példda[1] olyan függvényre, amely folytonos egy zárt intervallumban.
Legyen $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ és vizsgáljuk a folytonosságot az $a = 3$ pontban a $[2, 4]$ intervallumon.



Bizonyítás. A 1.1 definíció alapján adott pozitív ε-hoz olyan $\delta > 0$-t keresünk, mely esetén $| f(x) - f(a) |< \varepsilon, \quad \text{ha} \quad | x - a |< \delta$. Mivel a függvény nincs értelmezve 1-ben, 1-nél kisebb δ-t keresünk.

$$| f(x) - f(a) |< \varepsilon, \quad \text{ha} \quad | x - a |< \delta < 1$$

$$\left| \frac{x+1}{x-1} - \frac{a+1}{a-1} \right| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad | x - a |< \delta < 1$$

$$\left| \frac{x+1}{x-1} - 2 \right| = \left| \frac{-x+3}{x-1} \right| = \left| \frac{(-1)(x-3)}{x-1} \right| = \frac{| (-1)(x-3) |}{| x-1 |}$$

A nevező csökkentésével felülről becsüljük a törtet,tehát mivel a $[2, 4]$ intervallumon $1 \leq x - 1 \leq 3$, ezért

$$\frac{| (-1)(x-3) |}{3} \leq \frac{| (-1)(x-3) |}{| x-1 |} \leq \frac{| (-1)(x-3) |}{1} =| (-1)(x-3) |$$

Így tehát $| x - 3 |< \frac{\varepsilon}{|-1|}$, vagyis $\delta = \min(1, \varepsilon)$. $\square$

[1] [1], 127. oldal.

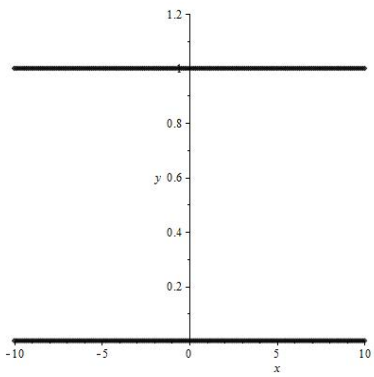
2. Átviteli elv

2.1. Tétel *(Átviteli elv)Az f függvény akkor és csak akkor folytonos az a pontban, ha értelmezve van az a pont környezetében, és minden $x_n \to a$ sorozatra $f(x_n) \to f(a)$.*

2.2. Példa olyan függvényre, amely mindenütt értelmezett, de sehol sem folytonos.

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases},$$

ahol a $D(x)$ függvény a *Dirichlet függvény.*



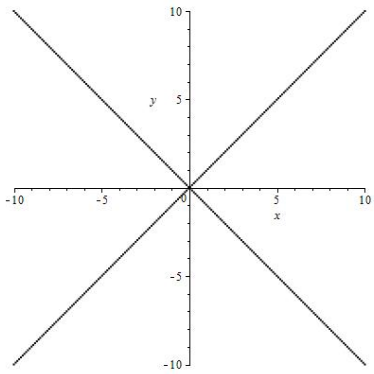
Bizonyítás. Amint látható, ez a függvény mindenhol értelmezett, hisz a racionális számok halmaza és irracionális számok halmaza együtt a valós számok halmazának felel meg ($\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$), viszont sehol sem folytonos.
Mivel minden intervallumban van racionális illetve irracionális szám, ezért nézzük a határértéket egy tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ pontban.
Legyen x_n egy olyan sorozat, amely a-hoz tart ($x_n \neq a$), és minden tagja racionális, illetve legyen x_k egy olyan sorozat, amely a-hoz tart ($x_k \neq a$), és minden tagja irracionális.
Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} D(x_n) = 1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{k\to\infty} D(x_k) = 0$$

Mivel $1 \neq 0$, így a 2.1 tétel nem teljesül, vagyis nem létezik $\lim\limits_{x\to a} D(x)$. Tehát a *Dirichlet-függvény* sehol sem folytonos. □

2.3. Példa olyan függvényre, amely csak egyetlen egy pontban folytonos.
Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ -x, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$



Bizonyítás. A 2.1 tétel szerint $f(x)$ pontosan akkor folytonos a-ban, ha minden $x_n \to a$ esetén $f(x_n) \to f(a)$.
Legyen minden k esetén $x_k \in \mathbb{Q}$ és $x_k \to a$, $x_k \neq a$. Ekkor $f(x_k) \to a$.
Legyen minden l esetén $x_l \notin \mathbb{Q}$ és $x_l \to a$, $x_l \neq a$. Ekkor $f(x_l) \to -a$.
Ezek alapján f csak akkor lehet folytonos a-ban, ha $a = -a$, vagyis $a = 0$, így tehát látható, hogy csak a 0 pontban folytonos a függvény. □

2.4. Példa olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, amely adott n esetén pontosan n ($n \in \mathbb{N}^+$) pontban folytonos.
Legyen

$$f(x) = \begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{n}(x-i), & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Bizonyítás. A függvény értéke az irracionális pontokban 0, az racionális pontokban pedig nem 0.
Legyen $x_k \in \mathbb{Q}, x_l \notin \mathbb{Q}$ sorozatok és nézzük a határértékeket.

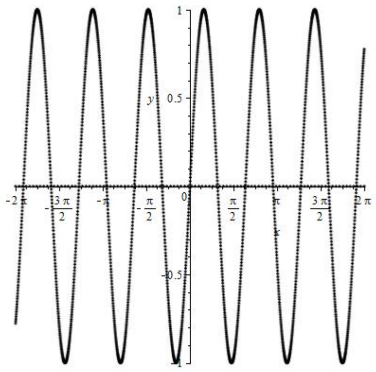
(a) $f(n) = 0$, ha $n \in \mathbb{Z}$ és így
ha $x_k \to n$, $x_k \neq n$, akkor $f(x_k) \to 0$, hiszen $f(x_k) = (x_k - 1)(x_k - 2) \cdot \cdots (x_k - n)$, és látható, hogy az egész számok a polinom gyökei. illetve ha $x_l \to n$, $x_l \neq n$, akkor $f(x_l) \to 0$.

(b) $a \neq n$, ahol a lehet racionális és irracionális szám is. Ebben az esetben: ha $x_k \to a$, akkor $f(x_k) \nrightarrow 0$, mivel a nem gyöke a polinomnak, illetve ha $x_l \to a$, akkor $f(x_l) \to 0$.

Ezek alapján csak az (a) esetben teljesül a 2.1 tétel, vagyis pontosan n ($n \in \mathbb{Z}$) pontban folytonos a függvény. □

2.5. Példa olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, amely csak az egész helyeken folytonos.
Legyen

$$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$



Bizonyítás. A függvény az irracionális pontokban 0, a racionális pontokban pedig nem 0.
Legyen $x_k \notin \mathbb{Q}, x_l \in \mathbb{Q}$ sorozatok és nézzük a határértékeket.

- $f(n) = 0$, ha $n \in \mathbb{Z}$ és így
  ha $x_k \to n$, $x_k \neq n$, akkor $f(x_k) \to 0$, illetve
  ha $x_l \to n$, $x_l \neq n$, akkor $f(x_l) = \sin \pi x_l \to 0$, hiszen $\sin \pi x_l = 0$ akkor és csak akkor, ha $\pi x_l = k\pi$ $(k = 1, 2, \dots) \Rightarrow x_l = k$ $(k = 1, 2, \dots)$.

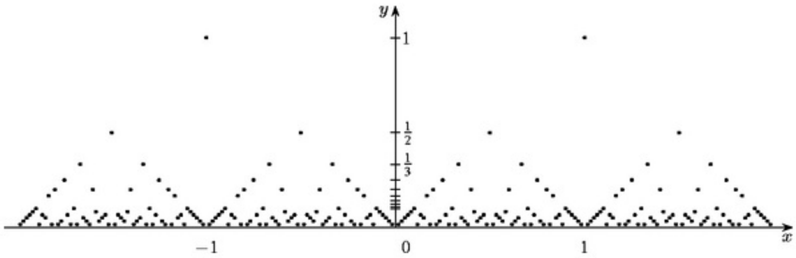
- $a \neq n$, ahol a lehet racionális és irracionális szám is. Ekkor
  ha $x_k \to a$, $k_x \neq a$, akkor $f(x_k) \to 0$, illetve
  ha $x_l \to a$, $x_l \neq a$, akkor $f(x_l) \nrightarrow 0$, hiszen különböző a értékekre az $f(x_l)$ értékekei a $[-1, 0)$, illetve a $(0, 1]$ intervallumból kerülnek ki.

Így tehát látható, hogy a függvény csak az egész helyeken folytonos. $\square$

2.6. Példa [2] A Riemann-függvény
Ez a függvény egy olyan mindenütt értelmezett függvény, amely csak az irracionális pontokban folytonos és minden racionális pontban szakad. Sajátossága még, hogy minden pontban van határértéke, ami 0. A lentebb található rajzon csak néhány pontot ábrázoltunk.

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ha } x = \frac{p}{q}, \quad q > 0, \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad (p, q) = 1 \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

[2] [1], 132. oldal.



