

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Fuzzy optimalizálás

BSc Szakdolgozat

Készítette: Rajzinger Zsanett
Matematika BSc
Matematikai elemző szakirány

Témavezető: Fullér Róbert
Óbudai Egyetem

Belső konzulens: Villányi Viktória
Operációkutatási Tanszék



Budapest, 2015

1 Bevezetés

Szakedolgozatom témája a fuzzy optimalizálás. Mit is jelent ez pontosan?

Tulajdonképpen nem más, mint azon optimalizálási feladatok illetve problémák összessége, melyek fuzzy mennyiségeket tartalmaznak a valós számok helyett.

Ahhoz, hogy a továbbiakban részletezni tudjam e témakört, előtte be kell vezetnem néhány alapfogalmat, meg kell ismertetnem részletesebben a fuzzy témakört. Ilyenek például a fuzzy halmazok és halmazműveletek, illetve a fuzzy logika. A következő néhány fejezet ezt a célt szolgálja. Említést teszek még a fuzzy történelmi háttéréről, valamint azon igényekről és motivációkról, amelyek elősegítették kialakulását.

2 Bevezetés a fuzzy környezetbe

2.1 Bevezetés

Napjainkban egyre gyakrabban találkozunk olyan esetekkel, amikor az általunk használt fogalmak, tárgyak vagy akár értékek nem adhatóak meg egzakt matematikai módszer segítségével, mivel nem tudjuk őket egyértelműen bekegorizálni. A problémát az okozza, hogy az általunk ismert és használt matematika pontos, precíz fogalmakat használ, azonban a mindennapos életben használt fogalmaink java része pontatlan. Ebből kifolyólag nem tudunk egy adott általunk ismert fogalomhoz vagy jelenséghez pontos definíciót meghatározni. Tehát az általunk ismert és használt matematika nem képes, mondhatni alkalmatlan a pontatlan meghatározások kezelésére. Mindez egy példán szemléltetve: Vegyünk egy tavat. Tudjuk, hogy a tó vízcseppek sokasága. Ha kivesszünk egy vízcseppet a tóból, még mindig tó lesz a megmaradt vízcseppek sokaságának a definíciója, hiszen nem vehető észre csupán egyetlen vízcsepp hiánya. Jó néhányszor megismételhetjük ezt a műveletet, az eredmény mindvégig változatlan marad. Ha matematikai szemszögből nézzük ezt a kísérletet, akkor a következő egyenletet írhatjuk fel rá:

$$\text{tó} - 1 * \text{vízcsepp} = \text{tó}$$

Azonban beláthatjuk, hogy ez nem igaz, hiszen egy tóban a vízcseppek száma nem végtelen, tehát egy bizonyos idő után elfogyna a víz, és ekkor már nem hívhatnánk tónak. Ha a $\text{vízcsepp} = 0$ egyenlőség fennáll, akkor az egyenlet igaz, azonban egy vízcsepp soha nem egyenértékű a nullával, bármennyire kicsi is legyen az. A problémát az okozza, hogy a tó fogalmát nem definiáltuk elég precízen. Például egy pocsolya is vízcseppek sokasága, mégsem hívjuk tónak. A tó, mint definíció függ az elhelyezkedéstől és függ a vízcseppek számától is,

hiszen egy tóban sok víz van. Az ilyen, és ehhez hasonló jelenségekből fakadóan gyakran találkozhatunk olyan állításokkal, amelyek részben igazak, részben pedig hamisak. Az ezeket megengedő logikát nevezzük fuzzy logikának. Már az ókorban is tudatosult a matematikával foglalkozók egy szűk körében, hogy nem minden esetben lehet eldönteni egy állításról, hogy igaz vagy hamis, tehát nem elég a vizsgálathoz a kétértékű logika. Megalkották a háromértékű logikát, ahol a hamis a 0, az igaz az 1 és a nem eldönthető az $1/2$ értéket kapta. Ezt követte az n-értékű logika, ahol is az egyik legjelentősebb eredmény egy lengyel matematikus, ŁUKASIEWICZ nevéhez fűződik. Nem csak a matematikusok körében fedezhető fel a kétértékű logikától való eltérés, hanem felfedezhető például az ősi kínai yin-yang szimbólumon is. A fuzzy logika a nyolcvanas évek második felétől kezdett elterjedni, manapság akár egy számunkra egyszerű és mindennapos készülékben is lehet általa irányított vezérlés. Például vérnyomásmérő, fényképezőgép, mosógép, porszívó, távvezérelhető kisautó, és még sorolhatnánk.

2.2 Igények és motiváció

Már régóta megfigyelhető az az igény, hogy az olyan komplex funkciókat, melyek megvalósítására az emberek maguk is képesek, azokat automatikussá tegyünk. Az első említésre méltó lépés Neumann János nevéhez fűződik. Ő volt a modern számítógép megteremtője. Ez volt az egyik legjelentősebb motiváció a Mesterséges Intelligencia felé. Emellett említésre méltó még a biológia, orvostudomány, vagy akár a szociológia is, hiszen ezeknél a tudományágaknál is elmondható, hogy a kutatás tárgyai sok esetben rosszul modellezhető jelenségek. A legerősebb motiváció azonban továbbra is a műszaki területek problémáira vezethető vissza. Vegyük például a közlekedést, azon belül is a vezetésként. Ha egy valóságos közlekedési feladatot szeretnénk leprogramozni,

akkor felismerhetjük, hogy ez a probléma matematikai értelemben kezelhetetlen. A gyakorlatban mégis hogyan képes jól működni? Ez tulajdonképpen nem más, mint egy optimalizálási feladat, amit a sofőr kellőképpen leegyszerűsít. Nem a legmegfelelőbb megoldásokat keresi, hanem a közel optimálisakat, ezáltal ez a komplex feladat kezelhető lesz. Ezt a fajta részleges igazságot engedi meg a fuzzy logika.

