

Populációdinamikai modellek

B.Sc. Szakdolgozat

Kaszás Gábor

Matematika B.Sc., Elemző szakirány

Témavezető:

Svantnerné Sebestyén Gabriella

Tanársegéd

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem



Budapest

2015

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni szakdolgozatom elkészüléséhez a segítséget gyakorlatvezetőmnek és konzulensemnek Svantnérné Sebestyén Gabriellának, valamint Faragó István Tanár Úrnak, akinek az előadásai alatt szerettem meg a differenciálegyenletek numerikus megoldásának a módszerét.

Tartalomjegyzék

1. Bevezető	4
2. Elméleti alapok	5
2.1. A differenciálegyenletek alapjai	5
2.2. Populációdinamikai modellek leírása differenciálegyenletekkel . . .	6
2.3. Egyensúlyi pontok és ezek stabilitása	6
3. Egyszereplős modellek	8
3.1. Korlátlan növekedés	8
3.2. Korlátozott növekedés	10
3.3. Iránymezők	11
4. Kétszereplős modell	16
5. A Lotka-Volterra modell módosított egyenlete	22
5.1. Nemlineáris egyedszámcsökkentés	22
5.1.1. Lemma:	23
5.1.2. Egyensúlyi pontok és stabilitásuk	24
5.1.3. Stabilitás és belső egyensúly	25
5.1.4. Stabilitás és Hopf elágazás, belső egyensúly	26
5.1.5. A Hopf-bifurkáció határciklusának stabilitása	27
5.1.6. Numerikus példa	28
6. Összefoglalás	31

1. Bevezető

Az élő közösségekben a populációk egymással kölcsönhatásban vannak. Ezeket a kölcsönhatásokat az szerint is csoportosíthatjuk, hogy az egyes populációk egyedszámát növelik vagy csökkentik. Ilyen kapcsolat például a szimbiózis vagy a kommenzalizmus.

- A szimbiózis két vagy több különböző faj egyedeinek (általában egymásra utalt) szoros együttélése. A szimbiózisban mindkét fél előnyökhöz jut. Például az afrikai szavannákon az orrszarvúkról vagy az elefántokról a betegségeket terjesztő bogarakat lecsipegető madarak.
- A kommenzalizmus az ökológiában használatos fogalom, két populáció olyan kapcsolatát jelenti, amely az egyik fél számára előnyös, a másiknak közömbös. Ha az egyik fél számára közömbös a kapcsolat, nincs rá hatással, nem beszélhetünk kölcsönhatásról. Erre lehet példa, szintén Afrikából, hogy az oroszlán által elejtett zsákmányt a maradékot pedig a dögevő hiénák szerzik meg.

Az egyik populációt növelő, a másikat csökkentő kapcsolatok egyik fajtája az, ami a ragadozók és a zsákmányaik között van. Nem egyszerű ez a kapcsolat, hiszen ha túlságosan elszaporodnak a ragadozók, a zsákmányállatok száma is csökken, ami a ragadozó populációk csökkenését vonja maga után. A kisebb számú ragadozó mellett viszont elszaporodhatnak a zsákmányállatok és ez így folytatódhat megállás nélkül. Az, hogy pontosan miként változik a két populáció egyedszáma, már nem olyan egyértelmű. Ennek leírásához dolgozott ki egy matematikai modellt egymástól függetlenül két kutató Alfred J. Lotka és Vito Volterra 1925-ben és 1926-ban. Érezhető, hogy a modell szinte képtelen leegyszerűsítéseket tartalmaz, pl. a ragadozók nélkül a zsákmány populáció a végtelenségig nő. De ezért csak modell, nem pedig a valóság, és még így is izgalmas következtetéseket vonhatunk le belőle. Bár a természetben ritkán valósulhatnak meg azok a feltételek, amiket a modell megkövetel, bizonyos periodicitások mégis jól magyarázhatóak vele. Némi továbbfejlesztéssel (és még több matematikával), aztán már sokkal informatívabb modellek is előállíthatók a Lotka-Volterra modell alapján.

2. Elméleti alapok

2.1. A differenciálegyenletek alapjai

Az elnevezés az angol *different* szóból származik, ami változást jelent. A valóságban lezajló folyamatok jól közelíthetők ilyen egyenletekkel, széles körben alkalmazzák például a fizikai folyamatok leírására vagy közgazdasági tudományokban. Differenciálegyenlet rendszerről akkor beszélünk, ha több egyenletünk is van. Egy vagy több dimenziós differenciálegyenlet rendszer esetén is beszélhetünk egyensúlyi pontokról. Ez egy olyan pont, ahol a rendszer nyugalomban van, azaz magától nem mozdul ki onnan. Azonban, ha kimozdítjuk ebből az állapottól akkor vizsgálhatjuk a pont körüli viselkedést. Ha visszatér az egyensúlyi pontba, akkor a rendszer stabil, ha nem tér vissza akkor instabil. A szakdolgozatomban használt fogalmak pontos definíciói a következők:

2.1. Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ összefüggő nyílt halmaz, $f(x) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos függvény $(t_0, p_0) \in D$. Ha az $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumra, és az $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenciálható függvényre teljesül, hogy

- $(t, x(t)) \in D$ minden $t \in I$ esetén,
- $x'(t) = f(t, x(t))$ minden $t \in I$ esetén,
- $x(t_0) = p_0$

akkor az x függvényt az I intervallumon az f jobboldalú explicit elsőrendű közönséges differenciálegyenlet (rendszer) megoldásának nevezzük az $x(t_0) = p_0$ kezdeti feltétel mellett.

2.2. Definíció. Egy $p \in D$ pontot egyensúlyi vagy stacionárius pontnak nevezünk, ha minden $t \in \mathbb{R}$ számra $\phi(t, p) = p$.

2.3. Definíció. A $t \mapsto \phi(t, t_0, p_0)$ megoldást *stabilisnak* nevezzük, ha

- $[t_0, +\infty) \subset I(t_0, p_0)$,
- minden $\epsilon > 0$ és $t_1 \in [0, +\infty)$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy $(t_1, q) \in D$, és $|q - \phi(t_1, t_0, q_0)| < \delta$ esetén $[t_1, +\infty) \subset I(t_1, q)$ és $|\phi(t, t_1, q) - \phi(t, t_0, p_0)| < \epsilon$, ha $t \geq t_1$.

A megoldást *instabilisnak* nevezzük, ha nem stabilis. *Aszimptotikusan stabilis* nevezzük ha, stabilis és $|\phi(t, t_1, q) - \phi(t, t_0, p_0)| \rightarrow 0$, ha $t \rightarrow +\infty$.

Tekintsük az $x'(t) = f(x(t), \lambda)$ egyenletet, amelyben $f : R^n \times R^k \rightarrow R^n$ folytonosan differenciálható függvény, a $\lambda \in R^k$ vektor (gyakran csak egyetlen szám) a paraméter.

2.4. Definíció. A $\lambda_0 \in R^k$ paraméter reguláris, ha létezik olyan $\delta > 0$, hogy $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ esetén az $f(\cdot, \lambda)$ rendszer topologikusan ekvivalens a $f(\cdot, \lambda_0)$ rendszerrel. A $\lambda_0 \in R^k$ bifurkációs paraméter, ha nem reguláris.

2.2. Populációdinamikai modellek leírása differenciálegyenletekkel

A populációdinamikában szeretnénk pontosan megbecsülni, és előre jelezni egyes élőlények egyedszámát. Erre egy matematikai modellt kell építenünk, amely kis hibával leírja ezeket a változásokat. Abból kell kiindulni, hogy milyen gyorsan változik az adott időpillanatban a populáció. Az egyedszám változására egy függvényt illesztünk ezért, ha a továbbiakban változásról beszélünk, akkor az első deriváltra gondolunk. A változás függhet az aktuális egyedszámtól, a paramétereiktől és más populációk egyedszámától is. Így egy elsőrendű, egy vagy többváltozós állandó együtthatós differenciálegyenletet kapunk:

$$N'(t) = f(t, N(t)), \quad (1)$$

$$N(0) = N_0. \quad (2)$$

2.3. Egyensúlyi pontok és ezek stabilitása

A lineáris differenciálegyenlet rendszer együtthatói alkotják az A mátrixot. Stacionárius pontja az origó. Az A mátrix sajátértékeit a következőképpen kapjuk meg

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}, \quad (3)$$

a karakterisztikus egyenletre a következőt kapjuk:

$$A - \lambda E = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}). \quad (4)$$

Vegyük észre hogy

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A, \quad a_{11} + a_{22} = \text{tr} A, \quad (5)$$

az egyenlet a következő alakba átírható:

$$\lambda^2 - \text{tr}A\lambda + \det A = 0. \quad (6)$$

Ezt megoldva a sajátértékek a következők lesznek:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}A}{2} \pm \sqrt{\frac{(\text{tr}A)^2}{4} - \det A}. \quad (7)$$

A stabilitás szempontjából ezek előjele lesz a döntő. A sajátértékek kiszámítása nem is szükséges, ezek nélkül is meg tudjuk állapítani, hogy az adott egyensúlyi pont milyen típusú. Elég kiszámítani az A mátrix determinánsát és nyomát majd megvizsgálhatjuk a következő feltételeket.