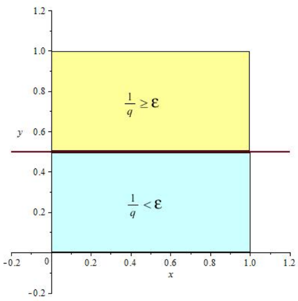
[3]

Bizonyítás. Először bebizonyítom, hogy a határérték létezik minden tetszőleges x_0 helyen, és értéke 0. Majd a 2.1 tétel alapján megnézem, hogy folytonos-e a függvény a racionális, illetve irracionális pontokban.

- $\lim\limits_{x \to x_0} R(x) = 0$ minden $x_0 \in \mathbb{R}$ számra.
  A *Riemann-függvény* periodikus, hiszen
  - ha $x \notin \mathbb{Q}$, akkor $x+1 \notin \mathbb{Q}$ is, és így $0 = R(x) = R(x+1)$.
  - ha $x \in \mathbb{Q}$, akkor $x+1 \in \mathbb{Q}$ is. Az $R(x)$ függvény definiálása miatt x felírható $\frac{p}{q}$ alakban. Tehát $x = \frac{p}{q}$ és $x + 1 = \frac{p}{q} + 1 = \frac{p+q}{q}$. Mivel $(p, q) = 1$, ezért $(p+q, q) = 1$ is, tehát ha $x \notin \mathbb{Q}$, $x+1 \notin \mathbb{Q}$, $x = \frac{p}{q}$ és $x + 1 = \frac{p+q}{q}$, akkor $\frac{1}{q} = R(x) = R(x+1) = \frac{1}{q}$.

  A *Riemann-függvény* periodikus, periódusa az 1.
  Vizsgáljuk a határértéket a $[0, 1]$ intervallumon (elég itt, hiszen periódusa az 1).
  Nézzük a határértéket egy tetszőleges $x_0 \in [0, 1]$ pontban. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített szám és keressük δ-t.
  Kell, hogy ha $0 <\mid x - x_0 \mid< \delta$, akkor $R(x) < \varepsilon$. (A függvény definíciója alapján $R(x) \geq 0$ mindig.)
  Minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan q_0 küszöbszám, amelyre teljesül, hogy ha $q > q_0$, akkor $\frac{1}{q} < \varepsilon$. Így $\frac{1}{q} < \frac{1}{q_0} < \varepsilon$. Legyen $q_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.
  Tehát ez azt jelenti, hogy véges sok $\frac{1}{q}$ alakú szám található ε felett, a többi $\frac{1}{q}$ alakú szám viszont az ε küszöb alatt és x_0 közelében helyezkedik el.

[3] Az ábra a http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=200041 honlapon található.



Mivel a $[0,1]$ intervallumban vagyunk, így minden $\frac{p}{q}$-ra igaz, hogy $0 \leq \frac{p}{q} \leq 1$. Ebből következik, hogy $0 \leq p \leq q$. Tehát egy darab q nevezőhöz maximum p darab számláló van $[0,1]$-en.
Olyan q nevező, amelyre igaz, hogy az általa meghatározott tört nagyobb mint ε, maximum q_0 darab lehet (mivel ha $q = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow \frac{1}{1} > \varepsilon, \frac{1}{2} > \varepsilon, \dots$ és $\frac{1}{q_0} < \varepsilon, \frac{1}{q_0+1} < \varepsilon, \dots$), illetve minden nevezőhöz maximum q_0 darab számláló lehetséges. Így maximum q_0^2 helyen vehet fel az $R(x)$ függvény ε-nál nagyobb értéket, tehát tudok mondani jó δ-t, hiszen a véges sok $\frac{p}{q}$ alakú szám közül lesz x_0-hoz legközelebbi, jelöljük ezt $\frac{p^*}{q^*}$-gal. A $\delta = \frac{|x_0 - \frac{p^*}{q^*}|}{2}$ választás jó lesz. Vagyis $\lim_{x \to x_0} R(x) = 0$ minden $x_0 \in \mathbb{R}$ számra.

- Vizsgáljuk a határértéket egy tetszőleges $a \notin \mathbb{Q}$ pontban. Ha $a \notin \mathbb{Q}$, akkor $R(a) = 0$. Mivel ε felett csak véges sok szám található, ezért azok között lesz olyan, amely legközelebb esik az a ponthoz, így ha a δ-t ennél kisebbre választjuk, akkor folytonos lesz a függvény minden $a \notin \mathbb{Q}$ pontban.

- Vizsgáljuk a határértéket egy tetszőleges $a \in \mathbb{Q}$ pontban. Ha $a \in \mathbb{Q}$, akkor $R(a) > 0$. Vegyünk egy olyan x_k sorozatot, aminek minden tagja irracionális és tart az a számhoz. Tehát $x_k \notin \mathbb{Q}$, és $x_k \to a$, ekkor $R(x_k) = 0$, ez pedig tart 0-hoz. Mivel $0 \neq R(a)$, ezért nem teljesül a 2.1 tétel.

Így tehát látható, hogy a *Riemann-függvény* folytonos az irracionális pontokban és nem folytonos a racionális pontokban. $\square$

3. Korlátos, zárt intervallumban folytonos függvények

3.1. Definíció Legyen f értelmezve egy $[a, b)$ intervallumban. Az f függvény *jobbról folytonos* az a helyen, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy

$$| f(x) - f(a) | < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad 0 \leq x - a < \delta.$$

Az f függvény *balról folytonos* az a helyen, ha értelmezve van egy $(c, a]$ intervallumban, és ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, amelyre teljesül, hogy

$$| f(x) - f(a) | < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad 0 \leq a - x < \delta.$$

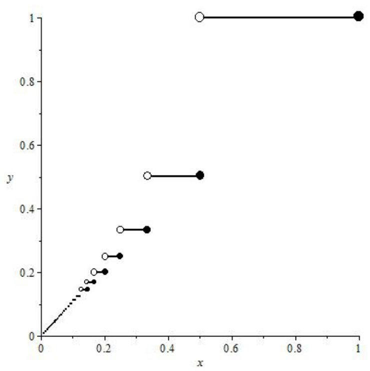
3.2. Definíció Legyen $a < b$. Az f függvény *folytonos az* $[a, b]$ *intervallumban*, ha minden $x \in (a, b)$ helyen folytonos, továbbá a-ban jobbról, b-ben pedig balról folytonos.

Jelölés : $C[a, b]$: az $[a, b]$ korlátos zárt intervallumban folytonos függvények összessége.

3.3. Tétel *Ha* $f \in C[a, b]$, *akkor* f korlátos $[a, b]$*-ben.*

3.4. Példa [4] olyan függvényre, amely egy korlátos, zárt intervallumban végtelen sok helyen szakad.
Legyen $f = [0, 1] \to \mathbb{R}$ és

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}.$$



[4] [6], 134. oldal

Bizonyítás. A függvény az $\frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ alakú pontokban fog szakadni. Két különböző alakú intervallumon kellene megvizsgálni a függvény értékét. Az egyik az $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ alakú intervallum, itt az $\frac{1}{n}$ pont bal oldali folytonosságának vizsgálata, illetve az $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right)$ alakú intervallum, ahol az $\frac{1}{n}$ pont jobb oldali folytonosságának vizsgálata történne.

- Vegyük először az $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right)$ alakú intervallumot:
  Ha $x \in \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right)$, akkor $\frac{1}{x} \in (n-1, n)$, és így $\left[\frac{1}{x}\right] = n-1$. A függvény az $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right)$ alakú intervallumon mindig $\frac{1}{n-1}$ értéket fog felvenni, tehát $f(x) = \frac{1}{n-1}$, ha $x \in \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right)$.

Ez alapján az $\frac{1}{n}$ alakú pont az $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ alakú intervallumon $\frac{1}{n}$ értéket fog felvenni, tehát $f(x) = \frac{1}{n}$, ha $x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$.
Most nézzük a függvény helyettesítési értékét $\frac{1}{n}$-ben:

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\left[\frac{1}{1/n}\right]} = \frac{1}{[n]} = \frac{1}{n}, \quad \text{ha } n = 1, 2, 3, \cdots$$

Legvégül a függvény féloldali határértékeit megvizsgáljuk meg $\frac{1}{n}$-ben:

- jobb oldali határértéke $f(x)$-nek: $\lim\limits_{x \to \frac{1}{n}+0} f(x) = \frac{1}{n-1}$, $n = 2, 3, 4, \cdots$

- bal oldali határértéke $f(x)$-nek: $\lim\limits_{x \to \frac{1}{n}-0} f(x) = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$

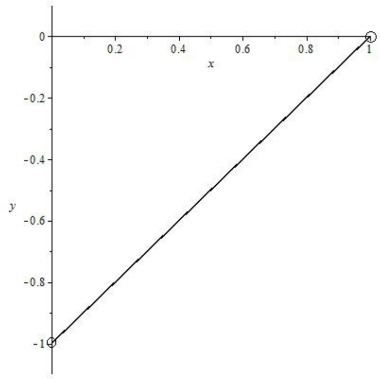
A féloldali határértékek nem egyeznek meg az $\frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ pontokban, így beláttuk, hogy végtelen sok helyen szakad a függvény. □

3.1. Weierstrass tétele

3.5. Tétel *(Weierstrass tétele). Ha $f \in C[a, b]$, akkor van olyan $\alpha \in [a, b]$ és $\beta \in [a, b]$, amelyekre teljesül,hogy $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ minden $x \in [a, b]$-re. Más szóval, egy korlátos, zárt intervallumban folytonos függvénynek mindig van abszolút maximuma és abszolút minimuma.*

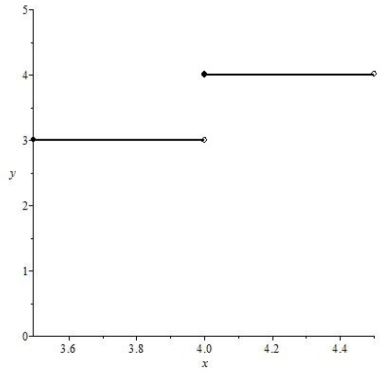
3.6. Példa [5] olyan függvényre, amelyiknek korlátos intervallumon nincs maximuma.
Legyen $I = (0, 1)$ és $f(x) = x - 1$ $(x \in I)$.

