A Riemann-féle zéta-függvény néhány alkalmazása

Írta: Bárdits Anna

Matematika BSc, Elemző szakirány

Témavezető:

Keleti Tamás
Analízis Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2014

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Bernard Riemann 1859-ben írta "Az adott számnál kisebb prímszámok száma" című mindössze 8 oldalas, de annál nagyobb hatású dolgozatát, amelyben a híressé vált "Riemann-hipotézisnek" nevezett sejtését is megfogalmazta. A sejtés első ránézésre egymástól távoli fogalmakat kapcsol össze - a prímszámokat és egy komplex függvény gyökeit. A Riemann-sejtés bizonyítása nemcsak önmagában lenne nagy eredmény, hanem sok más belőle következő állítás is bebizonyosodna [1]. A fontosságát jól érzékelteti a következő David Hilbertnek tulajdonított idézet: "Ha ezer éves álomból ébresztenének, az első kérdésem az lenne, hogy sikerült-e bebizonyítani a Riemann-hipotézist?" [1, 5.o.]. Marcus du Sautoy "A prímszámok zenéje" című ismeretterjesztő könyvében a Riemann-hipotézist a prímszámok látszólag zajos felszíne alatti harmóniaként jellemzi [9]. A dolgozatban arra teszek kísérletet, hogy minél jobban "meghalljam" ezt a harmóniát, minél jobban megismerjem a Riemann-féle zéta-függvényt, és kapcsolatát a prímszámokkal.

A dolgozat első felében a Riemann-féle zéta-függvényt a valós számokon fogjuk vizsgálni, és a segítségével több prímszámokra vonatkozó tételt is belátunk. Ezután fokozatosan a komplex sík egyre nagyobb részére értelmezzük a függvényt. Végül röviden bemutatjuk a prímszámtételt és a Riemann sejtést, és hogy hogyan állnak kapcsolatban a Riemann-féle zéta-függvénnyel.

2. A Riemann-féle zéta-függvény 1-nél nagyobb valós számokon

Ebben a fejezetben Riemann-féle zéta függvényt csak valós számokra vizsgáljuk, ebben a formában már Euler is foglalkozott vele a 18. században.

2.1. A függvény definíciója

Először definiáljuk a függvényt 1-nél nagyobb valós s-ekre.

2.1. Definíció. A Riemann-féle zéta függvényt a következő végtelen sorral definiáljuk: $\zeta(s) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, ahol s 1-nél nagyobb valós szám.

2.2. A függvény konvergenciája 1-nél nagyobb valós s-ekre

Most megmutatjuk, hogy a definíciónk értelmes, hiszen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ konvergens minden 1-nél nagyobb valós s-re. Ehhez az integrálkritériumot használjuk.

2.2. Tétel. *[6] Legyen a egész szám, és legyen f monoton csökkenő és nemnegatív függvény az $[a,\infty)$ félegyenesen. A $\sum\limits_{n=a}^{\infty} f(n)$ végtelen sor akkor és csak akkor konvergens, ha az $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ improprius integrál konvergens.*

Először kiszámoljuk az $f(x) = x^{-s}$ függvény 1-től végtelenig vett integrálját:

$$\begin{aligned}\int\limits_1^{\infty} x^{-s}dx &= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right]_1^b = \frac{1}{1-s}\lim_{b\to\infty}\left(b^{-s+1}-1\right)\\ &= \frac{1}{1-s}(0-1) = \frac{1}{s-1}.\end{aligned} \tag{1}$$

Az (1) egyenlőség jobb oldalán álló $\frac{1}{s-1}$ minden $s > 1$-re valós szám, tehát $\int\limits_1^{\infty} x^{-s}$ konvergens minden $s > 1$-re. Ilyen s-ek esetén f monoton csökkenő nemnegatív függvény $[1,\infty)$ félegyenesen, ezért a 2.2 tétel szerint $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ is konvergens.

2.3. A függvény Euler-féle reprezentációja

A következőkben bevezetjük a zéta-függvény Euler-féle reprezentációját. Az Euler-féle reprezentációból jól látható, hogy a függvény szoros kapcsolatban áll a prímszámokkal.

2.3. Tétel. *[2] Bármely $s > 1$-re $\zeta(s) = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}$, ahol p a prímeken fut végig.*

Bizonyítás. ([2] alapján.) Mivel

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s},$$

és

$$\zeta(s)2^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{-s},$$

ezért

$$\zeta(s) - \zeta(s)2^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{-s}.$$

Máshogy írva:

$$(1-2^{-s})\zeta(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ n\nmid 2}}^{\infty} n^{-s} = \sum_{p|n \Rightarrow p>2} n^{-s}. \tag{2}$$

Tehát a (2) egyenlőség jobb oldalán csak páratlan n-ekre szummázunk. Ezek az n-ek éppen azok a természetes számok, melyeknek minden prímosztója nagyobb 2-nél. Az előző gondolatmenetet folytatva szorozzuk meg a (2)-es egyenletet 3^{-s}-nel:

$$(1-2^{-s})\zeta(s)(3^{-s}) = \sum_{\substack{n=1 \\ n\nmid 2}}^{\infty} n^{-s}(3^{-s}). \tag{3}$$

Vonjuk ki a (3) egyenlőséget (2)-ből:

$$(1-2^{-s})\zeta(s)(1-3^{-s}) = \sum_{\substack{n=1 \\ n\nmid 2}}^{\infty} n^{-s} - \sum_{\substack{n=1 \\ n\nmid 2}}^{\infty} (3n)^{-s}$$

$$(1-2^{-s})(1-3^{-s})\zeta(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ n\nmid 2, n\nmid 3}}^{\infty} n^{-s} = \sum_{p|n \Rightarrow p>3} n^{-s}.$$

Tehát jobb oldalon csak a 2-vel és 3-mal nem osztható n-ekre szummázunk, melyek azok a természetes számok, melyeknek csak 3-nál nagyobb prímosztói vannak. Ha az előzőeket folytatjuk 5-tel, 7-tel és így tovább P tetszőlegesen nagy prímszámig, akkor a következőt kapjuk:

$$(1-2^{-s})(1-3^{-s})(1-5^{-s})...(1-P^{-s})\zeta(s) = \sum_{p|n \Rightarrow p>P} n^{-s},$$

ahol az utolsó szumma azokon az n-eken fut végig, melyeknek csak P-nél nagyobb prímosztói vannak. Most belátjuk, hogy $\sum\limits_{p|n \Rightarrow p>P} n^{-s}$ tart 1-hez, ahogy P tart végtelenhez, amelyhez felhasználjuk, hogy

$$\sum_{p|n \Rightarrow p>P} n^{-s} = 1 + \sum_{\substack{p|n \Rightarrow p>P \\ n \neq 1}} n^{-s}.$$

A $\sum\limits_{n=P}^{\infty} n^{-s}$ sor a konvergens $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ sor farokösszege, tehát tart 0-hoz ahogy P tart végtelenhez. Mivel $\sum\limits_{\substack{p|n \Rightarrow p>P \\ n \neq 1}} n^{-s} < \sum\limits_{n=P}^{\infty} n^{-s}$, ezért $\sum\limits_{\substack{p|n \Rightarrow p>P \\ n \neq 1}} n^{-s}$ is tart 0-hoz, ahogy P tart végtelenhez. Tehát

$$\lim_{P \to \infty} (1-2^{-s})(1-3^{-s})(1-5^{-s})...(1-P^{-s})\zeta(s) = 1$$

$$\prod_p (1-p^{-s})\zeta(s) = 1$$

$$\zeta(s) = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}.$$

□

2.4. A prímek reciprokösszege

A következőkben belátjuk, hogy a prímek reciprokösszege divergens. Ez azt jelenti, hogy a prímek reciprokai lassan csökkenek, vagyis a prímek viszonylag sűrűn helyezkednek el - például sűrűbben, mint a négyzetszámok, melyek reciprokösszege konvergens, hiszen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ minden $s > 1$-re, tehát $s = 2$-re is konvergens.

