Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

# Négyzetes mátrixok hatványozása

BSc Szakdolgozat

Készítette: Bálint Tímea
Matematika BSc, Matematikai elemző szakirány

Témavezető: Izsák Ferenc
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2014

# Tartalomjegyzék

# 1. Bevezető

Dolgozatom egy általános bevezetést ad a négyzetes mátrixok hatványozásáról, ennek lehetséges módjairól. Az első fejezetben bevezetem azokat a definíciókat és jelöléseket, amelyek előfordulnak a szakdolgozat során. Az ezt következő fejezetben pedig a mátrixfüggvényekről szóló alapdefiníciókat, tételeket foglalom össze és algoritmusokat is adok arra, hogyan lehetne ezt megvalósítani például a MATLAB segítségével. Ezt a témát nagyon izgalmasnak találom, mert nagy gyakorlati haszna van, hiszen az idő, pénz. Minél hatékonyabb egy algoritmus, annál több időt spórol a felhasználónak illetve megoldhatóvá válnak olyan feladatok is, amelyek előtte nem. Bár ez egy olyan téma, ami viszonylag friss, remélem sikerült kompakt összefoglalót adnom róla.

# 2. Mátrixalgebra

Ebben a fejezetben bevezetem azokat az alapfogalmakat és jelöléseket, amelyek a dolgozat során újra és újra említésre kerülnek, majd a mátrixhatványozás bevezetéseként definiálom a mátrixszorzást és annak feltételeit. Ezek után az egész- és törtkitevős mátrixhatványozásról lesz szó illetve arról, hogy ezt hogyan lehet hatékonyan elvégezni a MATLAB segítségével.

## 2.1. Elnevezések és jelölések

**2.1. Definíció** Tekintsük az $a_{ij}$ komplex számoknak egy $m$ sorból és $n$ oszlopból álló sémáját:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ezt a sémát $m \times n$ típusú vagy $m \times n$-es mátrixnak nevezzük és a következőképpen jelöljük:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] \qquad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

Az $a_{ij}$ számok a mátrix elemei. Annak feltüntetésére, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix $ij$ indexű eleme $a_{ij}$, gyakran a következő jelölést alkalmazzuk:

$$(\mathbf{A})_{ij} = a_{ij}.$$

Ha $m = n$, akkor a mátrixot *n-edrendű kvadratikus mátrixnak* nevezzük. Jelölése:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] \qquad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Mivel ezek szerint $n$-edrendű mátrix csak kvadratikus lehet, ezért a kvadratikus jelzőt ilyenkor elhagyhatjuk. Ugyanígy elhagyhatjuk annak feltüntetését is, hogy milyen típusú mátrixról van szó, ha a tárgyalás során felírt műveletekből vagy összefüggésekből ez egyértelműen kiderül.

**2.2. Definíció** A sorok és oszlopk felcserélésével nyert mátrixot az eredeti mátrix *transzponáltjának* nevezzük és $\mathbf{T}$ felső indexszel jelöljük:

$$(\mathbf{A})^T = [a_{ij}^T] = a_{ij}.$$

Ebből következik, hogy egy $m \times n$ típusú mátrix transzponáltja $n \times m$ típusú. Ha egy (kvadratikus) mátrix megegyezik a transzponáltjával:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T,$$

akkor *szimmetrikus*, ha pedig

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T,$$

akkor *ferdén szimmetrikus*.

**2.3. Definíció** Az $n$-edrendű $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ kvadratikus mátrix *adjungáltján* azt a mátrixot értjük, amelyet az $\mathbf{A}$ mátrixból úgy nyerünk, hogy az $a_{ij}$ elem helyére az $\mathbf{A}^T$ transzponált ugyanazon helyén álló $a_{ij}^T = a_{ji}$ elemének algebrai komplementumát, vagyis az $(n-1)$-edrendű $A_{ji}$ előjeles aldetermináns értékét írjuk.

Tehát

$$adj\mathbf{A} = [A_{ji}].$$

**2.4. Definíció** Ha az $\mathbf{A}$ kvadratikus mátrixhoz hozzárendelhető olyan $\mathbf{X}$ mátrix, amely kielégíti mind az

$$\mathbf{AX} = \mathbf{E},$$

mind pedig az

$$\mathbf{XA} = \mathbf{E}$$

egyenletet, akkor az $\mathbf{A}$ mátrixot *invertálhatónak*, az $\mathbf{X}$ mátrixot pedig $\mathbf{A}$ *inverzének* nevezzük.

**2.5. Definíció** Az $\mathbf{A}$ kvadratikus mátrix $ii$ indexű elemei a mátrix *főátlójában* (*födiagonálisában*) helyezkednek el. Ha egy kvadratikus mátrixnak a főátlóján kívüli valamennyi eleme zérus, akkor ún., *diagonálmátrixhoz* jutunk. Jelölése:

$$\mathbf{D} = \langle d_1, d_2, \ldots, d_n \rangle \text{ vagy } \mathbf{D} = \langle d_k \rangle \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

ahol $d_k$ az $a_{kk}$ elemet jelöli. A

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j, \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

Kronecker-féle szimbólumot használva, a $[\delta_{ij}]$ mátrix az $\mathbf{E}$ egységmátrix:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát az egységmátrix mindig kvadratikus. Ha rendjét is fel akarjuk tüntetni, akkor az $\mathbf{E}_n$ jelölést használjuk. Az olyan mátrixot, amelynek egyetlen eleme 1, a többi pedig 0, *mátrixegységnek* nevezzük és ha az $ij$ indexű elem 1, akkor az $\mathbf{E}_{ij}$ jelölést alkalmazzuk. A csupa 0 elemből álló mátrixot *zérusmátrixnak* nevezzük és $\mathbf{0}$-val jelöljük.

A mátrixok körében kitüntetett szerepük van az egyoszlopos, ill. az egysoros mátrixoknak. Ezeket *oszlop-*, ill. *sorvektoroknak* nevezzük és megkülönböztetésül kis betűkkel jelöljük:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}; a^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

Mivel a sorvektor a megfelelő oszlopvektor transzponáltja, megegyezés szerint a sorvektort a $T$ felső indexszel látjuk el. Az olyan oszlop-, ill. sorvektort, amelynek egyetlen eleme 1, a többi eleme pedig 0, *egységvektornak*, ha minden eleme 0, *nullvektornak* nevezzük.

## 2.2. Mátrixok szorzása

**2.6. Definíció** Az $m \times p$ típusú $\mathbf{A}$ mátrix és a $p \times n$ típusú $\mathbf{B}$ mátrix szorzatán azt az $m \times n$ típusú mátrixot értjük, amelynek $ij$ indexű elemét az $\mathbf{A}$ mátrix $i$-edik sorának és a $\mathbf{B}$ mátrix $j$-edik oszlopának kompozíciója [1] adja.