[5] A feladat a [3] irodalomban található.



Bizonyítás. Indirekt módon fogunk bizonyítani.
Tegyük fel, hogy az f függvénynek van maximuma a $(0, 1)$ intervallumon, legyen ez $f(x_0)$, $x_0 \in (0, 1)$. Mivel $x_0 < \frac{x_0+1}{2} < 1$, ezért $f(x_0) < f\left(\frac{x_0+1}{2}\right)$, vagyis semmilyen $x_0 \in (0, 1)$ számra $f(x_0)$ nem maximuma az $f(x) = x - 1$ függvénynek. $\square$

3.7. Példa olyan függvényre, amely nem folytonos az $[a, b]$ intervallumon, viszont van minimuma is és maximuma is $[a, b]$-n.
Legyen $f(x) = [x]$ és $[a, b] = [3.5, 4.5]$



Bizonyítás. Az $[x]$ az az egész szám, amelyre teljesül, hogy $x - 1 < [x] \leq x$. Tehát a függvény minimuma a meghatározott intervallum legkisebb elemének egészrésze lesz, vagyis $f(3.5) = 3$, illetve a maximuma a legnagyobb elem egészrésze lesz, vagyis $f(4.5) = 4$. $\square$

3.8. Állítás Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ha minden $x \in [a, b]$ esetén $f(x) > 0$, akkor van olyan $c > 0$, hogy minden $x \in [a, b]$ esetén $f(x) > c$.

Bizonyítás. A 3.5 tétel alapján létezik olyan $\alpha, \beta \in [a, b]$, amelyre teljesül, hogy $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$. Mivel minden $x \in [a, b]$-re $f(x) > 0$, ezért

$0 < f(\alpha) \le f(x) \le f(\beta)$. Legyen $c = \frac{f(\alpha)}{2}$, ez egy pozitív szám, hiszen $f(\alpha) > 0$. Így tehát létezik olyan $c > 0$, hogy minden $x \in [a,b]$ esetén $f(x) > c$. $\square$

3.9. Állítás Legyen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ha minden $x \in [a,b]$ esetén $f(x) > g(x)$, akkor van olyan $c > 0$, hogy minden $x \in [a,b]$ esetén $f(x) - g(x) > c$.

Bizonyítás.
$f(x) > g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) > 0$.
Legyen $h(x) = f(x) - g(x)$.
Így a feladatunk az, hogy minden $x \in [a,b]$ esetén $h(x) > c$.
A 3.8 példa és a 3.5 tétel alapján oldjuk meg ezt a feladatot. Mivel minden $x \in [a,b]$ esetén $h(x) > 0$, ezért létezik olyan $\alpha, \beta \in [a,b]$, amelyre
$0 < h(\alpha) \le h(x) \le h(\beta)$. A $c = \frac{h(\alpha)}{2} > 0$ megválasztással pedig teljesül, hogy létezik olyan $c > 0$, hogy minden $x \in [a,b]$ esetén $f(x) - g(x) > c$. $\square$

3.2. Bolzano-Darboux-tétel

3.10. Tétel *(Bolzano-Darboux-tétel). Ha $f \in C[a,b]$, akkor f az $[a,b]$ intervallumban felvesz minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket.*

3.11. Állítás [6] Legyen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos és legyen $f(0) = f(1)$. Ekkor létezik $c \in [0,1]$, amelyre teljesül, hogy $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.

Bizonyítás. Legyen $h(x) = f\left(x + \frac{1}{2} - f(x)\right)$ és vizsgáljuk $h(x)$-et a $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ intervallumon. Mivel $f(x)$ folytonos függvény, ezért $h(x)$ is folytonos függvény.

$$h(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)$$
$$h\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Mivel $f(0) = f(1)$, ezért

$$f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right) = -h(0).$$

[6] [5], 103. oldal

- $h(0) = 0$, ekkor

$$f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) = 0$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0)$$
$$\Downarrow$$
$$c = \frac{1}{2}$$

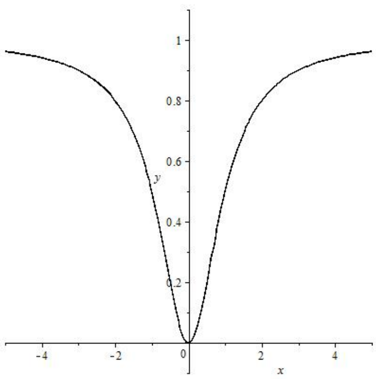
- $h(0) \neq 0$, ekkor $h(0)$ és $h\left(\frac{1}{2}\right)$ különböző előjelű, vagyis létezik $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, hogy $h(c) = 0$.

$\square$

3.12. Következmény (A *Weierstrass-tétel* és a *Bolzano-Darboux-tétel* következménye)
Ha $f \in C[a,b]$, akkor f értékkészlete $[a,b]$-n egy korlátos, zárt intervallum, mégpedig

$$f([a,b]) = \left[\min_{x\in[a,b]} f(x), \max_{x\in[a,b]} f(x)\right]$$

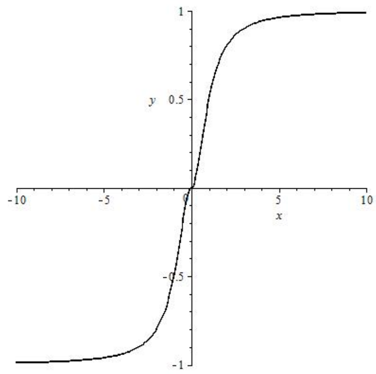
3.13. Példa [7] olyan függvényre, amelyik $\mathbb{R}$-en folytonos, van minimuma, de nincs maximuma.
Legyen $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$.



Bizonyítás. Tudjuk, hogy $x^2 < x^2 + 1$. Mivel $\mathbb{R}$ nem korlátos, így nincs legnagyobb eleme. Tudjuk még, hogy $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, és $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$.
Mivel $x^2 < x^2 + 1$ így a függvényérték mindig kisebb, mint 1. Tehát ennek a függvénynek az I intervallumon nincs maximuma.
$\square$

[7] [3], 23. oldal

3.14. Példa olyan függvényre, amelyik $\mathbb{R}$-en korlátos, de sem minimuma sem maximuma nincs.
Legyen $f(x) = \operatorname{sgn} x \cdot \frac{x^2}{x^2+1}$.



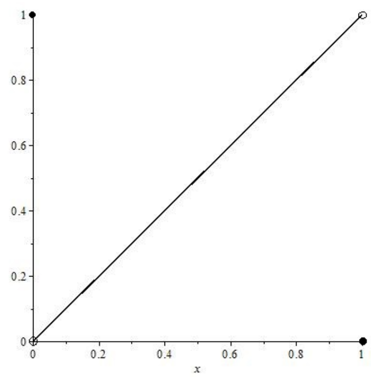
Bizonyítás. A bizonyítás a $\operatorname{sgn} x$ értékétől függően fog történni.

- $\operatorname{sgn}(x) = 1$, ha $x \geq 0$, így a függvény a $[0, \infty)$ intervallumon tart 1-hez, hiszen $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1, x \in [0, \infty)$. Mivel $\mathbb{R}$ nem korlátos, így nincs legnagyobb eleme, és $x^2 < x^2 + 1$, ezért a függvény érték mindig kisebb lesz, mint 1.
- $\operatorname{sgn}(x) = -1$, ha $x < 0$, így a függvény $(-\infty, 0)$ intervallumon tart -1-hez, hiszen $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -\frac{x^2}{x^2+1} = -1$. Mivel $\mathbb{R}$ nem korlátos, így nincs legkisebb eleme, és $x^2 < x^2+1$, ezért a függvény érték mindig nagyobb lesz, mint -1.

Így tehát látható, hogy sem minimuma, sem pedig maximuma nincs a függvénynek $\mathbb{R}$-en. $\square$

3.15. Példa olyan nem folytonos függvényre, amely a $[0, 1]$ intervallumon felvesz minden $f(0)$ és $f(1)$ közötti értéket.
Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 0 \\ x, & \text{ha } 0 < x < 0 \\ 0, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$



Bizonyítás. A függvény nem folytonos, hiszen az $x = 0$ és $x = 1$ helyen szakadása van. Viszont az $f(x) = x$ függvény a $(0, 1)$ intervallumon felvesz minden értéket, és a függvény definiálása miatt felveszi még az 0 és 1 értéket is. Így tehát nem folytonos a függvény és mégis felvesz minden értéket a $[0, 1]$ intervallumon. $\square$

3.16. Állítás Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor van olyan $c \in [a, b]$, hogy $f(c) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

Bizonyítás. A 3.10 tétel alapján, ha f folytonos függvény az $[a, b]$ intervallumon, akkor f felvesz $[a, b]$-n minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket. Tudjuk még, hogy két szám számtani közepe a két szám között szerepel (ha $x_1 \leq x_2$, akkor $x_1 \leq \frac{x_1+x_2}{2} \leq x_2$, illetve ha $x_1 \geq x_2$, akkor $x_1 \geq \frac{x_1+x_2}{2} \geq x_2$), tehát ha $f(a) \leq f(b)$, akkor $f(a) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \leq f(b)$, illetve ha $f(a) \geq f(b)$, akkor $f(a) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2} \geq f(b)$, így van olyan $c \in [a, b]$, hogy $f(c) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$. $\square$

3.17. Állítás Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, illetve $f(a) > 0, f(b) > 0$. Ekkor van olyan $c \in [a, b]$, hogy $f(c) = \sqrt{f(a) \cdot f(b)}$.

