Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Gráfok színezése

BSc Szakdolgozat

Készítette: Tóth Ádám
Matematika BSc, Matematikai elemző szakirány

Témavezető: Hermann György
Doktorandusz, Számítógéptudományi tanszék

2013
Budapest

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Szakdolgozatom témája a gráfok színezése. Matematikai eszközként leggyakrabban megkülönböztető szereppel ruházzuk fel a színeket.

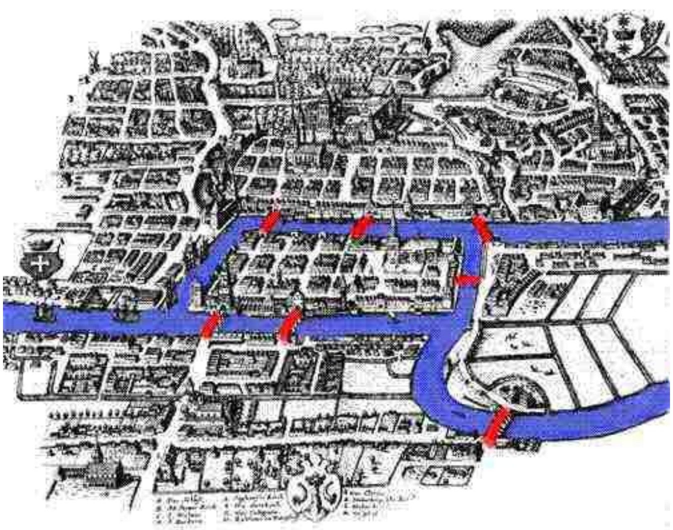
Például, ábrázolni szeretnénk két halmazt, akkor a közös részüknek eltérő színt adunk. Ha tükrözünk egy alakzatot és a tükrözöttet az eredetivel együtt tüntetjük fel, akkor ezek más-más színt kapnak.

A színekkel szemben a gráfok csak sokkal később jelentek meg. Euler volt az első matematikus, aki gráfok segítségével oldott meg egy valós problémát.

Ez a kérdéses feladat az alábbi volt: Königsberg városa a Pregel folyó két partján terül el és a város két részét összesen 7 darab híd köti össze.

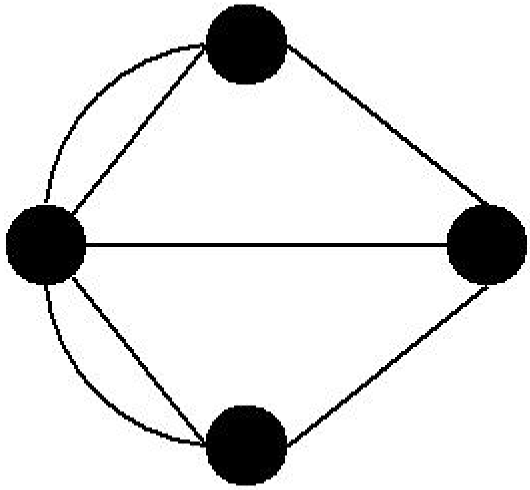
Lehetséges-e úgy végigsétálni az összes hídon, hogy mindegyiken pontosan egyszer kelünk át és visszaérünk a kiindulási pontba?

A német matematikus 1736-ban adott erre választ, amikor egy addig nem létező fogalommal a gráffal sikerült abszolválnia a problémát. A megoldáshoz először is nézzük meg az eredeti probléma vázlatos rajzát:



A königsbergi hidak.

Euler felismerte, hogy az egy partszakaszon vagy szigeten elhelyezkedő hidak száma a probléma és nem pedig ezeknek az egymáshoz viszonyított helyzete. Ennek a felismerésnek köszönhetően konstruálta meg az első gráfot a következők szerint: a két partot, valamint a szigeteket pontokként és a hidakat pedig a pontokat összekötő görbe vonalakként ábrázolta.



Euler által elkészített gráfos reprezentáció.

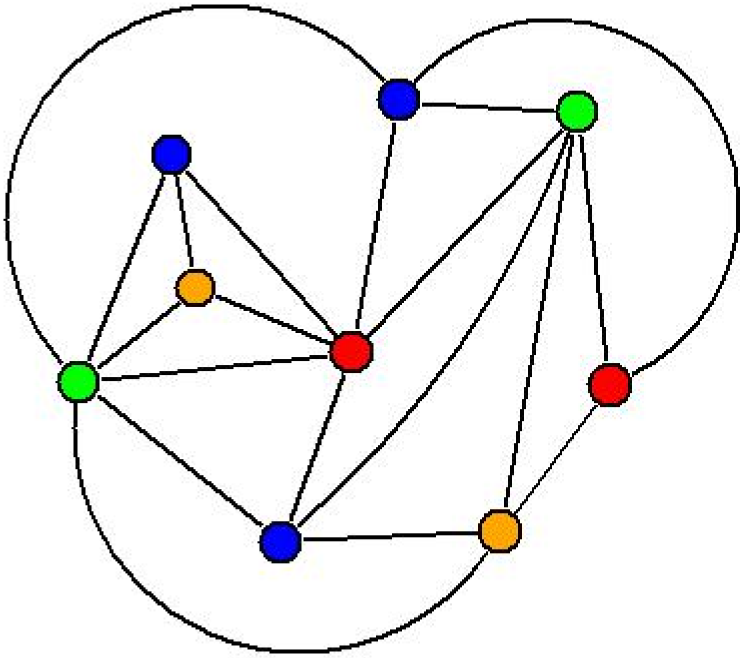
A gráfelméletben a pontokat csúcsoknak és az őket összekötő görbe vonalakat pedig éleknek nevezzük. Azt, hogy egy csúcsban hány él találkozik a csúcs fokszámának nevezzük.

Akkor és csak akkor létezik olyan séta mely minden hídon és minden partszakaszon pontosan egyszer megy át, ha minden csúcs fokszáma páros. Tehát ahol bemegyek, onnan ki is kell tudnom jönni.

Azonban a Königsberg hidainak esetében a csúcsok fokszámai 3,3,3 és 5. Mivel található a fokszámok között páratlan szám, így a keresett séta nem létezik.

A színek és a gráfok első összekapcsolódása jóval később, csak a XIX. század végén történt. Az volt a sejtés, hogy minden térkép kiszínezhető 4 színnel úgy, hogy semelyik két szomszédos ország nem lesz azonos színű (itt a tengert vagy óceánt is szomszédos országként kell értelmezni). Ezt az állítást Alfred Kempe fogalmazta át úgy, hogy minden síkba rajzolható gráf csúcsa kiszínezhető 4 színnel úgy, hogy semelyik két szomszédos csúcs sem kaphat azonos színt. Érdekesség, hogy a bizonyítása hibás volt és csak jóval később sikerült belátni.

Ez az volt első olyan matematikai bizonyítás, melynek során számítógép segítségét vették igénybe.



Egy 9 csúcsú gráf 4 színnel való színezése

Mint ahogyan azt a Königsbergi hidak és a térképek 4 színnel való színezhetősége is mutatja, a gráfok szorosan kapcsolódnak a való életbeli problémákhoz és segítségükkel gyakran sokkal könnyebben választ kapunk a kérdésekre.

2. fejezet

Gráfok és gráfok színezésének alapjai

Először szükségünk lesz a legfontosabb gráfelméletben használt kifejezések definícióira és a hozzájuk kapcsolódó tételekre.

2.1. Gráfelméleti alapfogalmak

2.1.1. Definíció. *Szokásosan a gráfot egy rendezett párként értelmezzük, $G = (V, E)$ jelölést használva, ahol V egy nem üres halmaz, E pedig a belőle képezhető párok halmaza. $V(G)$ elemei a csúcsok vagy pontok és elemeinek száma $v(G)$, $E(G)$ az élek halmaza, melynek számossága $e(G)$.*

2.1.2. Definíció. *Az $e \in E$ megfelel a $\{v_1, v_2\}$ párnak, ekkor azt mondjuk, hogy v_1 és v_2 az e él két végpontja.*

$v_1 = v_2$ esetén hurokélről beszélünk.

Ha két csúcs között egynél több él megy, akkor ezeket többszörös vagy párhuzamos éleknek nevezzük.

2.1.3. Definíció. *Azokat a gráfokat, melyekben nincsen hurok és többszörös él egyszerű gráfoknak nevezzük.*

2.1.4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy $e, f \in E$ szomszédos élek, hogyha végpontjaik $\{v_1, v_2\}$ valamint $\{v_3, v_4\}$ és igaz, hogy $\{v_1, v_2\} \cap \{v_3, v_4\} \neq 0$.*

2.1.5. Definíció. *$v_1, v_2 \in V$ csúcsokat szomszédosak, ha $\{v_1, v_2\} \in E$.*

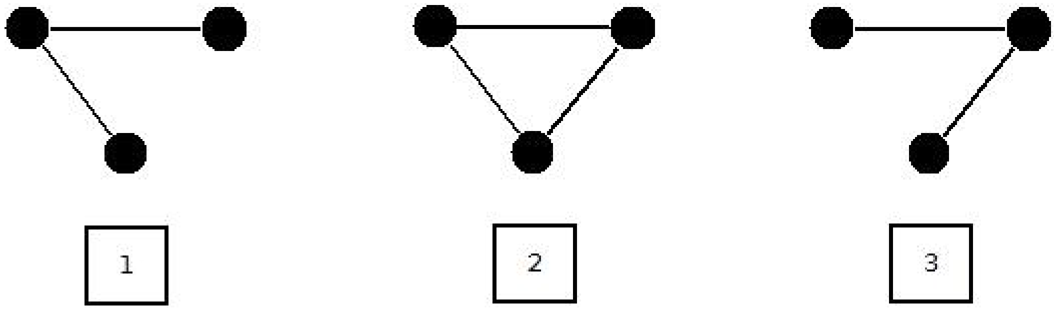
2.1.6. Definíció. *Legyen $v \in V$ és $e \in E$. v illeszkedik e-re, ha e-nek valamelyik végpontja v. Ha pedig nem létezik olyan e, melyre v illeszkedik, akkor v izolált pont.*

2.1.7. Definíció. *Egy csúcsra illeszkedő élek száma alatt a csúcs fokszámát értjük. A $v \in V$ csúcs fokszámát $d(v)$-vel jelöljük. A maximális fokszám jele: δ. A minimális fokszám jele: σ.*

2.1.8. Definíció. *Egy gráf reguláris, ha minden csúcsának fokszáma azonos. k-reguláris, ha minden csúcsának fokszáma k.*

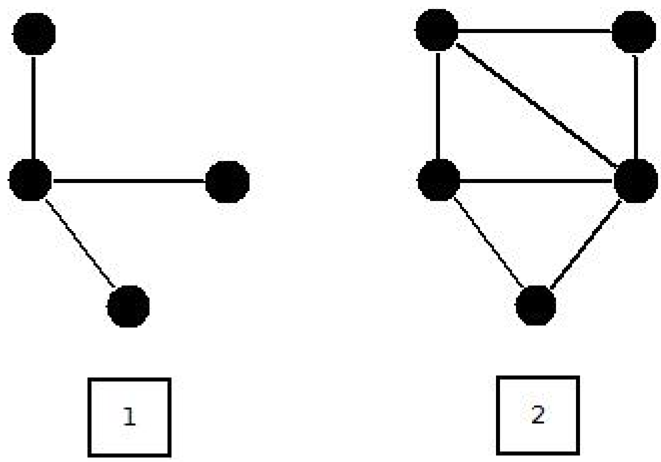
2.1.9. Definíció. *G n csúcsú teljes gráf, ha bármely két csúcsa szomszédos egymással és ekkor K_n-el jelöljük.*

2.1.10. Definíció. *A $G = (V, E)$ és $G' = (V', E')$ gráfok izomorfak, ha létezik V és V' között egy olyan bijekció, hogy ha G-ben két csúcs között van k db él, akkor ennek a két csúcsnak a G'-beli párjában is pontosan k db él van.*



A fenti ábrán 3 darab 3 csúcsú gráf látható, melyekből az első és az utolsó egymással izomorf.

2.1.11. Definíció. *A $G = (V, E)$-nek a $G' = (V', E')$ gráf részgráfja pontosan akkor, ha $G' \subseteq G$ és $E' \subseteq E$, valamint ha egy pont és egy él illeszkedik egymásra G'-ben, akkor ezek illeszkednek G-ben is.*



A 2-vel jelölt gráfnak a részgráfja az 1-el jelölt.