2.3 Fuzzy logika

A fuzzy logika egy numerikus bizonytalanság kezelési módszer, mely arra szolgál, hogy a bizonytalan információkat, avagy az esetleges pontatlanságokat is tudjuk kezelni az általunk ismert matematikai eszközökkel. Általános példa erre a kor szerinti kategorizálás. Ki tekinthető fiatalnak, középkorúnak, avagy idősnek? Mindenkinél ugyanaz-e a határ? A kérdésre adott válaszuk nyilván nemleges. Húzhatunk egy határvonalat, és mondhatjuk, hogy az 50 év felettieket tekintsük idősnek, azonban az emberek gondolkodásában nincsenek ilyen, vagy ehhez hasonló határok.

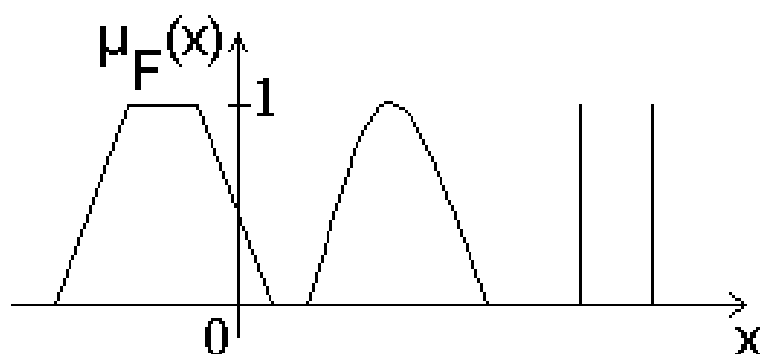
Ebből kifolyólag a határvonal választás egyértelmű lesz, hiszen ezt valamikor „megtanultuk”, de a döntés helyessége már kétséges kimenetelű, mivel valójában mindannyian máshogy vélekedünk. Hasonló problémába ütközik például a filmek korhatárainak besorolása, az egyetemeken a zárthelyi dolgozatok, illetve a vizsgajegyek megállapítása és számos egyéb hétköznapi dolog is. Ezen helyzetek kezelhetőségére szolgál a fuzzy logika. Maga a fuzzy jelentése homályos, életlen. A fuzzy logika alapjait 1965-ben Lotfi A. Zadeh teremtette meg, hogy az olyan rendszerekhez is képesek legyünk matematikai modellt készíteni, ahol az optimális megoldás megtalálása és/vagy maga a modellalkotás túl sok időt vesz igénybe, ezáltal képtelenek vagyunk megvalósítani azt. Ennek kapcsán vezessünk be néhány alapfogalmat.

Univerzum: az adott megfigyelés értelmezési tartománya
(például kornál 0 -120 év)

Nyelvi értékek: az általunk választott kategóriák, melyekhez hozzárendeljük az univerzum értékeit
(például fiatal, középkorú, idős)

Nyelvi változó: olyan fogalom, melynek segítségével hivatkozni tudunk az univerzum nyelvi értékeire
(például a korosztály)

Tagsági függvény: más néven karakterisztikus függvény („membership function”); megadja, hogy az adott elem mennyire tagja a halmaznak; a leképezés értéke 0 és 1 között van



$$\mu_F(x) : X \rightarrow [0,1]$$

2.4 Fuzzy halmazok

Kezdjük a megszokott számhalmazokkal. Egy úgynevezett „éles halmaznál” két lehetséges érték van:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ eleme a halmaznak,} \\ 0, & \text{ha } x \text{ nem eleme a halmaznak.} \end{cases}$$

A fuzzy halmaz a fent leírt halmaz alábbi általánosítása, ahol is az

$$F = \{ (x, \mu_F(x)) : x \in X \}$$

halmaz fuzzy halmaz X fölött, és az egyes x elemek egy $[0,1]$ intervallumbeli valós számmal leírható kapcsolatban állnak az X halmazzal.

Ha X véges, diszkrét halmaz, akkor az alábbi képlet használható annak leírására, hogy az adott tagsági függvény értékek – azaz a $\mu(x_i)$ értékek – milyen mértékben tartoznak az adott A fuzzy halmazhoz:

$$A = \mu(x_1)/x_1 + \mu(x_2)/x_2 + \mu(x_3)/x_3 + \dots + \mu(x_n)/x_n$$

Tömörebb alakban:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\mu(x_i)}{x_i}$$

Ez hasznos lehet például az életkor vizsgálatoknál. Azonban tudnunk kell, hogy a tagsági függvény értékek bármilyen értéket képviselhetnek, mondhatni tetszőleges az értelmük. Emellett fontos leszögeznünk azt is, hogy a fuzzy

logikában a tagsági függvény – azaz a $\mu(x_i)$ - értékeinek összege nem additív, a tagsági függvény nem valószínűségi mértéket jelöl, hanem a halmaz elemeire megfogalmazott állítás igazságtartalmának nagyságát adja meg. Vegyünk egy diszkrét alaphalmazt. Legyen ez az életkor. Adjuk meg a középkorúak fuzzy halmazát, amely értelmezve van ezen az életkor halmazon. Tegyük fel, hogy azt tanultuk, hogy 30 évesen számít valaki középkorúnak. Ez alapján bekegategorizáljuk, hogy 30 év fölött és alatt mekkora mértékben számít valaki középkorúnak.

10 évesen 0,2

20 évesen 0,6

30 évesen 1

40 évesen 0,8

50 évesen 0,5

60 évesen 0,3

10 év alatt, valamint 60 év fölött pedig egyaránt 0

Ekkor a középkorúak K fuzzy halmaza a következő:

$$K = 0,2/10 + 0,6/20 + 1/30 + 0,8/40 + 0,5/50 + 0,3/60$$

Vezessük be a normális fuzzy halmaz definícióját:

Legyen F fuzzy halmaz értelmezve X-en. Ha létezik $H(F) = \max(\mu_F(x))$, ahol $x \in X$ és $H(F) = 1$, akkor F normált, avagy normalizált fuzzy halmaz, egyéb esetben szubnormális.

Ez a $H(F)$ a halmaz magassága, azaz a legnagyobb tagsági függvény érték.