Bizonyítás. Ismét a 3.10 tétel alapján tudjuk, hogy ha f folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor f felvesz $[a, b]$-n minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket, és tudjuk még, hogy két pozitív szám mértani közepe a két szám között van (ha $x_1 \leq x_2$, akkor $x_1 \leq \sqrt{x_1 \cdot x_2} \leq x_2$, illetve ha $x_1 \geq x_2$, akkor $x_1 \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2} \geq x_2$), így tehát ha $f(a) \leq \sqrt{f(a) \cdot f(b)} \leq f(b)$, illetve ha $f(a) \geq f(b)$, akkor $f(a) \geq \sqrt{f(a) \cdot f(b)} \geq f(b)$. Tehát van olyan $c \in [a, b]$, amelyre $f(c) = \sqrt{f(a) \cdot f(b)}$. $\square$

3.18. Állítás [8] Legyen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ két folytonos függvény. Tudjuk még, hogy $f(a) > g(a)$ és $f(b) < g(b)$. Mutassuk meg, hogy van olyan $x_0 \in [a, b]$, amelyre teljesül, hogy $f(x_0) = g(x_0)$.

Bizonyítás. Legyen $h(x) = f(x) - g(x)$. Ekkor $h(a) > 0$, illetve $h(b) < 0$. Mivel $h(x)$ függvény folytonos, ezért valahol felveszi a nulla értéket, ekkor pedig $h(x) = 0 = f(x) - g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$. Tehát van olyan $x_0 \in [a, b]$, amelyre teljesül, hogy $f(x_0) = g(x_0)$. $\square$

[8] [4], 25. oldal

4. Egyenletes folytonosság

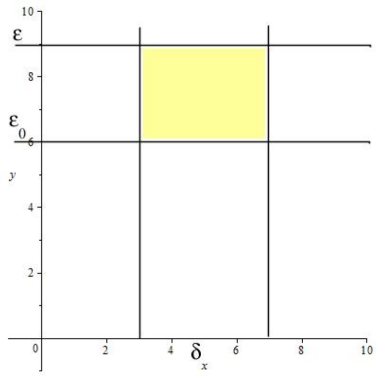
4.1. Definíció Az f függvény *egyenletesen folytonos* az I intervallumban, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik (közös, azaz a helytől független) $\delta > 0$, amelyre teljesül, hogy

$$\text{ha} \quad x_0, x_1 \in I \quad \text{és} \quad |\, x_1 - x_0 \,| < \delta, \quad \text{akkor} \quad |\, f(x_1) - f(x_0) \,| < \varepsilon.$$

4.1. Heine-tétel

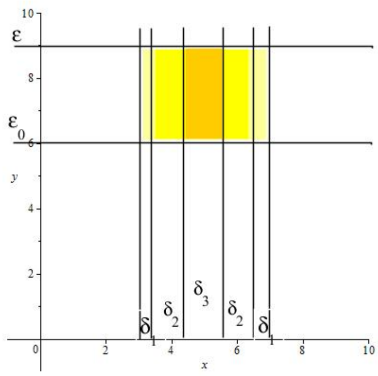
4.2. Tétel *(Heine-tétel). Ha $f \in C[a,b]$, akkor f egyenletesen folytonos $[a,b]$-ben.*

Bizonyítás. A tételt indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy f nem egyenletesen folytonos az $[a,b]$ intervallumon. Tehát létezik egy $\varepsilon_0 > 0$, amelyhez nem létezik $\delta > 0$, amelyre teljesülne a 4.1 definíció. Vagyis van olyan $x_0, x_1 \in [a,b]$, amelyre $|\, x_1 - x_0 \,| < \delta$ és $|\, f(x_1) - f(x_0) \,| \geq \varepsilon_0$.



Legyen $\delta_n = \frac{1}{n}$, ekkor ezzel a választással sem teljesül, vagyis minden n-re létezik olyan $\alpha_n \in [a,b]$ és $\beta_n \in [a,b]$, amelyre igaz, hogy

$$|\, \alpha_n - \beta_n \,| < \frac{1}{n} \quad \text{és} \quad |\, f(\alpha_n) - f(\beta_n) \,| \geq \varepsilon_0.$$



Amint látható a rajzon δ_n egyre kisebb, de ekkor még mindig igaz, hogy $| f(\alpha_n) - f(\beta_n) | \geq \varepsilon_0$.
Mivel $\{\alpha_n\} \subset [a, b]$, tehát $a \leq \alpha_n \leq b$, minden n-re, ezért létezik[9] egy (α_{nk}) konvergens részsorozat, melynek határértéke α és $\alpha \in [a, b]$. A β_n sorozatnak is van egy konvergens részsorozata, $\{\beta_{nk}\}$, amelynek határértéke:

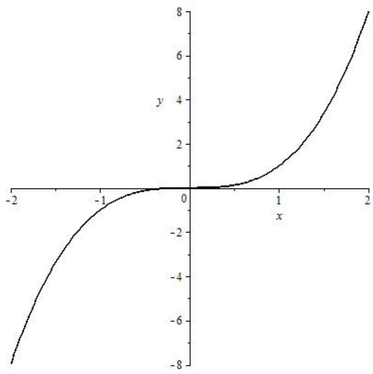
$$\beta_{nk} = (\beta_{nk} - \alpha_{nk}) + \alpha_{nk} \to 0 + \alpha = \alpha,$$

mivel $| \alpha_n - \beta_n | < \frac{1}{n} \to 0$, ha $n \to \infty$, így $| \alpha_n - \beta_n | \to 0$, ha $n \to \infty$.
Mivel f folytonos $[a, b]$-ben, így $\alpha \in [a, b]$-ben is folytonos. Az átviteli elv szerint $f(\alpha_{nk}) \to f(\alpha)$ és $f(\beta_{nk}) \to f(\alpha)$. Ezek alapján

$$\lim_{k \to \infty} | f(\alpha_{nk}) - f(\beta_{nk}) | = | \alpha - \alpha | = 0,$$

ami pedig ellentmond a korábban feltett $| f(\alpha_n) - f(\beta_n) | \geq \varepsilon_0 > 0$ egyenletnek. $\square$

4.3. Példda [10] olyan függvényre, amely egyenletesen folytonos egy intervallumon.
Legyen $f(x) = x^3$ és $I = [-2, 2]$.



Bizonyítás. Ahhoz, hogy lássuk, hogy ez a függvény egyenletesen folytonos a $[-2, 2]$ intervallumon, ellenőrizni kell a 4.2 tételben szereplő feltételt, miszerint a függvény folytonos. Ehhez meg kell nézni egy tetszőleges $a \in [-2, 2]$ pontban a folytonosságot, a -2 pontban azt, hogy jobbról folytonos, illetve a 2 pontban azt, hogy balról folytonos a függvény.

- Az $f(x) = x^3$ függvény folytonos egy tetszőleges $a \in [-2, 2]$ pontban, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, amelyre teljesül, hogy

$$| f(x) - f(a) | < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad | x - a | < \delta.$$

[9] *Bolzano-Weierstrass tétel: Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.*
[10] [1], 165. oldal.

$| f(x)-f(a) |=| x^3-a^3 |=| x-a | \cdot | x^2+ax+a^2 |\leq \varepsilon, \quad \text{ha} \quad | x-a |< \delta.$

A háromszög-egyenlőtlenség[11] miatt ez felülről becsülhető:

$$| x-a | \cdot | x^2+ax+a^2 |\leq| x-a | \cdot(| x^2 | + | ax | + | a^2 |).$$

Mivel $a, x \in [-2, 2]$, ezért ismét tudunk felülről becsülni:

$$\begin{aligned} | x-a | \cdot(| x^2 | + | ax | + | a^2 |) &\leq \varepsilon, \quad \text{ha} \quad | x-a |< \delta \\ | x-a | \cdot(| 2^2 | + | 2 \cdot 2 | + | 2^2 |) &\leq \varepsilon, \quad \text{ha} \quad | x-a |< \delta \\ 12 \, | x-a | &\leq \varepsilon, \quad \text{ha} \quad | x-a |< \delta \\ | x-a | &\leq \frac{\varepsilon}{12}, \quad \text{ha} \quad | x-a |< \delta \end{aligned}$$

Tehát $\delta = \frac{\varepsilon}{12}$, vagyis a függvény a $[-2, 2]$ intervallumon folytonos.