2.1.12. Definíció. *Egy $G' = (V', E')$ gráf akkor és csak akkor feszítő részgráfja egy $G = (V, E)$ gráfnak, ha G' részgráfja G-nek, valamint $V = V'$, azaz a részgráf tartalmazza az eredetinek minden csúcsát.*

2.1.13. Definíció. *G' feszített részgráfja G-nek, ha akkor és csak akkor megy $v_i, v_j \in V(G')$-beli csúcsok között él, ha $v_i, v_j \in V(G)$-ben is összevannak kötve.*

2.1.14. Definíció. *Egy $(v_0, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ sorozatot élsorozatnak nevezünk, ha igaz $\forall i$-re, hogy e_i a v_{i-1}-et és v_i-t összekötő él.*

Ha $v_0 = v_k$, akkor zárt élsorozatról beszélünk.

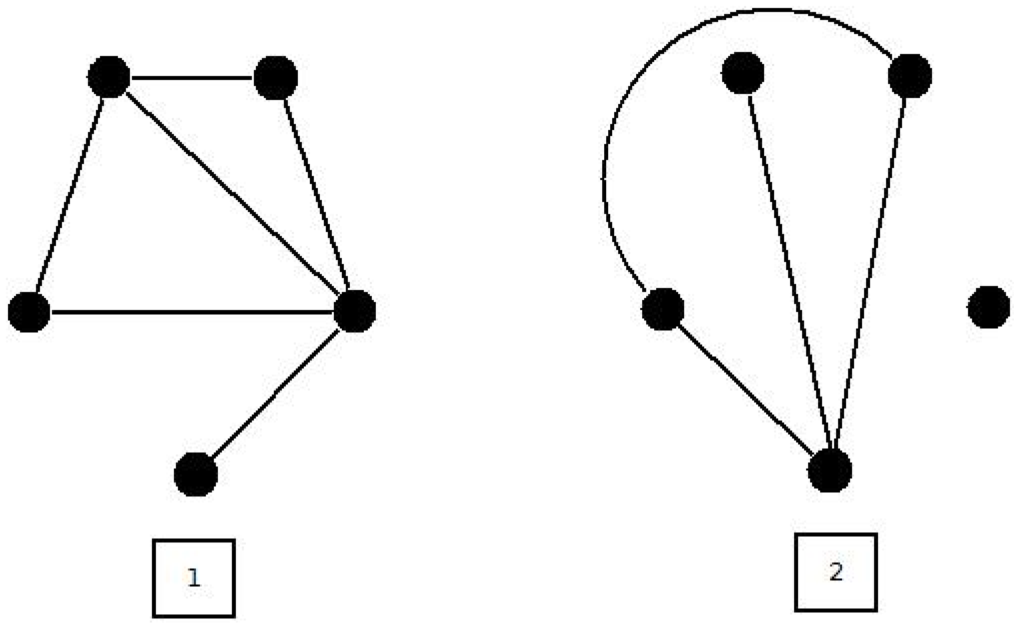
Út, ha a csúcsok mind különböznek.

A kör egy olyan élsorozat, hogy a kiindulási pont megegyezik a végponttal és minden pont és él pontosan egyszer szerepel.

2.1.15. Megjegyzés. *Páros körről akkor beszélhetünk, ha a kör hossza páros számú csúcsból áll. A páratlan kör hasonló módon értendő.*

2.1.16. Definíció. *Összefüggőnek nevezünk egy gráfot, ha élek mentén minden csúcsából eljuthatunk bármely másikba. A nem összefüggő gráfok részgráfjait komponenseknek nevezzük.*

2.1.17. Definíció. *A $G = (V, E)$ gráf komplementerén azt a $G' = (V, E')$ gráfot értjük melynek minden csúcsára igaz, hogy ha $v_1, v_2 \in E \leftrightarrow v_1, v_2 \notin E'$.*



Egy 5 csúcsú gráf és komplementere

2.1.18. Definíció. *Súlyozott gráfról beszélünk, ha minden élhez hozzárendelünk egy értéket, mely az adott él súlya lesz.*

3. fejezet

Gráfszínezés és a Brooks tétel

3.1. Színezéssel kapcsolatos alapfogalmak

A gráfok színezése alatt azt értjük, hogy csúcsokhoz fogunk színeket hozzárendelni. Akkor jó egy színezés, ha két szomszédos csúcsot különböző színnel színeztünk ki. Ezen kívül színezhetjük még a gráfnak a tartományait, vagy az éleit is.

Szokás még színek helyett számokkal is dolgozni, tehát egy csúcsra azt is mondhatjuk, hogy az 1-es színt kapta, ahelyett hogy kékre színeztük.

3.1.1. Definíció. *Egy hurokélmentes G gráf k színnel színezhető, ha bármely két szomszédos csúcsa különböző színű. A G gráf kromatikus száma k, ha k színnel színezhető, de $k-1$-el már nem lehet. A kromatikus szám jelölése: $\chi(G)$.*

3.1.2. Definíció. *Az azonos színt kapott pontok halmazát színosztálynak nevezzük.*

3.1.3. Tétel. *Legyen G egy egyszerű gráf, ekkor igaz, hogy $\chi(G) \leq \delta(G) + 1$.*

Bizonyítás. A csúcspontok száma szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. Két csúcspont esetén, ha van köztük él, akkor $2 \leq 2$, valamint ha nincs köztük él, akkor $1 \leq 1$.

Tegyük fel, hogy az állítást n csúcspont esetén már beláttuk, ezért nézzük $n+1$ csúcs esetén. A maximális fokszám $\delta(G)$ és az $n+1$-edik csúcs legfeljebb ennyi csúccsal lehet összekötve, így színezzük a szomszédjaitól különböző $\delta(G)+1$-edik színnel. □

3.1.4. Megjegyzés. *Érdemes megfigyelni, hogy bizonyos esetekben ez a becslés a lehető legélesebb, hiszen egy n csúcsú teljes gráf maximális fokszáma $n-1$ és minden csúcsnak a fokszáma is $n-1$, így a kromatikus száma n lesz.*

n csúcsú csillag gráfnál (A csillag egy speciális gráf, melynek $n-1$ csúcsa van összekötve csak az n.-el és egymással nem.) a maximális fokszám szintén $n-1$, viszont elég két színt felhasználnunk, hogy jó színezést kapjunk!

A Brooks tétellel élesebb felső becslést is adhatunk χ-re.

3.2. Brooks tétel és kapcsolódó definíciók

3.2.1. Tétel (Gyenge-Brooks). *Ha G összefüggő és nem reguláris, akkor $\chi(G) \leq \delta(G)$.*

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítjuk a tételt, így $1, 2$ illetve 3 csúcsú gráfok esetén nem nehéz meggondolni az állítás helyességét. Tegyük fel, hogy az állítás igaz az $n-1$ csúcsú gráfokra, így vizsgáljuk G-t, aminek n csúcsa van.

Mivel G nem reguláris, így van egy olyan v csúcsa melynek fokszáma kisebb, mint $\delta(G)$. Hagyjuk el a gráfból v-t és vizsgáljuk a maradék $G-v$ gráfot. A maradék gráfról elképzelhető, hogy már nem összefüggő és szétesett több komponensre. Legyen K egy összefüggő komponense a $G-v$ gráfnak. K lehet reguláris, mert G-ről tettük fel, hogy nem lehet.

Ezáltal két esetet különböztethetünk meg:

1.eset: Amikor K reguláris gráf. Mivel K-nak legalább egy csúcsa össze volt kötve G-ben a v csúccsal, ezért $\delta(K) \leq \delta(G) - 1$. Ebből adódik, hogy $\chi(G) \leq \delta(K) + 1 \leq \delta(G)$. Tehát tudunk egy jó színezést mutatni K-ra $\delta(G)$ színnel.

2.eset: Amikor K nem reguláris gráf. Mivel $\delta(K) \leq \delta(G)$, így itt alkalmazhatjuk az indukciós feltevést. Azaz ismét tudunk egy jó színezést K-ra. Minden összefüggő komponensét színezzünk ki jól legfeljebb $\delta(G)$ színnel, hiszen megállapítottuk, hogy ezt megtehetjük. Tekintsük újra az eredeti G gráfot, melyben a v csúcson kívül már minden csúcsot kiszíneztünk. Mivel v-nek kevesebb szomszédja van, mint $\delta(G)$, így őt is kitudjuk színezni a szomszédjaitól különböző színre. □

(forrás: Tóth Géza Kombinatorika és Gráfelmélet II. egyetemi jegyzet)

3.2.2. Definíció. *Elvágó pontnak nevezünk egy olyan csúcsot egy összefüggő gráfban, melynek elhagyásával a gráf már nem lesz összefüggő.*

Elvágó ponthalmaz csúcsok egy halmaza, melyek elhagyása esetén az eredeti gráf nem lesz összefüggő.

3.2.3. Definíció. *Fa gráfnak, vagy fának hívjuk az összefüggő és körmentes gráfokat.*

3.2.4. Definíció. *A feszítőfa olyan fagráf, mely az eredeti gráfnak minden pontját tartalmazza.*

3.2.5. Tétel (Brooks). *Ha G összefüggő, nem teljes gráf és nem páratlan hosszú kör, akkor igaz, hogy $\chi(G) \leq \delta(G)$.*

Bizonyítás. A csúcsok számára vonatkozó indukcióval bizonyítunk. 1, 2, illetve 3 csúcsú gráfokra a tétel igaz. Tegyük fel, hogy G gráfra teljesülnek a tétel feltételei.

Ha $\delta(G) = 1$, akkor ez csak a két csúcsú teljes gráf lehet, viszont feltettük, hogy G nem lehet teljes gráf, tehát erre az állítás igaz. Ha $\delta(G) = 2$ akkor ez vagy egy út, vagy egy páros kör, vagy pedig egy páratlan kör, az első kettőnél $\chi(G) = 2$, míg a harmadikat feltettük, hogy nem lehet, tehát ezt az esetet is igazoltuk, ezért legyen $\delta(G) >= 3$.

Tegyük fel, hogy v elvágó pontja a G gráfnak, amely két összefüggő részgráfra bontja G-t. A két új részgráfot jelöljük G_1-el és G_2-vel, melyeknek egyetlen közös pontja v. G_1 és G_2-t is kitudjuk jól színezni $\delta(G)$ színnel, mivel a v csúcs foka G_1-ben, valamint G_2-ben is kisebb mint $\delta(G)$.

Ha G_1, vagy G_2 páratlan kör lenne, akkor ki tudjuk színezni legalább 3 és legfeljebb $\delta(G)$ színnel, ha pedig teljes gráf, akkor legfeljebb $\delta(G)$ csúcsa van és szintén kiszínezhető, a többi esetre pedig az indukciós feltétel miatt szintén tudunk jó színezést konstruálni.

A színek megfelelő cseréjével azt is el tudjuk érni, hogy v színe G_1 -ben és G_2-ben is azonos legyen, így össze tudjuk illeszteni. Ezzel megadhatunk egy jó színezést G-re. Ezért innentől tegyük fel, hogy G az egy 2-összefüggő gráf.

Legyen v_n egy δ fokszámú csúcs G-ben. Most tegyük fel, hogy v_n minden szomszédjának a fokszáma is δ. Ekkor G-ben ez egy $\delta+1$ csúcsú teljes gráfot fog kifeszíteni, viszont mivel ebből a gráfból már további élek nem mennek ki és G összefüggő, ezért G az egy $\delta+1$ csúcsból álló teljes gráf lenne, ami ellentmondás. Ezért v_n-ek biztosan van két olyan szomszédja, melyek egymással nem szomszédosak, jelöljük most ezeket a csúcsok v_1, v_2-vel.

A továbbiakban két eset lehetséges:

1.eset: $G - \{v_1,v_2\}$ összefüggő. Keressük meg a $G - \{v_1,v_2\}$-nek egy F feszítőfáját. F-nek vegyük egy v_n-től különböző levelét, legyen ez v_3, majd vegyük $F - v_3$ egy v_n-től különböző levelét. Ezt folytassuk egészen addig, míg már csak v_n nem marad. Így megkaptuk a csúcsoknak egy sorrendjét G-ben: $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, v_n$. Most színezzük ki a csúcsokat δ színnel ebben a sorrendben.

Mivel v_1 és v_2 nem szomszédosak, így az egy jó színezés, ha ezek a csúcsok azonos színt kapnak. Az $i.(2 < i < n)$ lépésben a v_i csúcsnak még van egy v_j szomszédja $(j > i)$, hiszen a $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n$ csúcsok továbbra is egy összefüggő gráfot feszítenek. Így igaz minden i-re, hogy v_i-nek legfeljebb $\delta - 1$ szomszédja van, amit már színeztünk, ezért v_i-nek is tudunk jó színt adni. Az utolsó csúcsnak v_n-nek már minden szomszédja ki lesz színezve, viszont van két szomszédja v_1 és v_2, melyek azonos színt kaptak, így v_n-nek megint tudunk jó színt adni.