Ehhez először egy erősebb állítást látunk be:

2.4. Tétel. *Az N-nél nemnagyobb prímek reciprokösszegének alsó korlátja*

$$\sum_{p \leq N} \frac{1}{p} > \log\log N - \frac{\pi^2}{6},$$

ahol N tetszőleges 1-nél nagyobb egész szám, és p a prímeken fut végig.

Bizonyítás. [3] alapján. A bizonyításhoz fel fogjuk használni a következő állításokat:

(i) $\sum\limits_{n=1}^{N} n^{-1} > \log N$

(ii) $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$

(iii) $\log \frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... \leq x + x^2$, ha $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

A (ii) állításra a következő fejezetben adunk bizonyítást (lásd 3.8 Tétel).

Az (i) állítás bizonyítása. [13]

$$\log N < \log(N+1) = \int\limits_{1}^{N+1} \frac{1}{x} dx < \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{n}^{n+1} \frac{1}{x} dx < \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

□

Az (iii) állítás bizonyítása. A bizonyításhoz először keressük meg az $f(x) = \log \frac{1}{1-x}$ Taylor-sorát $a = 0$ pontban:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 ... =$$

$$\log(1-a)^{-1} + \frac{(1-a)^{-1}}{1!}(x-a) + \frac{(1-a)^{-2}}{2!} + \frac{2(1-a)^{-3}}{3!} ... =$$

$$0 + (1-0)^{-1}x + (1-0)^{-2}\frac{x^2}{2} + (1-0)^{-3}\frac{x^3}{3} ... =$$

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots .$$

Ha $x \in (-1, 1)$, akkor a Taylor-sora elő is állítja is állítja a függvényt [6, 18.46 Példa], tehát ha a tétel feltétele szerint $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, akkor

$$\log \frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ...$$

Tehát azt kell belátnunk, hogy

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... \leq x + x^2,$$

vagyis

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... \leq x^2.$$

Az egyenlőtlenség baloldalát felülről becsülve $x = \frac{1}{2}$-del a következőt kapjuk:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{3}\frac{1}{2} + \frac{x^2}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{x^2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^3 ....$$

Emeljünk ki x^2-et:

$$x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^3} + ...\right).$$

Becsüljük felülről a zárójelben szereplő kifejezést:

$$x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...\right),$$

melyet a következőképpen is írhatunk a mértani sor összegképlete szerint:

$$x^2\left(\frac{1/2}{1 - 1/2}\right) = x^2.$$

Vagyis azt kaptuk, hogy

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... \leq x^2,$$

amit be akartunk látni. □

Most már nekikezdhetünk a 2.4 tétel bizonyításának. Először definiáljuk a következő szorzatot:

$$A_N = \prod_{p \leq N}\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + ... + \frac{1}{p^{\nu_p}}\right),$$

ahol $N > 1$ egész, p az N-nél nemnagyobb prímeken fut végig, és $p^{\nu_p} \leq N < p^{\nu_p+1}$. Bármely N kanonikus alakjában csak nála nemnagyobb prímek szerepelhetnek legfeljebb akkora kitevővel, mint A_N egyes tényezőiben. Tetszőleges $n \leq N$ (egyértelműen) előállítható ezen prímhatványok szorzataként. Tehát ha elvégezzük A_N képletében a szorzást, akkor biztosan megkapjuk minden $n \leq N$ szám reciprokát, tehát

$$A_N \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

Az (i) állítást alkalmazva

$$A_N > \log N. \tag{4}$$

Ezután felső becslést keresünk A_N-re. Az A_N tényezőiben szereplő mértani sorozatokat összegezzük:

$$A_N = \prod_{p \leq N} \frac{1 - \left(\frac{1}{p}\right)^{\nu_p + 1}}{1 - \frac{1}{p}} < \prod_{p \leq N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}. \tag{5}$$

Vagyis a (4) és az (5) egyenlőtlenségekből következik, hogy:

$$\log N < \prod_{p \leq N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}$$

Vegyük mindkét oldal logaritmusát:

$$\log \log N < \sum_{p \leq N} \log \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}.$$

A jobboldalt (iii) állítás segítségével felülről becsülve:

$$\log \log N < \sum_{p \leq N} \frac{1}{p} + \sum_{p \leq N} \frac{1}{p^2}.$$

A (ii) állításból következik, hogy

$$\sum_{p \leq N} \frac{1}{p} > \log \log N - \frac{\pi^2}{6}. \tag{6}$$

□

2.5. Következmény. A prímek reciprokösszege divergens, vagyis

$$\sum_{p} \frac{1}{p} = \infty,$$

ahol p végigfut a prímeken.

Ez rögtön következik az előző tételből, hiszen a (6) egyenlőtelenség jobb oldala tart a végtelenhez, ahogy $N \to \infty$, vagyis a prímek reciprokösszege divergens.

3. A Riemann-féle zéta-függvény értékei pozitív páros számokra

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. A négyzetszámok reciprokaiból álló végtelen sor összegének meghatározását bázeli problémának is nevezzük, és Johann Bernoulli és Euler egymástól függetlenül már a XVIII. század elején megoldotta. A fejezet második felében azt is megmutatjuk, hogy nemcsak 2-re, hanem bármilyen pozitív páros s-re meg tudjuk határozni a Riemann-féle zéta-függvény értékét. Ehhez először meg kell ismerkednünk a függvénysorok egyenletes konvergenciájának fogalmával és a Fourier-sorokkal. A fejezetben szereplő tételek és definíciók (ha másként nem jelezzük) a [6] forrásból származnak.

3.1. Függvénysorok egyenletes konvergenciája, Fourier-sorok

A következő tételekre és definíciókra van szükségünk a fejezetben:

3.1. Definíció. Legyenek $f_1, f_2 ...$ a H halmazon értelmezett valós értékű függvények. Azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergál az $f : H \to \mathbb{R}$ függvényhez, ha minden $\epsilon > 0$-hoz van olyan n_0, hogy $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ minden $x \in H$-ra és minden $n \geq n_0$-ra.

3.2. Definíció. Tegyük fel, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n = f$ a H halmazon. Azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens H halmazon, ha az $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i$ függvényekből álló függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez H-n.

3.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy vannak olyan a_n valós számok és van olyan n_0 index, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor konvergens, és $|f_n(x)| \leq a_n$ minden $x \in H$ és $n \geq n_0$ esetén. Ekkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor egyenletesen konvergál a H halmazon.*

3.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy a következő sor egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en:*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{7}$$

Ha a sor összege $f(x)$, akkor f folytonos, és fennállnak az

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx, \tag{8}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \tag{9}$$

és

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \tag{10}$$

összefüggések.