- Az $f(x) = x^3$ függvény jobbról folytonos a -2 helyen, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy

  $$| f(x) - f(a) |< \varepsilon, \quad \text{ha} \quad 0 \leq x - a < \delta.$$

  $$| x^3 - (-2)^3 |< \varepsilon, \quad \text{ha} \quad 0 \leq x - (-2) < \delta.$$

  Az előző becslést felhasználva:

  $$| x^3 - (-2)^3 |\leq 12 \cdot | x - (-2) |< \varepsilon, \quad \text{ha} \quad 0 \leq x - (-2) < \delta.$$

  Tehát $0 \leq \delta = \frac{\varepsilon}{12}$, vagyis a függvény jobbról folytonos -2-ben.

- Az $f(x) = x^3$ függvény balról folytonos a 2 helyen, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy

  $$| f(x) - f(a) |< \varepsilon, \quad \text{ha} \quad 0 \leq a - x < \delta.$$

  $$| x^3 - 2^3 |< \varepsilon, \quad \text{ha} \quad 0 \leq 2 - x < \delta.$$

  Az előző becslést felhasználva és egy kicsit módosítva:

  $$| x^3 - 2^3 |=| (x-a)(x^2+ax+a^2) |=| (-1)(a-x)(x^2+ax+a^2) |\leq$$

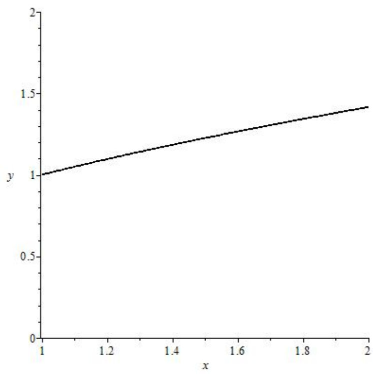
  $$\leq| a-x | \cdot(| -x^2 | + | -ax | + | -a^2 |) \leq 12 \cdot | 2-x |< \varepsilon, \quad \text{ha} \quad 0 \leq 2-x < \delta.$$

  Tehát $0 \leq \delta = \frac{\varepsilon}{12}$, vagyis a függvény balról folytonos 2-ben.

Ezek alapján beláttuk, hogy a függvény a $[-2, 2]$ intervallumon folytonos, tehát a 4.2 tétel alapján egyenletesen folytonos. □

[11] *Háromszög-egyenlőtlenség:* $a, b \in \mathbb{R} :| a + b |\leq| a | + | b |$

4.4. Példa olyan függvényre, amely egyenletesen folytonos egy intervallumon.
Legyen $f(x)=\sqrt{x}$ és $I=[1,2]$.



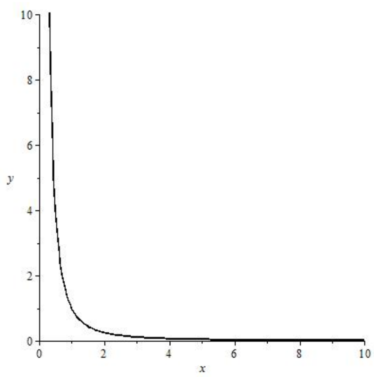
Bizonyítás. Most a 4.2 tétel felhasználása nélkül fogjuk bizonyítani az egyenletes folytonosságot.
Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Olyan $\delta > 0$-t keresünk, amely minden $x, y \in [1,2]$ esetén, ha $| x-y |< \delta$, akkor $| f(x)-f(y) |< \varepsilon$.

$$| \sqrt{x}-\sqrt{y} |= \frac{| x-y |}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} < \frac{| x-y |}{1+1} = \frac{1}{2}\cdot | x-y |$$

$$\frac{1}{2}\cdot | x-y |< \varepsilon, \quad \text{ha} \quad | x-y |< \delta$$
$$| x-y |< 2\varepsilon, \quad \text{ha} \quad | x-y |< \delta.$$

Tehát a $\delta = 2\varepsilon$ jó, vagyis a függvény egyenletesen folytonos. □

4.5. Példa [12] olyan függvényre, amely nem egyenletesen folytonos $(0,1)$-ben, de egyenletesen folytonos $[1,+\infty)$-ben.
Legyen $f(x)=\frac{1}{x^2}$ és $I_1=(0,1), I_2=[1,+\infty)$.



[12] [1], 165. oldal.

Bizonyítás.

- Tekintsük először az $I_1 = (0, 1)$ intervallumot.
  Megmutatjuk, hogy $\varepsilon = 1$-hez nincs jó δ, azaz minden $\delta > 0$-hoz van olyan $x_0, x_1 \in (0, 1)$, amelyre $\mid x_1 - x_0 \mid < \delta$ és $\left|\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_0^2}\right| > 1$.
  Legyen $\delta < 1$, $x_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ és legyen $x_0 = x_1 + \frac{\delta}{2}$.

  $$\left|\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_0^2}\right| = \left|\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{\left(x_1 + \frac{\delta}{2}\right)^2}\right| = \left|\frac{\left(x_1 + \frac{\delta}{2}\right)^2 - x_1^2}{x_1^2 \cdot \left(x_1 + \frac{\delta}{2}\right)^2}\right| = \left|\frac{\delta x_1 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2}{x_1^2 \cdot \left(x_1 + \frac{\delta}{2}\right)^2}\right|$$

  Ezt a törtet úgy fogjuk csökkenteni, hogy a számlálóból elhagyjuk δx_1-et, illetve a nevezőt növeljük. Mivel $x_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, és $\delta < 1$, ezért $\left(x_1 + \frac{\delta}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 < 2$.
  Ezért
  $$\left|\frac{\delta x_1 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2}{x_1^2 \cdot \left(x_1 + \frac{\delta}{2}\right)^2}\right| > \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}{x_1^2 \cdot 2} > 1, \quad \text{ha} \quad x_1^2 < \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}{2}$$

  Tehát az $f(x) = \frac{1}{x^2}$ függvény a $(0, 1)$ intervallumon nem egyenletesen folytonos, mivel δ függ x_1-től, így látható, hogy nincs helytől független $\delta > 0$.

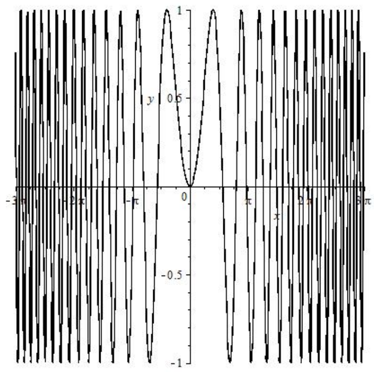
- Most pedig az $I_2 = [1, \infty)$ intervallumot nézzük.
  Azt bizonyítjuk, hogy létezik olyan K küszöbszám, amelyre minden $x > K$ esetén $f(x) < \varepsilon$. Így tehát minden $x_1, x_2 > K$ esetén $\mid f(x_1) - f(x_2) \mid < \varepsilon$.

  $$\begin{aligned} f(x) &< \varepsilon \\ \frac{1}{x^2} &< \varepsilon \\ x^2 &> \frac{1}{\varepsilon} \\ x &> \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \end{aligned}$$

  Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Tehát $K = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, vagyis ettől az értéktől kezdve minden $x \in [K, \infty)$-re $f(x) < \varepsilon$, így minden $\delta > 0$ jó. Az $\frac{1}{x^2}$ függvény folytonos az $[1, K]$ intervallumon, így ott a 4.2 tétel miatt van jó δ az adott ε-hoz. Ez a δ tehát az egész $[1, \infty)$ intervallumon jó lesz.

□

4.6. Példa olyan függvényre, amely nem egyenletesen folytonos $(-\infty, \infty)$-ben.
Legyen $f(x) = \sin x^2$.

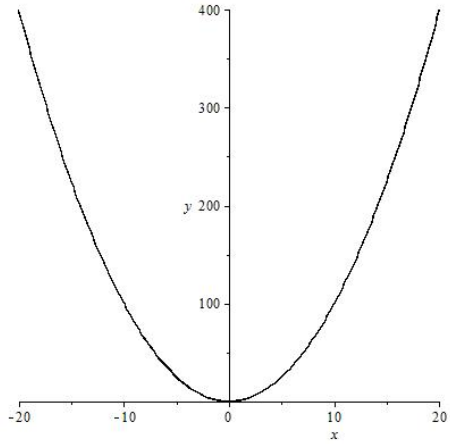


Bizonyítás. Legyen $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Megmutatjuk, hogy minden $\delta > 0$ esetén van olyan $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, amelyre $\mid x_1 - x_0 \mid < \delta$ és $\mid f(x_1) - f(x_0) \mid > \frac{1}{2}$.
Legyen $x_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, k = 0, 1, \ldots$, és $x_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi}, k = 0, 1, \ldots$.
Ekkor

$$
\begin{aligned}
\mid \sin(x_1^2) - \sin(x_0^2) \mid > \frac{1}{2} &\quad \text{és} \quad \mid x_1 - x_0 \mid < \delta \\
\mid 1 - (-1) \mid > \frac{1}{2} &\quad \text{és} \quad \mid x_1 - x_0 \mid < \delta \\
2 > \frac{1}{2} &\quad \text{és} \quad \mid x_1 - x_0 \mid < \delta
\end{aligned}
$$

Tehát nem teljesül a 4.2 tétel, miszerint minden ε-hoz létezik egy helytől független $\delta > 0$, vagyis a függvény nem egyenletesen folytonos a $(-\infty, \infty)$ intervallumon. $\square$

4.7. Példa [13] olyan függvényre, amely folytonos $(-\infty, \infty)$-ben, de nem egyenletesen folytonos.
Legyen $f(x) = x^2$.