2.eset: $G - \{v_1,v_2\}$ nem összefüggő. G 2-összefüggő, ezért felbonthatjuk két összefüggő részgráfra, melyeket jelöljük G_1, G_2-vel. G_1 és G_2-nek csak a v_1 és v_2 csúcsok a közös részeik. Legyen G_1' a $G_1 \cup v_1v_2$ él és hasonló módon G_2' pedig a $G_2 \cup v_1v_2$ él. Ekkor könnyen látható, hogy és $\delta(G_1') \leq \delta(G)$ és $\delta(G_2') \leq \delta(G)$.

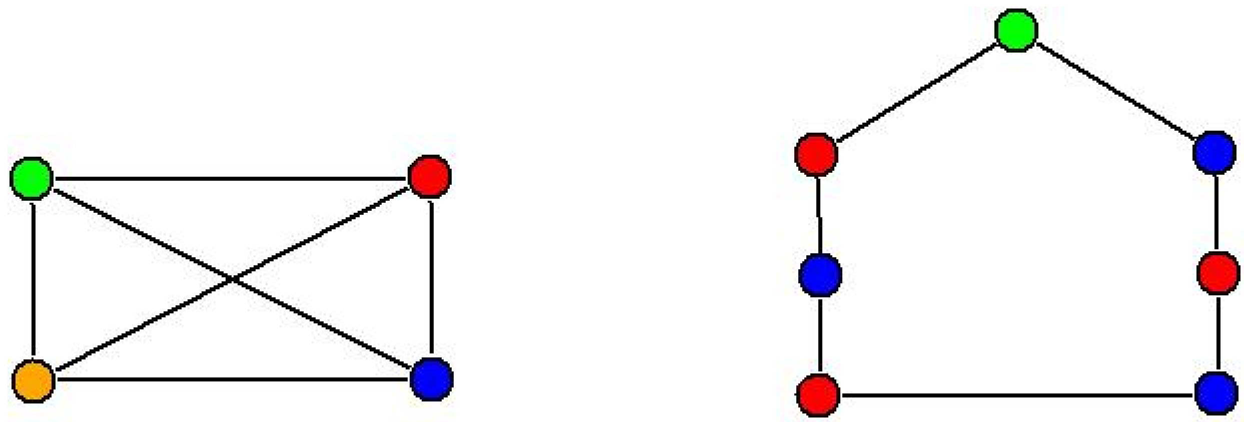
Az indukciós feltevés szerint mindkét komponense G-nek színezhető δ színnel, hogyha feltettük, hogy egyik sem $\delta+1$ csúcsú teljes gráf. v_1 és v_2 azonos színt kaptak, hiszen megy köztük él, viszont a színek megfelelő permutációjával ismét elérhetjük, hogy G_1-ben és G_2-ben is azonos színt kapjon v_1 és v_2, így össze tudjuk illeszteni a két komponensét G-nek. Mivel mindkettő részt ki tudtuk színezni jól, így G-t is.

Menet közben feltettük, hogy G_1' és G_2' nem lehetnek $\delta+1$ csúcsú teljes gráfok. Most vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor valamelyik, mondjuk G_1' $\delta+1$ csúcsú teljes gráf. Ekkor G_1 kiszínezhető δ színnel. Viszont v_1 és v_2 csúcsoknak a foka G_2-ben 1 lesz, ezért húzzuk őket össze egy új csúccsá, amit jelöljünk v'-vel és az így G_2-ből kapott új gráf pedig G_2''. Ezek után tudjuk alkalmazni az indukciós feltevésünket az új G_2'' gráfra, hiszen v' foka 1 vagy 2 lehet, így G_2''-t ki tudjuk színezni δ színnel. Ebből pedig megkapjuk G_2 egy megfelelő színezését, ahol v_1 és v_2 egyforma színűek. A színek megfelelő permutációjával ismét eltudjuk érni, hogy G_1-et és G_2-őt egymásba illesszük és így G-t is kitudjuk színezni δ színnel.

□

(forrás: Tóth Géza Kombinatorika és Gráfelmélet II. egyetemi jegyzet)

3.2.6. Megjegyzés. *Gondoljuk meg, hogy mi történik abban az esetben, amikor teljes gráfról, vagy páratlan hosszú körről van szó.*



Az ábra alapján jól látható, hogy teljes gráfra és páratlan körre nem igaz.

3.3. Klikkszám és Mycielski-féle konstrukció

3.3.1. Klikkszám

3.3.1. Definíció. *Klikknek nevezzük a G gráf olyan részgráfját, mely teljes. Klikkszám a G gráf legtöbb pontból álló klikkjének számossága és $\omega(G)$-vel jelöljük.*

3.3.2. Tétel. *Minden G gráfra igaz, hogy $\chi(G) \geq \omega(G)$, azaz a kromatikus szám mindig legalább akkora, mint a klikkszám.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy van olyan G gráf melyben a $\omega > \chi$. Ekkor ebben a gráfban van egy feszített teljes részgráf, mely éppen a legnagyobb méretű klikk, jelöljük G_1-el. Mivel G_1-ben minden csúcs össze van kötve minden csúccsal, így pontosan annyi szín kell a kiszínezéséhez, ahány csúcsa van a gráfnak, ami éppen a klikkszám. Ezzel pedig ellentmondásra jutottunk, tehát az állítást beláttuk. □

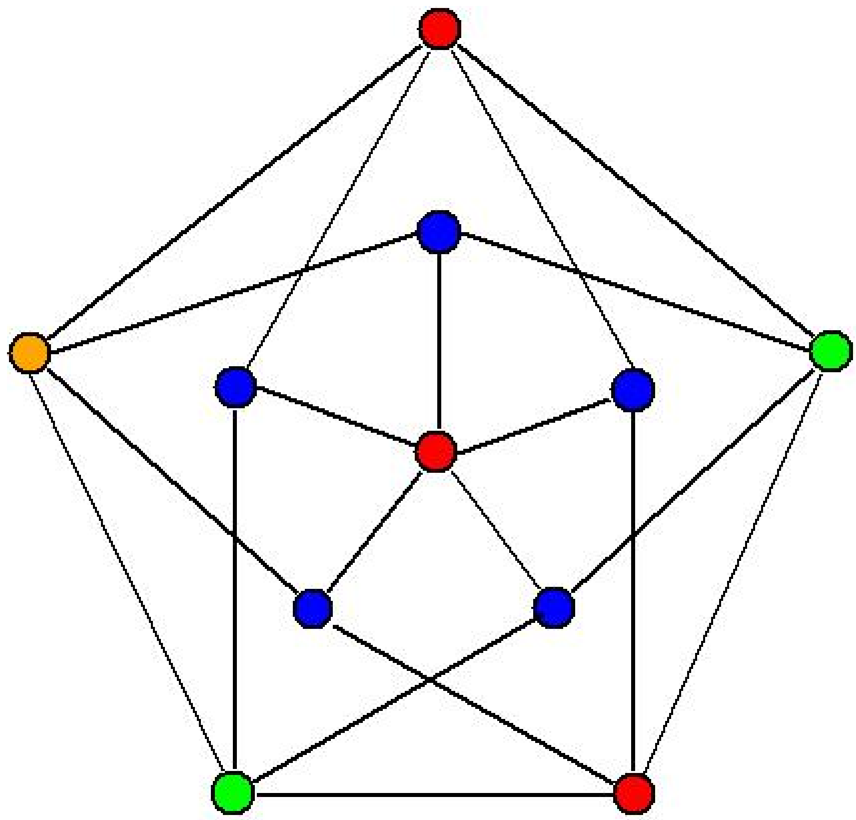
3.3.2. Mycielski gráfok

3.3.3. Tétel (Mycielski konstrukciója). *Minden $k \geq 2$-re igaz, hogy van olyan, G_k gráf, hogy $\omega(G_k) = 2$ és $\chi(G_k) = k$.*

3.3.4. Megjegyzés. *Az ilyen gráfokat Mycielski-gráfoknak nevezzük. Először konstruáljuk meg a gráfot. A G_2-nek nem nehéz meggondolni, hogy az 1 élet és 2 csúcsot tartalmazó gráf fog megfelelni. A továbbiakban tegyük fel, hogy G_k-t már megkonstruáltuk és ennek segítségével szeretnénk előállítani G_{k+1}-t.*

3.3.5. Konstrukció. *G_{k+1} előállítása:*

G_{k+1} konstrukciójához tegyük fel, hogy G_k-nak n darab csúcsa van, melyeket jelöljünk a szokásos $v_1, v_2, \ldots, v_n$-el. A következő lépésben fel fogunk venni $n+1$ darab új csúcsot, melyeket $w_1, w_2, \ldots, w_n$ u-val fogunk jelölni. Minden w_i csúcsot összekötünk v_i-n kívül minden G_k-beli csúccsal és az u csúcsot pedig összekötjük $w_1, w_2, \ldots, w_n$ csúcsokkal.



A Grötzsch gráf, mely egy Mycielski gráf.

3.3.6. Állítás. *A fentiek szerint előállított G_{k+1} kielégíti a feltételeket.*

Bizonyítás.

Első lépésben mutassuk meg azt, hogy nincs háromszög G_{k+1}-ben, ezért indirekt tegyük fel, hogy G_{k+1}-ben van háromszög, de G_k-ban nem volt.

1. eset: A háromszög egyik csúcsa legyen u, de mivel u csak az újonnan hozzá vett $w_1, w_2, \ldots, w_n$-ekkel van összekötve, amik egymással nincsenek ezért u nem lehet csúcsa a háromszögnek.

2. eset: A háromszög egyik csúcsa w_i, aminek másik két csúcsa legyen v_k és v_j, hiszen u nem lehetett a háromszög csúcsa és $w_1, w_2, w_{i-1}, w_{i+1} \ldots, w_n$-el w_i nincs összekötve. Ekkor viszont v_i, v_k, v_j is háromszöget alkotna, hiszen w_i és v_i ugyanazokkal a csúcsokkal vannak össze kötve.

Így beláttuk, hogy nincs háromszög G_{k+1}-ben.

Második lépésben mutassuk meg, hogy G_{k+1}-et $k+1$ színnel tudjuk színezni, de k-val már nem. Színezzünk ki minden v_i-t ugyanolyanra, amilyen G_k-ban is volt. Adjunk olyan színt minden w_i-nek, mint v_i-nek, hiszen egymással nincsenek összekötve. Eddig felhasználtunk k darab színt, a maradék $k+1$-edik színnel pedig színezzük ki u-t. Így adtunk egy jó színezést és igazoltuk, hogy $\chi(G_{k+1}) \leq k+1$.

Most tegyük fel indirekt, hogy G_{k+1}-et nem lehet színezni k darab szín felhasználásával, ennél kevesebbel pedig már nem tudjuk, hiszen G_k-t k-val megoldottuk és G_{k+1} tartalmazza részgráfként G_k-t. Egy x csúcs színét jelöljük $c(x)$-vel és a k darab színt 1-től k-ig a számokkal.

Tegyük fel, hogy a k-adik színt éppen u kapta, ekkor mivel u össze van kötve minden w csúccsal, így $w_1, w_2, \dots, w_n$ csúcsok az $1, 2, \dots k-1$ színeket kapták. A G_k által feszített részgráfon egy v csúcs színét jelöljük $c'(v)$-vel.

Ha létezik olyan i csúcs, hogy $c(v_i) = k$, akkor színezzük át a párja színére, vagyis $c'(v_i) = c(w_i)$, egyébként $c'(v_i) = c(v_i)$.

Azt kell belátnunk, hogy a c' által megadott színezés egy $k-1$ színnel történő jó színezése lenne G_k-nak, ami ellentmondás. Azoknál a csúcsoknál, melyeknek a színét nem változtattuk meg, nem lehet probléma, ezért nézzük azokat a v_i csúcsokat ahol változtattunk. $c(v_i) = k$ szín volt a c-beli színezése v_i-nek, melynek nincsen olyan v_j szomszédja, melyre igaz lenne, hogy $c(v_j) = k$, hiszen c egy jó színezés volt. A v_i csúcs minden v_j szomszédjára igaz lesz, hogy $c'(v_j) = c(v_j)$ és probléma akkor lehet, hogyha $c(u_i) = c'(v_i) = c'(v_j) = c(v_j)$. Azonban ez nem teljesülhet, hiszen ha v_i és v_j szomszédosak, akkor u_i és v_j is szomszédosak és c egy jó színezés. Tehát a G_k-beli csúcsok színezhetőek $k-1$ színnel, ez viszont ellentmond annak, hogy G_k k-kromatikus lenne. Tehát beláttuk, hogy $\chi(G_{k+1}) = k+1$. □

3.3.7. Megjegyzés. *Mycielski konstrukciójával beláttuk, hogy a kromatikus számra nincs felső korlát a klikkszám segítségével, csak alsó. Felső korlátot pedig a legnagyobb fokszám segítségével tudtunk adni.*

Ha van egy gráf, aminek kromatikus száma többszöröse a klikkszámnak, akkor egy kellően nagy klikknek egy éllel való hozzácsatolásával el tudnánk érni, hogy a két mennyiség megegyezzen, tehát a gráf szerkezetéről, felépítéséről nem lenne hasznos információnk.