Ismerjünk meg néhány további definíciót:

- **Support**, vagy más néven hordozó:

Egy fuzzy halmaz azon halmaza, mely minden olyan elemet magában foglal az alaphalmazból, amelyeknek a tagsági függvény értéke nagyobb, mint nulla.

$$S(F) = \{x \in X \mid \mu_F(x) > 0\}$$

- **Tolerancy**, vagy más néven mag, illetve kernel:

Egy fuzzy halmaz azon részhalmaza, mely minden olyan elemet magában foglal az alaphalmazból, amelyek tagsági függvény értéke pontosan 1.

$$T(F) = \{x \in X \mid \mu_F(x) = 1\}$$

A support és a kernel is fuzzy halmazok.

A klasszikus halmazelméletben $S(F) = T(F)$.

- **Szinthalmaz**: Az F fuzzy halmaz esetén az a halmaz, mely tartalmazza az F halmaz minden elme tagsági függvény értékét, értékenként egyszer:

$$\Lambda_F = \{ \alpha \mid \mu_F(x) = \alpha \}, \text{ valamely } x \in X \text{-re}$$

- **Skaláris számosság**: Az F fuzzy halmazt alkotó elemek tagsági függvény értékeinek összege:

$$|F| = \sum \mu_F(x), \text{ ahol } x \in X$$

- **α -vágat:** a kernel részhalmaza, mely tartalmaz minden olyan elemet a halmazból, melyek tagsági függvény értéke nagyobb vagy egyenlő α -val:

$$F_\alpha = \{ x \in X \mid \mu_F(x) \geq \alpha \}$$

Az α -vágatot erősnek hívjuk, ha szigorúan nagyobb a $\mu_F(x)$ az α -nál.

- **Fuzzy számosság:** Hasonlóan értelmezzük, mint a skalár számosságot, a különbség az, hogy fuzzy számot ad eredményül. Tagsági függvénye:

$$\mu_{|F_\alpha|}(|F_\alpha|) = \alpha$$

valamennyi α -ra, mely megtalálható F szinthalmazában, ahol $|F_\alpha|$ az F halmaz α -vágatának számossága.

- **Részhalmaz:** A és B fuzzy halmazok. Az A részhalmaza a B -nek, ha a két halmaz egymásnak megfelelő elemei tagsági függvényeit vizsgálva az A halmazhoz tartozó értékek nem nagyobbak a B -hez tartozó értékeknél:

$$A \subseteq B : \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \text{ valamely } x \in X \text{ esetén}$$

- **Valódi részhalmaz:** A fuzzy halmaz valódi részhalmaza a B fuzzy halmaznak, ha a két halmaz nem egyenlő, és A részhalmaza B -nek:

$$A \subset B : A \subseteq B \text{ és } A \neq B$$

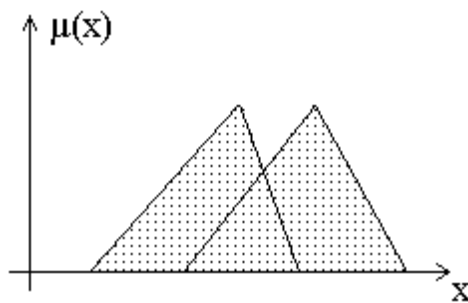
- **Fuzzy halmazok egyenlősége:** az A és B fuzzy halmazok egyenlők, ha az A halmaz tagsági függvény értékei egyenlők a nekik megfelelő B halmazbeli elemek tagsági függvény értékeivel:

$$A = B : \mu_A(x) = \mu_B(x) \text{ valamely } x \in X \text{ esetén}$$

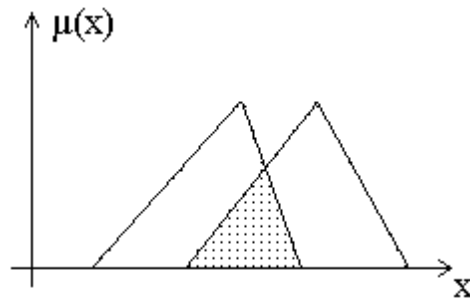
2.5 Műveletek fuzzy halmazokon

Ahogy a megszokott számhalmazoknál, úgy a fuzzy halmazokon is értelmezhetőek a halmazműveletek:

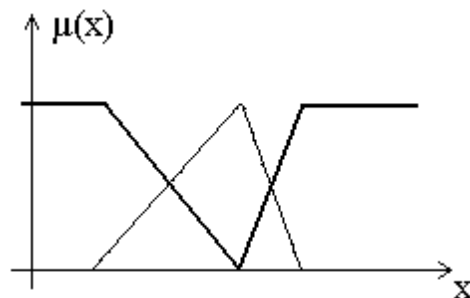
Unió: $\mu_{A \cup B}(x) = \text{MAX}(\mu_A(x), \mu_B(x))$



Metszet: $\mu_{A \cap B}(x) = \text{MIN}(\mu_A(x), \mu_B(x))$



Komplementer: $\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$



Megjegyzés: Az unió megegyezik a VAGY, a metszet az ÉS, a komplementer pedig a NEGÁCIÓ operátorokkal.

A halmazműveletek után foglalkozzunk kicsit a relációkkal. Amíg csak az „éles halmazokat” vesszük figyelembe, addig a reláció tulajdonképpen semmi másról nem ad számunkra információt, mint magáról az elemek közti kapcsolatról. A fuzzy reláció azonban az összerendeltség mértékét mutatja meg, még hozzá a halmazok elemeinek összerendeltségét.

Vegyünk egy-egy példát a hagyományos, és a fuzzy halmazelméletből, és vizsgáljuk meg őket:

R: $x < y$ reláció hagyományos esetben:

(Emlékeztető: $R : X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots \times X_n \rightarrow \{0,1\}$)

R	0	1	2	3
0	0	1	1	1
1	0	0	1	1
2	0	0	0	1
3	0	0	0	0

R: $x \approx y$ (közelítőleg egyenlő) relációra egy lehetséges példa:

(Emlékeztető: $R : X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots \times X_n \rightarrow \{0,1\}$)

	0	1	2	3
0	1	0,7	0,4	0,1
1	0,7	1	0,7	0,4
2	0,4	0,7	1	0,7
3	0,1	0,4	0,7	1

3 Optimalizálás

Az operációkutatás tudomány foglalkozik ezzel a témával. A döntés előkészítésének az eszköze. Az optimális döntések előkészítéséhez matematikai modelleket alkalmaz. A matematikai programozás az egyik legfontosabb része. De mi is az az optimalizálás? Tulajdonképpen egy valamilyen szempontból optimális döntéshozatal. Az optimális döntés pedig annak az elemnek a kiválasztása, amelyik bizonyos szempontból – ez előre definiált - a leginkább segít elérni a célunkat, legyen az a legnagyobb nyereség, a legkisebb időráfordítás, vagy épp a lehető legjobb termékportfólió, de még sorolhatnánk. Ezt az optimális „elemet” adott alternatívák halmazából tudjuk kiválasztani. Egyszerű esetben egy valós függvény minimum vagy maximum értékének meghatározása.