3.5. Megjegyzés. Nemcsak $[0, 2\pi]$ intervallumon integrálhatunk, hanem bármely 2π hosszúságú intervallumban. Ez abból következik, hogy ha f periodikus $p > 0$ szerint és integrálható $[0, p]$ intervallumban, akkor minden $[a, a+p]$ hosszúságú intervallumban is integrálható, és

$$\int_a^{a+p} f dx = \int_0^p f dx. \tag{11}$$

Ha ugyanis $(k-1) \le a \le kp$ ahol k egész, akkor f periodicitása miatt

$$\int_a^{kp} f dx = \int_{a-(k-1)p}^{p} f dx$$

és

$$\int_{kp}^{a+p} f dx = \int_0^{a-(k-1)p} f dx,$$

tehát ha összeadjuk a két egyenletet, éppen (11) -et kapjuk.

3.6. Definíció. Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodikus 2π szerint és integrálható $[0, 2\pi]$-ben. A (8), a (9) és a (10) formulák által definiált számokat f Fourier-együtthatóinak, a segítségükkel leírt (7) sort pedig f Fourier sorának nevezzük.

3.7. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos és 2π szerint periodikus. Ha f Fourier-sora egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en, akkor az összege minden pontban $f(x)$-szel egyenlő.*

3.2. A bázeli probléma

Az előző alfejezetben látottakat felhasználva már be tudjuk látni a következő tételt:

3.8. Tétel. *A Riemann-féle zéta függvényre teljesül, hogy* $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Bizonyítás. Legyen f az a 2π szerint periodikus függvény, amelyre $f(x) = (2k\pi - x)^2$ minden $x \in [2k\pi - 1, 2k\pi + 1]$-re, $(k \in \mathbb{Z})$. Látható, hogy f páros függvény. Most kiszámoljuk f Fourier-sorának együtthatóit. A b_n együtthatók 0-val egyenlőek, hiszen a 3.5 megjegyzés szerint bármilyen 2π hosszúságú intervallumban integrálhatunk, vagyis

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx dx.$$

A jobboldalon egy páratlan függvényt integrálunk egy origóra szimmetrikus intervallumon, tehát az integrál értéke 0.

Így elég az a_n együtthatókat kiszámolni. Ha $n = 0$, akkor

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Ha pedig $n > 0$, akkor kétszer parciálisan integrálva:

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx &= \frac{1}{\pi} \left[x^2 \cdot \frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx \\ &= 0 + \frac{2}{\pi n^2} [x \cos nx]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \\ &= \frac{2}{n^2}(-1)^n + \frac{2}{n^2}(-1)^n - \frac{2}{n^3}[\sin nx]_{-\pi}^{\pi} \\ &= (-1)^n \frac{4}{n^2}. \end{aligned}$$

Vagyis f Fourier sora

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx.$$

Tekintsük most f Fourier sorát π helyen.

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4}{n^2} \cos n\pi = \frac{\pi^2}{3} + 4\zeta(2).$$

Mivel a függvény folytonos, és Fourier-sora egyenletesen konvergens a 3.3 tételt $a_n = \frac{4}{n^2}$-tel alkalmazva, ezért f-et a 3.7 tétel miatt Fourier sora minden pontjában előállítja. Vagyis

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\zeta(2).$$

Átrendezve kapjuk, hogy

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},$$

amivel beláttuk a tételt. □

A 3.8 tételt az előző fejezetben is felhasználtuk. Érdekességként megmutatjuk, hogy segítségével újabb egyszerű bizonyítást adható arra, hogy végtelen sok prím létezik. A bizonyításban fel fogjuk használni, hogy π^2 irracionális, de ezt nem bizonyítjuk a dolgozatban. A 2.3 és a 3.8 tételekből következik, hogy

$$\prod_p (1 - p^{-2})^{-1} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ha véges sok prím van, akkor bal oldalon egy racionális számnak kell állnia. Viszont $\pi^2/6$ irracionális, így ellentmondásra jutottunk, tehát végtelen sok prím létezik. [8]

3.3. A függvény értékei pozitív páros s-ekre

A következőkben képletet adunk $\zeta(s)$ értékére minden pozitív páros s-re. Ezt ismét a szükséges tételek és definíciók leírásával kezdjük.

3.9. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ *egyenletesen a* $H \subset \mathbb{R}$ *halmazon. Ha az* f_n *függvények folytonosak az* $a \in H$ *pontban* H*-ra szorítkozva, akkor* f *is folytonos* a*-ban* H*-ra szorítkozva.*

3.10. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ *egyenletesen az* $[a, b]$ *intervallumon. Ha* f_n *integrálható* $[a, b]$*-ben minden* n*-re, akkor* f *is integrálható* $[a, b]$*-ben, és*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

3.11. Tétel. *Legyenek az f_n függvények differenciálhatóak a korlátos I intervallumban, és tegyük fel, hogy*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n = g$ *egyenletesen az I intervallumon, és*

(ii) létezik legalább egy $x_0 \in I$ pont, amelyre az $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ *végtelen sor konvergens.*

Ekkor az $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *függvénysor egyenletesen konvergál I-n. Ha* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$*, akkor az f függvény differenciálható, és $f'(x) = g(x)$ minden $x \in I$-re. Azaz*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

3.12. Tétel. *Létezik polinomoknak egy egyértelműen meghatározott $B_0(x)$, $B_1(x)$... sorozata a következő tulajdonságokkal: $B_0(x) \equiv 1$, továbbá $B'_n(x) = B_{n-1}(x)$ és $\int_0^1 B_n(x)dx = 0$ minden $n > 0$-ra.*

Ezeket a polinomokat Bernoulli-polinomoknak nevezzük, a $B_n = n!B_n(0)$ számokat pedig Bernoulli számoknak. Az első néhány Bernoulli polinom:

$$B_0(x) = 1, \qquad B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \qquad B_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}$$

Emellett szükségünk lesz f függvényre, mely 2π szerint periodikus és amelyre

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6} \tag{12}$$

minden $x \in [0, 2\pi]$-re. Most kiszámoljuk f Fourier-sorának együtthatóit:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x^2}{4} - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6}dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^3}{12} - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi^2}{6}x\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi^3 - 3\pi^3 + \pi^3}{3} = 0. \end{aligned}$$

A b_n együtthatók kétszer parciálisan integrálva:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi^2}{6}\right)\sin nx dx \\
&= -\frac{1}{\pi n}\left[\left(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi^2}{6}\right)\cos(nx)\right]_0^{2\pi}+\frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\cos nx dx \\
&= 0+\frac{1}{\pi n^2}\left[\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\sin nx\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{\pi n^2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\sin nx dx \\
&= 0+\frac{1}{2\pi n^3}[\cos nx]_0^{2\pi}=0.
\end{aligned}$$

És végül a_n együtthatók $n>0$-ra:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi^2}{6}\right)\cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi n}\left[\left(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi^2}{6}\right)\sin(nx)\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\sin nx dx \\
&= 0+\frac{1}{\pi n^2}\left[\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\cos nx\right]_0^{2\pi}+\frac{1}{\pi n^2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi n^2}\pi+\frac{1}{2\pi n^3}[\sin nx]_0^{2\pi}=\frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

Vagyis az f függvény Fourier-sora

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}.$$

A függvényt mindenütt előállítja Fourier-sora a 3.7 tétel szerint, hiszen a függvény folytonos és Fourier-sora egyenletesen konvergens, ami a 3.3 tételt $a_n=\frac{1}{n^2}$-tel alkalmazva látható. Tehát

$$\frac{x^2}{4}-\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} \tag{13}$$

minden $x\in[0,2\pi]$-re. Ennek segítségével fogjuk belátni a következő tételt.