Ezért megköveteljük, hogy az összes feszített részgráfjára is fennálljon, hogy klikkszám=kormatikus szám és az ilyeneket Perfekt Gráfoknak fogjuk nevezni.

3.4. Mohó algoritmus és színezés

A következőkben egy algoritmus segítségével fogunk felső korlátot adni a szükséges színek számára, illetve pontosan meg is fogjuk tudni mondani, hogy mely csúcsnak milyen színt kell adnunk.

Mohó algoritmusnak nevezünk egy algoritmust akkor, ha mindig az éppen aktuálisan legjobbnak tűnő választás mellett döntünk a végrehajtódása folyamán és nem foglalkozunk azzal, hogy valamelyik lépésnél esetleg egy akkor nem olyan jónak tűnő döntéssel a végeredményünk jobb lett volna.

3.4.1. Algoritmus (Mohó színezés). *0.lépés: A színek egy előre meghatározott sorrendben állnak a rendelkezésünkre.*

1.lépés: Készítsük el a csúcsoknak egy p sorrendjét

2.lépés: Minden csúcshoz színt fogunk rendelni a következők szerint. Az i. lépésben a v_i csúcshoz rendeljünk a színek sorrendjében az első olyan színt, mely v_i szomszédjaitól különböző.

3.4.2. Megjegyzés. *Az algoritmus nagy előnye, hogy a csúcsok sorba állításával definiálja a mohó algoritmus által előállított színezésnek a kromatikus számát, melyet $\chi_p(G)$-vel jelölünk. Ez egy felső becslése a gráf kromatikus számának.*

3.4.3. Tétel. *G egy tetszőleges gráf, melyben vesszük a csúcsoknak egy p sorrendjét, ekkor $\chi_p(G) \leq \delta + 1$.*

Bizonyítás. Veszünk egy tetszőleges csúcsot, amit nem színezhetünk olyan színűre, mint amilyen színt kaptak a szomszédjai már, viszont ez a szám nem lehet több az aktuális csúcs fokszámánál és ezt lehet felülről becsülni a legnagyobb fokszámmal, vagyis $\delta(G)$-vel. Azaz amikor színezek egy csúcsot legfeljebb $\delta(G)$ tiltott szín van, amit nem használhatok fel, ezért $\delta(G) + 1$ már elég egy jó színezéshez. □

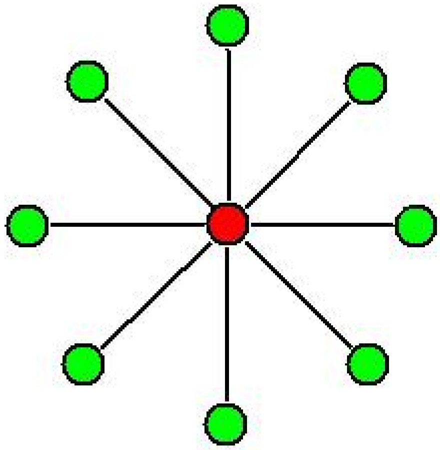
3.4.4. Megjegyzés. *A csúcsok egy rossz sorrendje esetén sokkal több színt kell felhasználnunk, mint amennyivel optimálisan ki lehetne színezni. Ugyanakkor egy jó sorrenddel akár a gráf kromatikus számával egyenlő színnel is jó színezést kaphatunk.*

3.4.5. Példa (Csúcsok rossz sorrendje). *Vegyünk egy $2n$ csúcsú $G = (V, E)$ páros gráfot, ahol $V = V_1 \cup V_2$. A gráf egyik osztályában szereplő csúcsok legyenek $V_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, míg a másik osztályban szereplőek legyenek $V_2 = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$, valamint tudjuk v_i és w_j között akkor megy él, ha $i \neq j$, valamint minden i, j-re igaz, hogy $\{v_i v_j\}, \{w_i w_j\} \notin E$.*

Készítsük el a csúcsok egy p sorrendjét a következők szerint: $p = \{v_1, w_1, v_2, w_2, \ldots, v_n, w_n\}$. A $2k$. lépésben w_k-hoz rendel egy a szomszédjaitól különböző színt, de mivel korábban már $k - 1$ színt elhasználtunk, így w_k-hoz már a k. különböző színt fogja hozzárendelni.

Így a G gráfot $2n$ színnel színezte ki az algormus, holott 2 színnel is színezhettük volna, ha a V_1 csúcsosztályban levők kapják az egyik, míg a V_2-ben levők a másik színt. Tehát láthattuk, hogy ebben a példában az algoritmus rossz eredményt ad vissza.

3.4.6. Példa (Csúcsok jó sorrendje). *Legyen G egy $n + 1$ csúcsú csillag gráf, ahol az egyik csúcsnak a fokszáma n, ezt jelöljük w-vel, míg a többinek 1, ezeket jelöljük $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$-el. Legyen a p sorrendünk a következő: $w, \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. A k-adik lépésben a v_{k-1} csúcs következik, melyhez a szomszédjától különböző színt rendelünk, mivel egyetlen szomszédja van éspedig w, így ettől különbözőt. Így sikerült kiszíneznünk a csillag gráfot 2 színnel. Ettől kevesebbel nem tudnánk színezni, hiszen részgráfként tartalmazza a két csúcsú teljes gráfot, amit legkevesebb 2 színnel kell színeznünk. A Mohó színezéssel optimális megoldást kaptunk.*



Egy csillag gráf két színnel való színezése.

4. fejezet

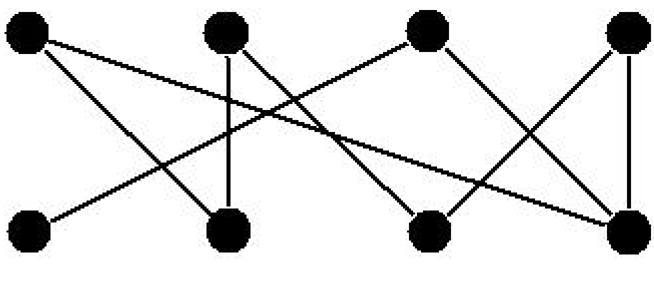
Páros gráfok és órarendkészítés

4.1. Páros gráfok

Először szükségünk lesz a páros gráfok fogalmára, melyet a következő példán keresztül vezetünk be:

4.1.1. Példa. *Egy bálban vannak férfiak és nők, ahol a két nem képviselői kölcsönösen szeretnének táncolni egymással az est folyamán. Tételezzük fel, hogy csak ellentétes neműek táncolhatnak egymással. Másnap megkérünk minden egyes a bálban résztvevő személyt, hogy nevezze meg kikkel táncolt az este. A férfiakat és nőket csúcsokként értelmezzük, ha pedig táncolt egy nő egy férfival, akkor a két csúcsra egy élt illesztünk. Így egy páros gráfot kapunk, amiben a csúcsok két részre vannak osztva, ahol egy részen belül nem mennek élek, csak a két rész között.*

4.1.2. Definíció. *Páros gráfnak nevezünk egy $G = (V, E)$ gráfot, ha csúcsai két részhalmazba: A-ba és B-be oszthatóak úgy, hogy G minden élére igaz, hogy egyik végpontja A-ban, a másik B-ben van és $G = (A, B)$-vel jelöljük.*



Egy 8 csúcsú páros gráf

Azon felül, hogy különböző színekkel jelölhetjük egy páros gráfban a különböző osztályokban elhelyezkedő pontokat, gondolhatunk akár úgy is rá, hogy a színek maguk az osztályok.

4.1.3. Definíció. *Teljes páros gráfnak nevezzük az olyan páros gráfot, ahol minden A-beli és B-beli pont össze van kötve egymással, valamint jelöljük az osztályok számosságát* $|A| = a$ *és* $|B| = b$*-vel. A két osztályt együttesen* $K_{a,b}$*–val.*

4.1.4. Definíció. *Párosításnak vagy részleges párosításnak nevezzük az élek egy* M *részhalmazát, melyre igaz, hogy a benne szereplő éleknek nincs közös csúcsa. Az* M*-ben szereplő éleket független éleknek nevezzük, valamint azt mondjuk az* M *által kifeszített részgráf csúcsairól, hogy az* M*-beli élek lefedik őket.*

4.1.5. Definíció. *Egy* G *gráfban egy* M *párosítást teljes párosításnak nevezünk, ha az* M *által feszített részgráf minden* G*-beli csúcsot lefed.*

4.1.6. Tétel (Hall). *Egy* $G = (A, B)$ *páros gráfban akkor és csak akkor van* A*-t fedő párosítás, ha minden* X *részhalmazára igaz, hogy az* X*-ben szereplő ponthalmaz szomszédjainak a halmazának a mérete legalább akkora, mint az* X*-ben levő csúcsok halmaza.*

4.1.7. Megjegyzés. *Szokás Hall-feltételnek is hívni az előbbi tételt.*

4.2. Páros gráfok színezése, kétszínező algoritmus

4.2.1. Tétel. *Egy legalább egy élet tartalmazó* G *gráf akkor és csak akkor páros, ha* $\chi(G) = 2$*.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a csúcsokat már kiszíneztük jól két színnel, pirossal és zölddel.

Osszuk $V(G)$-t a gráf csúcsainak halmazát két nem üres, diszjunkt részhalmazra $V_1(G) \cup V_2(G)$-re, úgy hogy minden élre igaz, hogy végpontjai nem lehetnek csak az egyik halmazban. $V_1(G)$-be tettük a pirossal színezett csúcsokat és $V_2(G)$-be a zölddel színezett csúcsokat. A létező él miatt pedig $\chi(G) \geq 2$. □

4.2.2. Definíció. *Dinamikus halmaznak nevezzük az olyan halmazt, mint absztrakt adattípust, mely az őt felhasználó algoritmus során változik.*

4.2.3. Definíció. *Sornak nevezzük az olyan dinamikus halmazt, melyből csak a legrégebben beérkezett elemet vehetjük ki.*

4.2.4. Definíció. $UJSOR(S, n)$ *alatt azt az algoritmust értjük, hogy létrehozunk egy* n *méretű* S *nevű sort.* S*-ről feltettük, hogy nem üres.* S*-ben végezhető műveletek:*

- $S \Longleftarrow u$*,* u*-t berakjuk az* S *végére*
- $v \Longleftarrow S$*,* v*-t kivesszük az* S *elejéről*

4.2.5. Definíció. *Veremnek nevezzük az olyan dinamikus halmazt, melyből csak a legutoljára betett elemet vehetjük ki.*

4.2.6. Definíció. $UJVEREM(S, n)$ *alatt azt értjük, hogy létrehozunk egy* S *nevű és* n *méretű vermet.* S*-ről feltettük, hogy nem üres.* S*-ben végezhető műveletek:*

- $S \Longleftarrow u$*,* u*-t berakjuk az* S *tetejére*
- $v \Longleftarrow S$*,* v*-t kivesszük az* S *tetejéről*

Szükséges még továbbá a gráfok megadási módjainak a bővítése is.

4.2.7. Definíció. *A $G = (V, E)$ gráf szomszédsági mátrixa alatt a következő $n \times n$-es mátrixot értjük, ahol $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ az n darab csúcsot jelöli.*
- *$A[i, j] = 1$ ha az i és j csúcsok között van él*
- *$A[i, j] = 0$ ha az i és j csúcsok között nincsen él*

4.2.8. Definíció. *Láncolt listának nevezzük az olyan adatszerkezetet, mely tartalmaz listaelemeket, melyek két félék lehetnek: mutató és adat. Minden láncolt lista tartalmaz egy listafejet ami egy mutató, vagy más néven pointer.*

4.2.9. Megjegyzés. *Szokás linked list-nek is nevezni. Az elemei között van valamilyen lineáris sorrend és minden elem tartalmaz egy mutatót a következő elemre a listában. Műveletek, melyek elvégezhetőek egy láncolt listában tárolt adathalmazon: beszúrás, törlés, keresés.*

4.2.10. Definíció. *A tömb azonos típusú elemek halmaza.*

4.2.11. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ gráfot megadhatunk éllistásan is, ekkor a gráf minden csúcsához egy láncolt lista fog tartozni és a hozzájuk kapcsolódó listafejeket tömbben tároljuk. Azaz vegyük az $i \in V$ csúcsot, melyhez tartozik egy láncolt lista, amiben a belőle kimenő éleket, az élekhez tartozó végponttal fogjuk eltárolni. Ha az élek súlyozottak, akkor a súlyokat is eltároljuk.*

4.2.12. Megjegyzés. *Ha súlyokat, vagy egyéb információt szeretnénk eltárolni, akkor több tömbre is szükségünk van.*

Egy gráfot járunk be akkor, amikor az egyik csúcsából kiindulva élek mentén haladva lépünk egyik csúcsáról a következőbe, ezzel egyfajta sorrendet adunk meg a csúcsok halmazán.