A sajátértékek	helye a $\text{tr}A - \det A$ síkon	az egyensúlyi pont típusa
$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0, \quad \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 < 0$	$\det A < 0$	Nyereg
$\text{Re } \lambda_1 \text{ és } \lambda_2 > 0$	$\det A > 0 \text{ és } \text{tr}A > 0$	Instabil csomó vagy fókusz
$\text{Re } \lambda_1 \text{ és } \lambda_2 < 0$	$\det A > 0 \text{ és } \text{tr}A < 0$	Stabil csomó vagy fókusz
$\lambda_{1,2}$ valósak	$\det A < \frac{(\text{tr}A)^2}{4}$	Instabil vagy stabil csomó
$\lambda_{1,2}$ konjugáltak	$\det A > \frac{(\text{tr}A)^2}{4}$	Instabil vagy stabil fókusz
$\lambda_{1,2}$ valósak de egyik 0	$\det A = 0$	Nyeregcsomó
$\lambda_{1,2}$ komplex konjugáltak $\text{Re} = 0$	$\det A > 0 \text{ és } \text{tr}A = 0$	Centrum
$\lambda_1 = \lambda_2$ és $\lambda_{1,2}$ valósak	$\det A = \frac{(\text{tr}A)^2}{4}$	Egytengelyű csomó

Sajnos a helyzet ennél nehezebb, mivel nemlineáris differenciálegyenlet-rendszereket stabilitását kell majd sok esetben vizsgálni. Általában az $N' = f(N)$ differenciálegyenlet-rendszer nem megoldható, de az egyensúlyi pontokat az $f(N) = 0$ egyenletből meg tudjuk határozni. Ekkor linearizálunk és a rendszer Jacobi mátrixára vizsgáljuk ugyanazokat a feltételeket, ami a következőképpen néz ki:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

A mátrix sajátértékeit vizsgálva azt tapasztaljuk, hogy a valós részük nulla akkor sajnos a módszer nem működik.

3. Egyszereplős modellek

Egydimenziós esetben a legegyszerűbb modellt

$$N'(t) = kN(t) \quad (9)$$

differenciálegyenlettel kapjuk meg, ennek az $N(0) = N_0$ kezdeti értékhez tartozó megoldása a következő alakban írható fel:

$$N(t) = N_0 e^{kt}. \quad (10)$$

Abban az esetben ha $k < 0$ a rendszer stabil, mivel az exponenciális tag időben csökken. Viszont $k > 0$ esetén a rendszer monoton nőni fog, tehát instabil.

A differenciálegyenlet rendszereknél nagyon fontos, hogy megkeressük az egyensúlyi pontokat és megállapítsuk azoknak a típusát. Ez az $f(N(t)) = 0$ egyenletnek a megoldása, amely egyben azt is jelenti, hogy $N'(t) = 0$. Kétszereplős modell esetén $f(N_1, N_2) = 0$ esetet vizsgáljuk, azaz amikor $N_1'(t)$ és $N_2'(t)$ is egyenlő 0-val. Ezekben a pontokban a rendszer állandó, ha azonban a rendszert kimozdítjuk ebből az állapotából, akkor a környezetét kell vizsgálnunk. Ha visszatér az eredeti állapotba, akkor a rendszer stabil, ha nem akkor instabil. A lépések a következők lesznek:

- egyensúlyi pontok megkeresése,
- viselkedés vizsgálata az egyensúlyi pontok környezetében,
- iránymezők kirajzolása.

3.1. Korlátlan növekedés

Adott egy faj, és egy hozzá tartozó $k > 0$ szaporodási együttható. Az adott populáció növekedése minden időpillanatban függ a k -tól és a meglévő egyed-számtól. A folyamatot leíró differenciálegyenlet a következő:

$$N'(t) = kN(t). \quad (11)$$

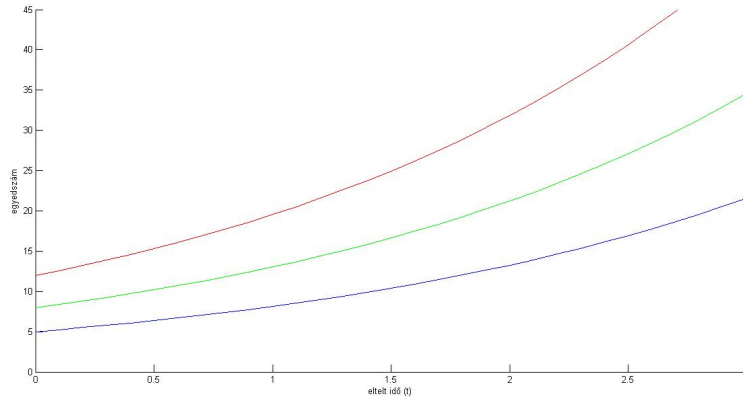
Ennek az egyenletnek ismerjük az analitikus megoldását is, amely a következő lesz:

$$N(t) = N_0 e^{kt}. \quad (12)$$

Azaz exponenciálisan növekedni fog. A korlátlan növekedés szemléltetésére egy MATLAB programot írtam, ez két lépcsőből tevődik össze. Először írtam egy

szkriptet amiben a differenciálegyenlet szerepel, majd egy megoldófüggvényt is, ami megoldja az egyenletet. A megoldó módszernek az explicit Euler módszert választottam. Ennek képlete a következő: $x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n)$. Ahhoz, hogy a megoldást ki tudjuk számítani a tetszőleges t_n időpillanatban, ismerni kell az x_0 kezdeti értéket. A T időintervallumon fel kell osztani n db h hosszúságú részre. Ez egy ekvidisztáns rácsháló lesz. A programomban $k = 0.5$ a t_0 kezdeti idő értelemszerűen 0, a T időintervallum pedig 3 hosszúságú lett. A h lépésközt 0.1 hosszúságúra választottam. A megoldófüggvényben a diffegy helyére kell beilleszteni a megoldani kívánt differenciálegyenlet nevét, a függvényre @ jellel hivatkozhatunk. A program forráskódja a következő:

```
function dmdt=korlatlan(x,k)
dxdt=k*x;
-----
function [t m]=megoldas1 (diffegy,t0,x0,T,k,h)
N=(T-t0)/h;
t=zeros(N+1,1);
x=zeros(N+1,1);
t(1)=t0;
x(1)=x0;
for i=1:N
t(i+1)=t(i)+h;
m(i+1)=abs(m(i)+h*diffegy(k,m(i)));
end
```



1. ábra. Korlátlan növekedés

Az ábrán a korlátlan növekedés modelljét láthatjuk, azaz ha időben exponenciálisan növekszik a populáció egyedszáma. A kezdő k értékek mindhárom esetben azonosak, csak a kezdeti egyedszám változik. Megvizsgáltuk a modellt három különböző N_0 kezdeti értékre, ezek 5, 8 és 12 voltak. Az ábrán egyértelműen látszik, hogy a növekedés sebessége nagy mértékben függ a kezdeti egyedszámtól.

3.2. Korlátozott növekedés

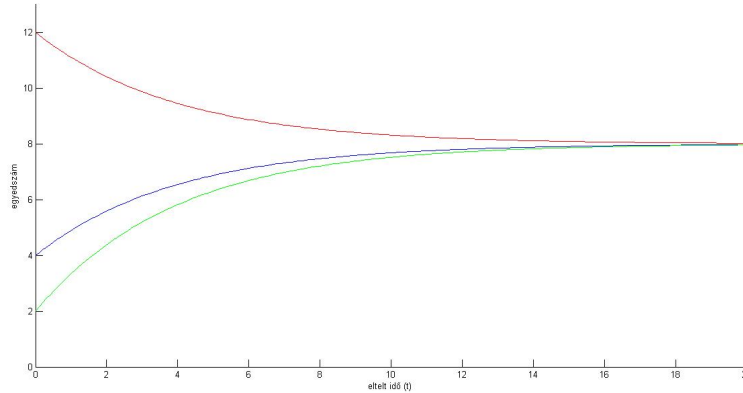
Itt is adott egy faj, és egy hozzá tartozó $k > 0$ szaporodási együttható. De az előbbiekkkel ellentétben, itt van egy élettér, ami korlátot szab a növekedésének. Például egy amőbapopuláció hiába nő minden nap a kétszeresére, nem nőhet nagyobbra, mint az adott tó amelyben szaporodik. Ezért a folyamatot leíró differenciálegyenletünket is módosítanunk kell. Egy $K > 0$ kapacitás változót is meg kell adnunk. Az egyenletünk a következő lesz :

$$N'(t) = Nk(K - N(t)). \quad (13)$$

Ez egy logaritmikus növekedésű függvény lesz, hiszen amellettt hogy az egyedszám folyton növekszik, tartani fog a kapacitás maximumához. Az analitikus megoldás a következő:

$$N'(t) = -\frac{K}{1 + Ce^{Kkt}}. \quad (14)$$

A C egy konstans amelyet az integrálás következtében kaptunk értéke $N(0)$ -ban a következő: $C = -\frac{K}{N_0} - 1$.