Bizonyítás.

- Az $f(x) = x^2$ függvény folytonos egy tetszőleges $a \in (-\infty, \infty)$ pontban, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, amelyre teljesül, hogy
$$\mid f(x) - f(a) \mid < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad \mid x - a \mid < \delta.$$
$$\mid f(x)-f(a) \mid = \mid x^2-a^2 \mid = \mid x-a \mid \cdot \mid x+a \mid < \mid x-a \mid \cdot 2 \mid a \mid, \quad \text{ha} \quad x < a$$
$$\mid x - a \mid < \frac{\varepsilon}{2 \mid a \mid}, \quad \text{ha} \quad x < a.$$
Ezek alapján $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2|a|}\right)$, ha $x < a$, vagyis a függvény folytonos egy tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ pontban.

- Ismét a 4.2 tétel felhasználása nélkül fogjuk bizonyítani, hogy nem egyenletesen folytonos a $(-\infty, \infty)$ intervallumon.
Legyen $\varepsilon = 1$. Megmutatjuk, hogy minden $\delta > 0$ esetén van olyan $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, amelyre $\mid x_1 - x_0 \mid < \delta$ és $\mid x_1^2 - x_0^2 \mid > 1$.
Legyen $x_1 > 0$ és legyen $x_0 = x_1 + \frac{\delta}{2}$. Ekkor
$$\mid x_1 - x_0 \mid = \left| x_1 - \left(x_1 - \frac{\delta}{2}\right)\right| = \frac{\delta}{2} < \delta.$$
$$\mid x_1^2 - x_0^2 \mid = \left| x_1^2 - \left(x_1 + \frac{\delta}{2}\right)^2 \right| = \left| -\delta x_1 - \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \right| = \left| (-1)\left(\delta x_1 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2\right)\right| \geq {}^{14}$$

[13] [1], 164. oldal
[14] *Háromszög-egyenlőtlenség*

$$\geq \mid (-1)(\delta x_1) \mid + \left| (-1)\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \right| > \mid \delta x_1 \mid = \delta x_1.$$

Tehát

$$\delta x_1 > \varepsilon = 1, \quad \text{ha} \quad \mid x_1 - x_0 \mid < \delta$$
$$x_1 > \frac{1}{\delta}, \quad \text{ha} \quad \mid x_1 - x_0 \mid < \delta$$

Ismét azt kaptuk, hogy δ x_1-től függ, tehát nincs olyan $\delta > 0$, amely helytől függetlenül jó lenne minden $\varepsilon > 0$-hoz.

□

4.8. Definíció Az f függvény *Lipschitz-tulajdonságú* (röviden Lipschitz) az A halmazon, ha van olyan $K \geq 0$ konstans, hogy

$$\mid f(x_1) - f(x_0) \mid \leq K \cdot \mid x_1 - x_0 \mid$$

minden $x_0, x_1 \in A$-ra.

4.9. Állítás [15] Az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény *Lipschitz* tulajdonságú az $[a, b]$ intervallumon, ahol $a > 0$.

Bizonyítás. A 4.8 definíciót felhasználva és $x_0 = a, x_1 = b$ megválasztás mellett :

$$\mid f(b) - f(a) \mid \leq K \cdot \mid b - a \mid$$
$$\mid \sqrt{b} - \sqrt{a} \mid \leq K \cdot \mid b - a \mid$$

Mivel $\sqrt{b} - \sqrt{a} = (\sqrt{b} - \sqrt{a}) \cdot \frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} = \frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} = (b - a) \cdot \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$, így

$$\mid \sqrt{b} - \sqrt{a} \mid \leq K \mid b - a \mid$$
$$\mid b - a \mid \cdot \mid \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} \mid \leq K \cdot \mid b - a \mid$$

Tehát ebből a felbontásból látható, hogy $K = \mid \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} \mid$, vagyis az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény az $[a, b]$ intervallumon *Lipschitz* tulajdonságú. □

[15] [1], 166. oldal.

4.10. Állítás [16] Két *Lipschitz* tulajdonságú függvény összege is *Lipschitz* tulajdonságú.
Legyen f és g *Lipschitz* tulajdonságú.

Bizonyítás. Ha f *Lipschitz* tulajdonságú, akkor a 4.8 definíció alapján létezik olyan $K \geq 0$, amelyre teljesül, hogy $\mid f(x_1) - f(x_0) \leq K \cdot \mid x_1 - x_0 \mid$.
Ha g *Lipschitz* tulajdonságú, akkor a 4.8 definíció alapján létezik olyan $L \geq 0$, amelyre teljesül, hogy $\mid g(x_1) - g(x_0) \leq L \cdot \mid x_1 - x_0 \mid$.
$\mid f(x_1) - f(x_0) \mid + \mid g(x_1) - g(x_0) \mid \geq$ [17] $\mid f(x_1) - f(x_0) + g(x_1) - g(x_0) \mid =$
$= \mid (f+g)(x_1) - (f+g)(x_0) \mid$.
$K \cdot \mid x_1 - x_0 \mid + L \cdot \mid x_1 - x_0 \mid = (K+L) \cdot \mid x_1 - x_0 \mid$.
Legyen az $f + g = h$, így létezik olyan $H \geq 0$, amelyre teljesül, hogy $\mid h(x_1) - h(x_0) \mid \leq H \cdot \mid x_1 - x_0 \mid$, ahol $H = K + L$.
Tehát két *Lipschitz* tulajdonságú függvény összege is *Lipschitz* tulajdonságú.
□

[16] [1], 166. oldal.
[17] *Háromszög-egyenlőtlenség*

5. Monotonitás és folytonosság

5.1. Definíció Az f függvény *monoton növekvő* (*monoton csökkenő*) az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, ha $I \subset D(f)$, és minden $x_1 \in I, x_2 \in I, x_1 < x_2$ esetén

$$f(x_1) \leq f(x_2) \qquad (f(x_1) \geq f(x_2)).$$

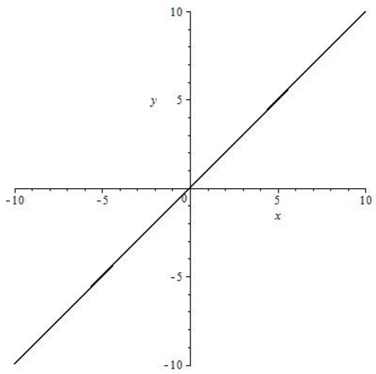
Ha az 5.1 definícióban $\leq$, illetve $\geq$ helyett $<$, illetve $>$ áll, akkor f-et *szigorúan* monoton növekvőnek (illetve csökkenőnek) nevezzük. A monoton növekvő vagy monoton csökkenő függvényeken röviden *monoton* függvényeknek hívjuk.

5.2. Példa arra, hogy két monoton függvény összege már nem monoton.
Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = x, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ha } x < 0 \\ -2x, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}, \quad f(x)+g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ha } x < 0 \\ -x, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}.$$

Bizonyítás.

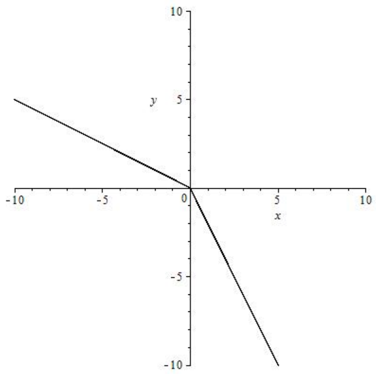
- Az $f(x) = x$ függvény monotonitását vizsgáljuk először.
  Tegyük fel, hogy $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ és $x_1 < x_2$.



$$\begin{aligned} f(x_1) &= x_1 \\ f(x_2) &= x_2 \\ &\Downarrow \\ f(x_1) &< f(x_2) \end{aligned}$$

Tehát az $f(x) = x$ függvény monoton nő $\mathbb{R}$-en.

- Most a $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ha } x < 0 \\ -2x, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$ függvény monotonitását vizsgáljuk.



Külön nézzük a két esetet.

  - Tegyük fel, hogy $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 < 0$ és $x_1 < x_2$.

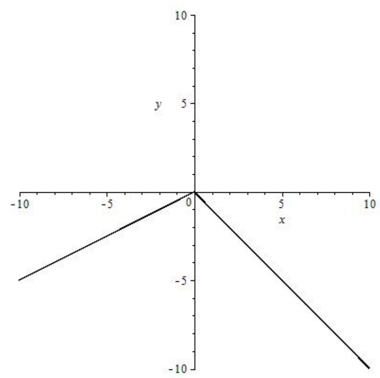
$$\begin{aligned} g(x_1) &= -\frac{x_1}{2} \\ g(x_2) &= -\frac{x_2}{2} \\ &\Downarrow \\ g(x_1) &> g(x_2) \end{aligned}$$

  - Tegyük fel, hogy $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \geq 0$ és $x_1 < x_2$.

$$\begin{aligned} g(x_1) &= -2x_1 \\ g(x_2) &= -2x_2 \\ &\Downarrow \\ g(x_1) &> g(x_2) \end{aligned}$$

Tehát a $g(x)$ függvény monoton csökken $\mathbb{R}$-en.