[1] Az $a_1, a_2, \dots, a_n$ és $b_1, b_2, \dots, b_n$ szám-$n$-esek *kopozícióján* az $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$ szorzatösszeget értjük.

Legyen $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ és $\mathbf{B} = [b_{ij}]$; akkor az $\mathbf{AB} = \mathbf{C} = [c_{ij}]$ szorzatmátrix elemei:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

A mátrixok szorzása a legjellegzetesebb mátrixművelet; nyilvánvaló sajátossága, hogy *nem kommutatív.*

Az összeszorozhatóság feltétele: a bal oldali tényező oszlopai számának meg kell egyeznie a jobb oldali tényező sorainak számával. Márpedig a tényezők sorrendjének felcserélése esetén nincs mindig biztosítva ez a feltétel, tehát az egyik sorrendben esetleg elvégezhető a szorzás, a másik sorrendben pedig nem. Két azonos rendű kvadratikus mátrix vagy egy $m \times p$ és egy $p \times m$ típusú mátrix mindkét sorrendben összeszorozható ugyan, de ez a szorzás nem kommutatív, mivel – pl. $n$-edrendű mátrixokra – általában

$$\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \neq \sum_{k=1}^{p} b_{ik} a_{kj}.$$

A szorzás kommutativitásának hiánya a legtöbb probléma forrása, amelyet a mátrixelmélet felvet; ez adja viszont az elmélet szépségét is. Természetesen vannak olyan speciális mátrixok, amelyekre a szorzás kommutatív. Az ilyen mátrixokat *felcserélhetőknek* nevezzük.

Könnyű meggyőződni arról, hogy az eddig megismert mátrixokra a felcserélhetőség a következő esetekben érvényes:

1. Bármely kvadratikus mátrix felcserélhető a vele azonos rendű zérusmátrixszal és egységmátrixszal:

$$\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A},$$
$$\mathbf{A}0 = 0\mathbf{A} = 0$$

   Ezekből az összefüggésekből látható, hogy az egységmátrix és a zérusmátrix ugyanazt a szerepet tölti be a mátrixok körében, mint az 1, ill. 0 a számok körében; ez az elnevezésüket is indokolja.

2. Diagonálmátrixok mindig felcserélhetők:

$$\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_2\mathbf{D}_1 = \langle d_k^{(1)} d_k^{(2)} \rangle$$

   (Diagonálmátrixok szorzata szintén diagonálmátrix!) A szorzás definíciójából következik, hogy ha az $\mathbf{A}$ mátrixot balról szorozzuk a $\mathbf{D}$ diagonálmátrixszal, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix *sorait* kell szorozni a diagonálmátrix megfelelő elemeivel, ha pedig jobbról szorozzuk, akkor az *oszlopait.*

### 2.2.1. Speciális mátrixszorzatok

Ha egyetlen sorvektornak egyetlen oszlopvektorral való szorzatát tekintjük, akkor ez egy „elsőrendű" mátrixot, azaz egyetlen elemet ad, ami a két vektor *skaláris szorzatának* felel meg. Részletesen:

$$\mathbf{a^T b} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

**2.7. Példa** Határozzuk meg az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor skaláris szorzatát, ha $\mathbf{a^T} = [1 \quad 2 \quad 3], \mathbf{b^T} = [3 \quad -2 \quad 1]$!

*Megoldás.*

$$\begin{array}{rcll} & & & \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{a^T b} & = & [1 \quad 2 \quad 3] & [\quad 2 \quad]. \end{array}$$

Mivel a skaláris szorzat eredménye egy szám, amelynek a transzponáltja önmaga, ezért a skaláris szorzat egyenlő a transzponáltjával:

$$\begin{array}{rcrcll} & & & & & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ (\mathbf{a^T b})^\mathbf{T} & = & \mathbf{b^T a} & = & [3 \quad \text{-}2 \quad 1] & [\quad 2 \quad]. \end{array}$$

Fordított sorrendben véve a vektortényezőket, a továbbiak szempontjából alapvető jelentőségű szorzathoz, az ún. *diadikus szorzathoz* vagy röviden *diádhoz* jutunk. Az $m$ elemű $\mathbf{a}$ oszlopvektornak az $n$ elemű $\mathbf{b}^T$ sorvektorral való szorzata ugyanis egy $m \times n$ típusú mátrixhoz vezet, amelynek elemei az egyes vektortényezők egy-egy elemének páronként vett szorzatai.

$$ab^T = [a_i b_j] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1 & a_m b_2 & \dots & a_m b_n \end{bmatrix}.$$

**2.8. Példa** Határozzuk meg az előző példában szereplő vektorok $\mathbf{ab}^T$ diadikus szorzatát!

*Megoldás.*

$$\mathbf{ab}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} [3 \quad -2 \quad 1] \\ \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 6 & -4 & 2 \\ 9 & -6 & 3 \end{bmatrix} \end{array}.$$

A diád fogalmának ismeretében lehetővé válik két mátrix szorzatának egy másik előállítása. Egy $m \times p$ és egy $p \times n$ típusú mátrix szorzatának az elemei ugyanis $p$ tagú összegek, így a szorzatmátrix $p$ mátrix összegeként írható fel. Az összeadandók a bal oldali tényező egy-egy sorából alkotott diádok. Részletesen kiírva:

$$\begin{aligned} &\mathbf{AB} = && \text{a szorzat} \\ &= \left[ \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \right] = && \text{mint olyan mátrix, melynek elemei } p \text{ tagú összegek,} \\ &= \sum_{k=1}^{p} [a_{ik} b_{kj}] = && \text{ezt } p \text{ számú mátrix összegeként felírva,} \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_k b^k && p \text{ számú diád összegéhez jutunk.} \end{aligned}$$

Tehát két ($m \times p$ és $p \times n$ típusú) mátrix mindig felírható ($p$ tagú) diád-összegként.

### 2.2.2. Speciális tulajdonságú mátrixok

Ebben a pontban néhány olyan mátrixtípust ismertetek, amelyeket különleges tulajdonságaik tüntetnek ki a kvadratikus mátrixok körében. Olyan *speciális szerkezetű mátrixokkal* foglalkozom, amelyekben szabályosan elhelyezkedő, sok zérus elem található. Az irodalomban ezeket *strukturált mátrixoknak* is szokták nevezni. Ilyen „sok" zérus elemet tartalmazó ún. *sparse* vagy *ritka* mátrixoknak a numerikus kezelés szempontjából számos előnyük van.