2. ábra. Korlátozott növekedés

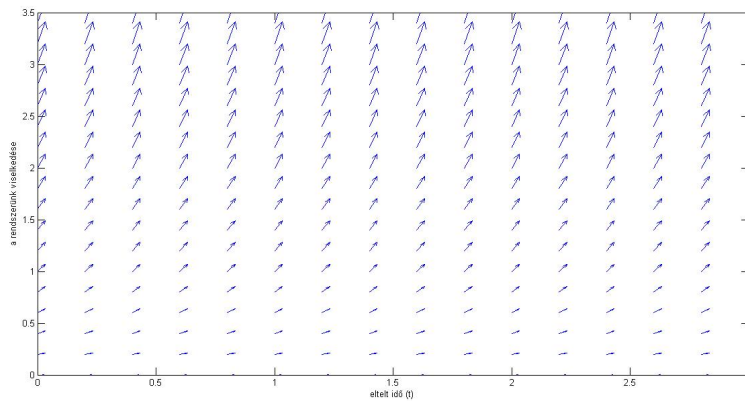
Az ábrán a korlátos növekedés modelljét láthatjuk, azaz időben logaritmikusan növekszik a populáció egyedszáma. A kezdő k értékek mindhárom esetben azonosak, csak a kezdeti egyedszám változik. Megvizsgáltuk a modellt három különböző N_0 kezdeti értékre, ezek 2, 4 és 12 voltak. Az ábrán egyértelműen látszik, hogy a növekedés vagy csökkenés sebessége nagy mértékben függ a kezdeti egyedszámtól. A populáció itt azonban nem növekedhet a végtelenségig, csak a terület eltartóképességéig. Ha a kezdeti egyedszámunk nagyobb mint a terület eltartóképessége, akkor az egyedek száma logaritmikusan csökkenni fog az eltartóképességhez. A megoldáshoz itt is az explicit Euler módszert választottam, a program forráskódja annyiban változott, hogy a @ jellel nem a korlátlan, hanem a korlátos növekedés differenciálegyenletére kell hivatkoznunk.

3.3. Iránymezők

Az iránymező megmutatja, hogyan viselkedik a differenciálegyenletünk a tér bármely pontjában. A MATLAB-ban a beépített quiver paranccsal lehet meghívni, ez nyilakkal fogja nekünk kirajzolni. A MATLAB-ban a tér elemeit egy mátrixban kell eltárolni, és erre lehet a számításokat megcsinálni. A nyilak ezen számítások eredményeit mutatják majd meg. A következő két ábrán a korlátos, illetve a korlátlan növekedés iránymezőit tekinthetjük majd meg. Mind a két ábrán látszik, hogy ha bármelyik időpillanatban az egyedszámunk nulla, akkor a rendszerünk stabil lesz és abból az állapotból soha nem mozdul ki. A modellünk itt biológiailag nem helyes, mert akár egy állat is képes szaporodni, de

abban a valóságot tükrözi, hogy nulla egyedszámból kiindulva a populáció nem fog növekedni. Az iránymező kirajzolásának programkódja a következő:

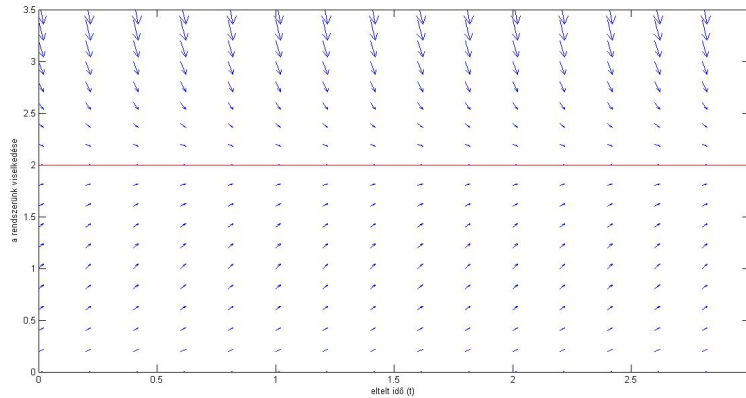
```
[X,Z] = meshgrid(0:0.2:4);  
U=ones(21);  
V=0.5*Z;  
quiver(X,Z,U,V)
```



3. ábra. Korlátlan növekedés iránymezője

Az ábra a korlátlan növekedés iránymezőjét mutatja. Láthatjuk hogy a tér bármely pontjában exponenciális a viselkedése, és azt is hogy a vízszintes tengelyről a nyilak soha nem mozdulnak ki, hanem végig vízszintesek maradnak. Kirajzoltattam a korlátozott növekedés iránymezőjét is, ennek programkódja a következő:

```
[X,Z] = meshgrid(0:0.2:4);  
U=ones(21);  
V=0.5*Z.*(2-Z);  
quiver(X,Z,U,V)
```

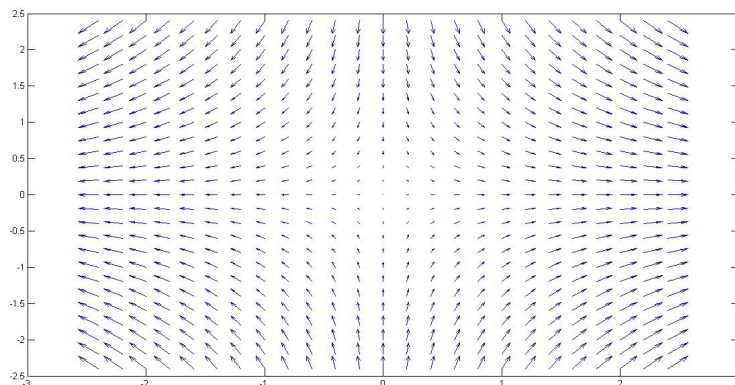


4. ábra. Korlátozott növekedés iránymezője

Az ábra a korlátozott növekedés iránymezőjét mutatja. Az ábrán látható, hogy a tér bármely pontjában logaritmikus a viselkedése, és a függvény az eltartóképesség vízszintes egyeneséhez simul majd. Az ábrán látható rendszerünk eltartóképessége most kettő, és ezt egy vízszintes piros vonallal jelöljük. Látható az is, hogy a populáció egyedszáma adott esetben nem csak növekedni tud az eltartóképességhez, hanem csökkenni is. Azt is láthatjuk, ha a rendszer elérte az eltartóképesség határát akkor nem mozdul ki onnan.

Szakedolgozatomban a későbbiek során még két egyensúlyi pontot fogok vizsgálni. Ezek közül az első a nyeregpont. Ennek kirajzoltatását a következő programkóddal hajtottam végre:

```
[X,Z] = meshgrid(-2.4:0.2:2.4);
U =X;
V =-Z;
quiver(X,Z,U,V)
```



5. ábra. Nyeregpont iránymezője

Az ábrán egy nyeregpont fázisképe látható. A rendszer stacionárius pontja itt is az origó, a tengelyeken lévő pontok közül, a vízszintes tengelyen lévők távolodnak az origótól, a függőleges részen viszont oda tartanak. A rendszer többi pontja hiperbolikusan viselkedik, a nyilak iránya az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvényre hasonlít.

A negyedik ilyen pont a nyeregsomó lesz. Ennek is mellékelem a kirajzoltatáshoz szükséges programkódját. Az axis kifejezéssel optimalizáltam a tengelyeket, hogy a rajz arra fókuszáljon ami igazán fontos.