Feljegyezzük a kiindulási csúcs sorszámát. Kétféle bejárás ismert, a mélységi és a szélességi, mi az utóbbival fogunk részletesebben foglalkozni.

A szélességi keresés elsődleges célja, ha van egy véges gráfunk, akkor egy kezdőcsúcsból kiindulva fogunk elkészíteni egy sorrendet ettől a csúcstól vett növekvő sorrendben.

4.2.13. Algoritmus (Szélességi keresés). *Kiválasztunk egy kezdőcsúcsot. Ezt a csúcsot elért csúcsnak tekintem innentől. Minden csúcsnál megvizsgáljuk, hogy milyen más csúcsok érhetőek el belőle.*

-1.lépés: A kezdőcsúcs szomszédait térképezzük fel.

-2.lépés: A frissen megtalált csúcsok még nem ismert szomszédos csúcsait térképezzük fel.

-3.lépés: Addig ismétlem a 2.-es lépést, míg találok új csúcsokat.

A kezdő csúcsot jelöljük s-el. Minden megtalált csúcs három különböző állapotban lehet:
1. Nem látott
2. Látott, de még át nem vizsgált
3. Átvizsgált
Ha egy csúcsot már megtaláltunk, akkor azt még egyszer már nem jegyezzük fel.
Ha minden csúcs állapota átvizsgált, akkor jártuk be a gráfot.

Nézzük azt az algoritmust, mely két színnel színez egy gráfot, vagy ha nem tudom színezni, akkor talál benne egy páratlan hosszú kört.

4.2.14. Definíció. *Az algoritmusban használt $Sz(u)$ absztrakt függvény az u csúcs szomszédjainak halmazát adja meg. A $p(u)$ a kezdőcsúcs távolsága az u csúcstól.*

4.2.15. Algoritmus (Kétszínezés - Szélességi kereséssel). $SZKketsz(G)$*:* $for\ i = 1 \ldots n$*;* $p(i) := 0$ */egyesével végignézem a csúcsokat, kezdetben mindegyik 0 távolságra van a kezdőcsúcstól*

$SZ(1) := 0$*;* $p(1) := 1$*;* $UJSOR(S, n)$*;* $S \Longleftarrow 1$ */Az egyes csúcsot látottnak jelöljük és betesszük az S sorba*

$while\ S \neq \oslash$ */ Amíg S nem lesz üres*

$u \Longleftarrow S$ */ S sor első elemét az u-ba tesszük*

$for\ uv \in E$ */ Megvizsgálom az u csúcsnak a v szomszédjait*

$if\ p(v) = 0\ then\ S \Longleftarrow v$*;* $SZ(v) := SZ(u) + 1$*;* $p(v) := u$ */ A nem látott v csúcsot átteszük S-be. Valamint a szomszédainak halmazába beteszem.*

$else\ if\ SZ(u) = SZ(v)\ then\ PTLANKOR(u, v)$ */ Ha szomszédjaik halmaza megegyezik, akkor a páratlankör eljárásba kerülünk.*

Ha nem kerültünk a $PTLANKOR$ eljárásba, akkor a következő egy jó kétszínezés: v legyen piros, ha $SZ(v)$ páros, különben pedig kék. Más esetben a $PTLANKOR$ eljárásba kerülünk: Itt meg kell találni egy páratlan kört és kiírni. Legyen W egy üres verem és Z egy újabb üres sor. $PTLANKOR(u, v)$:

$UJSOR(Z, n)$*;* $UJVEREM(W, n)$

$while\ u \neq v$

$W \Longleftarrow u; Z \Longleftarrow v$ */amíg v és u nem egyenlőek tegyük u-t a W verembe és v-t a Z sorba*

$u := p(u)$*;* $v = p(v)$

$print\ u$ */u kiiratása*

$while\ W \neq \oslash$

$print\ y \Longleftarrow W$ */amíg a W ki nem ürül, elemeit beletesszük y-ba.*

$while\ Z \neq \oslash$

$print\ y \Longleftarrow Z$ */ amíg a Z ki nem ürül, elemeit beletesszük y-ba*

Forrás: (Király Zoltán Gráfok, és Algoritmusok jegyzet)

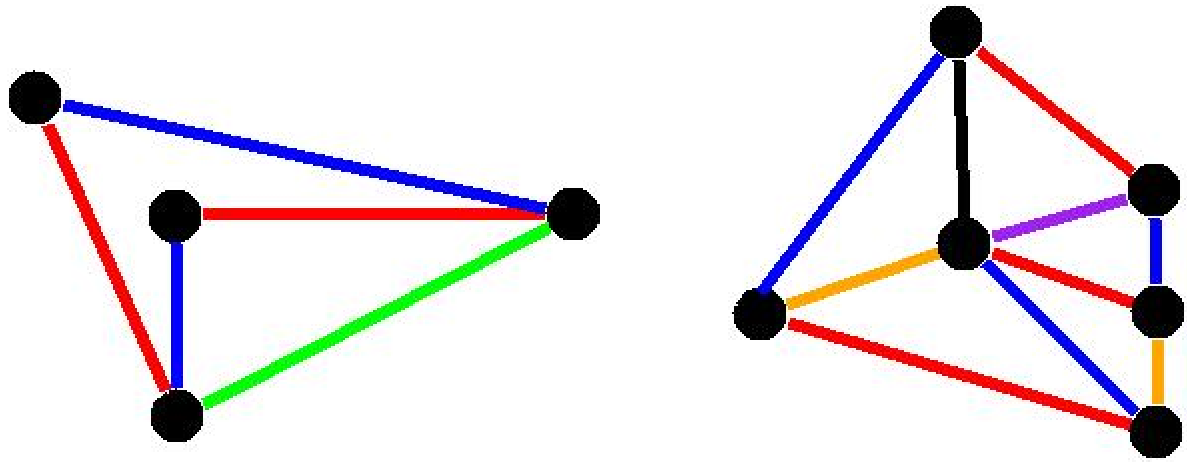
A nehézség és a különbség a mohó algoritmushoz képest többek közt az, hogy egy konkrét színezés vagy egy konkrét részgráf megadására törekedtünk és feltettük, hogy csak két színt használhatunk.

A mohó algoritmusnál kezdetben azt tudtuk, kifogjuk színezni a gráfot legfeljebb csúcsszámnyi színnel.

4.3. Élszínezés és órarendkészítés

Eddig a csúcsok színezésével foglalkoztunk, viszont korábban már említve volt, hogy egy gráfnak nem csak a csúcsait lehet színezni, hanem az éleit is.

4.3.1. Definíció. *Egy G gráf élei k színnel színezhetőek akkor, ha minden élére igaz, hogy a szomszédjától különböző színű és k színt használtunk fel ehhez. Azt mondjuk, hogy G élkromatikus száma k, ha élei k színnel színezhetőek, de $k-1$-el már nem és ezt $\chi_e(G) = k$-val jelöljük.*



Két élszínezett gráf

4.3.2. Tétel (Vízing). *Legyen G egy egyszerű gráf, ekkor $\chi_e(G) \leq \delta(G) + 1$.*

Az órarendkészítés megvalósításához ütemezéselméleti fogalmak bevezetése szükséges.

4.3.3. Definíció. *Ütemezési feladatnak nevezzük azt, amikor gépeken (machine) ütemezzük az elvégzendő munkákat (job), bizonyos feltételek és a célfüggvény optimalizálása mellett.*

A munkákat vagy job-okat mindig aszerint próbáljuk meg elvégezni, amit megkövetel a feladattól a célfüggvény, a feltételek betartása mellett. A jobok gépeken való elvégzésére van két egyszerű szabály, melyeket nem szeghet meg az őket megoldó algoritmus:

1. *Egy munka legfeljebb egy gépen lehet egy időben*
2. *Egy gépen legfeljebb egy munkát végezhetünk egy időben*

4.3.4. Definíció. *Minden munkának van egy megmunkálási ideje (processing time), melyet p-vel jelölünk.*

A j munka megmunkálási ideje az i gépen az p_{ij}.

4.3.5. Definíció. *Minden munkához tartozik egy befejezési idő, mely azt az időpontot jelzi, amikor a munkának minden részét megmunkáltuk. A j job befejezési ideje az S ütemezésben: $C_{j,s}$*

4.3.6. Definíció. *Az Open Shop modellben n darab munkát kell elvégezni m darab gépen úgy, hogy minden munkát minden gépen pontosan egyszer kell megmunkálni tetszőleges sorrendben. Az Open Shop feladat jele: O*

A következőképpen jelölünk egy ütemezési feladatot:

A feladat típusa | A feladat feltételei | A feladat célfüggvénye

Vezessünk be két fontos alsó korlátot:
- a legnagyobb összmegmunkálási idő:

$$Jmax = max \sum p_{j,i}(jfut)$$

- a legnagyobb gépterhelés:

$$Mmax = max \sum p_{j,i}(ifut)$$

4.3.7. Feladat. *A mi esetünkben a célfüggvényünk $Cmax$, ami a teljes átfutási időt minimalizálja.*

A teljes ütemezési feladat:

$$O|pj \in 0, 1|Cmax$$

Először értelmezzük a problémát, ez egy olyan faladat, ahol minden munkát el kell végezni minden gépen pontosan egyszer és tetszőleges sorrendben. Minden munkának a hossza 0 vagy 1 és a célfüggvény a teljes átfutási idő minimalizálása.

Vegyük a problémának azt a szűkítését, amikor $p_{i,j} = 0, 1$. Ha a fenti eset áll fent, akkor elég olyan ütemezést találni, ahol minden munkára igaz, hogy valamelyik $[t, t + 1]$ intervallumban végződik el, ahol $t \in N$. Ekkor ezen intervallumok számának a minimalizálása a célfüggvény.

Mivel minden intervallumban egy munka és egy gép is pontosan egyszer szerepelhet, ezért minden t időintervallumban az ütemezést a munkák és gépek részhalmazai közti párosítás határozza meg.

Tehát a problémát megoldhatjuk, ha minimális számú párosítással próbáljuk lefedni a két halmaz $i - j$ párjait, ahol $p_{i,j} = 1$. Így a feladatot átkonvertáltuk egy élszínezési feladattá, amire létezik hatékony algoritmus.

Az új páros gráfot jelöljük $G(M, J, P)$-vel, ahol az M és J osztályokban minden munkát és gépet egy-egy pont fog jelenteni és két i, j csúcs akkor és csak akkor van összekötve éllel ha $p_{i,j} > 0$.

Ennek a gráfnak az élhalmazát kell kiszínezni minimális számú színnel, így semelyik két azonos színű él nem találkozhat ugyanabban a csúcsban.

Ezt a minimumot a következő tétel adja meg:

4.3.8. Tétel. *Minden G páros gráfra igaz, hogy $\chi_e(G) = \Delta(G)$. Vagyis a gráf élszínezési száma egyenlő a maximális fokszámmal.*

Bizonyítás. Egyértelmű, hogy $\chi_e(G) \geq \Delta(G)$. Mivel G páros gráf, vegyük azt a d párosítást, amelyik a legtöbb élt fedi le és $d = \Delta(G)$. A párosítás elemei legyenek $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$, ha ezzel a párosítással fedünk minden élt, akkor készen vagyunk. Ezért tegyük fel, hogy van $e = \{u, v\}$ olyan él, melyet nem fedtünk le a d párosítással.

Mivel u-ra és v-re is igaz, hogy a fokuk legfeljebb d lehet, valamely T_i párosítás biztosan nem illeszkedik u-ra és valamely T_j pedig nem illeszkedik v-re. Ekkor ha $i = j$, akkor e-t bevehetjük T_i-be és készen vagyunk.

Tegyük fel, hogy $i \neq j$, ebben az esetben viszont $T_i \cup T_j \cup e$ gráfban a maximális fokszám 2 lenne. Ekkor az új T_i' és T_j' párosításokkal fednénk az összes élt, ami ellentmond annak, hogy T_i és T_j-vel fedhetjük le a legtöbbet, ezért készen vagyunk. $\square$

Tudjuk, hogy $\Delta(G) = max\{J_{max}, M_{max}\}$, így ezt a tétellel összevetve már következik a $C_{max}^* = max\{J_{max}, M_{max}\}$ egyenlőség. Mivel a tétel érvényes párhuzamos élek esetén is, így akkor is igaz, ha egy munkának valamely gépen több részfeladata is van.