**2.9. Definíció** Az olyan $[a_{ij}]$ mátrixot, amelyre

$$a_{ij} \begin{cases} \neq 0 & \text{ha } |j-i| \leq 1 \\ = 0 & \text{ha } |j-i| > 1 \end{cases}$$

*kontinuáns (tridiagonális) mátrixnak*, másképpen *Jacobi-féle mátrixnak* nevezzük. Általános alakja:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix},$$

ahol a főátlóval „szomszédos" $b_i, c_i$ elemek a mátrix ún. *mellékátlójában* helyezkednek el.

**2.10. Definíció** Ha egy mátrixban nem csupán a főátlóval szomszédos első elemek, hanem még a második, harmadik stb. elemek is különbözhetnek zérustól, de a főátlótól már bizonyos távolságra már valamennyi elem zérus, akkor azt *sávmátrixnak* (vagy *szalagmátrixnak*) nevezzük.

Ilyenkor azt is meg szoktuk jelölni, hogy hány „ferde" sorban találhatók zérustól különböző elemek. Ilyen sávos (ill. szalag-) mátrixok jellemzésére vezetjük be a sávszélesség fogalmát.

**2.11. Definíció** Az $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix *fél sávszélességének* hívjuk azt az $s$ számot, amelyre teljesül

$$|i-j| > s \Rightarrow a_{ij} = 0,\ 1 \leq |i,j| \leq n$$

és létezik olyan $k, l$ indexpár, hogy $k - l = s$ és $a_{kl} \neq 0$.

**2.12. Definíció** Ha egy mátrixban minden „ferde" sor csupa megegyező elemből áll, azaz a mátrix elemei csupán oszlop- és sorindexük különbségétől függnek, akkor azt *Toeplitz-típusú* mátrixnak nevezzük.

Tehát az $\mathbf{A}$ mátrix Toeplitz-típusú, ha

$$a_{ij} = a_{j-i}.$$

Részletesen kiírva:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & . & . & . & a_{n-1} \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & . & . & . & a_{n-2} \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & . & . & . & a_{n-3} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{-n+1} & a_{-n+2} & . & . & . & . & a_0 \end{bmatrix}.$$

Ha egy Toeplitz-típusú mátrix még szimmetrikus is, akkor elemeire az

$$a_{ij} = a_{|j-i|}$$

összefüggés érvényes. Egy másik nevezetes speciális Toeplitz-típusú mátrix a következő:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Ismételt szorzással közvetlenül belátható, hogy

$$\mathbf{H}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{H}^{n-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ és végül } \mathbf{H}^n = 0.$$

**2.13. Definíció** Azokat a mátrixokat, amelyekre létezik olyan $p$ természetes szám, hogy

$$\mathbf{A}^{p-1} \neq 0 \text{ ,de } \mathbf{A}^p = 0,$$

*$p$ indexű nilpotens mátrixoknak* nevezzük.

Az itt bemutatott **H** mátrix a „legegyszerűbb szerkezetű", vagyis a legtöbb zérus elemet tartalmazó, $n$ indexű nilpotens mátrix. Tekintsük most a következő Toeplitz-típusú mátrixot:

$$\mathbf{A}(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & a_0 & \ldots & a_{n-3} \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Az (1) alatti $\mathbf{H}$ nilpotens mátrix hatványainak szerkezetéből közvetlenül adódik, hogy a (2) mátrix a $\mathbf{H}$ mátrix polinomjaként írható fel:

$$\mathbf{A}(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \equiv a_0\mathbf{E} + a_1\mathbf{H} + a_2\mathbf{H}^2 + \ldots + a_{n-1}\mathbf{H}^{n-1}.$$

A nilpotens mátrixok indexének fogalma kiterjeszthető tetszőleges kvadratikus mátrixokra. Ha meggondoljuk, hogy $p$ indexű nilpotens mátrixok esetén $p$ az a legkisebb pozitív egész, amelyre $\mathbf{A}^p$ rangja 0 és ennél magasabb hatványra emelve a rangja már nem változik, akkor az indexnek ezt a tulajdonságát tetszőleges mátrixra általánosítva, megadható a következő definíció.

**2.14. Definíció** Az $\mathbf{A}$ mátrix *indexe* az a legkisebb pozitív egész $p$, amelynél magasabb hatványra emelve a mátrixot, a hatvány rangja nem változik, azaz

$$\rho(\mathbf{A}^{p+1}) = \rho(\mathbf{A}^p).$$

**2.15. Definíció** Az olyan mátrixokat, amelyeknek a főátló alatti elemei mind zérussal egyenlők, *felső háromszögmátrixoknak*, azokat pedig, amelyekben a főátló feletti elemek egyenlők zérussal, *alsó háromszögmátrixoknak* (*trianguláris mátrixoknak*) nevezzük.

**2.16. Példa** Alsó háromszögmátrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

**2.17. Példa** Felső háromszögmátrix

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

## 2.3. Mátrixok hatványozása és tárolása a MATLAB segítségével

### 2.3.1. Egészkitevős mátrixhatványozás

Mivel kvadratikus mátrix szorzás szempontjából önmagával mindig felcserélhető, a mátrixszorzás asszociativitása folytán egyértelműen definiálható a kvadratikus mátrixok pozitív egész kitevőjű hatványa:

$$\mathbf{A}^p = \overbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \ldots \cdot \mathbf{A}}^{p}.$$

Innen adódik, hogy a számok hatványainak szorzatára vonatkozó szabály értelemszerűen átvihető mátrixokra is: közös alapú hatványokat úgy szorzunk, hogy a közös alapot a hatványkitevők összegére emeljük, vagyis

$$\mathbf{A}^p \mathbf{A}^q = \mathbf{A}^{p+q}.$$

A zérus kitevőjű hatványt egységmátrixként értelmezzük:

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}.$$

Ezek alapján tehát egyértelműen definiálható egy kvadratikus mátrix skalár együtthetós polinomja. Ha ugyanis tekintjük a

$$p_m(z) \equiv c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_m z^m$$

$m$-edfokú polinomot ($c_0, c_1, c_2, \ldots,$ komplex számok, $c_m \neq 0$), akkor a $z$ skalárváltozó helyére az $\mathbf{A}$ mátrixot helyettesítve, a

$$p_m(\mathbf{A}) \equiv c_0 E + c_1 \mathbf{A} + c_2 \mathbf{A}^2 + \ldots + c_m \mathbf{A}^m$$

*mátrixpolinomot* kapjuk. A mátrixpolinom értelmezéséből következik, hogy ugyanazon $\mathbf{A}$ kvadratikus mátrix tetszőleges polinomjaira a szorzás a közönséges polinomokra szokásos módon végezhető el és a mátrixpolinomok szorzásra nézve felcserélhetők. Továbbá, hogy bármely egyváltozós racionális egész skalár azonosság változatlanul érvényben marad, ha a skalár változó helyébe egy kvadratikus mátrixot, az egység helyébe pedig az egységmátrixot helyettesítjük. Például $(1+x)(1-x) \equiv 1 - x^2$ miatt tetszőleges kvadratikus $\mathbf{A}$ mátrixra fennáll az $(\mathbf{E}+\mathbf{A})(\mathbf{E}-\mathbf{A}) \equiv \mathbf{E} - \mathbf{A}^2$ azonosság.