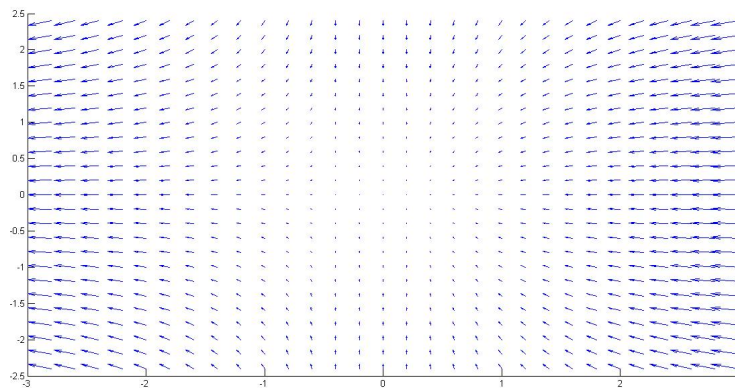
```
[X,Z] = meshgrid(-3:0.2:3);
```

```
U = -X.^2;
```

```
V = -Z;
```

```
axis([-3 3 -2.5 2.5]) hold on
```

```
quiver(X,Z,U,V)
```



6. ábra. Nyeregcsomó iránymezője

Az ábrán egy nyeregcsomó fázisképe látható. A rendszer stacionárius pontjának szintén az origót választottam. Látható, hogy az ábra a függőleges y tengely mentén két részre tagolódik. A függőleges tengely mentén lévő pontok az origóhoz tartanak. A vízszintes tengelyen figyelhető meg először a változás, ugyanis az ábra bal oldalán távolodik az origótól, a jobb oldalon pedig távolodik tőle. A pont típusa azért nyeregcsomó, mert mindkettő féle viselkedés igaz rá. Az ábra jobboldala csomószerűen viselkedik, a jobb félsík minden pontja az origóhoz tart. Még az ábra bal oldalán nyeregyszerű viselkedést láthatunk, az ábra pontjai hiperbolikusan viselkednek, az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvényhez hasonlóan a vízszintes tengelyhez simul.

4. Kétszereplős modell

Egyszerű modellükben a zsákmány populáció növekedése az adott populáció méretétől, csökkenése a ragadozó populációtól függ. A ragadozóknál pont fordítva, növekedésük függ a zsákmány populáció méretétől, míg csökkenésüket a saját populációjuk mérete szabja meg. Ebben a modellben tehát négy paraméter van: a zsákmánypopuláció növekedési sebessége (a_{11}), annak az esélye, hogy egy ragadozó elkap egy zsákmányt (a_{12}), annak a mértéke, hogy egy elfogott zsákmányállat mennyivel járul hozzá a ragadozók szaporodásához (a_{21}), valamint a ragadozók elhalálási sebessége (a_{22}):

$$N_1' = a_{11}N_1 + a_{12}N_2, \quad (15)$$

$$N_2' = a_{21}N_1 + a_{22}N_2. \quad (16)$$

Szaktervezőben egy ennél bonyolultabb modellt fogok vizsgálni.

Két vagy több faj verseng valamely azonos táplálékforrásért vagy gátolja egymás növekedését. A tanulmány gyakorlati versenyről szól. Hogyan tartsa fenn a természet a versenyt, ha az egyik faj kihal akkor a vele kapcsolatban állók (vele versenyzők) is ki fognak halni. Ha két fajt figyelünk meg azt a Lotka-Volterra modellel tudjuk szemléltetni. Léteznek bonyolultabb modellek is, stabilitás szempontjából azok is ilyen tulajdonságokat tükröznek. Az N_1 és N_2 az egyes egymással versenyző fajták:

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left[1 - \frac{N_1}{K_1} - b_{12} \frac{N_2}{K_1} \right], \quad (17)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left[1 - \frac{N_2}{K_2} - b_{21} \frac{N_1}{K_2} \right]. \quad (18)$$

Az r_1, r_2, K_1, K_2 , és b_{21}, b_{12} minden esetben pozitív számok.

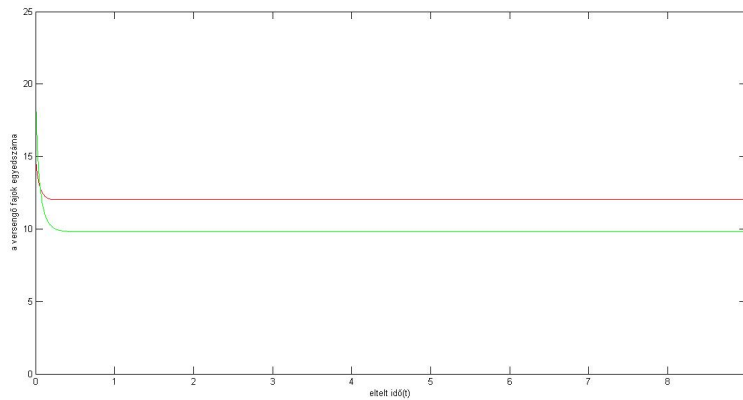
- $r_{1,2}$ a születési ráta,
- a $K_{1,2}$ a fajok teherbíró képessége,
- a $b_{12,21}$ az egymásra gyakorolt versenyképességi hatások, ezek általában nem egyenlőek.

Természetesen egy numerikus programmal itt is lehet közelíteni a megoldást. Ennek a differenciálegyenlet rendszernek a megoldásához egy beépített MATLAB függvényt választottam, az *ODE45*-öt. Ez egy 4–5-öd rendű Runge-Kutta

alapon működő függvény, felváltva használja a 4-ed illetve az 5-öd rendű lépéseket. Itt nem szükséges megadnunk egy h lépésközt, mert magától felosztja a T intervallumot annyi részre, hogy a megoldás 4-ed rendben pontos legyen. Természetesen az *'abstol'* és *'retol'* paranccsal ezt tetszőleges pontosságúra felül lehet írni. A program itt is kettő szkriptből tevődik össze, mint az egyszereplős modelleknél, csak itt nem egy hanem, kettő darab egymástól is függő differenciálegyenletünk van. Mivel a MATLAB nem ismeri az alsó indexeket ezért, hogy be tudjam vinni az adatokat a programba át kellett neveznem néhány változót. Az N és M jelöli a két versengő fajt, p és r a születési rátákat, K és L a fajok teherbíró képességét, végül pedig a és b az egymásra gyakorolt versenyképességi hatásokat. A programomat a következő adatokkal futtattam le: $N = 15$, $M = 20$, $p = 13$, $r = 14$, $K = 14$, $L = 11$, $a = 0.2$, $b = 0.1$. A két szkript forráskódja a következő:

```
function dn = rpm(t,n,p,r,K,L,a,b)
dn = zeros(2,1);
dn(1) = n(1)*p*(1-n(1)/K-a*n(2)/K);
dn(2) = n(2)*r*(1-n(2)/L-b*n(1)/L);
-----
function megoldo1(N,M,p,r,K,L,a,b)
options = odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',[1e-9 1e-9]);
[T,Y] = ode45(@rpm,[0 10],[N M],options,p,r,K,L,a,b);
plot(T,Y(:,1),'r',T,Y(:,2),'g')
axis([0 10 0 25])
[T Y]
figure(2)
plot(Y(:,1),Y(:,2))
```

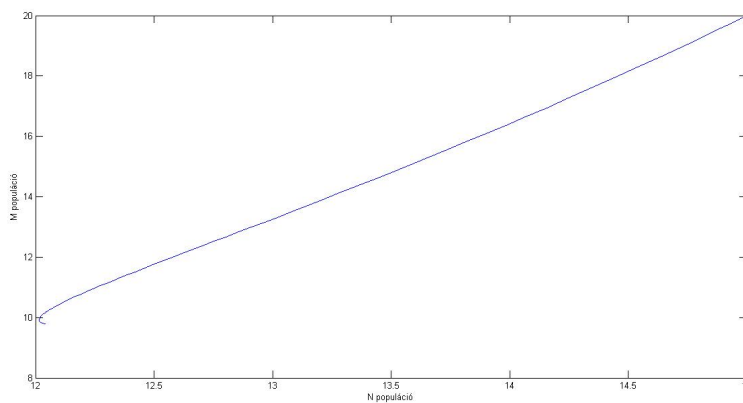
A programom nem csak kiszámolja, hogy az idő elteltével melyik populáció egyedszáma hogyan változik, hanem ábrázolja is. A két faj versengésének az ábrája a következő lett:



7. ábra. Ragadozó-préda modell

Az ábrán látható a két faj versengése az időben. Láthatjuk, hogy ökológiailag fenntartható adatokat adtam meg, akár a születési rátára akár a fajok teherbíróképességére gondolunk, hiszen látszik ugyan egy csökkenés a kezdetekor, de a rendszer utána egyensúlyba áll be, és érdemben nem változik egyik populáció egyedszáma sem.