A dolgozat következő részében a lineáris programozási problémákkal fogok foglalkozni. Egy matematikai programozási feladat lineáris, ha a halmazt meghatározó mellékfeltételek elsőfokú egyenletek illetve egyenlőtlenségek, a célfüggvény lineáris, a változók pedig valós számok.

Nézzünk egy példát optimalizálós feladatra: Vegyünk két különböző zöldséget: $\{X_1, X_2\}$. Mindkét zöldségnek van valamekkora A és C-vitamin tartalma, adott a bennük lévő növényi rost mennyiség, valamint a költségük is. Ezen felül tudjuk a minimum szükségletet mind a vitaminokból, mind a növényi rostból. Nézzük meg ezt idáig táblázatos formában:

	X_1	X_2	Szükséglet
A	30	1	0,5
C	50	300	15
Rost	25	20	4
Költség	0,75	0,5	

A cél a költségek minimalizálása lenne. Legyen C a célfüggvényünk, ekkor:

$$C = C(X_1; X_2) = 0,75 \cdot X_1 + 0,5 \cdot X_2$$

Mivel a költségeket minimalizálni szeretnénk, ezért C -nek a lehető legkisebbnek kell lennie. A feladat megoldásának következő lépéseként felírjuk az ismert mellékfeltételeket (szükséges vitamin és rost mennyiség) egyenletek valamint egyenlőtlenségek formájában.

$$30 \cdot X_1 + 1 \cdot X_2 \geq 0,5$$

$$50 \cdot X_1 + 300 \cdot X_2 \geq 15$$

$$25 \cdot X_1 + 20 \cdot X_2 \geq 4$$

E három egyenlőtlenség az összes mellékfeltételünk. Tudjuk, hogy $X_1, X_2 \geq 0$, azaz nemnegatívak. Ez a feladat akár grafikusán is megoldható, hiszen csak 2 ismeretlen mennyiségünk van: X_1 és X_2 . Egy derékszögű koordinátarendszer pontjainak tekintjük őket, és azt az M tartományt szeretnénk megtalálni, amely eleget tesz a mellékfeltételeknek és a nemnegativitás feltételének is. Ezt a tartományt nevezzük megengedő tartománynak, hiszen csak azok az $(x; y)$ pontok jöhetnek számításba a megoldásnál, melyek ezen a tartomány belül, vagy épp a határán helyezkednek el. Az M tartományt úgy tudjuk meghatározni, hogy minden mellékfeltételt egyenletként kezelve felrajzoljuk 2 pontjukat, melyeket összekötünk. Ezután felrajzoljuk a $C = 0,75 \cdot x + 0,5 \cdot y = k$ egyenest, ahol k egy tetszőleges konstans. Végül meghatározzuk a k minimális értékét úgy, hogy önmagával párhuzamosan eltoljuk, míg eléri az M tartományt. Rengeteg problémát lehet modellezni ezzel a módszerrel. Nézzük meg a módszert általánosítva:

$$1. \underline{x} \geq \underline{0}$$

$$2. A\underline{x} \leq \underline{b}$$

$$3. z = \underline{c}^T \underline{x} \rightarrow \max \text{ vagy } \min$$

A feladat normálalakba írható: $c = (c_1, c_2, c_3, \dots, c_n)$ sorvektor a célfüggvény értékeiből áll, az A mátrix a mellékfeltételekre vonatkozó információkat tartalmazza, a b egy oszlopvektor. Mi pedig az x oszlopvektort keressük az alábbi feltételekkel:

$$\begin{aligned}C &= C(x_1, x_2, \dots, x_n) = kx \rightarrow \text{minimum} \\Ax &\leq b \\x &\geq 0.\end{aligned}$$

Az előző példában:

$$\begin{aligned}c &= (0,75, 0,5) \\A &= ([-30, -1]; [-50, -300]; [-25, -20]) \\b &= ([-0,5]; [-15]; [-4]) \\x &= ([x_1]; [x_2])\end{aligned}$$

Egy lineáris modell normál feladat, ha a kapacitások nemnegatívak, azaz $b_i \geq 0$, a célfüggvény maximalizálása a cél, valamint csak \leq relációk szerepelnek a mellékfeltételekben.

4 Fuzzy optimalizálás

Mi is az a fuzzy optimalizálás? Tulajdonképpen nem más, mint azon optimalizálási problémák összessége, melyek fuzzy mennyiségeket tartalmaznak. Belátható, hogy egy lineáris programozási feladat esetén, amely általában nemkorrekt felállítású, korrekt felállításúvá válik, ha a valós együtthatókat kicseréljük szimmetrikus háromszög alakú fuzzy számokra. Ilyenre példa az $Ax = b$ egyenletrendszer fuzzy kiterjesztése, amely az eredeti feladat egy regularizációja.

A valós világ problémáinak matematikai modellezése során gyakran kell megoldást találnunk az alábbi módon felírható lineáris egyenletrendszerre:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, i = 1, \dots, m$$

Tömörebb alakban:

$$Ax = b,$$

ahol a_{ij} , b_i és x_j valós számok. Belátható, hogy olyan esetekben, amikor nincs konkrét megoldás csak közelítő eredmény, vagy csak nem leírható a probléma matematikai modellel, ott ez a rendszer nem használható. Méghozzá azon egyszerű okból kifolyólag, hogy ha a paraméterek egy kis bizonytalanság/zaj értékkel rendelkeznek, az hatalmas eltéréseket eredményezhet a kimeneten.