3.13. Tétel. *Minden $x \in [0,1]$-re és minden k pozitív egész számra*

$$B_{2k+1}(x) = (-1)^{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin 2n\pi x}{(2n\pi)^{2k+1}} \tag{14}$$

és

$$B_{2k}(x) = (-1)^{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos 2n\pi x}{(2n\pi)^{2k}}, \tag{15}$$

ahol $B_n(x)$ az n-edik Bernoulli polinomot jelöli.

Bizonyítás. Helyettesítsünk x helyére $2\pi x$-et a (13) egyenlőségben:

$$x^2 - x + \frac{1}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{\pi^2 n^2} \tag{16}$$

minden $x \in [0,1]$-re. Bal oldalon $B_2(x)$ kétszerese van, tehát a (15) egyenlőség teljesük $k = 1$-re. Most tekintsük a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin 2n\pi x}{(2\pi n)^3}$$

sort, mely a 3.3 tétel miatt ($a_n = \frac{2}{(2\pi n)^3}$-t alkalmazva) egyenletesen konvergens, és a sor összege (jelöljük f-fel) a 3.9 tétel szerint mindenütt folytonos. Tagonként deriválva a sort megkapjuk a (16) egyenlőség jobb oldalának felét. Ez a sor egyenletesen konvergens, $x_0 = 0$-ra teljesül a 3.11 tétel (ii) kritériuma is, így f deriváltja $B_2(x)$ minden $x \in [0,1]$-re. A harmadik Bernoulli polinom deriváltja $B_2(x)$, így $f(x) = B_3(x) + c$. Most megmutatjuk, hogy $c = 0$. Az f-et definiáló sor tagonként integrálható a 3.10 tételből következően. Mivel $[0,1]$-en a sor minden tagjának integrálja 0, ezért azt kapjuk, hogy

$$0 = \int_0^1 f dx = \int_0^1 (B_3(x) + c) dx = \int_0^1 c = c,$$

ugyanis $B_3(x)$ integrálja definíció szerint 0 a $[0,1]$ intervallumon. Ezzel beláttuk, hogy $f(x) = B_3(x)$, vagyis a (14) egyenlőség teljesül $k = 1$-re.

A fenti gondolatmenetet megismételve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos 2n\pi x}{(2\pi n)^4}$ sorra azt kapjuk, hogy a sor összege $B_4(x)$. Az eljárást folytatva pedig minden pozitív egész k-ra beláthatjuk a (14) és a (15) egyenlőségeket.

□

Ennek segítségével már könnyen képletet adhatunk a zéta-függvény értékeire pozitív páros k-k esetén.

3.14. Tétel.

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1}\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}B_{2k}$$

minden $k \geq 1$ *egészre.*

Bizonyítás. Helyettesítsünk (15)-be $x = 0$-t:

$$\frac{B_{2k}}{(2k)!} = (-1)^{k-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n\pi)^{2k}}$$

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1}\frac{B_{2k}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!},$$

amivel be is láttuk a tételt. □

A Riemann-féle zéta-függvény értéke az első néhány páros számra tehát

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \qquad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} \qquad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}.$$

Vagyis a $\zeta(2k)$ alakú számok π^{2k} racionális többszörösei, és mint ilyenek, irracionálisak minden k-ra, hiszen π^{2k} irracionális. Arról sokkal kevesebbet tudunk, hogy páratlan egész számok esetén milyen értékeket vesz fel a függvény. Azt a '70-es években sikerült bizonyítani, hogy $\zeta(3)$ irracionális, azonban máig megoldatlan, hogy $\zeta(5), \zeta(7)$, stb. irracionálisak-e, és zárt alakot sem sikerült találni. Azt is tudjuk, hogy $\zeta(2k+1)$ alakú számok között végtelen sok irracionális van.

4. A függvény kiterjesztése a komplex számok pozitív félsíkjára

Ahhoz, hogy a függvény bonyolultabb alkalmazásait is be tudjuk mutatni, nem elég az egynél nagyobb valós számokra értelmeznünk. Ezért először kiterjesztjük az 1-nél nagyobb valós részű komplex számokra. Ehhez már meg kell ismerkednünk a komplex függvénytan bizonyos fogalmaival, amelyeket [12] és [4] forrás alapján mutatunk be.

4.1. Komplex függvénytani eszközök

A komplex változós függvények esetén a komplex sík valamely H részhalmazának minden pontjához hozzárendelünk egy a komplex síkon lévő pontot. Legyenek $z = x + yi$ és $w = u + iv$ komplex számok, ekkor így írhatjuk ezt le:

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

A valós differenciálszámítás mintájára $f(z)$ függvényt differenciálhatónak mondjuk z_0 pontban, ha

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

határértéke létezik és véges. Ezt az értéket $f(z)$ függvény z_0 helyen vett differenciálhányadosának nevezzük, és $f'(z_0)$-lal jelöljük.

4.1. Definíció. Ha egy $f(z)$ függvény egy T tartomány minden pontjában differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy az $f(z)$ T-ben analitikus[1].

4.2. Tétel. *Ha $f(z)$ függvény a T tartományon analitikus , akkor ott akárhányszor is differenciálható, sőt a tartomány tetszőleges a pontja körül Taylor sorba fejthető:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}a}{n!}(z - a).$$

Tehát a Taylor-sor segítségével tudunk analitikus függvényeket értelmezni, és ezzel bizonyos $f(x)$ valós változós függvényeket természetes módon kiterjeszthetünk komplex változókra. Például értelmezni tudjuk a komplex kitevőre emelést. Ennek bemutatásához Taylor-sorba fejtjük $e^x, \sin x$ és $\cos x$ függvényeket a 0 körül:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

[1] Az analitikus helyett a holomorf kifejezést is szokták használni.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

és

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Ha x helyére ix-et írunk e^x 0 körüli Taylor-sorában, a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!}... \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!}... \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}...\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}...\right) \\ &= \cos x + i \sin x. \end{aligned}$$

Ennek segítségével fogjuk definiálni a komplex kitevőre emelést.

4.3. Definíció. Legyen $z = x + iy$ komplex szám. Ekkor

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Ezzel egy új alakját is nyertük a komplex számoknak, hiszen $re^{i\varphi}$ az origótól r távolságra az x tengellyel φ szöget bezáró komplex számot jelöli.

4.2. A függvény 1-nél nagyobb valós részű s-ekre

Vizsgáljuk most meg a Riemann-féle zéta-függvényt bizonyos komplex s-ekre, legyen a Riemann által használt jelölés szerint $s = \sigma + it$.