A programom készített egy másik ábrát is, ahol az N és M fajokat egymás függvényében ábrázoljuk.



8. ábra. N és M populációk egymás függvényében

Az ábrán jól látszik hogy a kezdetekor egy lineáris csökkenés történik, azaz mind

a kettő populáció egyedszáma nagyjából ugyanannyival csökken. Az ábra jobb alsó sarkában látszik, hogy visszakanyarodik a vonal, azaz a csökkenés megáll és a rendszer egyensúlyba fog beállni. Fontos megjegyezni, hogy az ábrán inkább a két faj arányát látjuk, mintsem konkrét értékeket.

A továbbiakban a differenciálegyenlet rendszer egyensúlyi pontjaival és stabilitásával fogok foglalkozni. Hogy a jelölés egyszerűbb legyen vezessünk be új változókat. Jelölje:

$$u_1 = \frac{N_1}{K_1}, \quad u_2 = \frac{N_2}{K_2}, \quad \tau = r_1 t, \quad \rho = \frac{r_2}{r_1}, \quad a_{12} = b_{12} \frac{K_2}{K_1}, \quad a_{21} = b_{21} \frac{K_1}{K_2}.$$

A fentebb leírt egyenletek a következő alakban írhatóak fel:

$$\frac{dN_1}{dt} = u_1(1 - u_1 - a_{12}u_2) = f_1(u_1, u_2), \quad (19)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = u_2(1 - u_2 - a_{21}u_1) = f_2(u_1, u_2). \quad (20)$$

Ennek a differenciálegyenlet rendszernek kell megkeresnünk az egyensúlyi pontjait, azaz olyan megoldásokat keresünk, ahol az

$$f_1(u_1, u_2) = f_2(u_1, u_2) = 0. \quad (21)$$

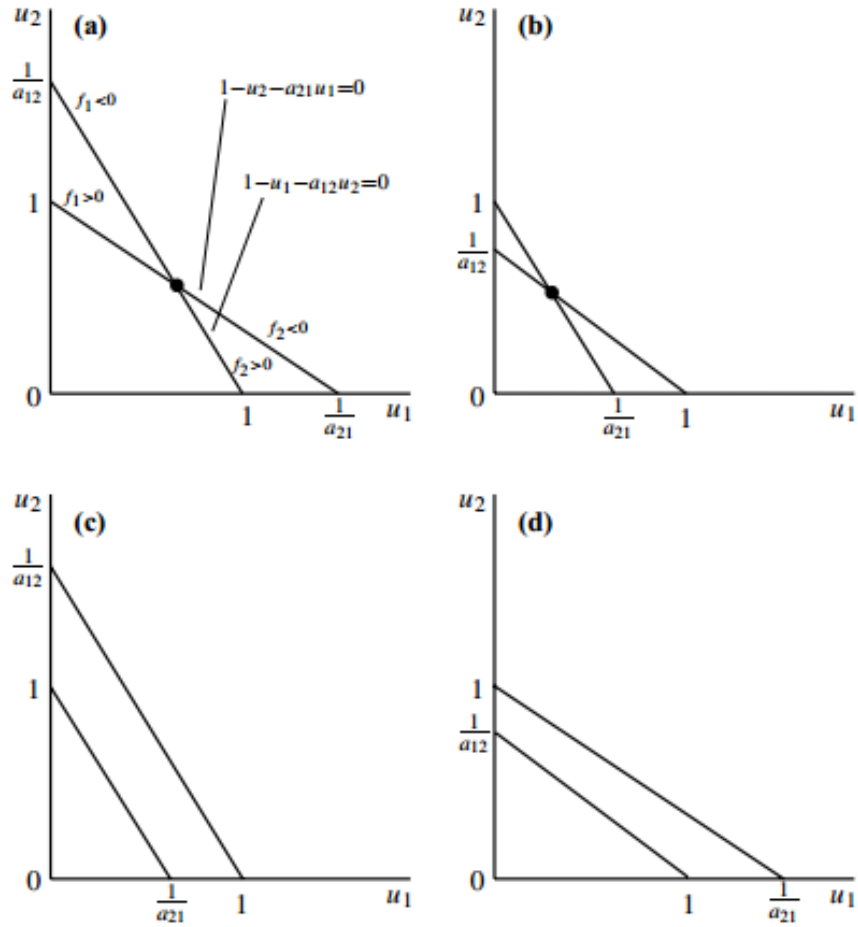
Összesen négy ilyen eset lehetséges, ezek a következők:

- $u_1 = 0$ és $u_2 = 0$,
- $u_1 = 1$ és $u_2 = 0$,
- $u_1 = 0$ és $u_2 = 1$,
- 4. eset függ a bemenő paramétereiktől, ez csak relevancia $u_1 = \frac{1-a_{12}}{1-a_{12}a_{21}}$ és $u_2 = \frac{1-a_{21}}{1-a_{12}a_{21}}$.

Ha $u_1, u_2 > 0$ és végesek, valamint $a_{12}a_{21} \neq 1$, akkor a 4 nullklína lehetőségét a következő rajzon lehet látni.

Nullklínáknak azokat az egyeneseket (többdimenziós esetben hipersíkokat) nevezzük, ahol a differenciálegyenlet rendszerben az egyik egyenlet végig 0 értéket vesz fel. Az ábrán ezek láthatóak, hogy melyik egyenes melyik egyenletet jelöli, azt az (a) ábrán látható nyilak mutatják. Ezen egyenesek metszéspontjai mindig egyensúlyi pontok, hiszen abban a pontban mindkettő egyenlet 0-val egyenlő. A modell parciális deriváltakal kifejezett mátrixos alakja a következő:

$$A = \begin{pmatrix} 1 - 2u_1 - a_{12}u_2 & -a_{12}u_1 \\ \rho 21u_2 & \rho (1 - 2u_2 - a_{21}u_1) \end{pmatrix}. \quad (22)$$



9. ábra. A 4 lehetséges eset egyensúlyi pontjai és nullklínái

Az előbbieken megállapítottuk az egyensúlyi pontok helyét, most nézzük azok fajtáját.

- Az első a $(0,0)$ -ban van. Ez instabil lesz, mivel a sajátértékek pozitívak lesznek: $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = \rho$.
- A második egyensúlyi pont a $(1,0)$ pontban található. Itt a sajátértékek a következők: $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = \rho(1 - a_{21})$. Tehát ez a pont stabil, ha $a_{21} > 1$ és instabil ha kisebb.
- A harmadik egyensúlyi pont a $(0,1)$ hasonlóan viselkedik, az itteni saját-

értékek: $\lambda_1 = -\rho$ és $\lambda_2 = 1 - a_{12}$. Szóval ez a pont stabil, ha $a_{12} > 1$ és instabil ha kisebb.

- Végül nézzük az utolsó egyensúlyi állapotot, amikor létezik a pozitív negyedben megoldása. Ennek egy speciális mátrixa van, amely a következő alakú:

$$A = (1 - a_{21}a_{12})^{-1} \begin{pmatrix} a_{12} - 1 & a_{12}(a_{12} - 1) \\ \rho a_{21}(a_{21} - 1) & \rho(a_{21} - 1) \end{pmatrix}.$$

Az eredmény itt összetett, ezáltal a stabilitás az egyensúlyi állapotokban az a_{12} és a_{21} együtthatóktól függ.

5. A Lotka-Volterra modell módosított egyenlete

Eddigi modelljeinkben vagy csak egyetlen szereplő korlátos illetve korlátlan növekedését vizsgáltuk, vagy egy ragadozó-préda modellt, amelyben a ragadozónak nem volt semmilyen ellensége. Most vizsgálunk egy olyan modellt, amelyben az ökológiai egyensúly fenntartása érdekében, a ragadozókat is vadásszák. A szakirodalom alapvetően háromféle módszert ismer.

- Állandó egyedszámcsökkentés: Egységnyi időre lebontva állandó darabszámú egyeddel csökkenti az egyedszámot.
- Arányos egyedszámcsökkentés: ami azt jelenti, hogy

$$h(x_2) = qEx_2. \quad (23)$$

tehát az elejtett egyedek száma és az egységnyi idő között egy arányossági tényező áll fenn.

- Nem lineáris egyedszámcsökkentés (Holling típus II)

$$H(x_2) = \frac{qEx_2}{m_1E + m_2x_2}. \quad (24)$$

A képletekben a q az egyedszámcsökkentési együttható, E pedig a vadászható egyedek, melyeknek mérik a számát. Az m_1 és az m_2 pedig a két faj populációját leíró pozitív, a gyakorlatban csak egész számok. Észrevehető, hogy az arányos egyedszámcsökkentést több probléma is befolyásolhatja, például a vadászni kívánt zsákmány korlátosan lineáris, vagy határtalanul lineáris növekedése. Azonban meg kell jegyezni, hogy $H(x_2) = \frac{qE}{m_2}$ ha $x_2 = \infty$ és $H(x_2) = \frac{qx_2}{m_1}$ ha $E = \infty$.