A valószínűségi lineáris egyenletrendszer a következő:

$$\tilde{a}_{i1}x_1 + \dots + \tilde{a}_{in}x_n = \tilde{b}_i, i = 1, \dots, m$$

Tömörebb alakban:

$$\tilde{A}x = \tilde{b},$$

ahol \tilde{a}_{ij} és \tilde{b}_i fuzzy mennyiségek, $x \in \mathbb{R}^n$. A fuzzy mennyiségek magukban hordozzák a bizonytalanság mértékét. Zadeh definiálta az összeadás és szorzás

műveleteket, hasonlóan, mint a valós számoknál. Az \tilde{a} egyenlő \tilde{b} , azaz $\tilde{a} = \tilde{b}$ igazságértékének meghatározására az alábbi jelölés szolgál:

$$\text{Pos}(\tilde{a} = \tilde{b}),$$

amit az alábbi módon definiálunk:

$$\text{Pos}(\tilde{a} = \tilde{b}) = \sup_t \{\tilde{a}(t) \wedge \tilde{b}(t)\} = (\tilde{a} - \tilde{b})(0).$$

A valószínűségi lineáris egyenletrendszer i -edik egyenletének kielégítési mértékét $\mu_i(x)$ -vel jelöljük:

$$\mu_i(x) = \text{Pos}(\tilde{a}_{i1}x_1 + \tilde{a}_{i2}x_2 + \dots + \tilde{a}_{in}x_n = \tilde{b}_i)$$

Azaz a $\mu_i(x)$ egy tartalmazási függvény, amely megadja, hogy az adott alternatíva mennyire jó az adott cél szempontjából.

A μ_i -ket a következőképpen lehet összevonni:

$$\mu(x) = \min\{\mu_1(x), \dots, \mu_m(x)\}.$$

A valószínűségi lineáris egyenletrendszer megbízhatósága illetve pontossága mérésére a következő képletet alkalmazzuk:

$$\mu^* = \sup\{\mu(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

Legyen X^* olyan pontok halmaza, ahol $x \in \mathbb{R}^n$, és $\mu(x)$ eléri a maximális pontját, ha létezik ilyen. Ekkor:

$$X^* = \{x^* \in \mathbb{R}^n \mid \mu(x^*) = \mu^*\}$$

Ha X^* nem nulla, és $x^* \in X^*$, akkor az x^* -ot hívjuk a valószínűségi lineáris egyenletrendszer maximális (avagy a legjobb) megoldásának.

Ha \tilde{a} és \tilde{b} fuzzy számok, ahol $[a]^\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ és $[b]^\alpha = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$, akkor az ő Hausdorff távolságukat a következőképpen definiáljuk:

$$D(\tilde{a}, \tilde{b}) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \max\{|a_1(\alpha) - b_1(\alpha)|, |a_2(\alpha) - b_2(\alpha)|\}.$$

Legyen $L > 0$ valós szám. Jelölje $F(L)$ azon $\tilde{a} \in F$ fuzzy számok gyűjteményét, ahol a tagsági függvény kiegyenlíti a Lipschitz feltételt L konstanssal:

$$|\tilde{a}(t) - \tilde{a}(t')| \leq L|t - t'|, \text{ minden } t, t' \in F \text{ esetén.}$$

Nagyon sok esetben a fuzzy paraméterek (\tilde{a}_{ij} és \tilde{b}_i) nem ismertek pontosan.

Ezért a közelítő értékekkel kell dolgoznunk ($\tilde{a}^{\delta_{ij}}$, \tilde{b}^{δ_i}):

$$\max_{i,j} D(\tilde{a}_{ij}, \tilde{a}^{\delta_{ij}}) \leq \delta,$$

$$\max_i D(\tilde{b}_i, \tilde{b}^{\delta_i}) \leq \delta,$$

ahol $\delta \geq 0$ egy valós szám. Ezután megadjuk az egyenletrendszert pontatlan/zajos fuzzy paraméterekkel:

$$\tilde{a}^{\delta_{i1}}x_1 + \dots + \tilde{a}^{\delta_{in}}x_n = \tilde{b}^{\delta_i}, i = 1, \dots, m$$

Tömörebb alakban:

$$\tilde{A}^{\delta}x = \tilde{b}^{\delta}.$$

Hasonló módszerrel definiáljuk a megoldást is:

$$\mu^{\delta}(x) = \min\{\mu^{\delta_1}(x), \dots, \mu^{\delta_m}(x)\},$$

és a konzisztencia mérésére az alábbi pontatlan/zajos rendszert használjuk:

$$\mu^*(\delta) = \sup\{\mu^{\delta}(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\},$$

$$\text{ahol a } \mu^{\delta_i}(x) = \text{Pos}(\tilde{a}^{\delta_{i1}}x_1 + \tilde{a}^{\delta_{i2}}x_2 + \dots + \tilde{a}^{\delta_{in}}x_n = \tilde{b}^{\delta_i})$$

jelöli az egyenletrendszer i -edik egyenletének kielégítési mértékét, ha $x \in \mathbb{R}^n$.

Legyen $X^*(\delta)$ a maximális megoldása a pontatlan/zajos egyenletrendszernek.

Kovács megmutatta, hogy a szimmetrikus háromszög fuzzy számok stabilak, a fuzzy paraméter középpontjának kis változásait figyelembe véve is.

A következő teóriával előállítunk egy stabilitási tulajdonságot a fuzzy paraméterek közelítő értékeivel:

Legyen $L > 0$ és $\tilde{a}_{ij}, \tilde{a}^{\delta}_{ij}, \tilde{b}_i, \tilde{b}^{\delta}_i \in F(L)$.

$$\text{Ha } \max_{i,j} D(\tilde{a}_{ij}, \tilde{a}^{\delta}_{ij}) \leq \delta$$

$$\max_i D(\tilde{b}_i, \tilde{b}^{\delta}_i) \leq \delta,$$

ahol $\delta \geq 0$ igaz,

$$\text{akkor } \|\mu - \mu^{\delta}\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\mu(x) - \mu^{\delta}(x)| \leq L\delta$$

ahol $\mu(x)$ és $\mu^{\delta}(x)$ egyaránt (fuzzy) megoldásai a valószínűségi lineáris és a perturbált fuzzy paraméteres rendszereknek.