4.3.9. Példa. *Ennek az Open Shop feladatnak van egy tipikus való életben is használt alkalmazása: az órarend készítése. Egy iskolában van n darab osztály és m darab tanár, illetve van köztük egy párosítás aszerint, hogy az adott tanár melyik osztályt tanítja és a célunk, hogy minden nap a tanítás minél előbb véget érjen. Az nem jelent gondot, ha egy tanárnak egy osztállyal egy nap több órája is van.*

Tegyük fel, hogy egy napra készített órarendeknek az optimális hossza k, valamint ha valóban optimális órarendet szeretnénk készíteni, akkor legalább $\lceil |E|/k \rceil$ teremre van szükség és ennyi elég is.

Tegyük fel, hogy van megfelelő számú termünk. Ezután bármely optimális beosztást átalakíthatjuk úgy, hogy minden órában a lehető legegyenletesebben osszuk el az órákat, A páros gráf egy optimális kétszínezésében van két párosítás M és N, melyeknek mérete legalább kettővel eltér, akkor az $M \cup N$-ben menő út mentén, a több élt használó párosításból cserélni kell az éleket egészen addig, míg M és N mérete legfeljebb 1-el tér el egymástól.

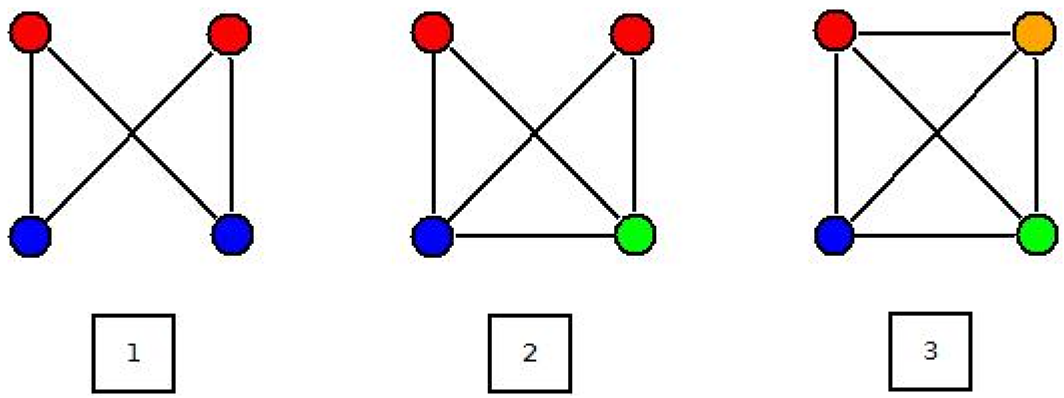
5. fejezet

Perfekt Gráfok

5.0.10. Definíció. *Egy G gráf perfekt, ha a kromatikus száma és a klikkszáma egyenlő, valamint G minden feszített részgráfjára is teljesül.*

Sok magyar vonatkozása van a perfekt gráfoknak. Gallai Tibor 1958-as eredményeiből alakult ki, melyekben azt is taglalta, hogy minden perfekt gráf komplementere is perfekt, melyet 1972-ben Lovász László bizonyított be.

A perfekt gráf kifejezést először Claude Berge használta, akitől a definíció is eredeztethető.



4 csúcsú perfekt gráfok

5.1. Perfekt gráfok alaptulajdonságai

5.1.1. Tétel. *A C_{2k+1} gráf nem perfekt, ha* $(k \geq 2)$.

Bizonyítás. Nézzük, ha $k = 2$, ekkor az 5 hosszú körről van szó:

- $\chi = 3$
- $\omega = 2$

Illetve ez minden egyes C_{2k+1}-re igaz lesz, hiszen k-t növelve mindig két új csúcsot fogok hozzátenni a gráfhoz, melyeknek tudok adni azonos színt a már meglevő 3 színből és a legnagyobb klikkszám is 2 marad. $\square$

5.1.2. Tétel. *A $\bar{C}_{2k+1}$ gráf nem perfekt, ha $(k \geq 2)$.*

Bizonyítás. Ebben a gráfban lesz k csúcsból álló klikk, ha minden 2. pontot kiválasztottuk, viszont nincsen benne $k+1$ méretű, mert akkor az először és utoljára kiválasztott csúcsok között nem menne él, ezért $\omega(\bar{C}_{k+1}) = k$. k színnel legfeljebb $2k$ csúcsot tudunk színezni, tehát $\chi(\bar{C}_{k+1}) \geq (k+1)$, ezért$\bar{C}_{2k+1}$ nem perfekt.
□

5.1.3. Tétel (Lovász). *Egy G gráf akkor és csak akkor perfekt, ha $\bar{G}$ perfekt.*

Bizonyítás. Mivel az állítás szimmetrikus, ezért elég csak az egyik oldalt bebizonyítani, hiszen ha azt tudjuk, hogy G perfekt, akkor $\bar{G}$ is perfekt. Tehát, ha $\bar{G}$ perfekt, akkor $\bar{\bar{G}}$-nak is perfektnek kell lennie, de mivel $\bar{\bar{G}} = G$, ezért elég csak az egyik irányt belátni.

Tegyük fel, hogy G perfekt gráf, ekkor nem tartalmazza feszített részgráfként a C_{2k+1} és a $\bar{C}_{2k+1}$ gráfokat. Ebből következik, hogy $\bar{G}$ nem tartalmazza feszített részgráfként a C_{2k+1} és a $\bar{C}_{2k+1}$ gráfokat és ezáltal $\bar{G}$ is perfekt. □

5.1.4. Megjegyzés. *A fenti tételt szokás Gyenge Perfekt gráf tételnek hívni.*

A Gyenge Perfekt tétel akkor használható jól, ha egy gráfról vagy komplementeréről könnyen ellenőrizni tudjuk, hogy perfekt.

Általánosabban is sikerült többet mondani a perfektségről: Ha valamelyik gráfban van feszített részgráfként egy legalább 5 hosszú páratlan kör, akkor az nem perfekt a definíció alapján.

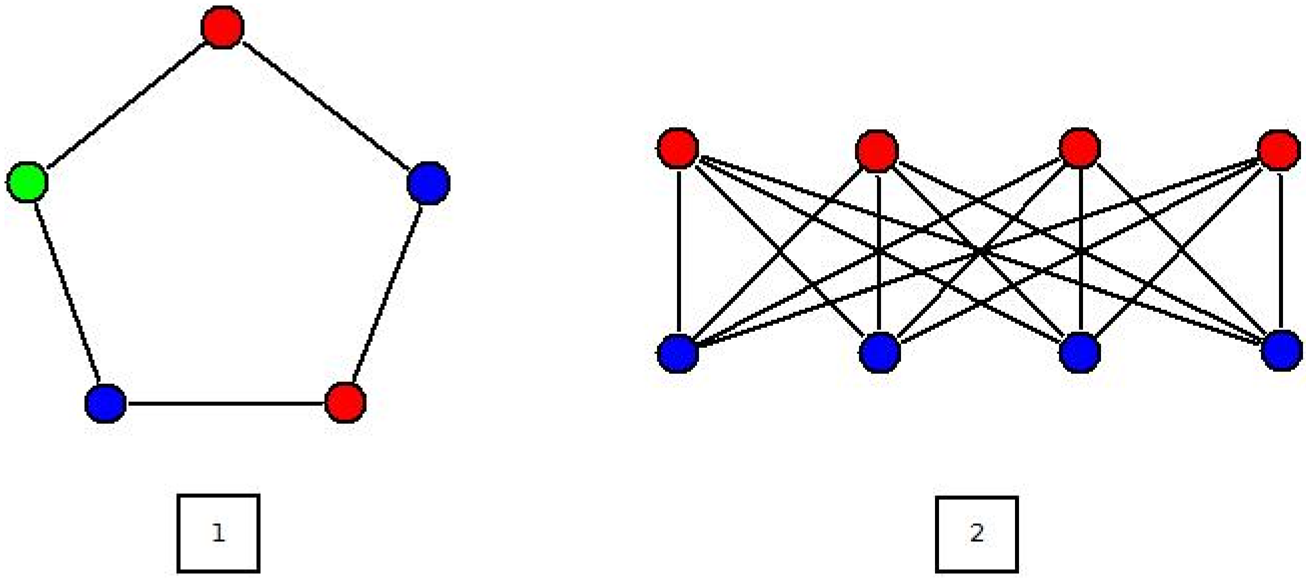
5.1.5. Tétel (Erős Perfekt gráf tétel). *Egy gráf akkor és csak akkor perfekt, ha nem tartalmaz feszített részgráfként legalább 5 hosszú páratlan kört és a komplementere sem.*

5.2. Perfekt és páros gráfok

A perfekt gráfok egyik legismertebb példája a páros gráfok.

5.2.1. Tétel. *Minden $G = (A, B)$ páros gráf perfekt.*

Bizonyítás. Minden $G = (A, B)$ páros gráfra igaz, hogy minden $G' = (A', B')$ feszített részgráfja is szintén páros gráf, így elég belátnunk, hogy minden páros gráfra igaz, hogy a klikkszáma egyenlő a kromatikus számával. Az olyan $G = (A, B)$ páros gráfra, melyben nincsen él, igaz lesz, hogy $\chi(G) = \omega(G) = 1$, ahol pedig G-ben legalább 1 él van, ott $\chi(G) = \omega(G) = 2$, hiszen az A-ban levő csúcsokat lehet színezni az egyik színnel, míg a B-ben levőket a másikkal. □



5 hosszú és páros gráf

5.2.2. Definíció. *Legyenek $I_1 = |a_1, b_1|, I_2 = |a_2, b_2|, \dots$ intervallumgráfok és a p_i, p_j egy G gráf csúcsai, amik között akkor és csak akkor megy él, ha igaz, hogy I_1 és I_2 metszete nem üres.*

5.2.3. Tétel. *Minden intervallumgráf perfekt.*

Bizonyítás. Mivel az intervallumgráfok feszített részgráfjai is intervallumgráfok, így elég az intervallumgráfokra belátni a perfektséget.

Legyen $\omega(G) = k$, mivel $\omega(G) \leq \chi(G)$, ezért elég belátni, hogy $\chi(G) \leq k$. Intervallumonként elkezdjük színezni a pontokat balról jobbra és a még színezetlen intervallumokból mindig azt színezzük előbb ki, amelyiknek csúcsa balrább van. Ha az egyik intervallumot egy $k+1$-edik színnel kellene színeznünk, akkor az azt jelentené, hogy a bal vége már benne van k intervallumban, amiket már színeztünk.

Ekkor létezik $k+1$ olyan intervallum, hogy bármely kettő metszi egymást, ami egy $k+1$ méretű klikk, ami viszont ellentmond a feltevésnek. $\square$

5.2.4. Definíció. *Egy G gráf élgráfján azt a G' gráfot értjük, ahol $v_1, v_2, \dots, v_n \in V(G)$ -ből képződnek G' élei és $e_1, e_2, \dots, e_m \in E(G)$-ből G' csúcsai oly módon, hogyha v_i és v_j összekötötte e, akkor G'-ben e egy csúcs lesz, melyből a v_i és v_j-nek megfelelő csúcsok fognak kiindulni.*

5.2.5. Tétel. *Egy páros gráfnak az élgráfja is perfekt gráf.*

5.2.6. Definíció. *Részben rendezett egy halmaz, ha elemein definiálunk egy reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív relációt. Ezáltal részben rendezett halmazoknál nem feltétel, hogy összehasonlíthassunk két elemet.*

5.2.7. Tétel. *Részben rendezett halmaz gráfja is perfekt.*

6. fejezet

Síkbarajzolható gráfok színezése

Az a kérdés, hogy minden térkép kiszínezhető 4 színnel, nehezebbnek bizonyult a vártnál, de Kempe-nek sikerült eredményt felmutatnia. A négy-szín tételét akarta bebizonyítani, de ehelyett a síkbarajzolható gráfok öt színnel való színezését látta be, ami öt-szín tétel néven vált ismerté.

Ez nem csak a gráfelmélet, de a diszkrét matematika egyik legszebb tétele is egyben.