Ez azt mutatja, hogy a függvény nem lineáris sem a vadászat, sem az egyedek számok szintjén.

5.1. Nemlineáris egyedszámcsökkentés

Szakdolgozatomban csak a nemlineáris egyedszámcsökkentést fogom bővebben elemezni, amelyet a következő differenciálegyenlet rendszer ír le:

$$\frac{dN_1}{d\tau} = rx_1\left(1 - \frac{x_1}{k}\right) - ax_1x_2, \quad (25)$$

$$\frac{dN_2}{d\tau} = max_1x_2 - dx_2 - \frac{qEx_2}{m_1E + m_2x_2}. \quad (26)$$

A kezdeti feltételek a következők

$$x_1(0) > 0 \quad \text{és} \quad x_2(0) > 0.$$

Az egyenletek többi együtthatójáról feltételezzük, hogy a biológiai szempontok miatt pozitívak. Mielőtt azonban részletesen elemeznénk a folyamatot leíró differenciálegyenlet-rendszert, egyszerűsítsük a következő dimenzió nélküli rendszerré. Legyenek:

$$x_1 = kx, \quad ax_2 = ry, \quad r\tau = t,$$

$$\alpha = \frac{d}{amk}, \quad \eta = \frac{qE}{mkrm_2}, \quad \epsilon = \frac{am_1E}{rm_2}, \quad \rho = \frac{amk}{r}.$$

Így átírható a következő differenciálegyenlet rendszer alakjába:

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x - y) = f^{(1)}(x, y), \quad (27)$$

$$\frac{dy}{dt} = \rho y \left(x - \alpha - \frac{\eta}{\epsilon + y} \right) = f^{(2)}(x, y). \quad (28)$$

A kezdeti feltételek a következőképpen változnak:

$$x(0) = x_0 > 0, \quad y(0) = y_0 > 0. \quad (29)$$

Itt az $f^{(1)}$ és $f^{(2)}$ a következő alakban adható meg:

$$f^{(1)}(x, y) = x(1 - x - y), \quad (30)$$

$$f^{(2)}(x, y) = \rho y \left(x - \alpha - \frac{\eta}{\epsilon + y} \right). \quad (31)$$

A ρ, α, η , és az ϵ számok pozitívak. A modell miatt minket csak az első síknegyed érdekel, azaz amikor az $x \geq 0$ és az $y \geq 0$.

A rendszer pozitivitása fontos, a következő módszerrel megmutatjuk, hogy a megoldások a rendszer jelenlegi kezdeti állapotában vannak, pozitívak és egyenletesen korlátosak. Tehát a rendszer ökológiai szempontból is használható.

5.1.1. Lemma:

A rendszer minden $(x(t); y(t))$ kezdeti feltétele pozitív minden $t > 0$ időpillanatban. Mivel az idő folyamatosan pozitív irányba változik a $t < 0$ nem is értelmezzük. A rendszer minden $(x(t); y(t))$ kezdeti feltétele egyenletesen korlátos

minden időpillanatban. Azaz egyik fajból sem lehet végtelen (megszámlálhatóan) sok. Az integrálás, valamint a kezdeti feltételek adják,

$$x(t) = x(0)e^{\int_0^t f^{(1)}(x(s), y(s)) ds} > 0, \quad (32)$$

$$y(t) = x(0)e^{\int_0^t f^{(2)}(x(s), y(s)) ds} > 0. \quad (33)$$

Az összes megoldás kiindulása az első negyedben lesz, a jövőben minden alkalommal. Nézzük meg az $\zeta(t) = x(t) + \frac{1}{\rho}y(t)$ majd az időváltozás folyamán a rendszer a következő differenciálegyenletet adja:

$$\frac{d\zeta}{dt} + \alpha\rho\zeta(t) < x(1 - x + \alpha\rho). \quad (34)$$

Miután néhány algebrai átalakítást végzünk, a differenciálegyenletünk a következő alakba írható:

$$\frac{d\zeta}{dt} + \alpha\rho\zeta(t) < \frac{(1 + \alpha\rho)^2}{4}. \quad (35)$$

Ennek alkalmazásával az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk:

$$0 < \zeta(t) < \frac{(1 + \alpha\rho)^2}{4\alpha\rho}(1 - e^{-t\alpha\rho}) + \zeta(0)e^{-t\alpha\rho}. \quad (36)$$

Ezért,

$$0 < \lim\zeta(t) < \frac{(1 + \alpha\rho)^2}{4\alpha\rho}. \quad (37)$$

Ha minden trajektóriának pozitív az x tengelyen az értéke, akkor az a jövőben így is marad, és így az x tengely ez egy pozitív invariáns halmaz rendszere. Hasonlóan viselkedik majd az y tengely is. Ha ez a lemma legelső eredménye, az állításban belátjuk, hogy ez egy invariáns halmazrendszer. A továbbiakban elemezni fogjuk a modellt, a stabilitási pontjai és azok típusainak szempontjából.

5.1.2. Egyensúlyi pontok és stabilitásuk

Egyensúlyi pontjai a rendszernek abban az esetben lesznek, ha

$$xf^{(1)}(x, y) = 0, \quad yf^{(2)}(x, y) = 0 \quad (38)$$

egyenletek teljesülnek.

5.1. Tétel. • Az $S_0 = (0, 0)$ mindig nyeregpont.

- A tengelyirányú $S_1 = (1, 0)$ aszimptotikusan stabil, ha $\eta + \epsilon\alpha > \epsilon$ és nyeregpont ha $\eta + \epsilon\alpha < \epsilon$.

- *A rendszer transzkritikus elágazás környékén megy keresztül ha, $S_1 = (1, 0)$ és $\eta + \epsilon\alpha = \epsilon$.*

Bizonyítás:

Az $S_0 = (0, 0)$ egyensúlyi ponthoz tartozó Jacobi mátrix a következő lesz:

$$J_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\rho}{\epsilon}(\eta + \alpha\epsilon) \end{pmatrix}. \quad (39)$$

A J_0 mátrix sajátértékei a következők lesznek $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = -\frac{\rho}{\epsilon}(\eta + \alpha\epsilon) < 0$. Láthatjuk, hogy a két sajátérték ellenkező előjelű, függetlenül attól, hogy milyen paraméterkorlátozásokat hajtunk végre. Ökológiai szempontból arra a következtetésre juthatunk, hogy a ragadozó populáció soha nem fog kihalni. Az $S_1 = (1, 0)$ egyensúlyi ponthoz tartozó Jacobi mátrix a következő lesz:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\rho}{\epsilon}(-\epsilon\eta + \alpha\epsilon) \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Ennél a mátrixnál a sajátértékek is változni fognak, ezek a következők lesznek: $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = -\frac{\rho}{\epsilon}(-\epsilon\eta + \alpha\epsilon)$. Biológiailag ez bekövetkezhet, ezért azt mondhatjuk, hogy parametrikus állapotban van ha, $\eta + \epsilon\alpha > \epsilon$. Ekkor a ragadozó populáció kihal, és a zsákmánypopuláció megközelíti a környezet teherbíró képességét, így az egyedszámcsökkentés már nem fenntartható.

5.1.3. Stabilitás és belső egyensúly

Most tanulmányozni fogjuk a stabilitás létezését, egyidejűleg az ökológiai egyensúly létezése szempontjából. A belső egyensúly is $S_{1*} = (x_{1*}, y_{1*})$ és $S_{2*} = (x_{2*}, y_{2*})$ is egy másodfokú egyenlet pozitív gyökei:

$$y^2 + (\epsilon + \alpha - 1)y + (\eta + \alpha\epsilon - \epsilon) = 0. \quad (41)$$

A másodfokú megoldóképlet megoldásai alapján az egyenlet gyökei a következők lesznek:

$$y_{1*} = \frac{1}{2}(1 - \epsilon - \alpha - \sqrt{(\epsilon + \alpha - 1)^2 - 4(\eta + \epsilon - \epsilon)}), \quad (42)$$

$$y_{2*} = \frac{1}{2}(1 - \epsilon - \alpha + \sqrt{(\epsilon + \alpha - 1)^2 - 4(\eta + \epsilon - \epsilon)}), \quad (43)$$

tehát eredményül azt kapjuk, hogy: $x_{1*} = 1 - y_{1*}$ és $y_{1*} = 1 - x_{1*}$.
Azt gondoljuk, hogy az egyensúlyok száma függ a

$$\eta + \alpha\epsilon - \epsilon \quad (44)$$

értékétől.