MATLAB-ban a hatványozást csak skalár kitevővel végezhetjük el. Pozitív egész $n$ esetén az `A^n` kifejezést $\mathbf{A}$ önmagával vett $n$-szeres szorzásával számolja, `A^(-1)` az inverzet jelenti. Ha pedig $m$ negatív egész, akkor

`A^(m)` $\iff$ `(A^(-1))^(-m)`.

### 2.3.2. Törtkitevős mátrixhatványozás

**2.18. Definíció** Az $a$ pozitív szám $\frac{m}{n}$-edik hatványa az $a$ alap $m$-edik hatványának $n$-edik gyöke:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ ,ahol } a > 0; m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N} \text{ és } n \geq 2.$$

Ez az a definíció, amellyel először találkozik az ember, mikor először hall törtkitevőjű hatványról. A fejezet végén megkísérlem egy adott mátrix törtkitevőjű hatványozását, azonban a későbbekben megmutatom, hogy erre más módszerek is vannak.

### 2.3.3. Speciális eset: ritka mátrixok

Legyen **A** mátrix rendje $n$. *Ritka mátrixról* beszélünk akkor, ha két tulajdonsága van **A**-nak. Egyrészt a nemzérus elemek $N$ száma kicsi $n^2$-hez képest: $N \ll n^2$. Másrészt az $\mathbf{A}x = b$ egyenletrendszer megoldása során sikerül az össztárigényt csökkenteni úgy, hogy az **A** nulla elemeit nem tároljuk - a számítási idő csökkentése, ill. jelentéktelen növelése mellett. Az a cél, hogy elkerüljük az olyan műveleteket, amelyekben csak nullával szorzunk ill. nullát hozzáadunk valamihez. Ritka mátrixokkal írhatóak le a következők:

1. Gazdasági rendszerek: ezen rendszerek mátrixáról elmondható, hogy a nemzérus elemek általában elég rendszertelenül helyzezkednek el, viszont telt oszlopok is előfordulnak: az alapanyagok közül például áramra és vízre minden gyárnak szüksége van.

2. Hálózatok: a hálózatokat leíró mátrixoknál rendszerint nagyon kevés a nemzérus elem; a főátló foglalt, és ezenkívül számíthatunk arra, hogy még három nemzérus elem van ugyanabban a sorban (mert a tipikus áramköri vagy csőelem az elágazás, amely három csomópontot köt össze az adott csomóponttal).

3. Differenciálegyenletek közelítő megoldása során keletkező egyenletek: itt a nemzérus elemek gyakran egy a főátlóval párhuzamos sávban helyezkednek el.

A MATLAB a ritka mátrixot egy listával ábrázolja (ún. koordináta reprezentációban). Ez nem a klasszikus „kompakt tárolás”, de egyértelmű és kényelmes. Ekkor a következő

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix így jelenik meg:

```
A =
(1,1) 1.0
(1,3) 3.0
(1,4) 4.0
(2,1) 4.0
(2,2) 3.0
(2,4) 1.0
(3,1) 1.0
(3,3) 3.0
(3,4) -4.0
(4,3) -2.0
```

Egy már létező **A** mátrix kényelmesen a ritka alakra átvihető a `sparse` utasítással:

```
A = sparse(A);
```

Ezután ezt a típust megtartja akkor is, ha kibővítjük (akár új név alatt), részmátrixot készítünk stb., egy kivétellel: ha a ritka **A** mátrix elemeit egy dupla for-ciklussal hozzárendeljük az új **B** mátrix elemeihez, akkor **B** már nem lesz ritka. A fordított utat, a mátrix ritka ábrázolásától a telt mátrixúra a `full(A)` utasítás adja. A `full(A)` utasítás van, mikor szükséges. A következő alfejezetben példának okáért a példamátrix rögzítése után ki kell adnom ezt az utasítást ahhoz, hogy törtkitevőn hatványozhassak. A következő *Példák* részben azt igyekszem bemutatni, hogy a MATLAB segítségével hogyan lehet mátrixokat ritka és nem ritka üzemmódban, egész és törtkitevőn hatványozni.

### 2.3.4. Példák

Tekintsük a következő tridiagonális mátrixot:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & . & . & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & . & . \\ 0 & -1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & -1 & 2 & -1 \\ 0 & . & . & . & -1 & 2 \end{bmatrix} = tridiag(-1,2,-1).$$

Nézzük meg, melyik módban tudjuk **A**-t hatékonyan tárolni a MATLAB segítségével! Első lépésként elő kell állítanunk **A**-t. Sávos mátrixok hatékony előállítását leginkább a „`spdiags`” utasítás szolgáltatja. `A = spdiags(B,d,m,n)`: Összeállítja az $m \times n$ méretű ritka **A** mátrix átlóit a **B** mátrix oszlopaiból; az átlószámokat a $d$ vektor - egészértékű - komponensei adják. Tehát a mátrixot a következőképpen állítottam elő:

```
B=ones(n,1); B=[B,-2*B,B];
A=spdiags(B,[-1,0,1],n,n);
```

Egyébként az `A=gallery('tridiag',n)` utasítás ugyanezt eredményezi. Nézzük meg, hogy ritka üzemmódban mennyi lesz a hatványozás műveletideje! Erre a következő programot használtam:

```
clear all
close all
n=10000;
B = ones(n,1); B = [B,-2*B,B];
A = spdiags(B,[-1,0,1],n,n);
tic
A^(m);
toc
```

A program hibája, hogy minél magasabb a hatványkitevő, annál több ideig számít. A táblázatban is látható, hogy a 9. hatvány kiszámítási ideje 3-szor annyi, mint a 4. hatványé, az ezt követő példáknál pedig körülbelül készereződik a műveletidő. Itt jegyezném meg azt, hogy a gyakorlatban nincs szükség ilyen magas hatványokra, érdekesebbek lesznek azok a példahatványok, amelyek 0 és 1 között vannak. Sajnos ennél a programnál csak egész kitevőket vizsgálhatunk, ugyanis ez a fajta mátrixmegadás automatikusan ritkaüzemmódú tárolást von maga után. Ahhoz, hogy „érdekesebb” hatványokat is vizsgálni tudjunk, vissza kell állítanunk a telt mátrixot, amit a fentebb is említett `full(A)` utasítással tehetünk meg. Hogyan változik ekkor a hatványozás műveletideje? Ebben az esetben is hasonló programot kell írnunk, mint az előbb.

```
clear all
close all
n=1000;
B = ones(n,1); B = [B,-2*B,B];
A = spdiags(B,[-1,0,1],n,n);
A = full(A);
tic
A^(m);
toc
```

| m | műveleti idő ritka üzemmódban | műveleti idő nem ritka üzemmódban |
|---|---|---|
| 2 | 0.012 s | 0.67 s |
| 4 | 0.015 s | 0.75 s |
| 9 | 0.045 s | 1.35 s |
| 16 | 0.09 s | 1.36 s |
| 25 | 0.195 s | 1.77 s |
| 36 | 0.355 s | 1.78 s |

1. táblázat.