6.1. Síkbarajzolható gráfok általában

6.1.1. Definíció. *Egy gráfot akkor nevezünk síkbarajzolhatónak, ha lerajzolható a síkba úgy, hogy az élei nem metszik egymást. Egy síkbarajzolt gráf a síkot tartományokra bontja.*

6.1.2. Definíció. *Egy gráfot gömbrerajzolhatónak nevezünk, ha lerajzolható egy gömbre úgy, hogy élei nem metszik egymást. Egy gömbrerajzolt gráf a gömböt tartományokra bontja.*

6.1.3. Megjegyzés. *Azért fontos számunkra a gömbrerajzolhatóság is és nem csak a síkbarajzolhatóság, mert az eredeti problémában térképrajzolásról volt szó. A térkép a Földön levő országokat ábrázolja, aminek alakja leginkább egy gömbhöz hasonló. A két különböző rajzolhatóság között szoros az összefüggés.*

6.1.4. Tétel. *Egy gráf akkor és csak akkor síkbrajzolható, ha gömbrerajzolható.*

Bizonyítás. Egy sík gráf leképezése gömbre: A gömfelületet egyik pontjával a síkra helyezem és innentől ezt tekintem déli pólusnak és a gömb ezzel szemben elhelyezkedő pontját az északinak. A következőkben az északi pólus pontját összekötöm a síkban levő gráf minden pontjával, ezeknek a vonalaknak pedig lesz egy további metszéspontja a gömbbel, amik a kívánt vetítést fogják szolgáltatni.

Ezt a módszert sztereografikus leképezésnek nevezzük. Az eljárás megfordítható, ha az északi pólus nem pontja a gráfnak és nem halad át rajta él. $\square$

6.1.5. Tétel (Euler formula). *Ha egy síkbeli összefüggő gráfnak van n csúcsa, e éle és t tartománya, akkor $n + t = e + 2$.*

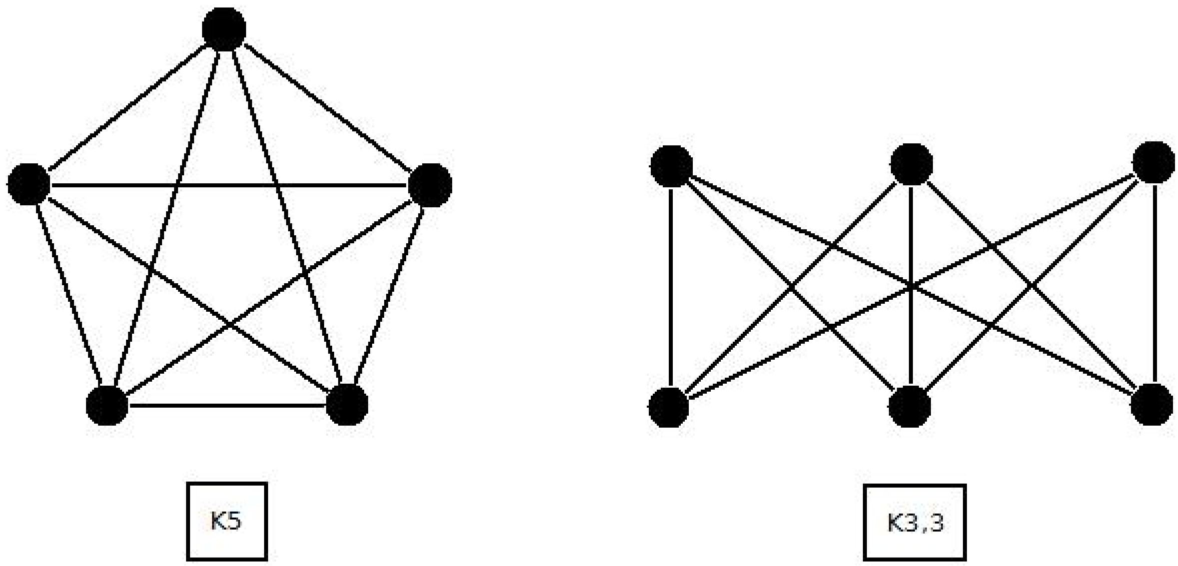
Az előző tétel megszorításai:

6.1.6. Tétel. *Ha G összefüggő, egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor* $e \leq 3n - 6$.

6.1.7. Tétel. *Ha G egyszerű síkbarajzolható gráf, legalább* 4 *csúcsa van és minden körének hossza legalább* 4*, akkor* $e \leq 2n - 4$.

6.1.8. Tétel. *Ha G egyszerű, síkba rajzolható gráf, akkor a minimális fokszám legfeljebb 5.*

Bizonyítás. Ha a gráf csúcsainak száma 3 vagy kevesebb, akkor akár 3 színnel is tudom színezni, ezért feltehetjük, hogy csúcsainak száma is legalább ennyi. Indirekt tegyük fel, hogy $\chi \geq 6$. Mivel minden élhez két csúcs tartozik, az élek száma egyenlő a fokszámok összegének kétszeresével, azaz $6n \leq 2e$. A korábbi tételből adódik, hogy $2 * (e \leq 3n - 6)$, azaz $2e \leq 6n - 12$. Ezzel már ellentmondásra jutottunk, mert $6n \leq 6n - 12$ nem igaz. □



A két Kuratowski gráf

6.1.9. Megjegyzés. *A fenti két gráfot Kuratowski gráfoknak nevezzük, az első az* 5 *pontú teljes gráf, melyet jelöljünk* K_5*-el, a második a „ három ház – három kút" gráf, melyet* $K_{3,3}$*-al jelölünk. Utóbbi elnevezése egy problémából ered, hogy kössünk össze* 3 *házat* 3 *kúttal, hogy minden ház minden kúttal össze legyen kötve, de az utak nem metszik egymást. Illetve a házak között és a kutak között külön-külön ne menjen él, tehát a* $K_{3,3}$ *egy speciális páros gráf. Az alábbi tétel azt mutatja meg, hogy utóbbinak nincsen megoldása.*

6.1.10. Tétel. *A Kuratowski gráfok nem síkbarajzolhatóak.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy K_5 síkbarajzolható. Ekkor igaznak kell lennie rá, hogy $e \leq 3n - 6$, hiszen ez minden síkbarajzolható gráfra igaz. Ebben az esetben $10 \leq (3 * 5) - 6 = 9$, amivel ellentmondásra jutottunk.

Most indirekt tegyük fel $K_{3,3}$-ról is, hogy síkbrajzolható. Ha volna $K_{3,3}$-ban 3 hosszú kör, akkor ezek között vagy két háznak, vagy két kútnak kéne lennie, tehát 1 ház össze lenne kötve 1 másikkal, vagy 1 kút egy másik kúttal, de ez ellentmond $K_{3,3}$ definíciójának. Azaz minden köre legalább 4 hosszú, tehát igaz rá, hogy $e \leq 2n - 4$. Behelyettesítve: $9 \leq (2 * 6) - 4 = 8$, ez pedig nem igaz.

Így mind a két gráfról beláttuk, hogy nem síkbarajzolható. □

6.1.11. Definíció. *Legyenek G és H gráfok, melyek topologikusan izomorfak, akkor ha a két gráf egymásba transzformálható úgy, hogy egy élet új 2 fokú csúcs bevételével 2 új élre bontunk, vagy 2 fokú csúcs és a hozzá tartozó 2 él helyett 1 új élet veszünk fel.*

6.1.12. Megjegyzés. *A fent definiált fogalomban alkalmazott 2 művelet nem befolyásolja egy gráfnál, hogy síkbarajzolható-e.*

6.1.13. Tétel (Kuratowski). *Egy gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha nincs benne részgráfként K_5, vagy $K_{3,3}$, vagy ezekkel topologikusan izomorf gráf.*

A gráfhoz több különböző ábrázolás is tartozik. A különböző szakirodalmakban legtöbbször az élek egyenes vonallal megrajzolt szemléletes rajzával találkozunk.

Az alábbi tétel a síkbarajzolható gráfok és ábrázolásuk közötti kapcsolat viszonyát állapítja meg.

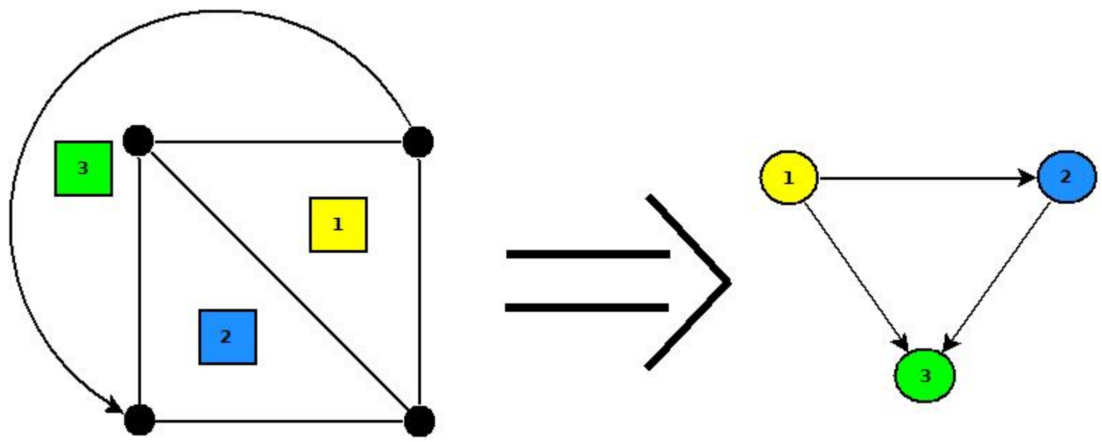
6.1.14. Tétel (Fáry-Wagner). *Legyen G egyszerű, síkbarajzolható gráf, ekkor tudjuk úgy is ábrázolni, hogy minden éle egy egyenes zárt szakasznak fog megfelelni a gráf ábrájában.*

6.2. Az ötszíntétel és a négyszíntétel

A térképen levő országok megfeleltethetőek a gráf tartományainak és és az országhatároknak az élek.

Eddig csúcsok és élek színezésével foglalkoztunk, nem a tartományokéval. A gráf egy megfelelő átalakításával ez kezelhető.

6.2.1. Definíció. *Legyen G egy síkbarajzolható gráf. G-nek a duálisa alatt azt a G' gráfot értjük, melyben a csúcsok a G-beli tartományok és G'-ben két csúcs között akkor megy él, ha az azoknak megfelelő G-beli tartományok szomszédosak.*



6.2.2. Tétel. *Síkbarajzolható gráf duálisa is síkbarajzolható.*

6.2.3. Tétel. *Legyen G egy síkbarajzolható gráf, ekkor színezhető legfeljebb 5 színnel.*

Bizonyítás. A G gráf pontjainak számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. Tegyük fel, hogy a gráf egyszerű, mivel a párhuzamos élek nem befolyásolják a színezést. Az előző alfejezetben kimondtuk, ha e a gráf éleinek száma, n a csúcsainak száma, akkor minden síkbarajzolható gráfra igaz lesz, hogy $e \leq 3n - 6$. Ebből következik, hogy biztosan van legalább egy olyan csúcs, melynek fokszáma legfeljebb 5. Hiszen ha minden csúcs fokszáma legalább 6 lenne, akkor az élek száma is legalább $\frac{6n}{2}$, de $\frac{6n}{2} \leq 3n - 6$ nem teljesül.

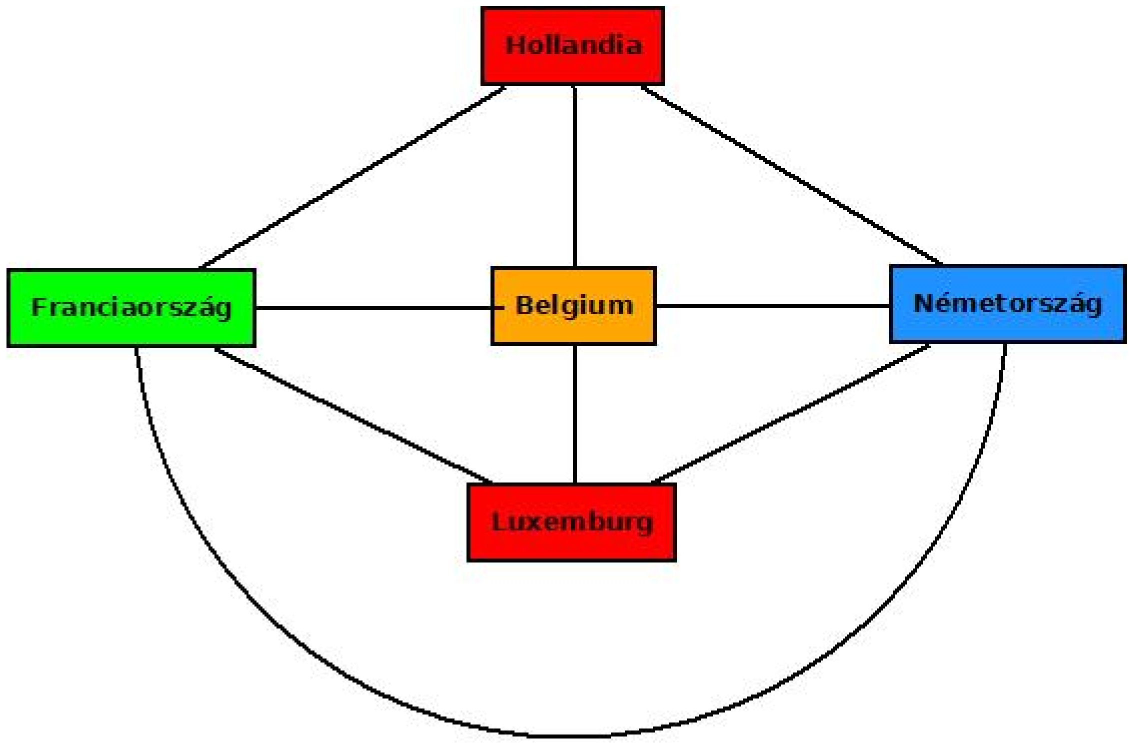
Tehát feltesszük, hogy van legalább egy olyan kiválasztott csúcs, melynek foka legfeljebb 5, legyen ez a csúcs x. Tegyük fel, hogy x foka legfeljebb 4, hagyjuk el x-et G-ből, ekkor az indukciós feltevés miatt a $G - \{x\}$ gráf színezhető 5 színnel. Most visszatesszük x-et, amit színezzünk a 4 szomszédjától különböző színűre.