4.4. Állítás. $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ *konvergens minden* $Re(s) = \sigma > 1$*-re.*

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |n^{-s}| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^{\sigma+it}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^{\sigma} n^{it}}\right| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n^{\sigma}||e^{itlog(n)}|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n^{\sigma}|}. \end{aligned}$$

Az utolsó lépésben kihasználtuk, hogy $e^{itlog(n)}$ abszolút értéke 1, hiszen az egységkörön helyezkedik el. Tehát

$$|\zeta(s)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n^{\sigma}|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}},$$

amelyről pedig az 1. Tételben beláttuk, hogy konvergens $\sigma > 1$-re. $\square$

4.3. A függvény 0-nál nagyobb valós részű s-ekre

Ezután a komplex sík még nagyobb részére kiterjesztjük a definíciónkat, amihez még meg kell ismerkednünk néhány fogalommal.

4.5. Definíció. Ha a T_1 tartományon analitikus f_1 és a T_2 tartományon analitikus f_2 függvények a $T_1 \cap T_2 = t \neq \emptyset$ tartományon megegyeznek, akkor f_2 az f_1 függvénynek a t tartományon keresztül a T_2 tartományba történő analitikus folytatása.[7]

Ez a fogalom nagyon fontos lesz a dolgozat során, mert ennek segítségével fogjuk majd értelmezni a Riemann-féle zéta-függvényt $s = 1$ pont kivételével a teljes komplex síkon.

4.6. Definíció. Ha az $f(z)$ függvény analitikus a z_0 pont egy pontozott környezetében (azaz amelyhez z_0 pontot magát nem számítjuk hozzá), akkor azt mondjuk, hogy a z_0 pont az $f(z)$ függvény izolált szingularitása.

Az $f(z)$ függvényt ebben az átlyukasztott környezetében úgynevezett Laurent-sorba fejthetjük:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Az izolált szingularitásokat a következőképpen osztályozzuk, a függvény z_0 körüli Laurent-sorának együtthatóinak segítségével:

1. A z_0 pontot f függvény **megszüntethető szingularitásának** nevezzük, ha a z_0 körüli Laurent-sorában minden $n < 0$ index esetén $c_n = 0$. A z_0 izolált szingularitás akkor és csak akkor megszüntethető, ha a $\lim_{z \to z_0} f(z)$ határérték létezik és véges. Ebben az esetben a Laurent-sor Taylor sorrá egyszerűsödik, és a z_0 beli határérték a sor konstans tagjával egyenlő (c_0). Vagyis ha alkalmazzuk az $f(z_0) = c_0$ kiterjesztést, akkor f függvény z_0 teljes környezetében analitikussá válik.

2. A z_0 pontot f függvény **k-adrendű pólusának** nevezzük, ha a függvény z_0 körüli Laurent-sorában $c_{-k} \neq 0$, de $c_{-n} = 0$ minden $n > k$ esetén. A z_0 pont $f(z)$-nek akkor és csak akkor k-adrendű pólusa, ha $f(z)$ előállítható a következő alakban:

   $$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k},$$

   ahol $g(z)$ a z_0 pont teljes környezetében analitikus, és $g(z_0) \neq 0$.

3. A z_0 pontot f függvény **lényeges szingularitásának** nevezzük, ha z_0 szingularitás nem megszüntethető, és nem is k-adrendű pólus.

A dolgozatban az első két típussal fogunk találkozni. Még két tételre van szükségünk, mielőtt kiterjeszthetjük a függvényt a pozitív komplex félsíkra, $s = 1$ pontot leszámítva.

4.7. Tétel. *[2, Theorem 8.21.] Legyen $S \subseteq \mathbb{C}$ nyílt halmaz, $F : S \to \mathbb{C}$ függvény, és $F_N : S \to \mathbb{C}$ S-en F-hez egyenletesen konvergáló függvénysor. Ha minden F_N analitikus, akkor F is analitikus.*

4.8. Tétel. *[2, Theorem 8.2.] Legyenek $a < b$ valós számok, és f komplex értékű, (a, b) intervallumon deriválható függvény. Ekkor*

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b \{t\}f'(t)dt - f(b)\{b\} + f(a)\{a\},$$

ahol $\{t\}$ t törtrészét jelöli.

4.9. Tétel. *[2] A Riemann-féle zéta-függvénynek van analitikus folytatása az $\{s \in \mathbb{C} | Re(s) > 0, s \neq 1\}$ halmazra. A kiterjesztett függvénynek $s = 1$-ben izolált szingularitása van, amely elsőrendű pólus.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $Re(s) > 1$. Ekkor a 4.8 tétel miatt

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^s} = \int_1^N \frac{1}{t^s}dt + \int_1^N \frac{-s\{t\}}{t^{s+1}}dt.$$

Az összeg első tagja

$$\int_1^N \frac{1}{t^s}dt = \left[\frac{t^{-s+1}}{-s+1}\right]_1^N = \frac{N^{-s+1}}{-s+1} - \frac{1}{-s+1}.$$

Ha N tart végtelenbe, akkor $N^{-s+1} \to 0$, mivel $Re(s) > 1$. Tehát az összeg első tagja konvergens. Az összeg második tagja is konvergens, ahogy $N \to \infty$, mert

$$\left|\int_1^\infty \frac{-s\{t\}}{t^{s+1}}dt\right| \leq \int_1^\infty \frac{|s|}{t^{\sigma+1}}dt < \infty.$$

Ez azt is mutatja, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_n^{n+1} \frac{-s\{t\}}{t^{s+1}}dt$ abszolút konvergens, tehát

$$\zeta(s) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 - \frac{1}{1-s} - s\int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}}dt.$$

1. Lemma. *Az* $\int\limits_1^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}}dt$ *függvény analitikus* $Re(s) > 0$*-n.*

Bizonyítás. Legyen
$$I(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(s),$$
ahol $f_n(s) = \int\limits_n^{n+1} \frac{\{t\}}{t^{s+1}}dt$. Megmutatjuk, hogy bármely $\delta > 0$-ra

(a) Az $I(s)$ sor egyenletesen konvergens $Re(s) = \sigma > \delta$-n.

(b) Minden f_n analitikus $Re(s) = \sigma > \delta$-n.

Ha ezek igazak, akkor a 4.7 tétel miatt igaz a lemma. Először bebizonyítjuk (a)-t:

$$\begin{aligned}\left| I(s) - \sum_{n=1}^{N} f_n(s) \right| &= \left| \sum_{n=N+1}^{N} f_n(s) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{N} |f_n(s)| \\ &\leq \int\limits_{N+1}^{\infty} \frac{1}{t^{\sigma+1}}dt = \left[\frac{t^{-\sigma}}{-\sigma} \right]_{N+1}^{\infty} \\ &= \frac{(N+1)^{-\sigma}}{\sigma}.\end{aligned}$$

amelynek abszolút értéke kisebb, mint $\frac{1}{\delta(N+1)^\delta}$, amely 0-hoz tart. Tehát beláttuk, hogy I(s) egyenletesen konvergens.