Az előző eredményekhez képest itt nyilván több ideig tart a műveletek kiszámításának ideje, azonban nincsenek olyan kiugró eredmények. Összehasonlítva azokkal az eredményekkel, amiket az előző program segítségével kaptam, arra jutottam, hogy ha $m = 2$, akkor a kapott eredmények között 55-szörös a szorzó; addig $m = 36$ esetén az értékek közötti szorzó már csak ötszörös. Ezek szerint, ha nem ritka üzemmódben tárolunk, akkor a magasabb hatványokat kevesebb idő alatt számítja ki a program, szemben a ritka üzemmódban való tárolással. Mégis azt gondolom, hogy érdemesebb ritka üzemmódban tárolni, ekkor ugyanis nagyobb méretű mátrixot is tud kezelni a program. A következő táblázattal az „érdekes kitevőkre" adok példát, amelyeknek–ahogy fentebb is írtam–az életben is gyakran előkerülnek. A program ugyanaz, mint, amit az előbb használtam.

| m | műveleti idő |
|---|---|
| `0.05` | `7.83 s` |
| `0.5` | `7.85 s` |
| `0.7` | `7.83 s` |
| `3/2` | `7.85 s` |
| `exp(1)` | `7.82 s` |
| `1-exp(1)` | `7.85 s` |

2. táblázat.

A program ellenőrzésnél visszaadja kiindulási mátrixot. A táblázatban jól látszik, hogy az eredmények szinte ugyanazok lettek. Az első példa érdekes lehet. Az **A** mátrix kiíratása után majdnem az identitásmátrixot kaptam. Ezek után azt is megnéztem, hogy mit kapok, ha m helyébe 0-t írok, szintén az identitásmátrixot eredményezte. Ekkor az eredményem $1.86s$ lett. Felmerül a kérdés, hogy lehetne-e olyan algoritmust adni, amellyel gyorsítani lehetne a hatványozás műveletidejét? Ebben a fejezetben nem teszek kísérletet arra, hogy erre programot írjak. A következő fejezetben rávilágítok arra, miért.

# 3. Mátrixfüggvények elmélete

Ebben a fejezetben tömören összefoglalom azt, hogy mit kell tudni a mátrixfüggvényekről. Arra törekszem, hogy olyan szemszögből közelítsem meg a problémát, amely az algoritmusok fejlesztése szempontjából a leghasznosabb. Egy $n \times n$-es **A** mátrix $f(A)$ függvényének meghatározása általános probléma számos alkalmazási területen. Tisztázni akarjuk, hogy ha egy $f$ valós függvény értelmezve van **A** sajátértékeinek halmazán, akkor „**A**"-t hogyan helyettesítjük be a valós változó helyébe.

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z} \text{ és } 1 \notin \lambda(A) \Rightarrow f(A) = (I+A)(I-A)^{-1}.$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \text{ ha } |x| < 1$$

$$\Rightarrow \log(I+A) = A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} - \frac{A^4}{4} + \dots, \text{ ha } \rho(A) < 1.$$

A módszer olyan $f$-ekre működik, amelyek

1. polinomok,

2. vagy hatványsoruk konvergens.

## 3.1. Sajátérték módszerek

Mindenekelőtt bevezetem a sajátérték és a sajátvektor fogalmát.

**3.1. Definíció** Ha az

$$\mathbf{A}x = \lambda x$$

egyenletnek valamely $\lambda$ számérték mellett van megoldása, vagyis létezik olyan $x \neq 0$ vektor, amelyet az **A** transzformáció $\lambda$-szorosába visz át, akkor a $\lambda$ számértéket az **A** lineáris transzformáció *sajátértékének*, az egyenletet kielégítő $x$ vektort pedig a lineáris transzformáció ($\lambda$ sajátértékhez tartozó) *sajátvektorának* nevezzük.

**3.2. Definíció** Bármely ($n$-edrendű) **A** mátrixszal képzett

$$\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}$$

mátrixot, ahol $\lambda$ skalár paraméter, az $\mathbf{A}$ mátrixhoz tartozó *karakterisztikus mátrixnak* nevezzük; a karakterisztikus mátrix

$$D_n(\lambda) = |\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}|$$

determinánsát – amely a $\lambda$ paraméter ($n$-edfokú) polinomja – az $\mathbf{A}$ mátrix *karakterisztikus polinomjának*, a karakterisztikus polinomból nyert

$$D_n(\lambda) = |\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$$

egyenletet pedig az $\mathbf{A}$ mátrix *karakterisztikus egyenletének* nevezzük.

Ha a karakterisztikus polinom fokszámát is fel akarjuk tüntetni, $D_n(\lambda)$ jelölést használunk. A karakterisztikus polinom $\lambda$ hatványai szerint felírva:

$$D_n(\lambda) = \lambda^n - \lambda^{n-1}\sum_{k=1}^{n} a_{kk} + \lambda^{n-2}\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} \\ a_{ki} & a_{kk} \end{vmatrix} - \cdots + (-1)^n|\mathbf{A}|,$$

ahol az összegzést $1, \ldots, n$ indexek minden megfelelő kombinációjára el kell végezni, azaz a $k$-adik hatvány együtthatója a mátrix $(n-k)$-adrendű főminorjainak az összege.

A következőkben mutatok néhány példát mátrixfüggvényekre:

1. $p(\mathbf{A}) = \mathbf{I} + \mathbf{A}$,

2. $r(\mathbf{A}) = (\mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}}{2})^{-1}(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}}{2})$, $2 \notin \lambda(\mathbf{A})$

3. $e^{\mathbf{A}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}$.

Természetesen ezek a valós értékű függvényeknek a mátrix változatai

1. $p(z) = 1 + z$,

2. $r(z) = (1 - \frac{z}{2})^{-1}(1 + \frac{z}{2})$, $2 \neq z$

3. $e^{z} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$.