Ha

$$\eta + \epsilon > \epsilon \quad (45)$$

$$(\epsilon + \alpha - 1)^2 < 4(\eta + \alpha\epsilon - \epsilon) \quad (46)$$

akkor ebben az esetben a belső egyensúly nem létezik.

Ha $(\epsilon + \alpha - 1)^2 = 4(\eta + \alpha\epsilon - \epsilon)$ akkor az egyenletnek van egy többszörös gyöke, ez legyen $\bar{y} = \frac{1}{2}(1 - \epsilon - \alpha)$ és $\bar{x} = 1 - \bar{y}$. Ezért a rendszer, amiben a pillanatnyi belső egyensúly $\bar{S} = (\bar{x}, \bar{y})$ ami megvalósítható, ha $\epsilon + \alpha < 1$

Két különálló belső egyensúlyi pont esetén $S_{1*} = (x_{1*}, y_{1*})$ és $S_{2*} = (x_{2*}, y_{2*})$ létezik egymástól függetlenül, valahányszor $\epsilon + \alpha < 1$, $y_{2*} < 1$ és $(\epsilon + \alpha - 1)^2 > 4(\eta + \alpha\epsilon - \epsilon)$. Nem szabad elfelejteni, hogy a két belső egyensúlyi pont, $S_{1*} = (x_{1*}, y_{1*})$ és $S_{2*} = (x_{2*}, y_{2*})$, nem létezik ha $\epsilon + \alpha > 1$ és $0 < y_{1*} < \bar{y} < y_{2*}$.

5.1.4. Stabilitás és Hopf elágazás, belső egyensúly

5.2. Tétel. • Az $S_{1*} = (x_{1*}, y_{1*})$ egyensúlyi pont mindig nyeregpont.

- Az $S_{2*} = (x_{2*}, y_{2*})$ egyensúlyi pont stabil ha, $\rho < \frac{(1-y_{2*})(\epsilon+y_{2*})^2}{y_{2*}\eta}$.
- Rendszernek Hopf elágazás tekintetében vett bifurkációs paraméter körüli a egyensúlyi pontja $S_{2*} = (x_{2*}, y_{2*})$ ha $\rho = \frac{(1-y_{2*})(\epsilon+y_{2*})^2}{y_{2*}\eta}$.

Bizonyítás:

A Jacobi-mátrix értéke egy belső egyensúlyi pont képlet adja meg

$$J = \begin{pmatrix} -x & -x \\ \rho y & -\frac{\rho\eta y}{(\epsilon+y)^2} \end{pmatrix}. \quad (47)$$

A J mátrix értéke(determinánsa) az $S = (X, Y)$ pontban a következő:

$$\det J = \rho\bar{x}\bar{y}\left(1 - \frac{\eta}{(\epsilon + \bar{y})^2}\right). \quad (48)$$

Mostmár az egyensúlyi egyenletek a következők: $\bar{x} = \bar{y} - 1$, $\frac{\eta}{\epsilon + \bar{y}} = \bar{x} - \alpha$ és a kifejezés $\bar{y} = \frac{1}{2}(1 - \epsilon - \alpha)$ és azt láthatjuk, hogy $1 - \frac{\eta}{(\bar{y} + \epsilon)^2} = 0$.

- Mivel $0 < y_1 < \bar{y}$

$$\det J_{S_1} = \rho x_{1*} y_{1*} \left(1 - \frac{\eta}{(\epsilon + y_{1*})^2}\right) < \rho x_{1*} y_{1*} \left(1 - \frac{\eta}{(\epsilon + \bar{y})^2}\right) = 0. \quad (49)$$

Ebből kifolyólag a J mátrix sajátértékei $S_{1*} = (x_{1*}, y_{1*})$ -nél az eredeti részeket tartalmazza ellentétes előjellel. Így ez a pont mindig nyeregpont lesz.

- Hasonlóan a J mátrix determinánsa $S_{2*} = (x_{2*}, y_{2*})$ -nél

$$\det J_{S_2} = \rho x_{2*} y_{2*} \left(1 - \frac{\eta}{(\epsilon + y_{2*})^2}\right) > \rho x_{2*} y_{2*} \left(1 - \frac{\eta}{(\epsilon + \bar{y})^2}\right) = 0. \quad (50)$$

Mivel $0 < y_1 < \bar{y} < y_2$ Ezért $S_2 = (x_2; y_2)$ stabilitása J mátrix előjelétől függ az $S_2 = (x_2; y_2)$ pontban, melyet a következőképpen adhatunk meg:

$$\text{tr} J_{S_{2*}} = y_{2*} \left(1 + \frac{\rho \eta}{(\epsilon + y_{2*})^2}\right) - 1. \quad (51)$$

Ezért Routh-Hurwitz-kritérium szerint az eredmény a következő.

- Tudjuk, ha $\text{tr} J_{S_2} = 0$, mindkét sajátérték teljesen imaginárius tekintve, hogy $\det J_{S_2} > 0$. Így az implicitfüggvénytételből egy Hopf-bifurkáció jelenik meg a $S_2 = (x_2; y_2)$ pontnál, ahol periodikus keringési pálya keletkezik, ahogy a $S_2 = (x_2; y_2)$ egyensúlyi pont stabilitása megváltozik. A Hopf-bifurkáció paraméterének kritikus pontja $\rho^{[hf]} = \frac{(1-y_{2*})(\epsilon+y_{2*})^2}{y_{2*}\eta}$.

Továbbá a második rész alapján világos, hogy az adott feltételek mellett

$$(a) \quad \text{tr} J_{S_2} = 0, \quad (b) \quad \text{tr} J_{S_2} = 0, \quad (c) \quad \frac{d}{d\rho} \text{tr} J_{S_2} = \frac{\eta y_{2*}}{(\epsilon + y_{2*})^2} \neq 0. \quad (52)$$

Ez garantálja a Hopf-bifurkáció létezését $S_2(x_2; y_2)$ pontnál, azaz kis mértékű kilengést a periodikus megoldások kettéágazó $S_2(x_2; y_2)$ -ből a Hopf-bifurkáción keresztül.

5.1.5. A Hopf-bifurkáció határciklusának stabilitása

Ahhoz, hogy a határciklus stabilitásáról (irányáról) beszélhessünk, ki kell számolnunk a Lyapunov tényezőt a rendszer $S_2(x_2; y_2)$ pontjánál. Elsőként a rendszer $S_2(x_2; y_2)$ egyensúlyi pontját eltoljuk az origóhoz $x = \hat{x} - x_{2*}$ és $y = \hat{y} - y_{2*}$ transzformációkat használva. Ez után az egyensúlyi pont egyenlet felhasználásával a rendszer az origó környezetébe beírható így:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = a_{10}\hat{x} + a_{01}\hat{y} + a_{20}\hat{x}^2 + a_{11}\hat{x}\hat{y} + a_{02}\hat{y}^2 + a_{30}\hat{x}^3 + a_{21}\hat{x}^2\hat{y} + a_{12}\hat{x}\hat{y}^2 + a_{03}\hat{y}^3 + F_1(\hat{x}, \hat{y})$$

és

$$\frac{d\hat{y}}{dt} = b_{10}\hat{x} + b_{01}\hat{y} + b_{20}\hat{x}^2 + b_{11}\hat{x}\hat{y} + b_{02}\hat{y}^2 + b_{30}\hat{x}^3 + b_{21}\hat{x}^2\hat{y} + b_{12}\hat{x}\hat{y}^2 + b_{03}\hat{y}^3 + F_2(\hat{x}, \hat{y})$$

ahol,

$$a_{10} = -x_{2*}, \quad a_{01} = -x_{2*}, \quad a_{20} = -1, \quad a_{11} = -1, \quad a_{02} = 0, \quad a_{21} = 0,$$

$$a_{12} = 0, \quad a_{03} = 0, \quad b_{10} = \rho y_{2*}, \quad b_{01} = \frac{\eta \rho y_{2*}}{(\epsilon + y_{2*})^2}, \quad b_{20} = 0, \quad b_{11} = \rho,$$

$$b_{02} = \frac{\rho \eta}{(\epsilon + y_{2*})^2} - \frac{\rho \eta y_{2*}}{(\epsilon + y_{2*})^3}, \quad b_{21} = 0, \quad b_{12} = 0, \quad b_{03} = \frac{\rho \eta y_{2*}}{(\epsilon + y_{2*})^4} - \frac{\rho \eta}{(\epsilon + y_{2*})^3}$$