A teóriából következik, hogy $|\mu^* - \mu^*(\delta)| \leq L\delta$, ahol $\mu^*, \mu^*(\delta)$ a konzisztencia mérőszámai.

Mikor a probléma az, hogy meg kell találni a maximális megoldását egy valószínűségi lineáris egyenletrendszernek, akkor Negoita szerint a következő optimalizálási problémát kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} & \text{maximize } \lambda \\ & \mu_1(x_1, \dots, x_n) \geq \lambda \\ & \quad \vdots \\ & \mu_m(x_1, \dots, x_n) \geq \lambda \\ & x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq \lambda \leq 1 \end{aligned}$$

Ennek a problémának a megoldása általában megköveteli a nemlineáris programozási technikák használatát. Mindenesetre, ha a fuzzy számok trapéz formájúak, akkor ez a probléma egy négyzetesen korlátozott programozási feladattá változik.

Nézzük a valószínűségi lineáris egyenletrendszert szimmetrikus háromszög alakú fuzzy számokkal:

$$(a_{i1}, \alpha)x_1 + \dots + (a_{in}, \alpha)x_n = (b_i, \alpha), i = 1, \dots, m$$

rövidebben:

$$(A, \alpha)x = (b, \alpha)$$

Ennek a fuzzy megoldása felírható a következő kompakt formában:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } Ax = b \\ 1 - \frac{\|Ax - b\|_\infty}{\alpha|x|_1 + 1}, & \text{ha } 0 < \|Ax - b\|_\infty \leq \alpha|x|_1 + 1 \\ 0, & \text{ha } \|Ax - b\|_\infty > \alpha|x|_1 + 1 \end{cases}$$

$$\text{ahol } \|Ax - b\|_\infty = \max\{|\langle a_1, x \rangle - b_1|, \dots, |\langle a_m, x \rangle - b_m|\}.$$

Ha $[\mu]^1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mu(x) = 1\}$ nem null, akkor a maximális megoldások halmaza, $X^* = [\mu]^1$, és az $(A, \alpha)x = (b, \alpha)$ egyenlet megoldási halmaza egybeesik. Jelöljük X^{**} -al, ez lesz az éles rendszer $Ax = b$ megoldása.

Teória: ha

$$D(\tilde{A}, \tilde{A}^\delta) = \max_{i,j} |a_{ij} - a_{ij}^\delta| \leq \delta,$$

$$D(\tilde{b}, \tilde{b}^\delta) = \max_i |b_i - b_i^\delta| \leq \delta,$$

$$\text{akkor } \|\mu - \mu^\delta\| = \sup_x |\mu(x) - \mu^\delta(x)| \leq \delta/\alpha,$$

ahol $\mu(x)$ és $\mu^\delta(x)$ a fuzzy megoldásai az

$$(A, \alpha)x = (b, \alpha),$$

$$(A^\delta, \alpha)x = (b^\delta, \alpha)$$

egyenleteknek.

Például vegyük a következő kétdimenziós valószínűségi egyenletrendszert:

$$(1, \alpha)x_1 + (1, \alpha)x_2 = (0, \alpha)$$

$$(1, \alpha)x_1 - (1, \alpha)x_2 = (0, \alpha)$$

A fenti egyenletrendszer fuzzy megoldása a következő:

$\mu(x)$ a következő értékeket veheti fel:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 0 \\ \tau_2(x), & \text{ha } 0 < \max\{|x_1 - x_2|, |x_1 + x_2|\} \leq \alpha(|x_1| + |x_2|) + 1 \\ 0, & \text{ha } \max\{|x_1 - x_2|, |x_1 + x_2|\} > \alpha(|x_1| + |x_2|) + 1, \end{cases}$$

$$\text{ahol } \tau_2(x) = 1 - \max\{|x_1 - x_2|, |x_1 + x_2|\} / \alpha(|x_1| + |x_2|) + 1$$

és az egyetlen maximális megoldása az egyenletrendszernek az $x^* = (0, 0)$.

Nincs stabilitási probléma a megoldással, még az éles rendszernél sem,

mert $\det(A) \neq 0$.

5 Döntési szituációk fuzzy környezetben

A gyakorlatban legtöbbször több kritérium alapján kell dönteni. Általában kompromisszumos megoldás szükséges, mivel nem tudunk minden egyes kritérium szerinti optimális megoldást találni. Az ilyen többkritériumos döntéshozatalnál több függvény alapján kell értékelnünk a lehetséges alternatívákat. Ennek lépései:

1. probléma definiálása
2. kritériumok megválasztása
3. alternatívák és kritériumok közötti kapcsolatok megadása
4. aggregáció

Vizsgáljuk például a vállalati hitelképességet. Azt nyilván sok szempont határozza meg a bank, hogy egy vállalatnak mekkora a hitelképessége.

Ezeket a szempontokat/kritériumokat jellemezni lehet fuzzy halmazokkal, és alkalmazni lehet rá a fuzzy logikát.

Például adott 30 hitelképességre vonatkozó kritérium, amiket valamilyen hierarchikus struktúra alapján sorba rendezünk. A különböző szintű kritériumstruktúrák elemei kapcsolatát szabályokkal írjuk le. A cash-flow és a dinamikus eladósodás fokát (DEF) különböző nyelvi változókkal tudjuk definiálni:

Cash-flow ráta (%)	Osztályozás	Nyelvi változó
0 - 2,5	5	rossz (rizikós)
2,5 – 5	4	
5 – 7,5	3	közepes
7,5 – 10	2	
10 fölött	1	jó (nem rizikós)

Dinamikus Eladósodás foka (év)	Osztályozás	Nyelvi változó
10 fölött	5	rossz
7,5 – 10	4	
5 – 7,5	3	közepes
2,5 – 5	2	
0 – 2,5	1	jó

Az aggregáló szabályok pedig a következők:

Szabályok	Cash-flow ráta	DEF	Saját erő
1	rossz	rossz	nagyon rossz
2	rossz	közepes	rossz
3	rossz	jó	gyenge közepes
4	közepes	rossz	rossz
5	közepes	közepes	közepes
6	közepes	jó	erős közepes
7	jó	rossz	gyenge közepes
8	jó	közepes	jó
9	jó	jó	nagyon jó

A lényeg, hogy ha az első szinten több kritérium is rendelkezésre áll, akkor párhuzamosan vizsgálja a kritériumokat, végrehajtja a szabályokat, majd a nyelvi változók értékeit folyamatosan aggregálja egy közös értékbe. Mivel sok (30) kritérium van, de adott egy hierarchia, ezért célszerű blokkokban feldolgozni a fuzzy kritériumokat.