A következőkben ki fog derülni, hogy több különböző módon határozhatjuk meg a mátrixfüggvényeket. Az egyszerűség kedvéért ezeket a meghatározásokat „alap” definícióként kezeljük.

### 3.1.1. Jordan-normálforma

Tegyük fel, hogy $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ és legyen

$$\mathbf{A} = X \cdot diag(J_1, \ldots, J_q) \cdot X^{-1}, \tag{3}$$

ahol $J_i$ a következő

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_i\times n_i}, i = 1, \ldots, q. \tag{4}$$

Ekkor $f(\mathbf{A})$ mátrixfüggvény a következőféleképpen definiálható

$$f(\mathbf{A}) = X \cdot diag(F_1, \ldots, F_q) \cdot X^{-1}, \tag{5}$$

ahol $F_i$ a következő

$$F_i = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f^{(1)}(\lambda_i) & \ldots & \ldots & \frac{f^{(n_i-1)}(\lambda_i)}{(n_i-1)!} \\ 0 & f(\lambda_i) & \ddots & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & f^{(1)}(\lambda_i) \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & f(\lambda_i) \end{bmatrix}, i = 1, \ldots, q \tag{6}$$

feltéve, hogy az összes derivált létezik.

### 3.1.2. Taylor-sor reprezentáció

Ha $f$ Taylor-sorba fejthető A környezetében, akkor $f(\mathbf{A})$ is reprezentálható ugyanazzal a Taylor-sorral $\mathbf{A}$-n. Tegyük fel, hogy $f$ analitikus $z_0 \in \mathbf{C}$ környezetében, és létezik $r > 0$, amelyre

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k, |z - z_0| < r. \tag{7}$$

**3.3. Lemma** *Tegyük fel, hogy* $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ *egy Jordan-blokk, és legyen* $\mathbf{B} = \lambda\mathbf{I}_m + \mathbf{E}$, *ahol* $\mathbf{E}$ *szigorú felső háromszögmátrix. A* (7)*-es egyenlet akkor teljesül, ha* $|z - z_0| < r$. *Ekkor*

$$f(\mathbf{B}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(\mathbf{B} - z_0\mathbf{I}_m)^k.$$

**Bizonyítás.** Jegyezzük meg, hogy $\mathbf{E}$ hatványai erősen struktúráltak, például

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A Kronecker-féle szimbólumot használva, ha $0 \leq p \leq m-1$, akkor $[\mathbf{E}^p]_{ij} = (\delta_{i,j-p})$. (6)-ból következik

$$f(\mathbf{B}) = \sum_{p=0}^{m-1} f^{(p)}(\lambda) \frac{\mathbf{E}^p}{p!}. \tag{8}$$

Másrészt, ha $p > m$, akkor $\mathbf{E}^p = 0$. Így, bármely $k \geq 0$-ra igaz a következő összefüggés

$$\begin{aligned}(\mathbf{B} - z_0\mathbf{I})^k = ((\lambda - z_0)\mathbf{I} + \mathbf{E})^k &= \sum_{p=0}^{k} \frac{k(k-1)\cdots(k-p+1)}{p!} \cdot (\lambda - z_0)^{k-p} \cdot \mathbf{E}^p \\ &= \sum_{p=0}^{\min(k,m-1)} \left[\frac{\partial}{\partial_\lambda^{(p)}}(\lambda - z_0)^k\right] \frac{\mathbf{E}^p}{p!}.\end{aligned}$$

Ha $N$ nemnegatív egész, akkor

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(\mathbf{B} - z_0\mathbf{I})^k = \sum_{p=0}^{\min(k,m-1)} \frac{\partial^{(p)}}{\partial_\lambda^{(p)}} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(\lambda - z_0)^k\right) \frac{\mathbf{E}^p}{p!}.$$

□

Hasonló eredményt kapunk általános mátrixok esetén.

**3.4. Tétel** *Ha $f$-nek létezik Taylor-sorba fejtése és a (7)-es összefüggés teljesül és az is igaz, hogy $|\lambda - z_0| < r$ minden $\lambda \in \lambda(\mathbf{A})$, ahol $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, akkor*

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(\mathbf{A} - z_0\mathbf{I})^k.$$

**Bizonyítás.** Legyen $\mathbf{A}$ Jordan-normálformája (3) és (4) segítségével megadva. A 3.1.-es lemma alapján adódik, hogy

$$f(\mathbf{J}_i) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (\mathbf{J_i} - z_0\mathbf{I})^k, \alpha_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!},$$

i=1,. . . ,q. (5) és (6) alkalmazásával könnyen látható a következő

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{A}) &= X \cdot diag\left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (\mathbf{J}_1 - z_0 \mathbf{I}_{n_1})^k, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (\mathbf{J}_q - z_0 \mathbf{I}_{n_q})^k\right) \cdot X^{-1} \\
&= X \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (\mathbf{J} - z_0 \mathbf{I}_n)^k\right) \cdot X^{-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \left(X(\mathbf{J} - z_0 \mathbf{I}_n) X^{-1}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (\mathbf{A} - z_0 \mathbf{I}_n)^k,
\end{aligned}
$$

□

A következőkben mutatok néhány fontos mátrixfüggvényt, melyeknek van Taylor-sorfejtésük

$$
\begin{aligned}
\exp(\mathbf{A}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}, \\
\log(\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k}, |\lambda| < 1 \\
\sin(\mathbf{A}) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\mathbf{A}^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\
\cos(\mathbf{A}) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\mathbf{A}^{2k}}{(2k)!}.
\end{aligned}
$$

Ebben a fejezetben és az elkövetkezőkben csak olyan mátrixfüggvényeket tekintünk, amelyeknek van Taylor-sorfejtése. Ebben az esetben könnyen igazolható, hogy

$$\mathbf{A} \cdot f(\mathbf{A}) = f(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} \tag{9}$$

és

$$f(\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}) = \mathbf{X} \cdot f(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{X}^{-1}. \tag{10}$$

### 3.1.3. Közelítés sajátvektorral

Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonalizálható, akkor különösen könnyűvé válik $f(\mathbf{A})$ meghatározása $\mathbf{A}$ sajátértékei és sajátvektorainak segítségével.