- Végül az $f(x) + g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ha } x < 0 \\ -x, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$ függvény monotonitását nézzük.



Ismét külön nézzük a két esetet.

– Tegyük fel, hogy $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 < 0$ és $x_1 < x_2$.

$$\begin{aligned} f(x_1) + g(x_1) =& \frac{x_1}{2} \\ f(x_2) + g(x_2) =& \frac{x_2}{2} \\ & \Downarrow \\ f(x_1) + g(x_1) <& f(x_2) + g(x_2) \end{aligned}$$

– Tegyük fel, hogy $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \geq 0$ és $x_1 < x_2$.

$$\begin{aligned} f(x_1) + g(x_1) =& - x_1 \\ f(x_2)g(x_2) =& - x_2 \\ & \Downarrow \\ f(x_1) + g(x_1) >& f(x_2) + g(x_2) \end{aligned}$$

Tehát az $f(x) + g(x)$ függvény monoton nő a $(-\infty, 0)$ intervallumon és monoton csökken a $[0, \infty)$ intervallumon.

Így láthattuk, hogy két monoton függvény összege, már nem biztos, hogy monoton lesz. $\square$

5.3. Példa olyan függvényre, amely semmilyen intervallumban nem monoton.
Legyen

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases},$$

ahol a $D(x)$ függvény a *Dirichlet függvény.*

Bizonyítás. Mivel minden intervallumban van racionális és irracionális szám, ezért nézzük csak a $[0,1]$ intervallumban a monotonitást. Indirekt módon bizonyítjuk, hogy a $D(x)$ függvény sem monoton növekvő, sem pedig monoton csökkenő és ha ez a két feltevés igaz, akkor ez azt jelenti, hogy nem monoton.

- Tegyük fel, hogy $D(x)$ monoton növekvő a $[0,1]$ intervallumban, ahol minden $x_1, x_2 \in [0,1]$-re teljesül, hogy ha $x_1 < x_2$, akkor $D(x_1) \leq D(x_2)$.
  Legyen x_1 egy racionális szám, x_2 pedig egy irracionális szám. Ekkor $D(x_1) = 1 \nleq 0 = D(x_2)$, tehát mivel ez nem teljesül, így a $D(x)$ függvény nem monoton növekedő.

- Tegyük fel, hogy a $D(x)$ függvény monoton csökkenő a $[0,1]$ intervallumban, ahol minden $x_1, x_2 \in [0,1]$-re teljesül, hogy ha $x_1 < x_2$, akkor $D(x_1) \geq D(x_2)$.
  Legyen x_1 egy irracionális szám, x_2 pedig egy racionális szám. Ekkor $D(x_1) = 0 \ngeq 1 = D(x_2)$, tehát mivel ez nem teljesül, így a $D(x)$ függvény nem monoton csökkenő.

Mivel ez a függvény a $[0,1]$ intervallumban nem monoton növekvő, sem pedig monoton csökkenő, így a $D(x)$ függvény nem monoton. $\square$

5.4. Definíció Ha a függvény nem folytonos a-ban, akkor azt mondjuk, hogy f-nek a-ban *szakadási helye van.*
Legyen f értelmezve a egy pontozott környezetében, és tegyük fel, hogy f nem folytonos a-ban. Ha $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ létezik és véges, de $a \notin D(f)$ vagy $f(a) \neq \lim\limits_{x \to a} f(x)$, akkor azt mondjuk, hogy *f-nek megszüntethető szakadási helye van a-ban*, ugyanis ekkor az $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ értelmezéssel f folytonossá tehető a-ban.
Ha $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ nem létezik, de

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0) \quad \text{és} \quad \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$$

mindketten léteznek (és ekkor szükségképpen különbözőek), akkor azt mondjuk, hogy *f-nek ugráshelye van a-ban.* A megszüntethető szakadási helyeket és az ugráshelyeket közösen *elsőfajú szakadási helynek* nevezzük.

5.5. Példa olyan függvényre, amely monoton nő $\mathbb{R}$-en és végtelen sok szakadása van.
Legyen $f(x) = [x]$.
Bizonyítás. Az $f(x) = [x]$ függvény monoton nő $\mathbb{R}$-en, mivel ha $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in \mathbb{R})$, akkor $[x_1] < [x_2]$, így tehát igaz, hogy $f(x_1) \leq f(x_2)$, vagyis az

$f(x) = [x]$ függvény monoton növekedő.
Végtelen sok szakadási helye van, hiszen egy $a \in \mathbb{Z}$ pontban létezik és véges a határérték és $a \in D(f)$, de $f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$, hiszen ekkor a kétoldali határértéknek egyenlőnek kellene lennie, vagyis $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x)$, tehát $f(a+0) = f(a-0)$.
Nézzük a kétoldali határértéket:

$$\lim_{x \to a+0} [x] = a \quad \text{és} \quad \lim_{x \to a-0} [x] = a - 1, \quad \text{ha} \quad a \in \mathbb{Z},$$

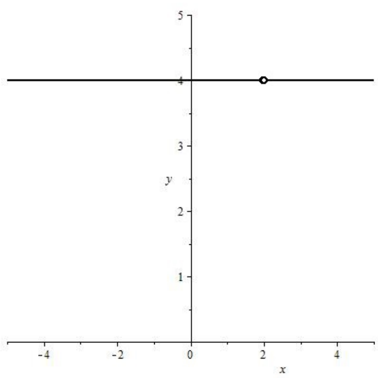
ezért látható, hogy minden egész szám esetén a függvénynek ugráshelye van. Mivel ugráshelye van, így szakadási helye is az egész számoknál és mivel ez egy nem megszámlálható halmaz, így végtelen sok szakadási helye van az $f(x) = [x]$ függvénynek. □

5.6. Definíció Ha az $f(x)$ függvény az $x = c$ helyen nincs értelmezve, viszont a $\lim_{x \to c} f(x) = L$ $(L \in \mathbb{R})$ határérték létezik, akkor az

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq c \\ L, & x = c \end{cases}$$

előírással definiált függvény folytonos az $x = c$ helyen. Az $F(x)$ függvényt az f függvény (c-re való) *folytonos kiterjesztésének* nevezzük.

5.7. Példa [18] olyan függvényre, amely mindenütt folytonos az $x = 2$ hely kivételével, ahol megszüntethető szakadása van.
Legyen $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}, f(x) = 4$.



Bizonyítás. A megszüntethető szakadási hely feltételei:

[18] [2], 131. oldal

- $f(x)$ nem folytonos a-ban. Ez teljesül, hiszen az $f(x)$ függvény nem folytonos 2-ben.

- ha $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ létezik és véges, de $a \notin D(f)$ vagy $f(a) \neq \lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4, \quad 2 \notin D(f)$$

  tehát a határérték $x = 2$-ben létezik és véges, de $2 \notin D(f)$.
  Így tehát az $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4$ függvénynek az $x = 2$ helyen megszüntethető szakadási helyen van.
  Ekkor a függvény 2-re való folytonos kiterjesztése által definiált függvény az 5.6 definíció alapján:

$$F(x) = \begin{cases} 4, & \text{ha } x \neq 2 \\ 0, & \text{ha } x = 2 \end{cases}$$

□

5.8. Tétel *Legyen f monoton növekedő a véges (a, b) nyílt intervallumban. Ekkor*

(i) minden $x_0 \in (a, b)$ esetén léteznek a véges $f(x_0 - 0)$ és $f(x_0 + 0)$ határértékek, és $f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0)$.

(ii) Ha f felülről korlátos (a, b)-ben, akkor létezik a véges $f(b-0)$ határérték, ha pedig alulról korlátos (a, b)-ben, akkor létezik a véges $f(a+0)$ határérték.

(iii) Ha f felülről nem korlátos (a, b)-ben, akkor $f(b - 0) = \infty$, ha pedig f alulról nem korlátos (a, b)-ben, akkor $f(a + 0) = -\infty$.

Hasonló állítás fogalmazható meg monoton csökkenő függvényre, illetve nem korlátos intervallumra.

Bizonyítás.