Ezután belátjuk (b)-t:

$$\frac{f_n(s+h) - f_n(s)}{h} = \frac{\int\limits_n^{n+1} \frac{\{t\}}{t^{s+h+1}}dt - \int\limits_n^{n+1} \frac{\{t\}}{t^{s+1}}dt}{h} = \frac{1}{h} \int\limits_n^{n+1} \frac{\{t\}}{t^{s+1}} \left(\frac{1}{t^h} - 1 \right) dt.$$

Fejtsük Taylor-sorba 0 körül t^{-h}-t.

$$t^{-h} = e^{-h\log t} = 1 - h\log t + f(h,t),$$

ahol
$$f(h,t) = O((h\log t)^2).$$

Tehát
$$\frac{f_n(s+h) - f_n(s)}{h} = \int\limits_n^{n+1} \frac{\{t\}}{t^{s+1}} \left(-\log t + \frac{1}{h} f(h,t) \right) dt.$$

Átrendezve az egyenlőséget kapjuk, hogy

$$\frac{f_n(s+h)-f_n(s)}{h}+\int\limits_n^{n+1}\frac{\{t\}}{t^{s+1}}\log t dt=\int\limits_n^{n+1}\frac{\{t\}f(h,t)}{ht^{s+1}}.$$

Vegyük mindkét oldal abszolút értékét:

$$\begin{aligned}\left|\frac{f_n(s+h)-f_n(s)}{h}+\int\limits_n^{n+1}\frac{\{t\}}{t^{s+1}}\log t dt\right| &= \left|\int\limits_n^{n+1}\frac{\{t\}f(h,t)}{ht^{s+1}}dt\right|\\ &\leq \int\limits_n^{n+1}\left|\frac{\{t\}f(h,t)}{ht^{s+1}}\right|dt\\ &\leq \int\limits_n^{n+1}\frac{|\{t\}f(h,t)|}{ht^{\sigma+1}}dt\\ &\leq \int\limits_n^{n+1}\frac{|f(h,t)|}{ht^{\sigma+1}}dt\end{aligned}$$

A jobb oldal tart 0-hoz, ahogy $h \to 0$, hiszen $f(h,t) = O((h\log t)^2)$. Vagyis $\frac{f_n(s+h)-f_n(s)}{h}$ határértéke véges, tehát f_n analitikus. Ezzel beláttuk (b)-t. □

Tehát értelmezni tudjuk a zéta függvényt $Re(s) > 0, s \neq 1$-re is a következőképpen:

$$\zeta(s) := 1-\frac{1}{1-s}-s\int\limits_1^{\infty}\frac{\{t\}}{t^{s+1}}dt.$$

Az is látszik, hogy $s = 1$-ben a függvénynek elsőrendű pólusa van. □

5. A függvény kiterjesztése a teljes komplex síkra

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a Riemann-féle zéta-függvénynek analitikus folytatása van a teljes komplex síkra, kivéve $s = 1$ pontot. A Riemann által megtalált zéta függvényre vonatkozó függvényegyenlet bizonyítására a "Riemann második bizonyítása" néven ismert módszert használjuk. A fejezetben lévő definíciók, tételek és bizonyítások, ha másként nem jelezzük a [11] forrásból származnak. Ahhoz, hogy a Riemann-féle zéta függvényt kiterjeszthessük a teljes komplex síkra, meg kell ismerkednünk a Gamma és a Theta függvénnyel illetve a Mellin transzformációval. Az összes szükséges tételt kimondjuk, de nem bizonyítunk mindent precízen.

5.1. A Gamma függvény

5.1. Definíció. A Gamma függvényt a következőképpen definiáljuk $s \in \mathbb{C}$ $Re(s) > 0$-ra:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt.$$

Belátható, hogy a függvény jól definiált ezekre az s-ekre, a dolgozatban ezt nem mutatjuk meg. A következőkben bemutatjuk a Gamma függvény néhány tulajdonságát.

5.2. Tétel. *A Gamma függvényre teljesül a következő függvényegyenlet:*

$$\Gamma(s) = s\Gamma(s+1). \tag{17}$$

Bizonyítás.

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^{s}dt. \tag{18}$$

Parciálisan integrálva a (18) egyenlőség jobb oldalát kapjuk, hogy

$$\Gamma(s+1) = \left[-e^{-t}t^s\right]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-t}st^{s-1}dt. \tag{19}$$

A (19) egyenlőség jobboldalának első tagja $(\lim_{t\to\infty} -e^{-t}t^s) - e^0 0^s$. Mivel $e^0 0^s = 0$ és a L'Hospital szabály ismételt alkalmazásával látható, hogy $\lim_{t\to\infty} -e^{-t}t^s = 0$, ezért

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1) &= -\int_0^\infty -e^{-t}st^{s-1}dt = s\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt \\ &= s\Gamma(s).\end{aligned}$$

□

5.3. Következmény. A $\Gamma(s)$ függvény analitikusan folytatható a teljes komplex síkra, leszámítva $s = 0, -1, -2, ...$ pontokat, ahol elsőrendű pólusai vannak.

Bizonyítás. A (17) egyenlőséget használva ki tudjuk számolni a függvény értékeit $-1 < Res \leq 0$-ra, kivéve $s = 0$-ra. Ezzel a függvényt analitikusan folytattuk a $Re(s) > -1$ félsíkra, leszámítva $s = 0$-t, ahol elsőrendű pólusa van a függvénynek. Ezt nyilván végtelen sokszor megismételhetjük, így a teljes komplex síkra kiterjeszthetjük a függvényt kivéve $s = 0, -1, -2....$ elsőrendű pólusokat. □

5.4. Tétel. *A Gamma függvényre teljesül a következő függvényegyenlet:*

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

5.5. Következmény. Az $\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{\sin \pi s}{\pi}\Gamma(1-s)$ analitikus a teljes komplex síkon.

Bizonyítás. A $\Gamma(1-s)$ függvénynek elsőrendű pólusai vannak $s = 1, 2, 3...$ helyeken, de ezeken a helyeken $\sin \pi s$ 0-t vesz fel, így $\frac{1}{\Gamma(s)}$-nek ezeken a helyeken megszüntethető szingularitásai vannak. □

5.2. A Mellin transzformáció

5.6. Definíció. Legyen $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor az f függvény Mellin transzformáltja $g(s)$, melyet a következőképpen definiáljuk:

$$g(s) := \int_0^\infty f(t)t^{s-1}dt$$

olyan s-ekre, ahol az integrál konvergens.

Ebből rögtön látszik, hogy e^-t függvény Mellin transzformáltja $\Gamma(s)$. A következő állítást fel fogjuk használni a Függvényegyenlet bizonyításakor:

5.7. Állítás. *Az e^{-ct} függvény Mellin transzformáltja $c^{-s}\Gamma(s)$.*

Bizonyítás.

$$g(s) = \int_0^\infty e^{-ct}t^{s-1}dt.$$

Ebből $u = ct$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$g(s) = \int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{c}\right)\frac{du}{c} = \int_0^\infty e^{-u}u^{s-1}c^{-s+1-1} = c^{-s}\Gamma(s).$$

□

5.3. A Theta függvény

5.8. Definíció. A Theta függvényt a következőképpen definiáljuk 0-nál nagyobb valós t-kre:

$$\theta(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}.$$

5.9. Megjegyzés. A theta függvényt a következőképpen is írhatjuk:

$$\theta(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}.$$

Ez könnyen látható, hiszen a sor n-edik és $-n$-edik tagja megegyezik a négyzetre emelés miatt, a sor $n = 0$-dik tagja pedig 1.