és az $F_k(\hat{u}, \hat{v})$ egy sorozat eleget téve az $i + j \geq 4$ feltételnek

$$F_1(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{i+j=4}^{\infty} a_{ij} \hat{x}^i \hat{y}^j \quad F_2(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{i+j=4}^{\infty} b_{ij} \hat{x}^i \hat{y}^j. \quad (53)$$

Ezáltal az első Lyapunov tényező síkbeli rendszerre nézve a következőképpen adható meg:

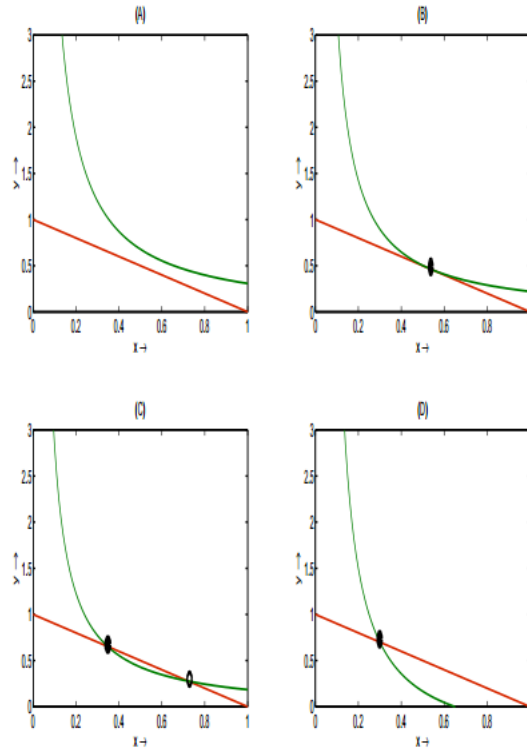
$$\begin{aligned} \sigma = & -\frac{3\pi}{2a_{01}\Delta^{1.5}} ([a_{10}b_{10}(a_{11}^2 + a_{11}b_{02} + a_{02}b_{11}) + a_{10}b_{01}(b_{11}^2 + a_{20}b_{11} + a_{11}b_{02}) \\ & + b_{10}^2(a_{11}a_{02} + 2a_{02}b_{02}) - 2a_{10}b_{10}(b_{02}^2 - a_{20}a_{02}) - 2a_{10}a_{01}(a_{20}^2 - b_{20}b_{02}) \\ & - a_{01}^2(2a_{20}b_{20} + b_{11}b_{20}) + (a_{01}b_{10} - 2a_{10}^2)(b_{11}b_{02} - a_{11}a_{20})] - (a_{10}^2 + a_{01}b_{10})[3(b_{10}b_{03} \\ & - a_{01}a_{30}) + 2a_{10}(a_{21} + b_{12}) + (b_{10}a_{12} - a_{01}b_{21})]) \end{aligned}$$

ahol $\Delta = \frac{\rho x_{2*} y_{2*}}{\epsilon + y_{2*}} \sqrt{(\epsilon + -1)^2 - 4(\eta + \epsilon - \epsilon)}$. Ha a Lyapunov szám kifejezése elég bonyolult, nem állapíthatjuk meg a σ előjelét, így a következő numerikus példával adhatjuk meg.

5.1.6. Numerikus példa

Az $\alpha = 0.02$, $\eta = 0.2$, $\epsilon = 0.05$ megkapjuk $\rho^{[hf]} = 1.15179$ t és a Lyapunov szám $\sigma = -0.52912\pi < 0$. Ezáltal, mikor ρ paraméterei átlélik a kritikus értéket $\rho^{[hf]} = 1.15179$ az egyik oldalról a másik oldalra, a rendszer átmehet egy szuperkritikus Hopf-bifurkáción. Ezér egy stabil határciklus keletkezik

a $S_{2*} = (x_{2*}, y_{2*}) = (0.27960, 0.72039)$ pont körül, míg $S_{1*} = (x_{1*}, y_{1*}) = (0.79039, 0.20960)$ a nyeregpont. Ugyanígy az $1 = \rho < \rho^{hf}$ -ra, a $S_{2*} = (x_{2*}, y_{2*})$ egyensúlyi pont stabil. A $\rho = 1.1655$ -nél a határciklus összeér a $E1$ nyerepponttal, ezzel egy fókusszerű/homoklinikus körpályát kapunk. Erre az értékre a Lyapunov szám $\sigma = -0.46241\pi$, még mindig negatív, ennél fogva a homoclinic körpálya megint stabil lesz. Ezeket az eredményeket láthatjuk a 2(A), (B) és (C) ábrákon. Biológiai szempontból nézve ez a példa a modell alapján, még ha pozitív egyensúlyi pont van, a ragadozó faj akkor is kihalhat nagy mértékű kezdetértékek esetében. Azaz a ragadozó állat egyedszámát mutató grafikon érinti a vízszintes tengelyt.



10. ábra. A numerikus példa ábrája

A piros vonal jelöli a zsákmányállat nullklínáját és a zöld görbe jelöli a ragadozó állat nullklínáját. Az A és C diagramm azt mutatja, hogy miként változik a belső egyensúlyi pontok száma a többi rögzített paraméter függvényében. Ha

$\alpha = 0.02$ $\epsilon = 0.05$ és (A) $\eta = 0.35$ akkor nem áll fenn a belső egyensúly. A (B) ábrán $\eta = \eta^{[sn]} = 0.265225$, akkor a két egyensúlyi pont egymáshoz végtelenül közel kerül, (C) esetében $\eta = 0.23$ akkor két belső egyensúlyi pont van, (D) ha úgy döntünk $\alpha = 0.05$, $\epsilon = 0.3$ és $\eta = 0.5$ akkor ott egy darab belső egyensúlyi pont lesz.

6. Összefoglalás

Szakedolgozatomban a különféle populációdinamikai modelleket elemeztem. Ehhez először bevezettem a szükséges alapfogalmakat, majd ezeket definiáltam is. Ezekután a legegyszerűbb modelleket mutattam be, ezek az egyszereplős modellek voltak. Két ilyen volt, a korlátlan és a korlátozott egyszereplős növekedési modell. Ezek a legegyszerűbb modellek voltak, egyetlen hátrányuk, hogy biológiailag nem fenntarthatóak. Ez után az iránymezők segítségével elemeztem a modellek viselkedését a térben.

A következő fejezetben egy egyszerűbb Lotka-Volterra modellt mutattam be, ahol két faj, egy ragadozó és egy prédaállat verseng egymással. Itt már összehasonlítottam különféle szaporodási és versenyképességi hatásokat hasonlítottam össze. Ezeknek olyan állandókat választottam, ahol a két faj egyensúlyban volt. Végül ennek a modellnek egy módosított változatát mutattam be, ahol a biológiai fenntarthatás érdekében a ragadozók egyedszámát csökkentik.

Ehhez egy numerikus példát is bemutatam, ami megmutatta hogy milyen mértékű egyedszámcsökkentés mellett lesz ez a folyamat fenntartható. Az ehhez tartozó egyensúlyi pontok iránymezőjét is kirajoltam. Megállapítható ezáltal, hogy ez a modell lett a leginkább valóság-hű.

Hivatkozások

- [1] Csépany Viktória: *Lokális bifurkációk*, Szakdolgozat, 2010.
- [2] Faragó István, Horváth Róbert: *Numerikus Módszerek*, Typotex, 2013.
- [3] J.D. Murray: *Mathematical Biology: I. An Introduction, Third Edition*, Springer.
- [4] Nádori Gergely: <http://hirmagazin.sulinet.hu/hu/pedagogia/a-lotka-volterra-egyenletek>, Sulinet, 2007.
- [5] R. P. Gupta, Peeyush Chandra and Malay Banerjee: *Dynamical complexity of a prey-predator model with nonlinear predator harvesting*, Prentice-Hall, 2015.
- [6] Simon L. Péter: *Differenciálegyenletek és dinamikai rendszerek*, ELTE kézirat, 2012.
- [7] Simon L. Péter: *Közönséges differenciálegyenletek*, ELTE kézirat, 2007.
- [8] Székely Ferenc: *Populációdinamikai modellek szemléltetése Matlabbal*, Szakdolgozat, 2011.
- [9] Wikipédia: <http://hu.wikipedia.org/wiki/Kommenzalizmus>.
- [10] Wikipédia: <http://hu.wikipedia.org/wiki/Szimbiózis>.

Nyilatkozat

Név: Kaszás Gábor

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

Neptun azonosító: AW68SK

Szakdolgozat cím: Populációdinamikai modellek

A szakdolgozat szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2015. május 25.

a hallgató aláírása