Ilyen blokkok lehetnek például:

FB1 input: CF, DEF, forgalom és ösztöke jövedelmezőség

FB1 output: saját erő, jövedelmezőség

FB2 i.: függetlenség szállítóktól/vevőktől, környezetbarát termékek és termelés

FB2 o.: függetlenség, környezetvédelem

FB3 i.: függetlenség, környezetvédelem, jövedelmezőség, termelés, értékesítés

FB3 o.: kapcsolat a környezettel, jövedelem helyzete

.
. .
.

Mint látható, a blokkok egymásra épülnek, így használjuk ki a hierarchiát.

A szabályok működésének vizsgálata:

Vállalat	Cash-flow ráta (%)	DEF (év)
A	5,1	7,4

Az 5,1 %-os Cash-flow ráta a rossz és a közepes nyelvi változóit aktiválja, különböző mértékben. A 7,4 év pedig a közepes és rossz nyelvi változóit. Ha figyelmesen megnézzük a szabályainkat, láthatjuk, hogy ezek a változók az alábbi szabályokat aktiválják egyszerre: { 1, 2, 4, 5 }. A közös eredményt pedig a Saját erő {nagyon rossz, rossz, közepes} nyelvi változók halmazainak együttese adja. Az aktiválás mértékét a nyelvi változók tartalmazási függvényei alakítják. Például ha a Cash-flow ráta 5,1 %-os értéke tagsági függvény értéke 0,45, akkor minden ponton 0,45-tel szorzódik a nyelvi változó görbéje (a szabály konklúziójában). Végül a defuzzifikált eredmény egyetlen értéket ad megoldásnak.

A defuzzifikálás előtti eredmények minden esetben fuzzy halmazok. Jelen példában jól szemléltethetik a vállalatok saját finanszírozási erejét. Az eredmények defuzzifikálással összehasonlíthatóvá válnak.

Például:

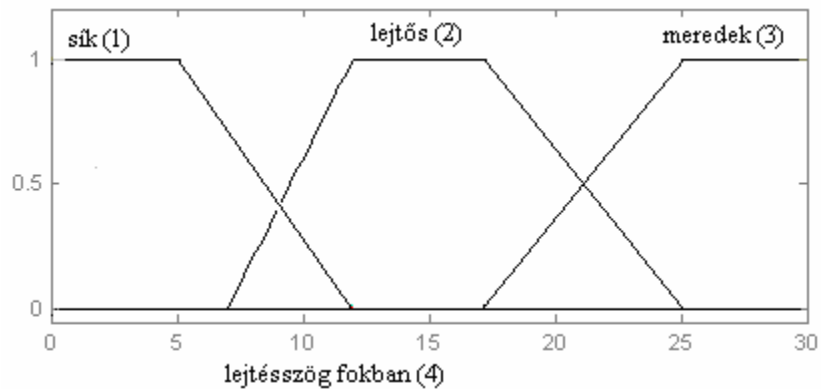
Vállalat	Eredmény nyelvi változókkal	Eredmény
A	rossz/közepes	2,5
B	közepes/jó	4,7
C	jó	5,5

Természetesen ez csak egy részleges eredmény, hiszen csak egy blokkot vizsgáltunk. Azonban ehhez hasonló módon, ha minden blokkra végigcsináljuk a folyamatot, akkor az utolsó blokk adja meg a végeredményt, azaz jelen esetben a hitelképesség mértékét.

6 A földhasználat optimalizálása fuzzy modell használatával

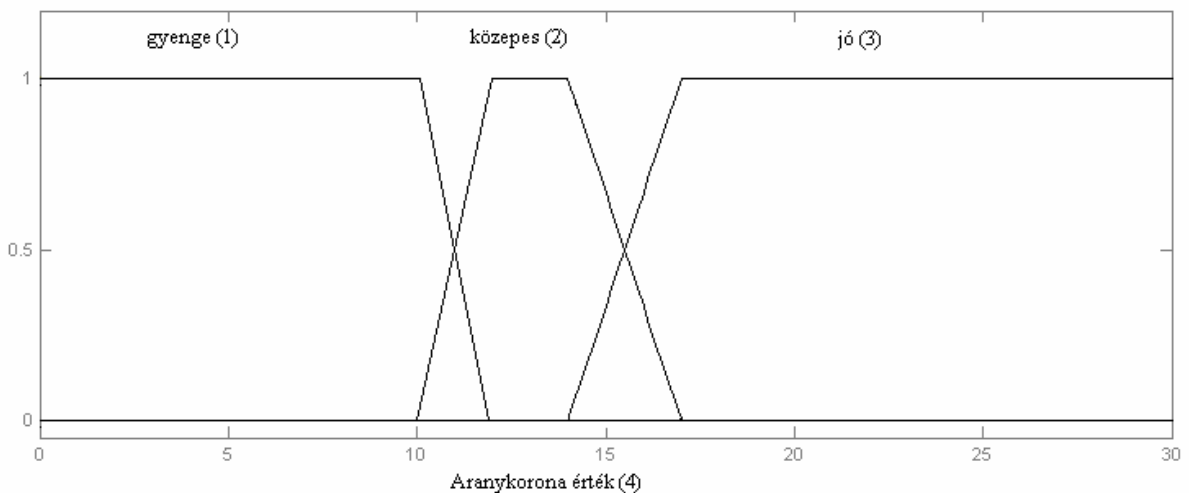
Mint bármely más terület vizsgálata során, úgy itt is nélkülözhetetlen, hogy a vizsgálni kívánt területről pontos és széles körű adatokkal rendelkezünk. Ilyenek az adott terület ökológiai feltételei, illetve azon tényezők, melyek befolyásolják vagy esetlegesen korlátozzák a terület használatát, de ide tartozik a társadalmi, ökológiai – talán még a politikai – környezet is. Ha mindezen adatok birtokában vagyunk, akkor mondhatjuk el, hogy széles körű és pontos adataink vannak az adott területről. Föltehetnénk a kérdést, miszerint miért is szükséges ilyen, vagy ehhez hasonló „térbeli döntési problémák” esetében matematikai modell használata. A válasz nagyon egyszerű. Számos különböző kritérium van, melyek alapján döntést kellene hozni, valamint ehhez társul, hogy térinformatikai eszközökkel általában nehezen megoldhatóak a feladatok. Ezen felül még meg kell említenünk a változatosságot és a bizonytalanságot is, hiszen közel sem egyformák a földterületek és tulajdonságaik. Ezen problémák leküzdésére szolgál a fuzzy, mivel, mint ahogy korábban írtam, tagsági függvényekkel dolgozik. Ez teszi lehetővé, hogy az értékek átmenete fokozatos legyen. Adott egy modell, mely figyelembe veszi a terület lejtésszögét - használatot befolyásoló tényező - és a ráfordítás igényét, a termőföld minőségét (AK), valamint a domborzati viszonyokat. Ehhez társul, hogy nem éles értékekkel van meghatározva az alkalmasság, hanem fuzzy halmazok tagsági függvényeivel. Így nem csak egy adott ágazatra tudjuk vizsgálni az adott terület használhatóságát.