**3.5. Következmény** Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\mathbf{A} = \mathbf{X} \cdot diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \cdot \mathbf{X}^{-1}$, és $f(\mathbf{A})$ definiált, akkor

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{X} \cdot diag(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)) \cdot \mathbf{X}^{-1}.$$

**Bizonyítás.** Az eredmény egy egyszerű következménye a 3.4-es tételnek, ha az összes Jordan blokk $1 \times 1$-es méretű. □

## 3.2. Közelítő módszerek

A következőkben tekintsünk néhány módszert arra, hogy hogyan számítsuk ki a mátrixfüggvényeket. Első pillantásra úgy tűnhet, ehhez nem lesz szükség a sajátértékekre. Ezek a technikák azon az elgondoláson alapszanak, hogy ha $g(z)$ közelíti $f(z)$-t $\lambda(\mathbf{A})$-n, akkor $f(\mathbf{A})$ is közelíti $g(\mathbf{A})$-t. Például

$$e^{\mathbf{A}} \approx \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^q}{q!}.$$

### 3.2.1. A Jordan Analízis

**3.6. Tétel** *Tegyük fel, hogy*

$$\mathbf{A} = X \cdot diag(\mathbf{J_i}, \ldots, \mathbf{J_q}) \cdot X^{-1}$$

*az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan felbontása, ahol*

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \lambda_i \end{bmatrix}, i = 1, \ldots, q.$$

*Ha $f(z)$ és $g(z)$ értelmezett $\lambda(\mathbf{A})$ nyílt halmazán, akkor*

$$\left\| f(\mathbf{A}) - g(\mathbf{A}) \right\|_2 \leq \kappa_2(X) \max_{1 \leq i \leq p, 0 \leq r \leq n_i - 1} n_i \frac{\left| f^{(r)}(\lambda_i) - g^{(r)}(\lambda_i) \right|}{r!}$$

.

**Bizonyítás.** Legyen $h(z) = f(z) - g(z)$. Ekkor

$$\left\| f(\mathbf{A}) - g(\mathbf{A}) \right\|_2 = \left\| X \cdot diag(h(\mathbf{J_i}), \ldots, h(\mathbf{J_q})) \cdot X^{-1} \right\|_2 \leq \kappa_2(X) \max_{1 \leq i \leq q} \left\| h(\mathbf{J_i}) \right\|_2.$$

Tehát

$$\left\| h(\mathbf{J_i}) \right\|_2 \leq \max_{0 \leq r \leq n_i - 1} \frac{\left| h^{(r)}(\lambda_i) \right|}{r!}$$

□

### 3.2.2. Közelítés Taylor sorral

A mátrixfüggvények közelítésének egy általános módszere ha Taylor-sorba fejtjük. A következő tétel arról szól, hogy milyen hibák keletkezhetnek akkor, ha a mátrixfüggvényeket Taylor-sorral közelítjük.

**3.7. Tétel** *Ha $f(z)$-nek létezik Taylor-sorba fejtése*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k,$$

*akkor igaz a következő*

$$\left\| f(\mathbf{A}) - \sum_{k=0}^{q} \alpha_k \mathbf{A}^k \right\|_2 \leq \frac{n}{(q+1)!} \max_{0 \leq s \leq 1} \left\| \mathbf{A}^{q+1} f^{(q+1)}(\mathbf{A}s) \right\|_2 .$$

**Bizonyítás.** Vezessük be $\mathbf{E}(s)$ mátrixot:

$$f(\mathbf{A}s) = \sum_{k=0}^{q} \alpha_k (\mathbf{A}s)^k + \mathbf{E}(s), \quad 0 \leq s \leq 1. \tag{11}$$

Ha $f(\mathbf{A}s)$-t az $f_{ij}(s)$ függvény $(i,j)$ intervallumán értelmezzük, akkor

$$f_{ij}(s) = \left( \sum_{k=0}^{q} \frac{f_{ij}^{(k)}(0)}{k!} s^k \right) + \frac{f_{ij}^{(q+1)}(\epsilon_{ij})}{(q+1)!} s^{q+1}, \tag{12}$$

ahol $0 \leq \epsilon_{ij} \leq s \leq 1$. Ha összehasonlítjuk $s$ kitevőit az (11) és (12)-es összefüggésekben, azt kapjuk, hogy ha $\mathbf{E}(s)$-t az $e_{ij}(s)$ függvény $(i,j)$ intervallumán értelmezzük, akkor $e_{ij}(s)$ felírható a következő alakban

$$e_{ij}(s) = \frac{f_{ij}^{(q+1)}(\epsilon_{ij})}{(q+1)!} s^{q+1}.$$

Most az $f_{ij}^{(q-1)}(s)$ függvény $(i,j)$ intervallumán értelmezzük $\mathbf{A}^{q+1} f^{(q+1)}(\mathbf{A}s)$ kifejezést. Ekkor

$$\left| e_{ij}(s) \right| \leq \max_{0 \leq s \leq 1} \frac{f_{ij}^{(q+1)}(s)}{(q+1)!} \leq \max_{0 \leq s \leq 1} \frac{\left\| \mathbf{A}^{q+1} f^{(q+1)}(\mathbf{A}s) \right\|_2}{(q+1)!}.$$

□

A gyakorlatban nem vezet pontosabb eredményhez, ha hosszab Taylor sorba fejtünk. Például ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -49 & 24 \\ -64 & 31 \end{bmatrix},$$

akkor megmutatható, hogy

$$e^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -0.735 & 0.551 \\ -1.471 & 1.103 \end{bmatrix}.$$

Ha $q = 59$, akkor az (11)-es összefüggés szerint

$$\left\| e^{\mathbf{A}} - \sum_{k=0}^{q} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \right\|_2 \le \frac{n}{(q+1)!} \max_{0 \le s \le 1} \left\| \mathbf{A}^{q+1} e^{\mathbf{A}s} \right\|_2 \le 10^{-60}.$$

Habár $u \approx 10^{-7}$, azt kapjuk

$$fl\left( \sum_{k=0}^{59} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \right) = \begin{bmatrix} -22.258 & -1.432 \\ -61.499 & -3.474 \end{bmatrix}.$$

### 3.2.3. Mátrixpolinomok becslése

A mátrixfüggvények közelítése rendszerint magában foglalja a polinomok becslését is, amelyet érdemes részletezni.

$$p(\mathbf{A}) = b_o\mathbf{I} + b_1\mathbf{A} + \cdots + b_q\mathbf{A}^q,$$

ahol $b_0, \ldots, b_q \in \mathbb{R}$ adott. A legkézenfekvőbb, ha Horner elrendezés segítségével közelítünk. Adott az $\mathbf{A}$ mátrix és $b_0, \ldots, b_q$. A következő algoritmus segítségével kiszámíthatjuk az $F = b_q\mathbf{A}^q + \cdots + b_1\mathbf{A} + b_0\mathbf{I}$ polinomot.

```
F = b_q A + b_{q-1} I

for k = q-2:-1:0

F = AF + b_k I

end
```

Ez az algoritmus $q - 1$ szorzást követel. Azonban a skalár esetettől eltérően, ez összegzési eljárás nem optimális. Hogy miért, tegyük fel, hogy $q = 9$, és figyeljük meg, hogy ekkor $p(\mathbf{A})$, ra mi adódik!