5.10. Tétel. *Theta függvény teljesíti a következő függvényegyenletet:*

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta(1/t).$$

5.11. Állítás. *Minden* 0*-hoz elég közeli* t*-re* ($t \neq 0$)*:*

$$\left|\theta(t) - \frac{1}{\sqrt{t}}\right| < e^{-C/t}$$

valamely $C > 0$*-ra.*

Vagyis elég kicsi t-re $t^{-1/2}$ és $\theta(t)$ közel vannak egymáshoz.

Bizonyítás. Az 5.9 megjegyzést és az 5.10 tételt használva:

$$\left|\theta(t) - \frac{1}{\sqrt{t}}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{t}}(\theta(1/t) - 1)\right| = \frac{1}{\sqrt{t}}2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2/t}.$$

Tegyük fel, hogy t elég kicsi,és így teljesül rá, hogy $\sqrt{t} > 4e^{-1/t}$ és $e^{-3\pi/t} < 1/2$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\left|\theta(t) - \frac{1}{\sqrt{t}}\right| &< \frac{1}{4}e^{1/t}2\left(e^{-\pi/t} + e^{-4\pi/t} + e^{-9\pi/t} + ...\right) \\
&< \frac{1}{2}e^{(1-\pi)/t}\left(1 + e^{-3\pi/t} + e^{-8\pi/t}...\right) \\
&< \frac{1}{2}e^{-(\pi-1)/t}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ...\right) \\
&< \frac{1}{2}e^{-(\pi-1)/t}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) \\
&= e^{-(\pi-1)/t}.
\end{aligned}$$

Tehát elég kicsi t-re $C = \pi - 1$-gyel teljesül az egyenlőtlenség. □

5.4. A függvény kiterjesztése a komplex síkra és a függvényegyenlet

Az előző alfejezetekben összegyűjtött eszközök segítségével ki tudjuk terjeszteni a Riemann-féle zéta-függvényt a teljes komplex síkra $s = 1$ pont kivételével.

5.12. Tétel. *A $\zeta(s)$ függvény analitikusan kiterjeszthető a teljes komplex síkra, kivéve $s = 1$-et, ahol elsőrendű pólusa van.*

Bizonyítás. Tekintsük a theta függvény Mellin transzformáltját:

$$\int_0^\infty \theta(t) t^{s-1} dt.$$

Ahogy t tart végtelenhez, úgy $\theta(t)$ 1-hez konvergál, hiszen a szumma összes tagja $n = 0$ kivételével gyorsan tart 0 felé. A következő hibatagot vezetjük be, hogy megmutassuk, hogy az integrál mindkét végpontján konvergens:

$$\phi(s) := \int_1^\infty (\theta(t) - 1) t^{s/2-1} dt + \int_0^1 \left(\theta(t) - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) t^{s/2-1} dt$$

Azért használtunk $s/2$-t, mert a későbbiekben így tudjuk majd megkapni $\zeta(2s)$ helyett $\zeta(s)$-t. Megmutatható, hogy $\phi(s)$ analitikus a teljes komplex síkon, de ezt a dolgozatban nem bizonyítjuk. Először tegyük fel, hogy

$Re(s) > 1$ és tekintsük $\phi(s)$ képletében szereplő második tagot:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\theta(t) - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) t^{s/2-1}dt &= \int_0^1 \theta(t)t^{s/2-1}dt - \int_0^1 t^{(s-3)/2}dt \\ &= \int_0^1 \theta(t)t^{s/2-1}dt - \left[\frac{t^{(s-1)/2}}{(s-1)/2}\right]_0^1 \\ &= \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2-1}dt - \frac{2}{s-1} \\ &= \int_0^1 t^{s/2-1}dt + 2\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2-1}dt - \frac{2}{s-1} \\ &= 2\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2-1}dt + \left[\frac{t^{s/2}}{s/2}\right]_0^1 - \frac{2}{s-1} \\ &= 2\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2-1}dt + \frac{2}{s} - \frac{2}{s-1}.\end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned}\phi(s) &= \int_1^\infty (\theta(t)-1)t^{s/2-1}dt + 2\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2-1}dt + \frac{2}{s} - \frac{2}{s-1} \\ &= 2\int_1^\infty \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2-1}dt + 2\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2-1}dt + \frac{2}{s} - \frac{2}{s-1}\end{aligned}$$

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2-1}$ függvénysor egyenletesen konvergens, ezért 3.10 tétel miatt

$$\begin{aligned}\phi(s) &= 2\sum_{n=1}^{\infty} \int_1^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2-1}dt + 2\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 e^{-\pi n^2 t} t^{s/2-1}dt + \frac{2}{s} - \frac{2}{s-1} \\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2-1}dt + \frac{2}{s} - \frac{2}{s-1}\end{aligned}$$

minden $Re(s) > 1$-re. Az 5.7 állítást $c = \pi n^2$-tel és $s = s/2$-vel alkalmazva kapjuk, hogy:

$$\phi(s) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(\pi n^2)^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{2}{s} - \frac{2}{s-1},$$

tehát

$$\frac{1}{2}\phi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) + \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}.$$

Vagyis

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2})}\left(\frac{1}{2}\phi(s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}\right) \tag{20}$$

minden $Re(s) > 1 - re$. Mivel $\frac{1}{\Gamma(s)}$ és $\phi(s)$ analitikusak a teljes komplex síkon, ezért a jobboldalnak csak $s = 0$-ban és $s = 1$-ben lehet szingularitása. Viszont $s = 0$-ban a szingularitás megszüntethető, hiszen

$$\frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2})}\frac{1}{s} = \frac{\pi^{s/2}}{2\cdot\frac{s}{2}\Gamma(\frac{s}{2})},$$

és az 5.2 tételt felhasználva látható, hogy:

$$\frac{\pi^{s/2}}{2\cdot\frac{s}{2}\Gamma(\frac{s}{2})} = \frac{\pi^{s/2}}{2\Gamma(\frac{s}{2}+1)} \xrightarrow{s\to 0} \frac{1}{2\Gamma(1)}.$$

Vagyis a (20) egyenlőség jobb oldalán álló függvény analitikus a komplex síkon $s = 1$-et leszámítva, ahol elsőrendű pólusa van. Ezzel analitikus folytatást találtunk $\zeta(s)$-nek. $\square$

Az függvény analitikus folytatását felhasználva megmutatható, hogy teljesül a következő tételben szereplő függvényegyenlet.