Azt is feltehetjük, hogy $d(x) = 5$. Nem lehet x-nek minden szomszédja között él, hiszen akkor K_6-al izomorf részgráf állna elő G-ben, ez ellentmondana G síkbarajzolhatóságának. Ezért van x-nek két szomszéda y és z, hogy nincsenek összekötve. Húzzuk össze x, y, z-t egyetlen ponttá, így kapunk egy G' gráfot. G'-t pedig már tudjuk 5 színnel színezni az indukciós feltevés miatt. Viszont a G' színezése nem lesz megfelelő G-re nézve, mert x, y, z egyszínűek lesznek. G-ben van x-nek az y-on és z-n kívül 3 szomszédja, amik 3 színt foglalnak le, majd y-t és z-t tudjuk egyszínűre színezni, hiszen nincsenek összekötve. Mivel x szomszédait tudtuk 4 színnel színezni, így x-et lehet az ötödik színnel, amivel beláttuk, hogy G színezhető 5 színnel. $\square$

Ezzel beláttunk a kromatikus számra egy felső korlátot síkbarajzolható gráfok esetében.

6.2.1. Történelmi visszatekintés

A 4 szín tételhez nem létezik szépen leírható bizonyítás. Még 1852-ben egy angol matematikus Francis Guthire tette fel elsőnek a kérdést, hogy minimálisan hány színre van szükség a térképek színezéséhez. Hamar megsejtették, hogy 4 szín elég, de 3 kevés. Az hogy 3 kevés onnan lehetett látni, hogy számos országnál előfordult, hogy nem tudták megfelelően színezni, például vegyük Franciaországot, Németországot és a Benelux-államokat.



Gráfos szemléltetéssel is hamar találunk ellenpéldát, például egy 4 csúcsú teljes gráfot nem lehet 3 színnel színezni, viszont síkbarajzolható.

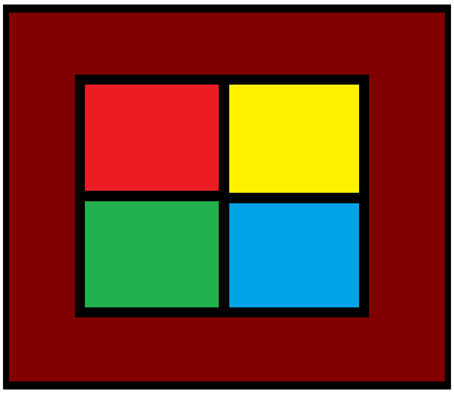
Több mint 100 évvel később sikerült eredményt felmutatni, ekkor használtak először számítógépet matematikai bizonyítás során (Appel-Haken bizonyítás). 1200 órán át vizsgálták a lehetséges ellenpéldákat, de végül sikerült mindegyik gráfot 4 színnel színezni.

Ám a matematika-társadalom nem fogadta el megfelelő bizonyításnak, majd 1996-ban szintén ellenpéldák vizsgálatával arra jutottak a kutatók, hogy 4 színnel minden síkbarajzolható gráf kiszínezhető, de ezt sem fogadta el mindenki.

2004-ben készítettek egy ellenőrizhető eljárást, ismét számítógéppel, de mivel ebben sem pusztán matematikai lépések vannak, így sokan még mindig sejtésnek tartják, hogy minden síkbarajzolható gráf kiszínezhető 4 színnel.

6.2.4. Tétel. *Minden síkbarajzolható gráf kiszínezhető 4 színnel.*

6.2.5. Megjegyzés. *Ha létezne a Földön olyan 4 ország, melyeknek van egy közös határpontja és ezt a 4 országot közrefogja egy 5. ország, akkor ezt csak 5 színnel tudnánk színezni!*



6.2.6. Megjegyzés. *A fentebb említett gráf viszont nem síkbarajzolható, hiszen ha vesszük az országokra, mint tartományokra vonatkoztatott gráf duálisát, akkor adódik, hogy ez a K_5 gráf, amiről beláttuk, hogy nem rajzolható síkba.*

6.3. Síkgráf színezés

Azt tudjuk, hogy mennyi színnel tudunk színezni egy térképet, avagy sík gráfot. A következő algoritmus megmutatja, hogy ténylegesen hogyan:

6.3.1. Definíció. *A színhalmaz elemei egy adott színezésnél az általunk felhasználni kívánt színeket jelenti.*

6.3.2. Megjegyzés. *Minden színezésnél feltesszük, hogy nem használhatunk fel több színt, mint amennyi a színhalmaz elemszáma.*

6.3.3. Definíció (Triviális átszínezés). *Legyen G gráf színhalmaza S. Vegyük a $v \in G$ csúcsot, melynek a szomszédainak a színeinek a halmazát jelöljük T-vel. Ha s színre igaz, hogy $s \notin \{S - T, v\}$, akkor a v csúcsot átszínezzük s színre.*

6.3.4. Definíció (Kempe-átszínezés). *Legyen S a G gráf színhalmaza, valamint $s, t \in S$. Legyen $G_{s,t}$ az s és t színű csúcsok és a köztük menő élek által határolt gráf. Vegyük ennek egy komponensét, melyben felcseréljük az s és t színeket.*

6.3.5. Megjegyzés. *Ha a Kempe-átszínezést csak egy csúcson hajtjuk végre, akkor az triviális átszínezés. Ha pedig a teljes gráfon, akkor mindenhol felcseréltük a két színt, amivel lényegében nem változtattunk semmit.*

6.3.6. Algoritmus. *Most a mohó algoritmus egy módosított változatát fogjuk használni. A csúcsok színét mohó módon kezdem el színezni oly módon, ha egy új színt kellene használnom, akkor előtte megpróbálom átszínezni a korábban már színezett csúcsok által feszített részgráfot.*

Ha nem találunk olyan átszínezést, mellyel kikerüljük az új szín használatát, akkor bevesszük az új színt a színek halmazába, mely az algoritmus során dinamikusan változik.

A kétfajta átszínezés segítségével egy síkgráfot fogunk 5 színnel színezni. Az algoritmus heurisztikája, hogy minden csúcsnak vesszük azt a sorrendjét, melyben egy csúcsot a sorrendben legfeljebb az ő 5 szomszédja előz meg.

Egészen addig színezünk minden csúcsot az általunk használt színhalmaz 5 elemével, míg egy új csúcsot megelőző 5 szomszédja mind különböző színt nem kapott.

Ekkor Kempe színezéssel átszínezzük ezen csúcsokat és nézzük a további sorrendet.

6.3.7. Algoritmus (Ötszínező algoritmus). *Vegyük a v csúcsot és az őt megelőző $v_1, \ldots, v_5$ csúcsok sorrendjét, ahol az indexekkel a csúcsok színét és a sorrendükkel a geometriai elhelyzekedésüket reprezentálja G egy rögzített lerajzolásánál. Így legyen a $G_{1,3}$-ban C a v_1 csúcs komponense. Most nézzük azokat az eseteket, amikor az 5 szomszédos csúcs között van 2 azonos színű:*

1.eset: C nem tartalmazza a v_3 csúcsot, ezért Kempe átszínezhetjük a v_1 színére és így a v csúcsnak tudjuk adni a 3-as számú színt.

2.eset: C tartalmazza a v_3 csúcsot, így a Kempe átszínezés nem lesz a segítségünkre. Úttal össze van kötve v_1 és v_3 és az út pontjai alternálva vannak az 1-es és 3-as színekkel. A fenti út legyen P, ha a v csúcsot hozzávesszük az úthoz v_1 és v_3 felől is, hiszen mind a kettővel szomszédos, akkor egy P' kört kapunk. A G gráf korábbi lerajzolásában P' egy önmagát nem metsző zárt görbének felelt meg, mely a síkot egy korlátos és egy nem korlátos részre bontja. Amikor v szomszédait elneveztük, akkor egy geometriai sorrend szerint ruháztuk fel színekkel az egyes csúcsokat. Ezek alapján v_2 és v_4 különböző tartományokban lesz.

(Forrás: Hajnal Péter SZTE Kombinatorika Bsc kurzus jegyzete)

6.3.8. Megjegyzés. *Hasonlóképpen meggondolható, ha a v_2 és v_4-es csúcsok alapján vizsgáltuk volna az esetet.*

7. fejezet

Összefoglalás

Szakdolgozatomban a gráfok színezésével foglalkoztam. A bevezetésben és a rákövetkező fejezetben a főbb alapfogalmak, a gráfok történelmi és matematikai hátterének ismertetése volt a fő cél, valamint a fejezet második felében a gráfszínezéssel kapcsolatos szükséges tételek és definíciók ismertetése.

A 4. és 5. fejezet két gráfosztály: a páros és perfekt gráfok témakörét járta körül. Először a fejezetenként szükséges fogalmakat tisztáztuk, majd színezésükkel kapcsolatos tételeket, bizonyításokat, algoritmusokat tanulmányoztuk.

Az utolsó tartalmi fejezetben a síkgráfok témakörével és az 5 és 4 színnel kapcsolatos algoritmusokkal, tételekkel, bizonyításokkal foglalkoztunk.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek Hermann Györgynek a folyamatos támogatását, bíztatását és az alaposságát, mely engem is ösztönzött, hogy minél méllyebb ismeretekre tehessek szert a témával kapcsolatban.

Valamint szeretném még megköszönni családomnak, hogy támogattak az egyetem évei alatt. Szaktársaimnak és barátaimnak, hogy bátran fordulhattam hozzájuk segítségért. Valamint az ELTE Matematika szak oktatóinak, hogy ismereteimet az ő tudásuk révén bővíthettem.

Irodalomjegyzék

[1] Katona Gyula, Recski András, Szabó Csaba: *A számítástudomány alapjai* Typotex 2006

[2] Debreceni Egyetem Matematika Intézet: *Gráfok színezése* (Egyetemi jegyzet)

[3] Jordán Tibor: *Ütemezéselmélet* (ELTE Egyetemi jegyzet 2007)

[4] Király Zoltán: *Gráfok és Algoritmusok* (ELTE Egyetemi jegyzet)

[5] Frank András: *Gráfelmélet* (ELTE Egyetemi jegyzet 2011.02.19)

[6] Hajnal Péter: *SZTE Gráfelmélet Msc kurzus jegyzete* (Klikkek mérete és a kromatikus szám kapcsolata)

[7] Hajnal Péter: *SZTE Kombinatorika Bsc kurzus jegyzete* (Klikkek mérete és a kromatikus szám kapcsolata)

[8] Tóth Géza: *BME Kombinatorika és Gráfelmélet I. egyetemi jegyzet*

[9] dr. Nagy Ferenc: *Miskolci Egyetem: Adatstruktúrák egyetemi jegyzet*

[10] Rónyai Lajos, Szabó Réka, Ivanyos Gábor: *Algoritmusok*

[11] dr. Fekete István: *ELTE Gráfalgoritmusok egyetemi jegyzet*

[12] Sali Attila: *BME Bevezetés a számításelméletbe II. egyetemi jegyzet*

[13] Kőrösi Attila: *BME Bevezetés a számításelméletbe II. egyetemi jegyzet*

[14] Haraszin Péter: *2010/11. őszi félévi vizsgatételei kidolgozva*

Hallgatói nyilatkozat

Név: Tóth Ádám

ELTE Természettudományi Kar

Matematika Bsc szak

Neptun azonosító: GZFQ71

Szakdolgozat címe: Gráfok színezése

A szakdolgozat szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2014. január 6.

Tóth Ádám
hallgató