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^3(\mathbf{A}^3(b_9\mathbf{A}^3 + (b_8\mathbf{A}^2 + b_7\mathbf{A} + b_6\mathbf{I})) + (b_5\mathbf{A}^2 + b_4\mathbf{A} + b_3\mathbf{I}))b_2\mathbf{A}^2 + b_1\mathbf{A} + b_0\mathbf{I}.$$

Így $F = p(\mathbf{A})$ mindössze 4 mátrixszorzással becsülhető meg:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_2 &= \mathbf{A}^2, \\
\mathbf{A}_3 &= \mathbf{A}\mathbf{A}_2, \\
F_1 &= b_9\mathbf{A}_3 + b_8\mathbf{A}_2 + b_7\mathbf{A} + b_6\mathbf{I}, \\
F_2 &= \mathbf{A}_3 F_1 + b_5\mathbf{A}_2 + b_4\mathbf{A} + b_3\mathbf{I}, \\
F &= \mathbf{A}_3 F_2 + b_2\mathbf{A}_2 + b_1\mathbf{A} + b_0\mathbf{I}.
\end{aligned}$$

Ha $1 \leq s \leq \sqrt{q}$, akkor

$$p(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{r} \mathbf{B}_k \cdot (\mathbf{A}^s)^k, \quad [r = (q/s)], \tag{13}$$

ahol

$$\mathbf{B}_k = \begin{cases} b_{sk+s-1}\mathbf{A}^{s-1} + \cdots + b_{sk+1}\mathbf{A} + b_{sk}\mathbf{I}, & \text{ha } k = 0, \ldots, r-1, \\ b_q\mathbf{A}^{q-sr} + \cdots + b_{sr+1}\mathbf{A} + b_{sr}\mathbf{I}, & \text{ha } k = r. \end{cases}$$

$\mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^s$ kiszámítása után a Horner szabály alkalmazható az (13)-es összefüggésre. Végeredményben $p(\mathbf{A})$ $r + s - 1$ mátrix összeszorzásával kiszámítható. $s = [\sqrt{q}]$, a mátrixszorzatok száma jelentősen minimalizálódik.

### 3.2.4. A mátrix hatványainak kiszámítása

Tegyük fel, hogy a feladat $\mathbf{A}^{13}$ kiszámítása. Jegyezzük meg, hogy $\mathbf{A}^4 = (\mathbf{A}^2)^2$, $\mathbf{A}^8 = (\mathbf{A}^4)^2$, és $\mathbf{A}^{13} = \mathbf{A}^8\mathbf{A}^4\mathbf{A}$. Látható, hogy a művelet 5 mátrixszorzással elvégezhető. A következő algoritmussal kiszámítható $F = \mathbf{A}^s$, ahol $s$ pozitív egész és $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Legyen $s = \sum_{k=0}^{t} \beta_k 2^k$ $s$ bináris kiterjesztése, ahol $\beta_t \neq 0$.

```
Z = A; q = 0
while β_q = 0
Z = Z^2; q = q+1
end
F = Z
for k = q + 1:t
Z = Z^2
if β_k ≠ 0
F = FZ
end
end
```

Ez az algoritmus $2[\log_2(s)]$ mátrixszorzást igényel. Ha $s$ 2 hatványa, akkor csak $\log_2(s)$ mátrixszorzás szükséges.

### 3.2.5. A mátrix négyzetgyöke

$f(\mathbf{A})$ meghatározása különösen bonyolulttá válik, ha az alapfüggvénynek több gyöke is lehet. Például, ha $f(x) = \sqrt{x}$ és

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 0 & 9 \end{bmatrix},$$

ekkor

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}^2,$$

amely azt mutatja, hogy legalább 4 megoldás létezik $\sqrt{\mathbf{A}}$-ra. Ekkor azt mondjuk, hogy $F$ elsődleges négyzetgyöke $\mathbf{A}$-nak, ha

1. $\mathbf{F}^2 = \mathbf{A}$, és

2. ha $\mathbf{F}$ sajátértékei pozitív valós egészek.

**F** mátrixot $\mathbf{A}^{1/2}$-nel jelöljük. A Newton iteráció analógiájára a valós négyzetgyökökre a következő algoritmust használom: $x_{k+1} = (x_k + a/x_k)/2$,

$\mathtt{X}_0\mathtt{=A}$

$\mathtt{for\ k=}0, 1, \ldots$

$\mathtt{X}_{k+1}\mathtt{=(X}_k\mathtt{+X}_k^{-1}\mathtt{A)/2}$

`end`

### 3.2.6. Összegzés

A felsorolt algoritmusok tanulmányozása során arra a következtetésre jutottam, hogy a mátrix Jordan alakra hozása utáni hatványozás a lehető legköltségesebb művelet. Ugyanis a MATLAB elemenként számítja a Jordan alakot, így nagy méretű mátrixokra nem is alkalmazható és ha alkalmazhatjuk is, sok időt vesz igénybe, amíg lefut. A Horner elrendezést alkalmazó eljárás $q-1$ mátrixszorzást igényel, ami kis hatvány esetén nem tűnik soknak, de ha $q < 1$, akkor nem célszerű ezt alkalmazni. A következő eljárás, amelyet bemutattam, amely kettő hatványaira emelve hatványoz, igazán gyors eljárásnak tűnik, hiszen logaritmikus időben lefut, azonban ez a futási idő is csak pozitív egészek esetén értendő. Az első fejezetben írtam arról, hogy megkísérlem a törtkitevős hatványozást, azonban a fentiek alapján erre nehéz stabil algoritmust adni, hiszen többszörös gyökök esetén erre sem lehet egyértelmű megoldást adni.

# Irodalomjegyzék


[1] Rózsa Pál *Bevezetés a mátrixelméletbe*, Typotex könyvkiadó, Budapest, 2009.

[2] Stoyan Gisbert – Takó Galina: *Numerikus módszerek I.*, Typotex kiadó, Budapest, 2005.

[3] Stoyan Gisbert: *Matlab, frissített kiadás*, Typotex kiadó, Budapest, 2005.

[4] Gene H. Golub – Charles F. Van Loan: *Matrix computations,* $4^{th}$ *edition*, New York, 2012.

[5] Csordás M. – Kosztolányi J. – Kovács I. – Dr. Urbán J. – Pintér K. – Vincze I.: *Sokszínű matematika 11.*, Mozaik kiadó, Szeged, 2008.

# Nyilatkozat

**Név:** Bálint Tímea
**ELTE Természettudományi Kar, szak:** Matematika Bsc
**NEPTUN azonosító:** YES4JD
**Szakdolgozat címe: Négyzetes mátrixok hatványozása**

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2014. december 31.

____________________

a hallgató aláírása