Az alábbi ábrán egy lehetséges meghatározás látható a lejtésszögre vonatkozó tagsági függvények meghatározására.



Mint látható, a tagsági függvények kialakítása trapéz alakú függvényekkel történt. Leolvashatóak az ábráról az egyes típusú területeket meghatározó tagsági függvények töréspontjai, valamint jól látható a tartalmazás mértéke.

Most nézzünk egy lehetséges bekegerezálást a termőföld minőségére vonatkozóan (aranykorona).



Itt is trapéz alakú függvényekként kerültek kialakításra a termőföld minőségére vonatkozó tagsági függvények.

Az aggregáló szabályok:

Szabályok	Lejtés	Minőség	Alkalmasság
1	sík	jó	szántó
2	lejtős	jó	legelő
3	meredek	jó	erdő
4	sík	közepes	legelő
5	lejtős	közepes	legelő
6	meredek	közepes	erdő
7	sík	gyenge	erdő
8	lejtős	gyenge	erdő
9	meredek	gyenge	erdő

Ezután meg kell határoznunk az eredményhez szükséges kimeneti tagsági függvények értékeit. Az alkalmasság megadására egy példa:

Terület	Töréspont	Határ
Erdő	0,3	0,5
Szántó	0,7	1
Legelő	0,3	0,8

A kiértékeléshez a MATLAB nevű programot célszerű használni. A bemenő változókat (lejtésszög, minőség), akár helyrajzi számhoz is köthetjük, így pontosan tudhatjuk, hogy melyik terület milyen besorolást kapott. A kiértékelt eredmény egy szöveges állományba kerül.

A fentiek alapján az eredmény az alábbi 4 kategóriába sorolható:

1. Ha Alkalmasság (A) $\leq 0,3$, akkor Erdő
2. Ha $A > 0,3$ és $A < 0,5$ vagy $A > 0,7$ és $A < 0,8$ akkor Bizonytalan
3. Ha $A \geq 0,5$ és $A \leq 0,7$ akkor Legelő
4. Ha $A \geq 0,8$ akkor Szántó

7 Összefoglaló

A szakdolgozatom témája a fuzzy optimalizálás volt, melynek megismeréséhez először szükséges volt megismernem a fuzzy témakört. Ide tartozik többek közt a fuzzy logika, fuzzy halmazok, és a hozzá kapcsolódó halmazműveletek is.

Megismerkedtem a fuzzy számokkal, valamint az optimalizáció keretein belül a fuzzy környezetbeli közelítő következtetésekkel. További terveim közt szerepel, hogy még inkább megismerjem ezt a témakört, és sikeresen befejezzem másik két társammal az általunk épített quadrocopter vezérlő egységének fuzzy szabályokon alapuló rendszerét, valamint ezen rendszer programkóddá implementálását.

8 Tartalomjegyzék

1	Bevezetés	0
2	Bevezetés a fuzzy környezetbe.....	2
2.1	Bevezetés.....	2
2.2	Igények és motiváció.....	3
2.3	Fuzzy logika	4
2.4	Fuzzy halmazok.....	6
2.5	Műveletek fuzzy halmazokon	10
3	Optimalizálás	13
4	Fuzzy optimalizálás	16
5	Döntési szituációk fuzzy környezetben	22
6	A földhasználat optimalizálása fuzzy modell használatával	26
7	Összefoglaló.....	29
8	Tartalomjegyzék	30
9	Irodalomjegyzék	31

9 Irodalomjegyzék

- Glevitzky Béla, 'Operációkutatás I.', mobiDIÁK könyvtár, 2003
(Copyright © elektronikus közlés)
- © Kovács, Szilveszter, *Fuzzy logic control*, M.Phil. theses, Technical University of Budapest, Faculty of Informatics and Electrical Engineering, Budapest, Branch of Computer Science, p.116, (1993).
- Kóczy T. László, Tikk Domonkos, 'Fuzzy rendszerek', Typotex kiadó, 2012
- Robert Fuller, 'Fuzzy Reasoning and Fuzzy Optimization', TUCS General Publications, No. 9, Turku Centre for Computer Science, Abo, 1998, 270 pages. ° [ISBN 952-12-0283-1, ISSN 1239-1905]
- http://hu.wikipedia.org/wiki/Matematikai_optimaliz%C3%A1s
- http://hu.wikipedia.org/wiki/Line%C3%A1ris_optimaliz%C3%A1s
- <http://people.inf.elte.hu/kiss/12abea/fuzzyism.pdf>