5.13. Tétel. *Legyen*

$$\Lambda(s) := \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s).$$

Ekkor

$$\Lambda(s) = \Lambda(1-s)$$

minden $s \in \mathbb{C}$, $s \neq 1$*-re.*

Bizonyítás. Felhasználva, hogy

$$\frac{1}{2}\phi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) + \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} = \Lambda(s) + \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s},$$

látható, hogy

$$\Lambda(s) = \frac{1}{2}\phi(s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}$$

és

$$\Lambda(1-s) = \frac{1}{2}\phi(1-s) - \frac{1}{1-s} - \frac{1}{s}.$$

Tehát azt kell belátnunk, hogy $\phi(s) = \phi(1-s)$. Ehhez $\phi(s)$-nél $t \to \frac{1}{u}$ helyettesítést alkalmazzuk:

$$\begin{aligned}
\phi(s) &= \int_1^\infty (\theta(t) - 1)t^{s/2-1}dt + \int_0^1 \left(\theta(t) - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) t^{s/2-1}dt \\
&= -\int_0^1 \left(\theta\left(\frac{1}{u}\right) - 1\right) u^{-s/2+1}(-u^{-2})du - \int_1^\infty \left(\theta\left(\frac{1}{u}\right) - \sqrt{u}\right) u^{-s/2+1}(-u^{-2})du \\
&= \int_0^1 \left(\theta\left(\frac{1}{u}\right) - 1\right) u^{-s/2-1}du + \int_1^\infty \left(\theta\left(\frac{1}{u}\right) - \sqrt{u}\right) u^{-s/2-1}du.
\end{aligned}$$

Az 5.10 tételt felhasználva:

$$\begin{aligned}
\phi(s) &= \int_0^1 \left(\sqrt{u}\theta(u) - 1\right) u^{-s/2-1}du + \int_1^\infty \left(\sqrt{u}\theta(u) - \sqrt{u}\right) u^{-s/2-1}du \\
&= \int_0^1 \left(\theta(u) - \frac{1}{\sqrt{u}}\right) u^{(1-s)/2-1}du + \int_1^\infty (\theta(u) - 1)\, u^{(1-s)/2-1}du \\
&= \phi(1-s).
\end{aligned}$$

Ezzel beláttuk a tételt. $\square$

6. A prímszámtétel és a Riemann-hipotézis

A kiterjesztett zéta-függvényt egyik legfontosabb alkalmazása a prímszámtétel bizonyításához kötődik. A prímszámtételt Legendre és Gauss is megsejtette a 18. század végén, de bizonyítani csak Riemann eredményeinek felhasználásával sikerült több, mint száz évvel később.

6.1. Tétel (Prímszámtétel)**.** *[3] Jelölje $\pi(x)$ az x-nél nem nagyobb prímek számát. Ekkor*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1,$$

azaz $\pi(x)$ és $\frac{x}{\log x}$ aszimptotikusan egyenlők.

Vagyis x-ig körübelül $\frac{x}{\log x}$ prímszám van. Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy hogyan áll kapcsolatban a prímszámtétel a Riemann-féle zéta-függvénnyel, ha másként nem jelöljük, az [1] forrást fogjuk használni. Először is definiáljuk a következő, függvényt:

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p,$$

ahol a szumma végigfut az összes olyan prímhatványon, ami nem nagyobb x-nél. Csebisev mutatta meg a 19.században, hogy a következő állítás ekvivalens a prímszámtétellel:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1,$$

hiszen

$$\psi(x) = \sum_{p\leq x} \log p \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor \leq \sum_{p\leq x} \log x = \pi(x)\log x.$$

Riemann adott formulát ((21)-es egyenlőség) arra, hogy hogyan állnak kapcsolatban $\zeta(s)$ gyökei a $\psi(x)$ függvénnyel, melyet H. von Mangoldt bizonyított 1895-ben.

Megmutatható, hogy a negatív páros valós számokra a Riemann-féle zétafüggvény 0-t vesz fel, ezeket triviális gyököknek nevezzük. Szintén belátható, hogy ezeken a gyökökön kívül csak a $0 \leq Re(s) \leq 1$ sávban lehetséges, hogy $\zeta(s) = 0$, ezeket az s-eket nem triviális gyököknek nevezzük. Jelölje ρ a Riemann-féle zéta-függvény nemtriviális gyökeit. Ekkor azokra az $x > 1$-ekre, melyek nem prímhatványok:

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\log(1 - x^{-2}), \tag{21}$$

ahol a szumma a nem triviális gyökökön fut végig [5, (12.6) egyenlőség]. Tehát a Riemann-féle zéta-függvény gyökeiből következtetni tudunk a prímszámok eloszlására. A prímszámtételt Hadamard és de la Valleé Poussin egymástól függetlenül bizonyította 1896-ban. A bizonyításhoz meg kellett mutatniuk, hogy $\zeta(s) \neq 0$ ha $Re(s) = 1$.

Lássuk most a Riemann-hipotézist:

6.2. Sejtés (A Riemann-hipotézis)**.** *[1] A $\zeta(s)$ függvény minden nem triviális gyökének valós része $1/2$-del egyenlő.*

A sejtéssel ekvivalens a következő állítás, melyet Schoenfeld bizonyított 1976-ban [10]:

$$|\psi(x) - x| < \frac{1}{8\pi}\sqrt{x}\log^2 x.$$

A Riemann-hipotézis erősebb állítás, mint a prímszámtétel, tehát ha igaz, pontosabb képet kapunk a prímszámok eloszlásáról. A sejtés szerepel a Hilbert által 1900-ban kiadott problémák, illetve a 2000-ben kiadott milleniumi problémák között is. Az empirikus eredmények eddig alátámasztották a Riemann-hipotézist, hiszen 2004-ig 10^{13} számú nem triviális gyököt találtak az $Re(s) = 1/2$ által meghatározott kritikus egyenesen, (és nyilván egyet sem azon kívül). Az is bizonyított, hogy végtelen sok gyök található a kritikus egyenesen. A sejtést azonban a mai napig nem sikerült bizonyítani, és sokan a matematika legfontosabb megfejtetlen problémájának tartják [1].

Hivatkozások

[1] P. Borwein, S. Choi, B. Rooney, A. Weirathmueller *The Riemann Hypothesis: A Resource for the Afficionado and Virtuoso Alike*, Springer, New York, 2008.

[2] G. Everest, T. Ward, *An Introduction to Number Theory*, Springer-Verlag, London, 2005.

[3] Freud Róbert, Gyarmati Edit, *Számelmélet*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2006.

[4] Hanka László, Zalai Miklós, *Komplex függvénytan*, Műszaki Kiadó, Bolyai könyvek, Budapest, 2003.

[5] A. Ivić, *The Riemann Zeta-Function - Theory and Applications*, Dover Publications, New York, 2003.

[6] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera *Analízis II.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2007.

[7] Pach Zs. Pálné, *Komplex függvénytan*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2002, http://www.math.bme.hu/ jegyzetek/050901_Pach_Zs._Palne_Komplex_Fuggvenytan.pdf, letöltve: 2014.12.04.

[8] M. Th. Rassias, *Problem-Solving and Selected Topics in Number Theory: In the Spirit of the Mathematical Olympiads*, Springer, New York, 2011.

[9] M. Sautoy, *A prímszámok zenéje*, Park Könyvkiadó, Budapest, 2014.

[10] L. Schoenfeld, "Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$. II", *Mathematics of Computation* 30 (134): 337–360, 1976.

[11] A. Steigert, *Riemann's second proof of the analytic continuation of the Riemann Zeta function*, https://www.math.ethz.ch/education/bachelor/seminars/ws0607/modular-forms/Riemanns_second_proof.pdf, letöltve: 2014.12.04.

[12] Szőkefalvi-Nagy Béla, *Komplex függvénytan*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.

[13] Wikipedia, *Divergence of the sum of the reciprocals of the primes*, http://en.wikipedia.org/wiki/Divergence_of_the_sum_of_the_reciprocals_of_the_primes#Third letöltve: 2014.12.30.