(i) Két részletben vizsgáljuk ezt a határértéket. Először az (a, x_0) intervallumban, majd az (x_0, b) intervallumban.
Mivel $f(x) \leq f(x_0)$ minden $x \in (a, x_0)$-ra, ezért az $f((a, x_0))$ halmaz felülről korlátos, felső korlátja pedig $f(x_0)$. Legyen $\alpha = \sup f((a, x_0))$, ekkor $\alpha \leq f(x_0)$ és legyen $\varepsilon > 0$ adott. Ekkor $\alpha - \varepsilon$ nem lehet felső korlát, hiszen az α a legkisebb felső korlátja az $f((a, x_0))$ halmaznak. Így létezik olyan $x_\varepsilon \in (a, x_0)$, amelyre teljesül, hogy $\alpha - \varepsilon < f(x_\varepsilon)$.
Mivel f monoton növekedő és $\alpha = \sup f((a, x_0))$, ezért

$$\alpha - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) < \alpha, \quad \text{ha} \quad a < x_\varepsilon < x < x_0.$$

Ebből pedig adódik, hogy

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \alpha.$$

Tehát beláttuk, hogy $f(x_0 - 0)$ létezik és véges, valamint $f(x_0 - 0) \leq f(x_0)$.
Nézzük most az (x_0, b) intervallumot, ahol azt kell bebizonyítani, hogy $f(x_0+0)$ létezik és véges, valamint $f(x_0) \leq f(x_0+0)$. Az előző alapján bizonyítjuk be ezt az állítást is.
Mivel $f(x_0) \leq f(x)$ minden $x \in (x_0, b)$-re, ezért az $f((x_0, b))$ intervallum alulról korlátos és alsó korlátja pedig az $f(x_0)$. Legyen $\beta = \inf f((x_0, b))$, ekkor $f(x_0) \leq \beta$ és legyen $\varepsilon > 0$ adott. Mivel β a legnagyobb alsó korlátja az $f((x_0, b))$ halmaznak, így $\beta+\varepsilon$ nem lehet alsó korlát. Így létezik olyan $x_\varepsilon \in (x_0, b)$, amelyre teljesül, hogy $f(x_\varepsilon) \leq \beta + \varepsilon$. Mivel f monoton növekedő és $\beta = \inf f((x_0, b))$, ezért

$$\beta < f(x) \leq f(x_\varepsilon) \leq \beta + \varepsilon, \quad \text{ha} \quad x_0 < x < x_\varepsilon < b.$$

Ebből pedig az adódik, hogy

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \beta.$$

Vagyis létezik a véges $f(x_0 + 0)$ határérték és $f(x_0) \leq f(x_0 + 0)$. Így a két bizonyítással beláttuk, hogy $f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0)$.

(ii) Mivel $f(x) \leq f(b)$ minden $x \in (a, b)$-re, ezért az $f((a, b))$ halmaz felülről korlátos és $f(b)$ egy felső korlátja. Legyen $\alpha = \sup f((a, b))$, és ekkor $\alpha \leq f(b)$. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Mivel α az $f(a, b)$ legkisebb felső korlátja, ezért az $\alpha - \varepsilon$ nem lehet. Így létezik egy $x_\varepsilon \in (a, b)$, amelyre $\alpha - \varepsilon < f(x_\varepsilon)$.
Az f függvény monoton növekedő és $\alpha = \sup f((a, b))$, ezért

$$\alpha - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq \alpha, \quad \text{ha} \quad a < x_\varepsilon < x < b.$$

Ebből pedig adódik, hogy

$$\lim_{x \to b - 0} f(x) = \alpha.$$

Tehát beláttuk, hogy ha a monoton növekedő függvény felülről korlátos egy (a, b) intervallumon, akkor létezik létezik a véges $f(b - 0)$ határérték.
Nézzük most azt az esetet, amikor az (a, b) halmaz alulról korlátos, és

így létezik a véges $f(a+0)$ határérték.
Ismét igaz, hogy $(f(a)) \leq f(x)$ minden $x \in (a,b)$-re, hiszen az f függvény monoton növekedő. Ezért az $f((a,b))$ halmaz alulról korlátos, és egy alsó korlátja $f(a)$. Legyen $\beta = \inf f((a,b))$, ekkor $f(a) \leq \beta$. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Mivel β a legnagyobb alsó korlát, így a $\beta + \varepsilon$ nem lehet az. Így létezik egy $x_\varepsilon \in (a,b)$, amelyre $f(x_\varepsilon) < \beta + \varepsilon$.
Mivel a függvény monoton növekedő és $\beta = \inf f((a,b))$, így

$$\beta \leq f(x) \leq f(x_\varepsilon) < \beta + \varepsilon, \quad \text{ha} \quad a < x < x_\varepsilon < b.$$

Ebből pedig látható, hogy

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \beta.$$

Tehát ha a függvény monoton növekedő az (a,b) intervallumon és alulról korlátos, akkor létezik az $f(a+0)$ határérték és ez véges.

(iii) Ismét két részletben bizonyítjuk ezt az állítást is. Először azt, hogy ha f felülről nem korlátos (a,b)-ben, akkor $f(b-0) = \infty$. Az állítást indirekt módon bizonyítjuk.
Tegyük fel, hogy $f(b-0) \neq \infty$, tehát létezik és véges a határérték, majd helyes lépések sorozatán eljutunk egy ellentmondáshoz, ezzel bizonyítjuk az állítás igaz mivoltát.
Legyen $f(b-0) = K$, vagyis $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = K$. Ez pedig pontosan azt jelenti ,hogy minden $x \in (a,b)$-re $f(x) \leq K$. Ezek alapján az $f((a,b))$ intervallum felülről korlátos és egy felső korlátja K, ami pedig nem lehetséges, hiszen az állításban az szerepel, hogy f felülről nem korlátos.
Most azt bizonyítjuk, hogy ha f alulról nem korlátos (a,b)-ben, akkor $f(a+0) = -\infty$. Ezt az állítást is indirekt módon bizonyítjuk.
Tegyük fel, hogy $f(a+\ ) \neq -\infty$, tehát létezik és véges a határérték.
Legyen $f(a+0) = L$, vagyis $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = L$. Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy minden $x \in (a,b)$-re $L \leq f(x)$. Ezek alapján az $f((a,b))$ intervallum alulról korlátos és egy alsó korlátja L, ami pedig nem lehetséges, hiszen az állításban az szerepel, hogy f alulról nem korlátos.
Tehát bebizonyítottuk, hogy ha f felülről nem korlátos az (a,b) intervallumon, akkor $f(b-0) = \infty$, illetve ha f alulról nem korlátos az (a,b) intervallumon, akkor $f(a+0) = -\infty$.

$\square$

5.9. Tétel *Ha f monoton az I nyílt intervallumban, akkor I-ben legfeljebb megszámlálhatóan sok szakadási helye van.*

Bizonyítás. Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy f monoton növekedő az I nyílt intervallumban, tehát ha $x_1, x_2 \in I \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
Ha f egy $c \in I$ helyen nem folytonos, akkor $f(c-0) < f(c+0)$, ahol $f(c-0)$ a c pontban vett bal oldali határérték, $f(c+0)$ a c pontban vett jobb oldalai határérték. Legyen $r(c)$ egy olyan racionális szám, amelyre teljesül, hogy $f(c-0) < r(c) < f(c+0)$.
Feltettük, hogy f monoton növekedő, így ha $c_1 \leq c_2$, akkor $f(c_1+0) \leq f(c_2-0)$, ahol $f(c_1+0)$ a c_1 pontban vett jobb oldali határérték és $f(c_2-0)$ a c_2 pontban vett bal oldali határérték. Ha f-nek c_1 és c_2 is szakadási helye, akkor

$$f(c_1-0) < r(c_1) < f(c_1+0) \quad \text{és} \quad f(c_2-0) < r(c_2) < f(c_2+0).$$

Ebből a kettő egyenlőtlenségből és a korábban megállapított $f(c_1+0) \leq f(c_2-0)$ egyenlőtlenségből az adódik, hogy

$$f(c_1-0) < r(c_1) < f(c_1+0) \leq f(c_2-0) < r(c_2) < f(c_2+0),$$

tehát $r(c_1) < r(c_2)$.
Ez azt jelenti, hogy a szakadási helyek és a racionális számok egy részhalmaza között egy egyértelmű megfeleltetés jött létre:

$$\begin{array}{ccc} c_1 & \to & r(c_1) \\ c_2 & \to & r(c_2) \\ c_3 & \to & r(c_3) \\ & \vdots & \end{array}$$

Mivel a racionális számok halmaza megszámlálható halmaz, így f-nek csak megszámlálhatóan sok szakadási helye lehet. □

5.10. Példa [19] olyan függvényre, amely monoton növő a $[0,1]$ intervallumban, de végtelen sok szakadása van.
Legyen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}.$$

Bizonyítás. A függvény monoton nő a $[0,1]$ intervallumon, hiszen

$$\text{ha} \quad x_1 < x_2, \quad \text{akkor} \quad \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow \left[\frac{1}{x_1}\right] \geq \left[\frac{1}{x_2}\right] \Rightarrow \frac{1}{\left[\frac{1}{x_1}\right]} \leq \frac{1}{\left[\frac{1}{x_2}\right]},$$

[19] [6], 134. oldal

és mivel $f(x_1) = \frac{1}{\left[\frac{1}{x_1}\right]}$ és $f(x_2) = \frac{1}{\left[\frac{1}{x_2}\right]}$ így megkaptuk, hogy

$$f(x_1) \leq f(x_2).$$

Az kell még bizonyítani, hogy végtelen sok helyen szakad. Ezt már megoldottuk a 3.4 példában.
Tehát az $f(x)$ függvény monoton nő a $[0, 1]$ intervallumon és végtelen sok szakadása van. $\square$

Irodalomjegyzék

[1] Laczkovich Miklós-T.Sós Vera:*Analízis I.*, Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt., Budapest, 2006

[2] George B. Thomas, Jr.: *Thomas-féle Kalkulus 1.*, A magyar kiadás főszerkesztője: Szász Domonkos, Typotex, Budapest, 2008

[3] Bernard R. Gelbaum, John M. H. Olmsted: *Counterexamples in Analysis*, Dover Publications, Inc., Mineola, New York

[4] Otto Forster, Rüdiger Wessoly: *Übungsbuch zur Analysis 1*,4. átdolgozott kiadás, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2008

[5] Konrad Königsberger : *Analysis 1* (Springer-Lehrbuch), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1990

[6] Rolf Walter: *Einführung in die Analysis 1* (de Gruyter Lehrbuch), Walter de Gruyter Berlin New York, 2007